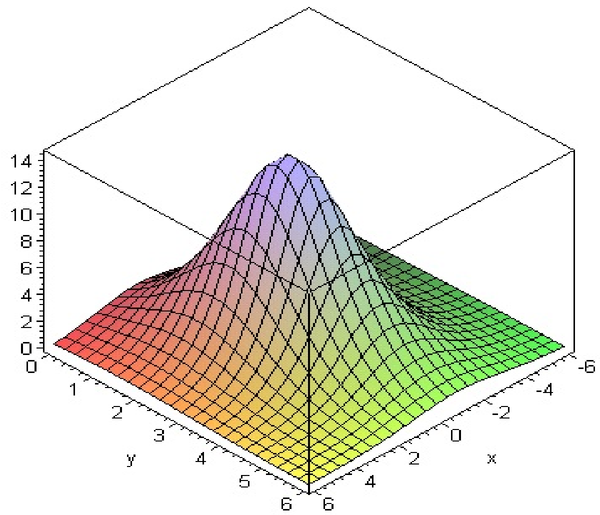
MOGENS ODDERSHEDE LARSEN

Funktioner af flere variable



3. udgave 2016

FORORD

Dette notat giver en kort indføring i, hvorledes man ved anvendelse af passende regnemidler og benyttelse af partielle afledede kan beregne lokale og globale ekstrema for funktioner af flere variable.

Forudsætninger: Der forudsættes et kendskab til differentialregning svarende til pensum i matematik på A- niveau.
(se evt. notatet "Kernestof i Matematik op til A - niveau" der i pdf-format kan findes på adressen www.larsen-net.dk under Matematik 1).

Endvidere et elementært kendskab til matricer .

Regnemidler: Der bliver i eksemplerne vist, hvorledes man kan foretage beregningerne med programmet Maple 16.

For en mere omfattende gennemgang henvises til lærebogen "Bjarne Hellesen, Mogens Oddershede Larsen: Matematik for Ingeniører bind 2. Enkelte eksempler er også hentet herfra.
(Bøgerne kan findes på ovennævnte adresse).

9. april 2017 Mogens Oddershede Larsen

INDHOLD

1 Optimering af funktion af 1 variabel

Funktioner af 1 variabel $y = f(x)$, deres graf i et retvinklet koordinatsystem, differentiation, bestemmelse af lokale ekstrema osv. osv. er velkendt.
Imidlertid vil vi kort repetere hvorledes man bestemmer ekstrema.
Ved et **stationært** punkt forstås et punkt hvor differentialkvotienten er 0, dvs. hvor tangenten til grafen er vandret.
På figur 1.1 er skitseret en funktion, hvor man kan se forskellige stationære punkter.

Man kan endvidere bestemme om et stationært punkt er lokalt maksimumspunkt eller minimumspunkt ved at lave en fortegnsdiskussion af $f'(x)$ (se nederst på figur 1.1)

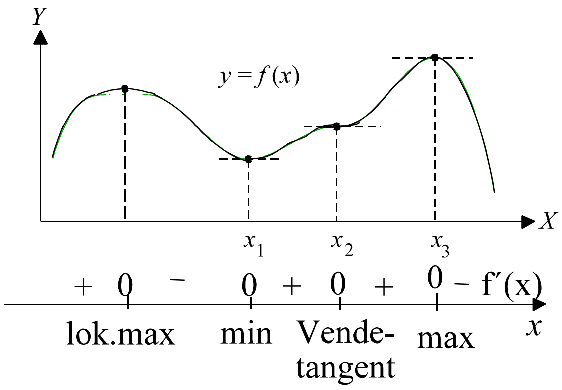


Fig 1.1 *Fortegnsdiskussion for* $f(x)$

Imidlertid kan man som regel også afgøre arten af et stationært punkt ved at betragte de afledede af 2. orden i punktet.
Sætning 1.1
Lad x_0 være et stationært punkt for en funktion f (dvs. $f'(x_0) = 0$).
$f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ er et lokalt minimumspunkt
$f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ er et lokalt maksimumspunkt
$f''(x_0) = 0$ nærmere undersøgelse må foretages
Begrundelse:
Et polynomium af 2. grad som har de samme differentialkvotienter i x_0 er

$$y = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0) \text{ (Taylorpolynomium)}$$

Approksimeres funktionen med dette polynomium i et stationært punkt, hvor f \`(x_0) = 0 bliver polynomiet til et andengradspolynomium. Hvis $f''(x_0) > 0$ vender parablen grenene opad, så der er et minimum x_0. Hvis $f''(x_0) < 0$ vender grenene nedad så der er et maksimum i x_0.

Eksempel 1.1
Find ved hjælp af de anden afledede alle maksimum- og minimumspunkter for funktionen

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 2$$

Løsning
Håndkraft:

$f'(x) = x^2 - x - 6$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$

$f''(x) = 2x - 1$

Da $f''(3) = 5 > 0$ har funktionen et lokalt minimum for x = 3 Minimumspunkt $\left(3, -\frac{23}{2}\right)$

Da $f''(-2) = -5 < 0$ har funktionen et lokalt maksimum for x = -2 Maksimumspunkt $\left(-2, \frac{28}{3}\right)$

Maple
New, Dokument Mode
Man finder de afledede af første og anden grad under menuen Calculus og får facit på samme linie ved at trykke ALT, ENTER.

$f(x) := \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6 \cdot x + 2 = x \rightarrow \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 - 6x + 2$

$solve\left(\frac{d}{dx} f(x, y) = 0, x\right) = 3, -2$

$f(-2) = \frac{28}{3} \quad f''(-2) = -5$ Maksimumspunkt $\left(-2, \frac{28}{3}\right)$

$f(3) = -\frac{23}{2} \quad f''(3) = 5$ Maksimumspunkt $\left(3, -\frac{23}{2}\right)$

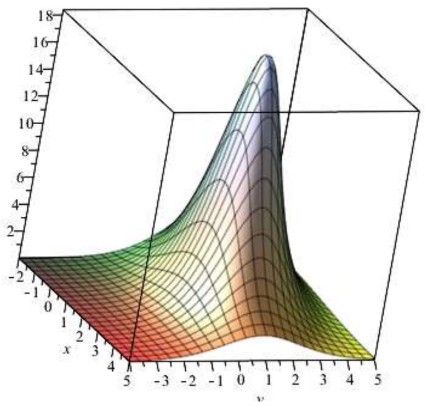
2 Optimering af funktion af 2 variable

2.1 Indledning

Vi vil i dette kapitel se på funktioner af 2 variable $z = f(x, y)$, deres graf i et tredimensionalt koordinatsystem, differentiation og bestemmelse af lokale ekstrema.

2.2. Grafisk fremstilling.

En funktion af 2 variable $z = f(x,y)$ vil grafisk sædvanligvis kunne fremstilles i et rumligt koordinatsystem som en flade med "bakker" og "dale".
På figur 2.1 er der vist en funktion med et lokalt maksimum tegnet ved hjælp af Maple.



Figur 2.1 *Graf for funktionen* $f(x,y) = 100 \cdot e^{-\sqrt{(x-2)^2 + 2(y-2)^2 + xy}}$

Tools ▶Load Package ▶Plots

Loading plots

Skriv $plot3d\left(100 \cdot e^{-\sqrt{(x-2)^2 + 2\cdot(y-2)^2 + x\cdot y}}, x=-2..5, y=-4..5\right)$

Tryk på figuren og drejer den rundt til den ser godt ud

På figur 2.2 er der tegnet en funktion med et saddelpunkt og "højdekurver" tegnet ved hjælp af Maple (disse begreber defineres mere præcist i et senere kapitel

Loading plots

Skriv plot3d((x-2)^2-(y-3)^2-x·y+10,x=-5..10,y=-5..10), tryk på figuren og ændre den

Højdekurver:

$$contourplot\left((x-2)^2 - (y-2)^2 - x\cdot y + 10, x=-5..10, y=-5..10, contours=20\right)$$

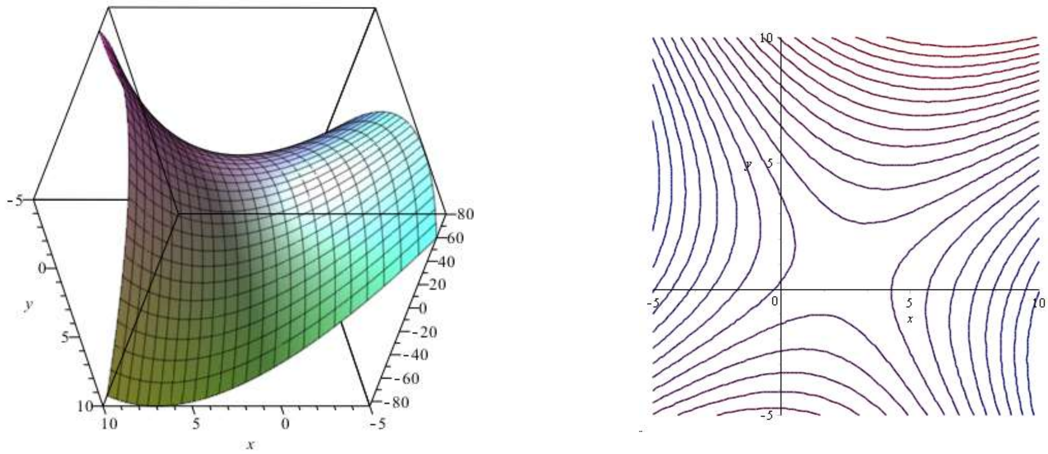


Fig. 2.2. Graf for funktionen $h(x,y)=(x-2)^2-(y-3)^2-xy+10$

Sædvanligvis er det alt for besværligt at tegne en rumlig flade, som klart viser hvor der er et minimum- eller et maksimum. Uden de følgende beregninger ved man jo heller ikke hvor et sådant punkt er beliggende.

2.3 Partiel differentiation

Hvis man for funktionen $z = f(x,y)$ holder y konstant på værdien y_0, så vil $f(x,y_0)$ være en funktion af én variabel x.
Er denne funktion differentiabel, så kan man på sædvanlig måde finde dens aflede funktion.
Denne kaldes ***f*'s partielle afledede** med hensyn til x og skrives $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)$ eller $f_x(x,y_0)$.

Tilsvarende defineres ***f*'s partielle afledede** $\frac{\partial f}{\partial y}$ med hensyn til y .

Tegnet ∂ læses "blødt d" og markerer, at funktionen har flere variable. Dette indebærer nemlig, at $\frac{\partial f}{\partial x}$ (i modsætning til $\frac{d f}{d x}$) ikke uden videre kan opfattes som en brøk i beregninger.

Eksempel 2.1. Partiel differentiation

Lad funktionen f være givet ved $f(x,y)=\frac{1}{4}x^2\cdot y^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x$

a) Find de to partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$

b) Find $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$.

Løsning:

a) Idet vi opfatter f som en funktion af x alene, dvs. opfatter y som en konstant, fås umiddelbart

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{2}x\cdot y^2+0+\frac{1}{2}$$ Tilsvarende fås $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{2}x^2\cdot y+y$$

b) Ved indsættelse af $(x,y) = (0.1)$ fås $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)=\frac{1}{2}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=1$

Maple

$f(x,y) := \frac{1}{4}\cdot x^2\cdot y^2+\frac{1}{2}\cdot y^2+\frac{1}{2}\cdot x = (x,y)\to\frac{1}{4}x^2y^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x$

$\left.\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right|_{x=0,\,y=1} = \frac{1}{2}$ Symbolet findes under Expression.

Man får facit på samme linie hvis man vælger ALT , Enter

Såfremt det af sammenhængen klart fremgår, hvilket punkt (x,y) der er tale om, udelades det ofte af betegnelserne, således at man kun skriver $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$

Andre skrivemåder.

I stedet for $\frac{\partial f}{\partial x}$ skrives ofte f'_x eller $\frac{\partial z}{\partial x}$ når $z = f(x,y)$.

Undertiden skrives $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ hvor der forneden er angivet, hvad de andre variable er. Eksempelvis kan energien E af en gas enten opfattes som en funktion af tryk og rumfang eller som en funktion af tryk og temperatur. Derfor ville $\frac{\partial E}{\partial P}$ være et tvetydigt symbol, mens $\left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_V$ og $\left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_T$ er entydige.

2.4. Geometrisk tolkning af partielle afledede, tangentplan

De partielle afledede kan som anskueliggøres i eksempel 2.4 geometrisk tolkes som hældnings-koefficienter til tangenter.

Eksempel 2.2. Geometrisk betydning af partielle afledede.

På fig. 2.3 er tegnet grafen for $f(x,y)=\frac{1}{4}x^2\cdot y^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x$ for $0\le x\le 1$ og $1\le y\le 2$

På figuren er k_1 skæringskurven mellem planen $y = 1$ og grafen for f mens k_2 er skæringskurven mellem planen $x = 0$ og grafen for f.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ er hældningskoefficienten af tangenten T_x til kurven k_1 for (x,y) = (0,1)

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$ er hældningskoefficienten af tangenten T_y til kurven k_2 for (x,y) = (0,1).

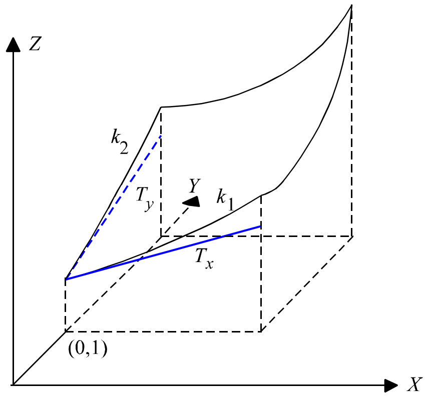


Fig. 2.3. *De to partielle differentialkvotienter i* $(0,1)$ *er hældnings koefficienterne for tangenterne* T_x *og* T_y.

Tangentplan

Lad funktionen f være differentiabel i et punkt (x_0, y_0) og lad $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Lad k_1 være skæringskurven mellem planen $y = y_0$ og grafen for ***f***, og T_x være tangenten til k_1 med røringspunkt i (x_0, y_0).

Tilsvarende er k_2 er skæringskurven mellem planen $x = x_0$ og grafen for f og T_y er tangenten til k_2.

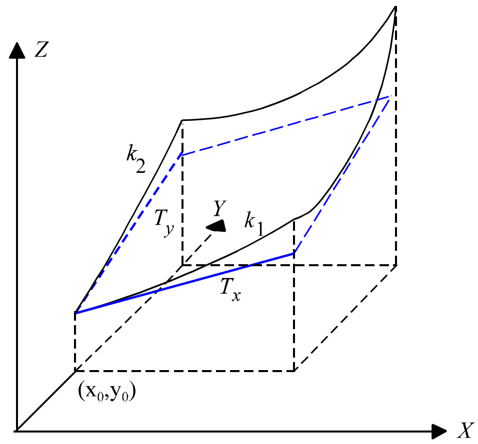


Fig. 2.4. *Tangentplan i* (x_0, y_0)

Den plan, som er bestemt ved tangenterne T_x og T_y kaldes **tangentplanen** for grafen for f i punktet (x_0, y_0).

Ligningen for tangentplan $\boxed{z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot(y - y_0)}$

Bevis:

Lad for kortheds skyld $f_x' = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ og $f_y' = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

Da f_x' er hældningskoefficienten for tangenten T_x til kurven k_1 har en retningsvektor for T_x koordinaterne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x' \end{pmatrix}$

Tilsvarende er $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y' \end{pmatrix}$ retningsvektor for T_y. En normalvektor til tangentplanen er følgelig $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_x' \\ -f_y' \\ 1 \end{pmatrix}$

Planens ligning bliver derfor $-f_x' \cdot (x - x_0) - f_y' \cdot (y - y_0) + 1 \cdot (z - z_0) = 0$

Eksempel 2.3. Tangentplan

Lad der være givet funktionen $f(x,y)=\frac{1}{4}x^2\cdot y^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x$.
Find ligningen for tangentplanen til funktionen *f* i punktet (0,1).
Løsning:

I eksempel 2.1 fandt man for funktionen $f(x,y)=\frac{1}{4}x^2\cdot y^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x$ at $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)=\frac{1}{2}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=1$. Idet $f(0,1)=\frac{1}{2}$ fås ligningen: $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(x-0)+1\cdot(y-1)\Leftrightarrow \underline{\underline{z=\frac{1}{2}x+y-\frac{1}{2}}}$

◆

2.5. Partielle afledede af højere orden.

Har *f* partielle afledede af første orden i definitionsmængden *D*, kan $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ igen opfattes som funktioner af to variable i *D*. Hvis disse nye funktioner selv har partielle afledede, siges *f* at have **partielle afledede af anden orden** i *D*. Disse skrives

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ og } \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

For de to sidste "blandede" afledede gælder, at de "sædvanligvis"[1] er ens, dvs. $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$

Eksempel 2.4. Partielle afledede af anden orden

I eksempel 2.1 fandt man for funktionen $f(x,y)=\frac{1}{4}x^2\cdot y^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x$ de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{2}x\cdot y^2+\frac{1}{2} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{2}x^2\cdot y+y$$

a) Find de partielle afledede af anden orden for funktionen *f*.
b) Find værdierne af ovennævnte partielle afledede i punktet $(x,y)=(1,2)$.

Løsning:

a) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}x^2y+y\right)=x\cdot y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x^2y+y\right)=\frac{1}{2}x^2+1$$

Da de blandede anden aflede er ens, er det unødvendigt at beregne den anden kombination

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)=\frac{3}{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(1,2)=2$,

[1]Dette gælder for alle funktioner som er dannet af de sædvanlige stamfunktioner

Maple:

a)

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} f(x,y) = x\,y$$

b)

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} f(x,y)\right|_{x=1,\,y=2} = 2$$

Symbolikken findes under “Expression” og “Calculus”

Analogt defineres partielle afledede af højere end anden orden, og også for disse kan differentiationernes rækkefølge normalt vælges vilkårligt, f.eks.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x^2}$$

2.6. Stationære punkter

Lad P_0 være et indre punkt i definitionsmængden D for en funktion f og $M \subset D$ være en omegn af P_0. Hvis $f(P_0) \le f(P)$ for alle punkter P i M, så kaldes denne værdi for f‘s **lokale minimum**, og P_0 for et lokalt minimumspunkt.
Hvis $f(P_0) \ge f(P)$ for alle punkter P i M, så kaldes denne værdi for f‘s **lokale maksimum**,
Ved et **lokalt ekstremum** forstås enten et lokalt maksimum eller et lokalt minimum.

Er $f(P_0) \le f(P)$ for alle punkter P i definitionsmængden D, så kaldes denne værdi for f‘s globale minimum eller **mindsteværdi**, og er $f(P_0) \ge f(P)$ for alle punkter P i definitions-mængden D, så kaldes denne værdi for f‘s globale maksimum eller **størsteværdi**.

Nedenstående figur leder os ind på, at det som et led i ekstremumsbestemmelser kan være nyttigt at se på punkter, hvor grafen har "vandret tangentplan" - såkaldte stationære (eller kritiske) punkter.

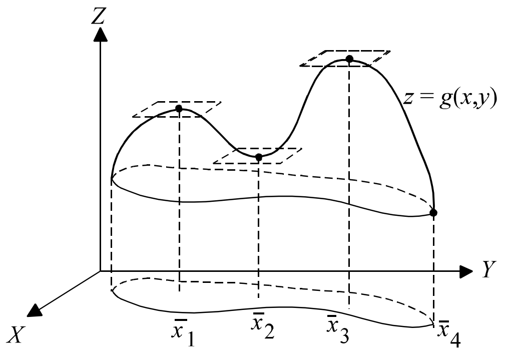


Fig 2.5. *Stationære punkter*

På figuren har *g(x,y)* vandret tangentplan i $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ og $\bar{x}_3$, globalt maksimum i $\bar{x}_3$ og globalt minimum i $\bar{x}_4$.

For differentiable funktioner af 2 variable vil man derfor se på de punkter hvor funktionen *f* har vandret tangentplan, dvs. hvor de partielle afledede er 0.

Definition af stationært punkt.
Lad *f* være en differentiabel funktion af 2 variable med definitionsmængde *D*.
Et indre punkt (x_0, y_0) i *D* kaldes et stationært punkt for *f*, hvis

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Eksempel 2.5 Stationære punkter.

En funktion f er givet ved $f(x,y) = x^4 + 2x^2 - 2x^2 y + \frac{4}{5}y^2$

Find de stationære punkter for *f*.
Løsning:
Håndregning:
De stationære punkter for f findes af ligningssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 4x - 4xy = 0 & (1) \\ -2x^2 + \dfrac{8}{5}y = 0 & (2) \end{cases}$$

Af ligning (2) fås $y = \frac{10}{8}x^2 \Leftrightarrow y = \frac{5}{4}x^2$ (3) .
Indsættelse i ligning(1) giver:

$$4x^3 + 4x - 4\frac{10}{8}x^2 \cdot x = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 2$$

Tilfælde 1: Indsættes $x = 0$ i ligning (3), fås y=0 Stationært punkt: $\underline{\underline{(x, y) = (0,0)}}$

Tilfælde 2: Indsættes x = 2 i ligning (3), fås y = 5 Stationært punkt: $\underline{\underline{(x, y) = (2,5)}}$

Tilfælde 2: Indsættes x = -2 i ligning (3), fås y = 5 Stationært punkt: $\underline{\underline{(x, y) = (-2,5)}}$

Maple:

$f(x,y) := x^4 + 2\cdot x^2 - 2\cdot x^2\cdot y + \frac{4}{5}\cdot y^2 = (x,y) \to x^4 + 2x^2 - 2x^2 y + \frac{4}{5}y^2$

$solve\left(\left\{\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = 0, \frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = 0\right\}, \{x,y\}\right) = \{x = 0, y = 0\}, \{x = 2, y = 5\}, \{x = -2, y = 5\}$

$\underline{\underline{(x, y) = (0,0) \vee (x, y) = (2,5) \vee (x, y) = (-2,5)}}$ ◆

:

2.7. Taylorpolynomium

Skal man skaffe sig et overblik over en funktions "udseende", kan det være nødvendigt at se på kende arten af de stationære punkter, dvs. vide om de er lokale maksima, minima eller såkaldte saddelpunkter.

Som for en funktion af 1 variabel kunne vi bestemme arten af det stationære punkt ved at tilnærme funktionen med et andengradspolynomium .
Den samme teknik benyttes nu ved at tilnærme en funktion i 2 variable med et andengradspolynomium, som har samme partielle afledede af første- og anden-orden som funktionen i et punkt (a,b) .

Taylorpolynomium af 2. orden

Definition
Lad en funktion f(x,y) have kontinuerte partielle afledede af vilkårlig orden i et punkt (x_0,y_0).
Idet de partielle afledede i punktet kort skrives $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$, $f''_{xx}(x_0,y_0)$, $f''_{yy}(x_0,y_0)$, $f''_{xy}(x_0,y_0)$ forstås ved et Taylorpolynomium af anden orden polynomiet

$$T(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left(f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-x_0)\right)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + 2\cdot f''_{xy}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0) + f''_{yy}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\right)$$

Det ses umiddelbart ved differentiation, at f(x,y) og T(x,y) har samme partielle afledede af anden orden.

Er (x_0,y_0) et stationært punkt går Taylorpolynomiet over i

$$T(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + 2\cdot f''_{xy}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0) + f''_{yy}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\right)$$

Eksempel 2 .6 Taylorpolynomium

I eksempel 2.5 fandt vi, at funktionen $f(x,y) = x^4 + 2x^2 - 2x^2y + \frac{4}{5}y^2$ havde de stationære punkter (0,0) og (2;5) og (-2,5)

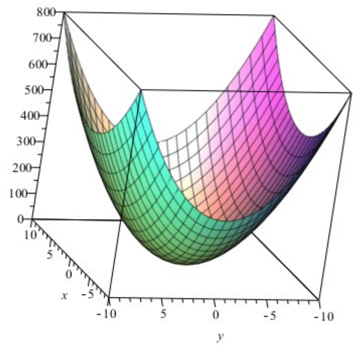
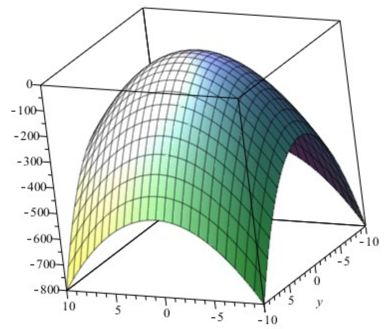
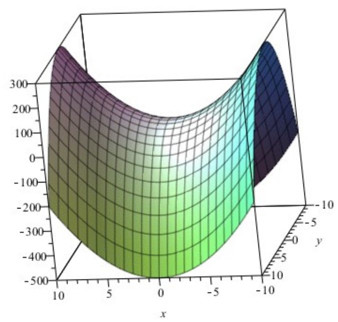
Idet de anden afledede er $f''_{xx} = 12x^2 + 4 - 4y$, $f''_{yx} = -4x$, $f''_{yy} = \frac{8}{5}$, fås

nr		f	f''_{xx}	f''_{xy}	f''_{yy}	Taylorpolynomium
1	(0,0)	0	4	0	$\frac{8}{5}$	T(x,y)= $4x^2 + \frac{8}{5}xy$
2	(2,5)	4	32	-8	$\frac{8}{5}$	T(x,y) = $4 + 32(x-2)^2 - 8(x-2)(y-5) + \frac{8}{5}(y-2)^2$
3	(-2,5)	4	32	8	$\frac{8}{5}$	T(x,y) = $4 + 32(x-2)^2 + 8(x-2)(y-5) + \frac{8}{5}(y-2)^2$

2.8 Bestemmelse af arten af et stationært punkt

Hvis man er så heldig, at den blandede anden afledede er 0, kan man umiddelbart bestemme om det stationære punkt er et lokalt maksimum, minimum eller et saddelpunkt.
Havde eksempelvis polynomiet været $T(x,y) = 10 + 3\cdot(x-2)^2 + 5\cdot(y+1)^2$
kan vi ved at sætte $x_1 = x-2$ $y_1 = y+1$ og $z = T(x,y) - 10$ omskrive polynomiet til $z = 3\cdot x_1^2 + 5\cdot y_1^2$
Heraf ses, at da de to parabler vender grenene opad, så har funktionen minimum i (2,-1)
Analogt ses, at hvis polynomiet har negative koefficienter har funktionen et maksimum i det stationære punkt.
Endelig ses, at hvis det koefficienterne har forskelligt fortegn, så vil den ene parabel vende grenene opad og den anden vende grenene nedad, hvilket medfører, at funktionen har et saddelpunkt i det stationære punkt (de 3 figurer illustrerer dette).

$plot3d(3\cdot x^2 + 5\cdot y^2, x = -10..10, y = -10..10)$ $plot3d(-3\cdot x^2 - 5\cdot y^2, x = -10..10, y = -10..10)$ $plot3d(3\cdot x^2 - 5\cdot y^2, x = -10..10, y = -10..10)$

Problemet er nu, at hvis T(x,y) indeholder et produktled som i eksempel 2.4 , så kan man ikke umiddelbart angive arten af det stationære punkt.
For at kunne finde ud af det, må man skifte variable på en sådan måde, at polynomiet omskrives i det nye koordinatsystem til et polynomium uden produktled.
Hvis koefficienterne så begge er positive har funktionen et minimum, er koefficienterne negative har polynomiet et maksimum, mens forskelligt fortegn giver et saddelpunkt.
Følgende sætning finder koefficienterne.

Sætning 1.1 (undersøgelse af arten af et stationært punkt).

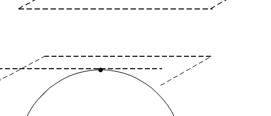
Lad (x_0, y_0) være et stationært punkt for en differentiabel funktion *f*, og sæt

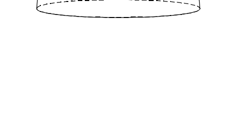
$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x_0, y_0) \quad \text{og} \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

Lad determinantligningen $\begin{vmatrix} A-z & B \\ B & C-z \end{vmatrix} = 0$ have rødderne z_1 og z_2

Der gælder da

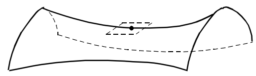
1) z_1 og z_2 begge positive: *f* har lokalt minimum i (x_0, y_0)





2) z_1 og z_2 begge negative: *f* har lokalt maksimum i (x_0, y_0)

3) z_1 og z_2 har forskelligt fortegn: f har saddelpunkt i (x_0, y_0)



3) $z_1 = 0$ eller $z_2 = 0$: Nærmere undersøgelse må foretages.

Tallene z_1 og z_2 kaldes "egenværdierne" i matricen H=$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$

H kaldes Hessian matricen (eller Hess-matricen)

Bevis (for kortheds skyld er en detaljeret forklaring på visse påstande anbragt sidst i beviset)

For nemheds skyld antages, at f har det stationære punkt (0,0), og at f(0,0) = 0 , hvorved Taylorpolynomiet af anden grad bliver $A \cdot x^2 + 2 \cdot B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2$ (se evt. forklaring 1) hvor B ≠ 0

Polynomiet omskrives nu til matrixformen

$(x, y) \cdot H \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ hvor $H = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ (se evt. forklaring 2)

Vi ønsker nu at dreje koordinatsystemet til en position, så produktleddet forsvinder.

Vi får (se evt. forklaring 3) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & -q_2 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, eller kort $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

Idet $(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T$ (transformeret) fås $(x, y) \cdot H \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(Q \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right)^T H \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

Idet $\left(Q \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}^T Q^T$ (se evt. forklaring 4) haves $(x_1, y_1) \cdot Q^T H \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

Vi ønsker nu, at vi kan finde Q, så $Q^T \cdot H \cdot Q = D$ hvor D er en diagonalmatrix D=$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$

Da $Q^T = Q^{-1}$ (se evt. forklaring 5) haves $Q^{-1} \cdot H \cdot Q = D \Leftrightarrow H \cdot Q = Q \cdot D$

$$H \cdot Q = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 & -q_2 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot q_1 + B \cdot q_2 & -A \cdot q_2 + B \cdot q_1 \\ B \cdot q_1 + C \cdot q_2 & -B \cdot q_2 + C \cdot q_1 \end{pmatrix}$$

$$Q \cdot D = \begin{pmatrix} q_1 & -q_2 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \cdot d_1 & -q_2 \cdot d_2 \\ q_2 \cdot d_1 & q_1 \cdot d_2 \end{pmatrix}$$

Da to matricer kun er ens, hvis de tilsvarende elementer er ens, har vi

$$\begin{matrix} A \cdot q_1 + B \cdot q_2 = q_1 \cdot d_1 & -A \cdot q_2 + B \cdot q_1 = -q_2 \cdot d_2 \\ B \cdot q_1 + C \cdot q_2 = q_2 \cdot d_1 & -B \cdot q_2 + C \cdot q_1 = q_1 \cdot d_2 \end{matrix} \qquad (1)$$

Betragtes første søjle i (1) fås ligningssystemet $\begin{cases} (A - d_1) \cdot q_1 + B \cdot q_2 = 0 \\ B \cdot q_1 + (C - d_1) \cdot q_2 = 0 \end{cases}$

Hvis ligningssystemets determinant $\begin{vmatrix} A - d_1 & B \\ B & C - d_1 \end{vmatrix} \neq 0$ har ligningssystemet kun en løsning $q_1 = 0 \quad q_2 = 0$

Da vi ønsker, at finde en egentlig løsning, må determinanten være 0

Vi må derfor have, at $\begin{vmatrix} A - d_1 & B \\ B & C - d_1 \end{vmatrix} = 0$

Det andet ligningssystem i (1) har en determinantligning, der har de samme rødder (se evt. forklaring 6)

Determinantligningen har 2 forskellige rødder d_1 og d_2 (se evt. forklaring 7)

De to værdier d_1 og d_2 kaldes egenværdier for matricen H .

Vi har dermed fået Taylorpolynomiet omformet til en ligning uden produktled, og kan så ud fra fortegnet for d_1 og d_2 bestemme arten af lokalt ekstrema. Sætningen er dermed bevist.

Forklaring 1

Idet de partielle afledede af første orden er 0 i det stationære punkt bliver Taylorpolynomiet

T(x,y) = $f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2+2\cdot f''_{xy}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0)+f''_{yy}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\right)$

Indsættes A, B og C samt sættes $x_1=x-x_0$, $y_1=y-y_0$ og $z=T(x,y)\_f(x_0,y_0)$ går polynomiet over i

$z=\frac{1}{2}(A\cdot x_1^2+2\cdot B\cdot x_1\cdot y_1+C\cdot y_1^2)$

Forklaring 2.

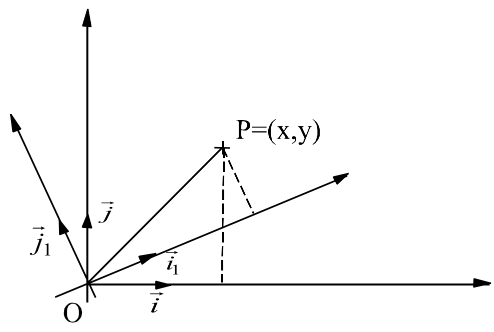
$(x,y)\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}=(A\cdot x+B\cdot y, B\cdot x+C\cdot y)$ og

$(A\cdot x+B\cdot y, B\cdot x+C\cdot y)\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A\cdot x^2+B\cdot xy+B\cdot xy+C\cdot y^2=A\cdot x^2+2B\cdot xy+y^2$

Forklaring 3

Lad basisvektorerne i det drejede koordinatsystem have koordinaterne $\vec{i}_1=\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\end{pmatrix}$ og $\vec{i}_1=\begin{pmatrix}-q_2\\ q_1\end{pmatrix}$

Lad punktet P have koordinaterne (x,y) i det oprindelige koordinatsystem og koordinaterne (x_1,y_1) i det drejede koordinatsystem (se figuren).



Vi har da, at vektoren $\vec{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}=x_1\vec{i}_1+y_1\vec{j}_1$

eller $x\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-q_2\\ q_1\end{pmatrix}$

Heraf fås $x=x_1q_1-x_2q_2$ $y=x_1q_2+x_2q_1$

Omskrives til matrixform haves $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_1 & -q_2\\ q_2 & q_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

Forklaring 4

$\left(Q\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ y1\end{pmatrix}\right)^T=\left(\begin{pmatrix}q_1 & -q_2\\ q_2 & q_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\right)^T=\begin{pmatrix}q_1x_1-q_2x_2\\ q_2x_1+q_1x_2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}^T Q^T=(x_1,y_1)\begin{pmatrix}q_1 & q_2\\ -q_2 & q_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1q_1-y_1q_2\\ x_1q_2+y_1q_1\end{pmatrix}$

Heraf ses, at $\left(Q\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ y1\end{pmatrix}\right)^T=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}^T Q^T$

Forklaring 5

$Q\cdot Q^T=\begin{pmatrix}q_1 & -q_2\\ q_2 & q_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1 & q_2\\ -q_2 & q_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_1^2+q_2^2 & q_1q_2-q_2q_1\\ q_2q_1-q_1q_2 & q_2^2+q_1^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$ hvor E er en enhedsmatrix.

Analogt ses, at $Q\cdot Q^T=E$. Heraf følger, at $Q^T=Q^{-1}$.

Forklaring 6

$\begin{cases}-A\cdot q_2+B\cdot q_1=-q_2\cdot d_2\\ -B\cdot q_2+C\cdot q_1=q_1\cdot d_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(A-d_2)q_2-B\cdot q_1=0\\ -B\cdot q_2+(C-d_2)q_1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}A-d_2 & -B\\ -B & C-d_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\end{pmatrix}$

Determinanten bliver den samme. da $-B\cdot(-B)=B\cdot B=B^2$

Forklaring 7

$\begin{vmatrix}A-d_1 & B\\ B & C-d_1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(A-d_1)(C-d_1)-B^2=0\Leftrightarrow d_1^2-(A+C)\cdot d_1+AC-B^2=0$

Andengradsligningen har diskriminanten

$(A+C)^2-4\cdot(AC-B^2)=A^2+C^2+2AC-4AC+4B^2=(A-B)^2+4B^2$

Da B $\neq$ 0, er diskriminanten positiv og ligningen har derfor altid 2 forskellige rødder.

Eksempel 2.7. Lokale ekstrema

I eksempel 2.5 fandt man at de stationære punkter for funktionen *f* givet ved

$$f(x,y) = x^4 + 2x^2 - 2x^2 y + \frac{4}{5}y^2$$

var (x,y) = (0,0) , (x,y) = (2,5) og (x,y) = (-2,5)

Afgør for hver af ovennævnte stationære punkter, om det er et lokalt maksimumspunkt, lokalt minimumspunkt eller saddelpunkt.

Løsning:

For overblikkets skyld benyttes 2 metoder til bestemmelsen.

Håndregning:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 4x - 4xy \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 4 - 4y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2 + \frac{8}{5}y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{8}{5} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \frac{8}{5} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4-z & 0 \\ 0 & \frac{8}{5}-z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (4-z)\left(\frac{8}{5}-z\right) = 0 \Leftrightarrow z = \begin{cases} 4 \\ \frac{8}{5} \end{cases}$$

<u>Minimum i (0,0)</u>

Determinantmetode:

$$f(x,y) := x^4 + 2\cdot x^2 - 2\cdot x^2\cdot y + \frac{4}{5}\cdot y^2 = (x,y) \to x^4 + 2x^2 - 2x^2 y + \frac{4}{5}y^2$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y)\right|_{x=2,\,y=5} = 32 \qquad \left.\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} f(x,y)\right|_{x=2,\,y=5} = -8 \qquad \left.\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)\right|_{x=2,\,y=5} = \frac{8}{5}$$

$$\begin{bmatrix} 32-z & -8 \\ -8 & \frac{8}{5}-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32-z & -8 \\ -8 & \frac{8}{5}-z \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{determinant}} -\frac{64}{5} - \frac{168}{5}z + z^2$$

$$solve\left(-\frac{64}{5} - \frac{168}{5}z + z^2 = 0.0, z\right) = 33.97672844, -0.3767284429$$

<u>Saddelpunkt i (2,5)</u>

Egenværdimetode:

$$\begin{bmatrix} 32 & 8 \\ 8 & \frac{8}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{eigenvalues}} \begin{vmatrix} \frac{84}{5} + \frac{4}{5}\sqrt{461} \\ \frac{84}{5} - \frac{4}{5}\sqrt{461} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} \begin{bmatrix} 33.977 \\ -0.377 \end{bmatrix}$$

<u>Saddelpunkt i (-2,5)</u>

◆

2.9 Globalt ekstrema

Ved optimeringsproblemer er man interesseret i at finde et globalt ekstremum for et konkret problem.
Følgende eksempel illustrerer fremgangsmåden, som jo er nært beslægtet med de tilsvarende problemer for funktion af 1. variabel.

Eksempel 2.8. Optimering

En retvinklet kasse uden låg skal have et rumfang på 32m^3. Kassen skal konstrueres således, at dens overflade bliver mindst (mindst materialeforbrug).
Find kassens optimale dimensioner.

Løsning:

1) **Optimeringsproblemet opstilles.**
Lad længde, bredde og højde af kassen være x, y og z. Vi har da
Find det globale minimum (mindsteværdi) for funktionen $g(x,y,z) = 2xz + 2yz + xy$ i mængden S givet ved begrænsningen
$xyz = 32, \quad , \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0$.

2) **Problemet reduceres**.
Begrænsningsligningen benyttes til at reducere antallet af variable.
$xyz = 32 \Leftrightarrow z = \frac{32}{xy}$. Ved indsættelse af $z = \frac{32}{xy}$ i g og de øvrige begrænsninger fås

$$2x\frac{32}{xy} + 2y\frac{32}{xy} + xy = \frac{64}{y} + \frac{64}{x} + xy,$$

$$x > 0, \quad y > 0, \quad \frac{32}{xy} > 0.$$

Problemet kan derfor nu reduceres til
Find det globale minimum (mindsteværdi) for funktionen $f(x,y) = \frac{64}{x} + \frac{64}{y} + xy$ i mængden S_1 givet ved begrænsningerne $0 < x, \ 0 < y$ (1. kvadrant)

3) De mulige ekstremumspunkter bestemmes.

$$f(x,y) := \frac{64}{x} + \frac{64}{y} + x \cdot y = (x,y) \to \frac{64}{x} + \frac{64}{y} + x\,y$$

$$solve\left(\left\{\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0, \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0\right\}, \{x,y\}\right) = \{x = 4, y = 4\}, \{x = 4\,RootOf(\_Z^2 + \_Z + 1), y = 4\,RootOf(\_Z^2 + \_Z + 1)\}$$

Da vi kun skal have reelle løsninger har vi fundet 1 stationært punkt (4,4)

4) Vurdering af, at det stationære punkt er et globalt minimumspunkt

$$\left.\frac{d^2}{dx^2} f(x,y)\right|_{x=4,\, y=4} = 2 \qquad \left.\frac{d^2}{dy^2} f(x,y)\right|_{x=4,\, y=4} = 2 \qquad \left.\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} f(x,y)\right|_{x=4,\, y=4} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{eigenvalues}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Heraf ses, at funktionen har et lokalt minimum i punktet (4,4).

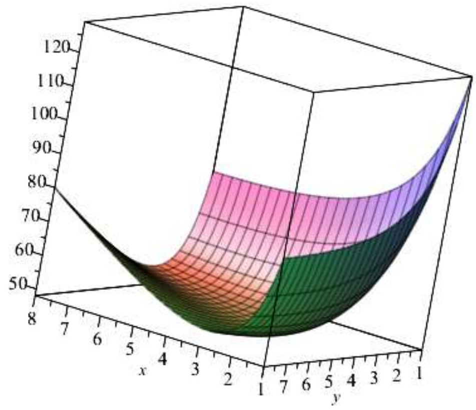
At det også er et globalt minimumspunkt synes rimeligt, da det er det eneste stationære punkt i definitionsmængden.

Endvidere ses at $x \to 0 \vee y \to 0 \vee x \to \infty \vee y \to \infty$ så går $f(x, y) \to \infty$

Anvendes Maple til at tegne funktionen fås følgende tegning:

Loading plots

$$plot3d\left(\frac{64}{x} + \frac{64}{y} + x \cdot y, x = 1..8, y = 1..8\right)$$



Heraf ses, at funktionen har globalt minimum i (4,4) .

<u>Dimensionerne er x = 4 m, y = 4 m og z = 64 m</u>

3. Optimering for funktioner af mere end 2 variable

De definitioner og begreber som er gælder for funktioner af 2 variable kan umiddelbart generaliseres til funktioner af 3 og flere variable.

Grafisk fremstilling

Grafen for en funktion af 3 variable $f(x,y,z)$ kan naturligvis ikke tegnes i et 4-dimensionalt rum. Derimod er det muligt at tegne en niveauflade hvor $f(x,y,z)$ har en konstant værdi *k*. Eksempelvis er en såkaldt orbital eller bølgefunktion $\Psi(x,y,z)$ for et atom anskueliggjort ved en niveauflade for $|\Psi|$ på figur 3.1. (Orbitaler spiller en stor rolle for forståelsen af atomers og molekylers egenskaber).

Et andet eksempel er nogle kugleformede niveauflader for tyngdepotentialet $\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ omkring jorden vist på figur 3.2.

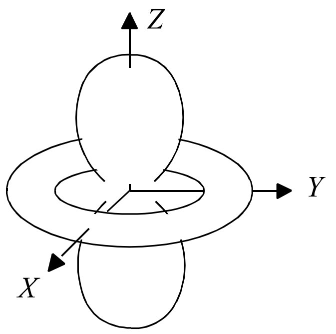


Fig. 3.1. *Niveauflade for en atomorbital* $\Psi(x,y,z)$

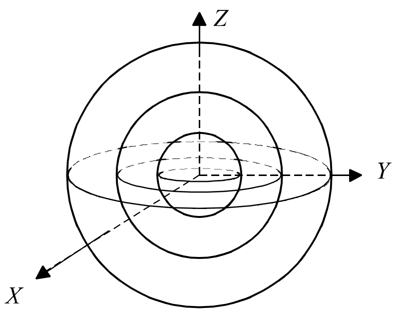


Fig. 3.2. *Niveauflader for tyngdepotentialet omkring jorden*

For at finde et lokalt ekstremum er beregningerne ganske analogt med de for 2 variable.

Definition af stationært punkt.

Lad *f* være en differentiabel funktion f (x,y,z) af 3 variable med definitionsmængde *D*.
Et indre punkt (x_0, y_0, z_0) i *D* kaldes et stationært punkt for *f*, hvis

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Sætning 3.1 Lokalt ekstremum for funktion af 3 variable

Lad $\bar{a} = (x_0, y_0, z_0)$ være et stationært punkt for en differentiabel funktion f af 3 variable.

Lad H være matricen $H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\bar{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\bar{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\bar{a}) \end{bmatrix}$

Lad H have egenværdierne u_1, u_2 og u_3.

Der gælder da

1) u_1, u_2 og u_3 alle positive: f har lokalt minimum i $\bar{a} = (x_0, y_0, z_0)$
2) u_1, u_2 og u_3 alle negative: f har lokalt maksimum i $\bar{a} = (x_0, y_0, z_0)$
3) u_1, u_2 og u_3 har ikke samme fortegn: f har intet lokalt ekstremum i $\bar{a} = (x_0, y_0, z_0)$
4) Hvis én eller flere af rødderne u_1, u_2 og u_3 er 0 og de øvrige har samme fortegn, : Nærmere undersøgelse må foretages.

Eksempel 3.1. Lokale ekstrema for funktion af 3 variable

Lad funktionen f være bestemt ved $f(x,y,z) = e^{x^2+2y^2+z^2-4x-12y-2z+23}$

a) Find de stationære punkter for f
b) Undersøg arten af de stationære punkter fundet i spørgsmål a)

Løsning:

a)

$$f(x,y,z) := e^{x^2+2\cdot y^2+z^2-4\cdot x-12\cdot y-2\cdot z+23} = (x,y,z) \to e^{x^2+2y^2+z^2-4x-12y-2z+23}$$

$$solve\left(\left\{\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = 0, \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = 0, \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = 0\right\}, \{x,y,z\}\right) = \{x = 2, y = 3, z = 1\}$$

Stationært punkt (x, y, z)=(2, 3,1)

b)

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y,z)\right|_{x=2,\, y=3,\, z=1} = 2 \qquad \left.\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y,z)\right|_{x=2,\, y=3,\, z=1} = 4 \qquad \left.\frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x,y,z)\right|_{x=2,\, y=3,\, z=1} = 2$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y,z)\right|_{x=2,\, y=3,\, z=1} = 0 \qquad \left.\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} f(x,y,z)\right|_{x=2,\, y=3,\, z=1} = 0 \qquad \left.\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} f(x,y,z)\right|_{x=2,\, y=3,\, z=1} = 0$$

Loading LinearAlgebra

$$Eigenvalues\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Heraf ses, at f har et lokalt minimum i punktet (x, y, z)=(2, 3,1)

4 Usikkerhedsberegning

4.1. Differential

Differential for funktion af 1 variabel

Følger vi grafen for en differentiabel funktion $y = f(x)$ fra et punkt med abscissen x_0 til et punkt med abscissen $x_0 + \Delta x$ bliver funktionstilvæksten $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ jævnfør figur figur 4.1.

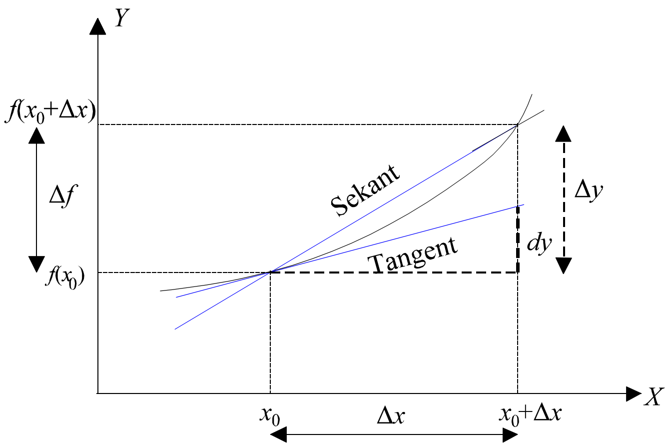


Fig. 4.1. *Tilvækst i tangents retning*

I stedet for at følge grafen fra x_0 til $x_0 + \Delta x$ kunne vi som en tilnærmelse følge tangenten i x_0. I så fald bliver y - tilvæksten $f'(x_0) \cdot \Delta x$ som kaldes differentialet *dy* eller *df*.

For den afhængige variabel *x*, gælder $\Delta x = dx$

(betragtes den identiske funktion $f(x) = x$ får vi nemlig $df = dx = 1 \cdot \Delta x$, dvs. $dx = \Delta x$)

Vi har derfor $df = f'(x_0)dx$.

Divideres med *dx*, fås den kendte sammenhæng $\frac{df}{dx} = f'$.

Bemærk, at man altid gerne må opfatte $\frac{df}{dx}$ som en brøk, når f er en funktion af 1 variabel.

Navnet differentialkvotient betyder netop en kvotient mellem differentialer.

Eksempel 4.1. Differential

Find differentialet af funktionen $f(x) = 5x^4$

Løsning:

Differentialet $df = f'(x)dx = \underline{\underline{20x^3 dx}}$ ◆

Differential for funktion af 2 variable

Lad funktionen *f* være differentiabel i et punkt (x_0, y_0) og lad $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Går vi fra punktet (x_0, y_0) til punktet $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ bliver funktionstilvæksten $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ jævnfør figur 2.4.

I stedet for af følge grafen for *f*, kunne vi som en tilnærmelse følge tangentplanen i (x_0, y_0)

Da tangentplanen har ligningen $z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y - y_0)$ bliver z-tilvæksten $z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\Delta y$

Denne z-tilvækst, som fås ved at følge tangentplanen, kaldes differentialet $d\,f$ eller $d\,z$.

Ligesom for funktioner af 1 variabel gælder, at man kan erstatte Δx med dx og Δy med dy, hvorved differentialet kan skrives $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

Ved visse anvendelser kaldes differentialet for det "totale differential" af f.

Eksempel 4.2. Differential

Lad funktionen f være givet ved $z = f(x,y) = \frac{1}{4}x^2\cdot y^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x$

1) Beregn Δz når punktet (x,y) ændrer sig fra (2,1) til (2.03, 0.98)
2) Beregn dz når punktet (x,y) ændrer sig fra (2,1) til (2.03, 0.98)

Løsning:

1) $\Delta z = f(2.03,0.98) - f(2,1) = 2.48463 - 2.5 = \underline{\underline{-0.0153}}$

2) $d\,z = \left(\frac{1}{2}x_0\cdot y_0^2 + \frac{1}{2}\right)dx + \left(\frac{1}{2}x_0^2 y_0 + y_0\right)dy$ hvor $x_0 = 2, y_0 = 1$, $d\,x = 0.03$ og $d\,y = -0.02$

$$d\,z = 1.5\cdot 0.03 + 3\cdot(-0.02) = \underline{\underline{-0.0150}}$$

4.2 Fejlvurdering.

Ved enhver måling kan den fysiske størrelse aldrig måles eksakt. Målingen behæftes altid med en vis usikkerhed. Det kan skyldes usikkerhed på objektet, måleinstrumentet, brugeren af instrumentet osv.

Systematiske fejl er fejl, hvor man eksempelvis har glemt at korrigere for temperaturens indflydelse på måling af et stofs hårhed.

Er målingen befriet for systematiske fejl, er der kun tilbage "tilfældige fejl".

Eksempelvis vil der ofte på et instrument være anført en "instrumentusikkerhed", som viser hvor nøjagtigt instrumentet kan måle.

En sådan usikkerhed kan eksempelvis findes ved at man foretager en måling flere gange eventuelt af forskellige personer.

4.2.1 Maksimal fejl eller usikkerhed

Den maksimale usikkerhed Δx er så defineret som den numerisk største afvigelse mellem en målt værdi og gennemsnittet.

Er eksempelvis en temperatur angivet som $30.45^0 \pm 0.05$ menes hermed, at i værst tænkelige tilfælde kunne målingen være 30.40^0 eller 30.50^0.

Relativ fejl eller relativ usikkerhed

Ved den relative fejl (usikkerhed) på en størrelse x forstås størrelsen $\frac{\Delta x}{x}$

Eksempel 4.3. Maksimal og relativ fejl

Lad x = 153 ± 2m og y = 25 ± 1 m

a) Find den maksimale fejl Δ z på z = x - y

b) Find den relative fejl på z.

Løsning:

Det ses umiddelbart, at z = 153 -25 = 128 og

a) Δ z = 2+1 = $\underline{\underline{3}}$ m dvs. z = 128 ± 3 m

b) rel(z) = $\frac{3}{128} = 0.0254 = \underline{\underline{2.34\%}}$ ◆

Den maksimale fejl (eller usikkerheden) på to størrelser kan jo godt være den samme , f.eks. 1 cm, men hvis den ene størrelse er usikkerheden på diameteren af et rør på 10 cm og den anden er højden på et hus, så er det klart, at det er den relative usikkerhed, der siger mest.

Ved mere komplicerede udtryk er det ikke som i eksempel 4,3 muligt direkte at beregne den maksimale usikkerhed. Man må så i stedet erstatte benytte differentialet ved beregningen. Det svarer jo til, at man erstatter funktionen med dens tangentplan. Dette er tilladeligt når blot usikkerhederne Δ x og Δ y er små.

Der gælder følgende:

Maksimal fejlberegning

Den maksimale absolutte fejl Δ z for funktionen $z = f(x, y)$ i punktet ((x_0, y_0) er

$$\Delta z \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right|\Delta y \quad \text{forudsat fejlene } \Delta\text{ x og } \Delta\text{ y er små}$$

Koefficienterne $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ kaldes så *f* 's følsomhed overfor fejl på henholdsvis *x* og *y*.

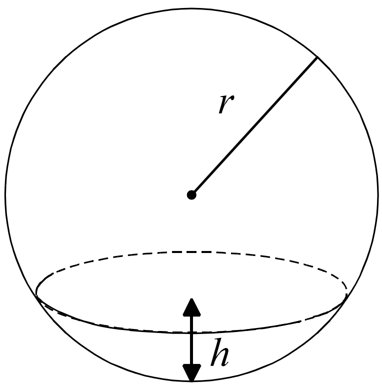
Formlen kan umiddelbart udvides til at gælde for en funktion af mange variable.

Eksempel 4.4 Maksimal usikkerhed

En kugleformet tank har radius *r*. Med en pejlestok måler man væskehøjden *h* for at kunne beregne væskerumfanget $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$

a) Angiv et den maksimale fejl på V, når r = 1 ± 0.1 m og h = 0.1 ± 0.01 m

b) Angiv den maksimale relative fejl på V.



Løsning (håndregning)

$$V = \pi\cdot(h^2\cdot r - \frac{1}{3}\cdot h^3)$$

a) $\frac{\partial V}{\partial h} = \pi\cdot(2\cdot h\cdot r - h^2)$ Indsættes r = 1 og h = 0.1 fås $\frac{\partial V}{\partial h} = \pi\cdot(2\cdot 0.1 - 0.1^2) = 0.19\cdot\pi = 0.5969$

$\frac{\partial V}{\partial r} = \pi\cdot h^2$ Indsættes r = 1 og h = 0.1 fås $\frac{\partial V}{\partial r} = \pi\cdot 0.1^2 = 0.0314$

$\Delta V = 0.5969\cdot 0.01 + 0.0314\cdot 0.1 = \underline{\underline{0.0091}}$

b) V =π· $V = \pi \cdot (0.1^2 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0.1^3) = 0.0304$

Relativ maksimal usikkerhed = $\frac{0.0091}{0.0304} = \underline{\underline{0.30}} = \underline{\underline{30\%}}$

Maple

$$v := \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3.0 \cdot r - h) = \frac{1}{3} \pi h^2 (3.0\, r - h)$$

a) $\left. \frac{\partial}{\partial h} v \right|_{r = 1,\, h = 0.1} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 0.59690 \qquad \left. \frac{\partial}{\partial r} v \right|_{r = 1,\, h = 0.1} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 0.031416$

$\Delta V = 0.59690 \cdot 0.01 + 0.031416 \cdot 0.1 = 0.0091106$

b) $\left. v \right|_{r = 1,\, h = 0.1} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 0.030369 \qquad \text{rel fejl} = \frac{0.0091106}{0.030369} = 0.2999967072 = 30\%$

◆

4.2.2 Statistisk usikkerhed

I statistikken beregner man middelværdi og spredning, og spredningen er et udtryk for den statistiske usikkerhed.
Der forudsættes, at disse begreber er kendt.
For at forklare en formel for beregning af usikkerhed i sammensatte udtryk af 2 variable, vil vi først se på et simpelt tilfælde hvor en statistisk variabel Z = a·X+bY +c, hvor X og Y er statistiske variable med spredningen $\sigma(X)$ og $\sigma(Y)$, og a , b og c er konstanter.

Hvis de to variable er uafhængige gælder det, at $\sigma(Z) = \sqrt{a^2 \cdot \sigma^2(X) + b^2 \cdot \sigma^2(Y)}$

Eksempel 4.5. To variable.
Insektpulver sælges i papkartoner. Lad x være vægten af pulveret, mens y er vægten af papkartonen. I middel fyldes der 500 gram insektpulver i hver karton med en usikkerhed på 5 gram. Kartonen vejer i middel 10 gram med en usikkerhed på 1.0 gram.
z = x + y er da bruttovægten.
Det antages, at de 2 variable er uafhængige, dvs, der er ingen sammenhæng mellem vægten på pulver og vægten på karton. De er måske lavet på 2 forskellige fabrikker.
Find middelværdien på bruttovægten E(Z) , den statistiske usikkerhed $\sigma(Z)$ og den relative usikkerhed på Z

Løsning:
X = vægt af pulver
E(X) = 500, σ(X) = 5
E(Y) = 10, σ(Y) = 1
Vi har nu, at E(Z) = 500 + 10 = 510
Spredningen på z er σ(Z) = $\sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26} = 5.099$

Relativ usikkerhed: $\frac{\sigma(Z)}{E(Z)} = \frac{5.099}{510} = 0.01 = \underline{\underline{1\%}}$

◆

Er z en funktion af 2 variable, så kan vi tilnærme funktionen med Taylorpolynomium af 1 grad (grafen erstattes med sin tangentplan).
Vi kan derfor beregne usikkerheden af formlen

$$\sigma(Z)=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2\cdot\sigma^2(X)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2\cdot\sigma^2(Y)}$$

Koefficienterne $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ kaldes så *f* 's følsomhed overfor fejl på henholdsvis *x* og *y*.

Eksempel 4.6. Beregning af usikkerhed på udtryk i 2 variable

Et cylindrisk hul med radius *r* og højde *h* bores i en metalblok.
Man ved, at r = 3cm med en spredning på 0.1 cm og h = 20 cm med en spredning på 0.2 cm

1) Find den statistiske usikkerhed på hullets volumen $V=\pi\cdot r^2\cdot h$
2) Find den relative fejl på V
3) Har V størst følsomhed overfor r eller overfor h?

Løsning

$$V:=\pi\cdot r^2\cdot h$$

1) Håndregning:

$\frac{\partial V}{\partial r}=2\cdot\pi\cdot r\cdot h$ og dermed for r = 3 og h = 20 , er $\frac{\partial V}{\partial r}=120\cdot\pi=376.99$

$\frac{\partial V}{\partial h}=\pi\cdot r^2$ og dermed for r = 3 og h = 20 , er $\frac{\partial V}{\partial h}=9\cdot\pi=28.27$

$$\sigma(V)=\sqrt{(376{,}99)^2(0.1)^2+(28.27)^2(0.2)^2}=\underline{\underline{38.12}}$$

2) V = 565.487.

Den relative fejl er $\left|\frac{\sigma(V)}{V}\right|=\frac{38.12}{565.485}=0.0674=\underline{\underline{6.7\%}}$

3) V har størst følsomhed over for fejl på *r*, da $\frac{dV}{dr}=376.99>\frac{dV}{dh}=28.27$

Formlen kan naturligvis generaliseres til funktioner af mange variable.

Eksempel 4.7 Beregning af usikkerhed på udtryk i 3 variable

Måles trykket P, volumenet V og temperaturen T af en ideal gas, optræder der tilfældige målefejl, som gør værdierne usikre. Beregnes molantallet n nu af ligningen $P \cdot V = n \cdot R \cdot T \Leftrightarrow n = \dfrac{P \cdot V}{R \cdot T}$, bliver værdien af n derfor også usikker. Vi ønsker at kunne beregne usikkerheden på n ud fra usikkerhederne på P, V og T.

Gaskonstant $R = 8.314\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$. $P = 123400\ \mathrm{Pa}$, $V = 5.67\ \mathrm{m^3}$, $T = 678\ \mathrm{K}$ med usikkerheder $\sigma(P) = 1000\ \mathrm{Pa}$, $\sigma(V) = 0.06\ \mathrm{m^3}$ og $\sigma(T) = 3\ \mathrm{K}$.

Det kan antages, at måleresultaterne for P, V og T er statistisk uafhængige.

Find den statistiske usikkerhed $\sigma(n)$

Løsning

Maple

$$n := \frac{p \cdot v}{r \cdot t} = \frac{p\,v}{r\,t}$$

$$\left.\frac{d}{dp} n\right|_{v = 5.67,\ r = 8.314,\ t = 678,\ p = 123400} = ,001006$$

$$\left.\frac{d}{dv} n\right|_{v = 5.67,\ r = 8.314,\ t = 678,\ p = 123400} = 21,891496$$

$$\left.\frac{d}{dt} n\right|_{v = 5.67,\ r = 8.314,\ t = 678,\ p = 123400} = -,183075$$

$$\sqrt{0.001006^2 \cdot 1000^2 + 21.891496^2 \cdot 0.06^2 + (-0.183075)^2 \cdot 3^2} = 1,74$$

σ(n) = <u>1.74 mol</u> ◆

5. Grundlæggende operationer med Maple

Maple

Alle ordrer i bogen er angivet i **Document mode**
En række af udtryk findes på menuerne til venstre.
Ønskes resultatet på samme linie tryk på udtrykket med højre musetast og vælg ALT , ENTER
Ønskes resultat ikke være komplekse tal: Tools▶Load Package▶Real domain

Resultat : Loading RealDomain

Ønskes teksten ændre farve: Marker tekst og tryk på Font color (den venstre) 

Ønskes exakte tal omregnet til decimalbrøk: Tryk på tal og vælg "Approximate"

Lad funktionen være givet ved $f(x,y)=\frac{1}{4}x^2\cdot y^2$

Definere funktion: Skriv f(x,y:= ▶skriv funktionen, osv. $f(x,y) := \frac{1}{4}\cdot x^2\cdot y^2 = (x,y)\rightarrow \frac{1}{4}x^2y^2$

Finde partielt afledede: Find på menuen "Calculos" $\frac{\partial}{\partial x}f$ og udfyld med (x,y)

Finde afledet i punkt (2,3):under "expressions" ▶ $f(x)\Big|_{x=a}$ udfyld: $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\Big|_{x=2,\,y=3} = 9$

Løse ligningssystem: Skriv solve (osv. $solve(\{x+y=2,\, 2\cdot x-y=4\},\, \{x,y\}) = \{x=2,\, y=0\}$

Oprette en matrix A: Lad matricen have 2 rækker og 3 søjler
Skriv A:=▶ Vælg i menu til venstre :Matrix▶ antal rækker=2, antal kolonner = 3▶Type (eksempelvis Zero)▶Insert Matrix▶Udfyld det fremkomne matrix med tallene i A▶ ENTER

Finde egenværdi af funktion:
Tools▶ Load Package▶ Linear algebra
Skriv Eigenvalues osv.

Loading LinearAlgebra

$$Eigenvalues\left(\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Tegne graf :Tools▶Load Packages▶Plot Resultat Loading plots

Skriv plot3d(f(x,y),x=a..b,y=c..d) hvor a,b,c og d er tal

Tegne "Højdekurver":
Skriv Contourplot(f(x,y),x=a..b,y=c..d,contoirs=k) hvor k angiver antal højdekurver

Gemme fil som pdf-fil
Vælg File▶export as▶File of type PDF

Opgaver

Opgave 1

Man er interesseret i grafisk fremstilling af funktionen $f(x,y) = y^2 - x^2$ i en omegn af punktet (0.0), eksempelvis , hvor $-2 \le x \le 2 \wedge -2 \le y \le 2$, og der lægges ikke vægt på nøjagtighed, men på principielle træk.

a) Tegn i et rumligt koordinatsystem grafen for funktionen *f* ved anvendelse af et matematikprogram

b) Afgør herudfra om funktionen i punktet (0,0) har et lokalt minimum? - lokalt maksimum? - saddelpunkt?

Opgave 2

Find de partielle afledede af første og anden orden for følgende funktioner

1) $f(x,y) = x^3y^2 + 2x^2y + 4$ 2) $f(x,y) = \sqrt{e^{3x-y}}$ 3) $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{1+x^2y^4}\right)$

Opgave 3

Find ligningen for tangentplanen for

1) $f(x,y) = x^2y - xy^2$ i punktet (*x*,*y*) = (-2,3)

2) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ i punktet (*x*,*y*) = (2, -1)

Opgave 4

Find de stationære punkter for funktionerne

1) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

2) $f(x,y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6$

3) $f(x,y) = x \cdot \cos(y) - x^2, \quad y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$

4) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 5x + 2y - 8$

Opgave 5

Lad virkningsgraden for en motor være givet tilnærmet ved

$f(x,y) = x^3 - y^3 - 3xy - 0.2$,hvor *x* og *y* er to variable.

1) Vis, at punktet (-1,1) er et lokalt maksimumspunkt.

2) Tegn grafen for f i en omegn af punktet (-1,1) og vurder ud fra tegningen om (-1,1) kunne være et globalt maksimumspunkt.

Opgave 6.
Find alle lokale maksimums- og minimumspunkter for følgende funktioner:

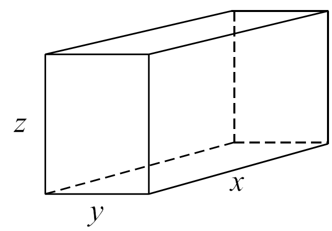
1) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 5y + 3$
2) $f(x,y) = x^2 + y^4 + 4xy$ for x > 0
3) $f(x,y) = x^2 + y^3 + 2x$, tegn eventuelt også grafen til en vurdering.
4) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 3x$
5) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^3 + 5y^2$
6) $f(x,y) = x^4 - 8x^2 + 4xy^2 + 4y^2$
7) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$
8) $f(x,y) = \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2}$
9) $f(x,y) = 2x^2y + xy^2 - 6xy$

Opgave 7.
Vis, at funktionen f givet ved $f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 4x^2 - 8y^2$ har 5 stationære punkter.
Afgør for de punkter for hvilket y>0, om det er et lokalt maksimumspunkt, lokalt minimums-punkt eller saddelpunkt.

Opgave 8.
a) Find samtlige stationære punkter for funktionen $f(x,y) = x^2y - 2x^2 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2$
b) Betragt de stationære punkter (x, y) for hvilke $y \le 0$. Afgør for hvert af disse punkter, om punktet er et lokalt maksimumspunkt, et lokalt minimumspunkt eller et saddelpunkt.

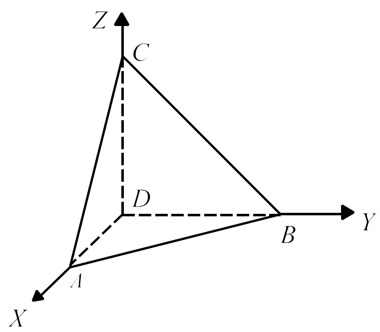
Opgave 9.
a) Find de stationære punkter for funktionen $f(x,y) = \left(x^2 - y\right)^2 + 2x^2 - \frac{1}{5}y^2$
b) Afgør for hvert af de punkter som har positive koordinater, om punktet er et lokalt maksimumspunkt, lokalt minimumspunkt eller saddelpunkt.

Opgave 10
En kasseformet tank skal konstrueres, så den får et rumfang på 2000 m^3. Bund, sider og låg koster henholdsvis 4000 kr./m^2, 2000 kr./m^2 og 1000 kr./m^2. Dimensionér tanken således, at prisen bliver mindst, idet dog ingen af kanterne må overstige 20 m.



Opgave 11.

En plan har ligningen $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, hvor $a>2,\ b>4$ og $c>5$. Planen skærer koordinatakserne i punkterne A, B og C (se figuren). Koordinatsystemets begyndelsespunkt kaldes D. Værdierne af a, b og c ønskes bestemt, således at punktet P = (2,4,5) ligger på planen gennem A, B og C, og tetraederet ABC's volumen $V\left(\frac{1}{6}abc\right)$ bliver mindst mulig.



Det oplyses, at der eksisterer værdier af a, b og c med de ønskede egenskaber.

Opgave 12

Find de partielle afledede af første orden for følgende funktioner

1) $f(x,y,z)=x^3y^2z^2+xyz^3$

2) $f(x,y,z)=y\cdot\sin(xz)+2^{xyz}$

Opgave 13

Find alle lokale ekstremumspunkter for de følgende funktioner

1) $f(x,y,z) = -2x^2-2y^2-z^2+2xy+2yz+8x-4y+2z-3, \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

2) $f(x,y,z) = x^3+3x^2+2y^2+z^2-yz, \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

3) $f(x,y,z) = x^3+21x+y^3+z^3-6xyz, \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Opgave 14

Find differentialet af funktionen

1) $f(x,y)=4x^4y+y^2$

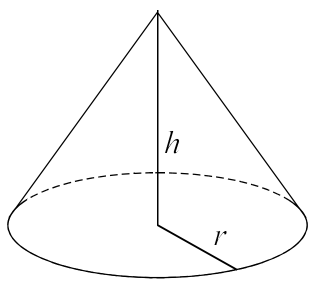
2) $f(x,y)=2^{x+y}+4$ i punktet (1,0)

Opgave 15

En bunke har form som en kegle med højde h og grundfladeradius r. Man måler h og r, for at kunne beregne rumfanget $V=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2h$

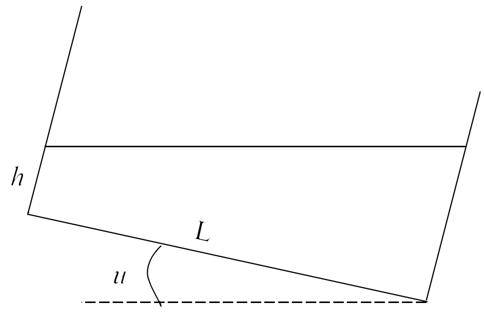
a) Angiv den maksimale fejl på V, når r = 10 ± 0.2 m og h = 10 ± 0.1 m

b) Angiv den maksimale relative fejl på V.



Opgave 16

En olietank er kasseformet med længden L = 3 m , bredden B = 1 m og højden H = 1 m. Tanken er nedgravet vandret, men ejeren får mistanke om, at den hælder en vinkel *u* .
For at finde *u*, hælder ejeren V = 1 m^3 olie i den tomme tank, og måler oliestandens højde *h* i den højeste side til 0.20 m.(se figuren)
Vinklen u kan findes af formlen



$$u = \text{Arctan}\left(\frac{2V}{B \cdot L^2} - \frac{2h}{L}\right)$$

1) Find vinklen u (i radianer).
2) Det anslås, at V= 1 ± 0.02 og h =0.2 ± 0.01.
Find den maksimale absolutte fejl på *u* (med 3 betydende cifre)
3) Angiv den maksimale relative fejl på u.

Opgave 17

Man har målt vægten af en karton indeholdende tableter af en vis type imod hovedpine til 70 g med usikkerhed på 0.04 g
Vægten af kartonen er målt til 2 g med en usikkerhed på 0.01 g
Det kan antages, at måleresultaterne for *R* og *H* er statistisk uafhængige.
Beregn den samlede vægt V af tabletterne, usikkerheden $\sigma(V)$, samt den relative usikkerhed $rel(V)$.

Opgave 18

En mængde råmateriale til en produktion ligger i kegleformet bunke. En kegle med radius *R* og højde *H* har volumenet $V = \frac{\pi}{3} R^2 H$.
Man har målt $R = 12.0$ m , $H = 11.0$ m ,
med usikkerheder $\sigma(R) = 0.2$ m , $\sigma(H) = 0.1$ m .
Det kan antages, at måleresultaterne for *R* og *H* er statistisk uafhængige.
Find volumenet *V*, usikkerheden $\sigma(V)$, samt den relative usikkerhed $rel(V)$.

Opgave 19

For en rektangulær flade har man målt længden *L* og bredden *B :*
$L = 12.3$ m , $B = 8.4$ m
med usikkerheder
$\sigma(L) = 0.1$ m , $\sigma(B) = 0.2$ m .
Det kan antages, at måleresultaterne for *L* og *B* er statistisk uafhængige.
Find fladens areal *A*, usikkerheden $\sigma(A)$, samt den relative usikkerhed $rel(A)$.

Opgave 20

For et bassin af form som en retvinklet kasse har man målt længden L , bredden B og højden H

$L = 18.0\text{ m}$, $\quad B = 12.3\text{ m} \quad H = 4.5\text{ m}$

med usikkerheder

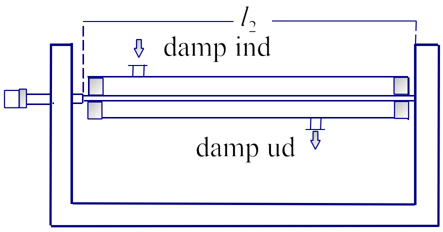
$\sigma(L) = 0.2\text{ m}$, $\quad \sigma(B) = 0.1\text{ m}$, $\sigma(H) = 0.2\text{ m}$.

Det kan antages, at måleresultaterne for L, B og H er statistisk uafhængige.

Find bassinets volumen V, usikkerheden $\sigma(V)$, samt den relative usikkerhed $rel(V)$.

Opgave 21

På den viste forsøgsopstilling kan man foretage målinger til bestemmelse af et stofs længdeudviddelseskoefficient.



l_1 er længden af stangen ved starttemperaturen t_1.
l_2 er længden af stangen ved sluttemperaturen t_2.
Under forsøget er følgende størrelser bestemt.
l_1: middelværdi 500 mm med spredning 0.1 mm
l_2 : middelværdi 500.48 mm med spredning 0.1 mm
t_2 - t_1 : middelværdi 78^0 med spredning 0.1^0 C
Længdeudvidelseseskoefficienten k kan bestemmes af udtrykket $k = \dfrac{l_2 - l_1}{l_2(t_2 - t_1)}$,

a) Find den statistiske usikkerhed på k

b) Find den relative statistiske usikkerhed på k.

Facitliste

1 a) - b) saddelpunkt

2 1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + 4xy,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + 2x^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2 + 4y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2y + 4x$

2) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3}{2}\sqrt{e^{3x-y}},\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}\sqrt{e^{3x-y}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{9}{4}\sqrt{e^{3x-y}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{4}\sqrt{e^{3x-y}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{3}{4}\sqrt{e^{3x-y}},$

3) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{xy^4}{1+x^2y^4},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^2y^3}{1+x^2y^4},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^4(1-x^2y^4)}{\left(1+x^2y^4\right)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2y^2(3-x^2y^4)}{\left(1+x^2y^4\right)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{4xy^3}{\left(1+x^2y^4\right)^2},$

3 1) $z = 30 - 21(x+2) + 16(y-3)$ 2) $z = -4 - 4(x-2) - 4(y+1)$

4 1) (0, 0) (3, 3) (2) (15, -8) 3) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\ \left(\frac{1}{2}, 0\right)\ \left(-\frac{1}{2}, \pi\right)$ 4) (-4, -3)

5 1) - 2) næppe

6 1) lok.min.pkt. $\left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ 2) lok.min.pkt. $\left(2\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ og $\left(2\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ (3) ingen 4)lok.min.pkt. (1, 0)

5) lok.min.pkt. (0, 0) 6) lok.min.pkt. (2, 0) 7) lok.min.pkt. $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

8) lok.max.pkt. $(\pm 1, 0)$ 9) lok. min.pkt i (1,2)

7 lok.min.pkt. (0, 2)

8 a) (0, 0), (0, 1), (0, -1), $\left(\sqrt{6}, 2\right)$, $\left(-\sqrt{6}, 2\right)$ b) lok. max. pkt (0,-1)

9 a) (0, 0) , (2.5), (2,-5) b) saddelpunkt (2,5)

10 $x = 4\sqrt[3]{25},\ y = 4\sqrt[3]{25},\ z = 5\sqrt[3]{25},$

11 6, 12, 15

12 1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2z^2 + yz^3,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3yz^2 + xz^3,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2x^3y^2z + 3xyz^2$

2) $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \cos(xz) \cdot z + 2^{xyz} \cdot yz \cdot \ln 2,\ \frac{\partial f}{\partial y} = \sin(xz) + 2^{xyz} \cdot xz \cdot \ln 2,\ \frac{\partial f}{\partial z} = y \cdot \cos(xz) \cdot x + 2^{xyz} \cdot xy \cdot \ln 2$

13 1) lok. max.pkt. (3, 2, 3) 2) lok. min.pkt. (0.0.0) 3) ingen

14 1) $16x^3y\,dx + \left(4x^4 + 2y\right)dy$ 2) $2 \cdot \ln 2\, dx + 2 \cdot \ln 2\, dy$

15 1) 52.203 2) 5.08%
16 1) 0.0886 radianer 2) 0.0110 radianer 3) 12.43%
17 68 0.0412 0.061%
18 1658.8 57.31 3.46%
19 103.32 2.6 2.52%
20 996.3 46.36 4.65%
21 0.0001556 22.09%

STIKORD