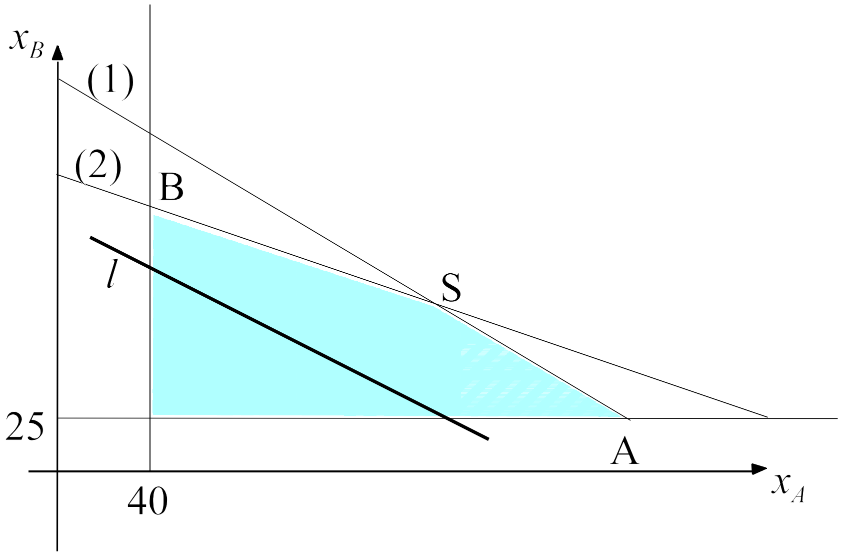
MOGENS ODDERSHEDE LARSEN

Lineær Planlægning (programmering)

med Excel



2. udgave 2007

FORORD

Denne bog forklarer ved anvendelse af nogle typiske eksempler, hvad der er karakteristisk ved LP - problemer.
Principperne i Simplexmetoden forklares ved at se på et problem i 2 variable, der kan løses geometrisk.
På grundlag heraf løses så samme problem ved anvendelse af Excel, og der forklares detaljeret hvorledes udskrifterne skal tolkes.
Tilsidst løses et lidt større LP-problem ved Excel.

Februar 2008 Mogens Oddershede Larsen

INDHOLD

1 Indledning

I 1947 udviklede George Dantzig der var knyttet til "US Department of the Air Force" den matematiske teori, og i 1952 udarbejdedes det første computerprogram. Deraf det noget misvisende navn lineær "programmering", idet metoden intet har med programmering at gøre. Skal man benytte den på problemer med mange variable, så må man naturligvis benytte et færdigt program, men deri adskiller metoden sig jo ikke fra alle andre.
Lineær planlægning (i det følgende forkortet til LP) er uden tvivl en af de mest anvendte og mest effektive planlægningsredskaber.

Ved et LP-problem forstås et problem, hvor man søger at finde maksimum eller minimum for en lineær funktion u af typen
$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$
med begrænsninger som er er lineære uligheder eller ligninger af typen
$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \le b$,
$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \ge b$.
$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$

Funktionen $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ kaldes **objektfunktionen**, og koefficienterne $c_1, c_2, \dots, c_n$ kaldes **omkostningskoefficienterne** (engelsk (cost coefficients),
Det følgende eksempel illustrerer et optimeringsproblem af denne art.

Eksempel 1.1 Lagerstyring

Man skal under en militærøvelse forsyne 4 militærenheder A, B C og D med i alt 600 raketter. Raketterne er placeret i to lagre P og Q. Militærenhedernes behov og lagrenes kapacitet er angivet i følgende skema.
Af nedenstående skema kan f. eks. aflæses, at det tager 2 enheder brændstof , at transportere en raket fra lager P til militærenhedenhed B, og at P har et lager på 200 raketter, og at B har behov for 100 raketter.

Enhed / Lagre	A	B	C	D	Lagre
P	3	2	1	4	200
Q	2	4	6	3	450
Bestillinger	200	100	200	100	

En officer får til opgave at planlægge leveringen af raketter således, at udgifterne til brændstof bliver mindst mulig.
Opskriv objektfunktion og begrænsningerne

Løsning:
I nedenstående skema er x - værdierne antallet af raketter, der transporteres fra et lager til en enhed

Enhed / Lagre	A	B	C	D	Lagre
P	$3/\,x_{11}$	$2/\,x_{12}$	$1/\,x_{13}$	$4/\,x_{14}$	200
Q	$2/\,x_{21}$	$4/\,x_{22}$	$6/\,x_{23}$	$3/\,x_{24}$	450
Bestillinger	200	100	200	100	

Brændstofforbruget u er da $u = 3\cdot x_{11} + 2\cdot x_{12} + x_{13} + 4\cdot x_{14} + 2\cdot x_{21} + 4\cdot x_{22} + 6\cdot x_{23} + 3\cdot x_{24}$,
dvs. vi skal finde minimum for objektfunktionen
$u = 3\cdot x_{11} + 2\cdot x_{12} + x_{13} + 4\cdot x_{14} + 2\cdot x_{21} + 4\cdot x_{22} + 6\cdot x_{23} + 3\cdot x_{24}$,
Begrænsningerne er

$$
\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} && \le 200\\
&\qquad + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} && \le 450\\
&x_{11} \qquad + x_{21} && = 200\\
&\quad x_{12} \qquad + x_{22} && = 100\\
&\qquad x_{13} \qquad + x_{23} && = 200\\
&\qquad\quad x_{14} \qquad + x_{24} && = 100\\
&x_{11} \ge 0, x_{12} \ge 0, x_{13} \ge 0, x_{14} \ge 0, x_{21} \ge 0, x_{22} \ge 0, x_{23} \ge 0, x_{24} \ge 0
\end{aligned}
$$

I den kemiske industri har LP-problemer tit karakter af blandingsproblemer. Et problem i et olieraffinaderi var således det første store LP - problem , der blev løst ved hjælp af et edb program (løst i 1952) .

Løsningsmetoden forstås bedst ved at betragte et par typiske LP- eksempler, hvor der kun forekommer 2 variable. Man kan så anskueliggøre metoden geometrisk og regnearbejdet er overkommeligt.
Med lidt flere variable som i eksempel 1.1 kunne man eventuelt benytte en lommeregner med matrixregning. Vi vil i sådanne tilfælde vise hvordan man kan benytte Excel til at løse problemet. For problemer med mange variable er nødvendigt at benytte et egentligt "LP-program" på en PC.

2 Geometrisk løsning

Vi vil i dette afsnit betragte et eksempler med kun 2 variable, så de kan løses geometrisk. Fordelen herved er bl.a. at man ser nogle karakteristiske træk ved LP-problemer og deres løsning.

Eksempel 1.2 Geometrisk løsning

En lille styrke er indesluttet af en større fjendtlig styrke. Der er dog mulighed for at genforsyne den lille styrke fra søen.

For at støtte den lille styrke vil man tilføre den yderligere ammunition ved hjælp af et lille forsyningsskib. Forsyningsskibet kan maksimalt medbringe 25 tons og lasten skal kunne være på maksimalt 200 m^2 dæksareal.

Den lille styrke har behov for to forskellige typer af ammunition. Ammunition af type A vejer 65 kg pr. stk og optager tilsvarende et dæksareal 0.5 m^2. Ammunition af type B vejer 115 kg pr. stk og fylder 1.5 m^2 dæksareal.

Der er behov for minimum 40 stk ammunition af type A og minimum 25 stk. af type B.

Problemet for den operative ledelse af forsyningsenheden består i at tilsikre den lille styrke den størst mulige militære nytte af den fremsendte ammunition. Det skønnes, at den militære nytte af ammunition type A er 5 og ammunition af type B er 10 .

a) Formuler problemet som et LP-problem .
b) Løs problemet grafisk.

Løsning

a) Lad x_A og x_B være antallet af styk. ammunition indeholdende henholdsvis type A og type B som flyves ud til styrken.

Samlet nytte: $u = 5 \cdot x_A + 10 \cdot x_B$

Vægtbegrænsning: $65 \cdot x_A + 115 \cdot x_B \le 20000 \Leftrightarrow 13 \cdot x_A + 23 \cdot x_B \le 4000$

Arealbegrænsning: $0.5 x_A + 1.5 \cdot x_B \le 200 \Leftrightarrow x_A + 3x_B \le 400$

Behov: $x_A \ge 40$

$x_B \ge 25$

LP-problem

Objektfunktion Find maksimum for funktionen $u = 5 \cdot x_A + 10 \cdot x_B$

Begrænsninger:

$13 \cdot x_A + 23 \cdot x_B \le 4000$ (1)

$x_A + 3x_B \le 400$ (2)

$x_A \ge 40$ (3)

$x_B \ge 25$ (4)

b) Geometrisk løsning:
Mængden af punkter i planen, der tilfredsstiller ulighederne (1) , (2), (3) og (4) er en polygon, der begrænses af linierne

$13 \cdot x_A + 23 \cdot x_B = 4000$ (1a)

$x_A + 3x_B = 400$ (2a)

$x_A = 40$ (3a)

$x_B = 25$ (4a)

Polygonen er skraveret på figur 1.1.
Punkter med en samlet nytte på eksempelvis 200 ligger på linien $x_A + 2x_B = 200$
(linien *l* på figur1.1)
En sådan linie kaldes en **niveaukurve** for objekt-funktionen u med niveauet 200 (svarer til højde-kurver på et kort.

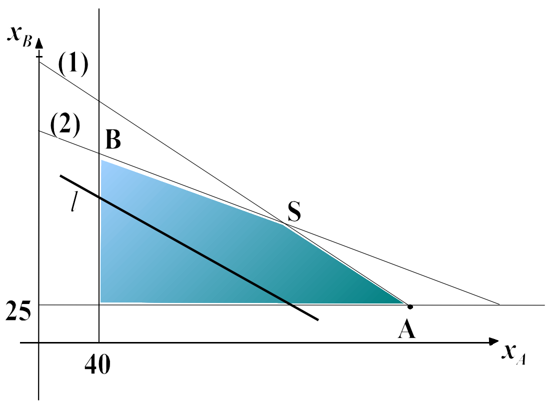


Fig 1.1 . *Begrænsninger og niveaukurve*

Det ses, at alle niveaukurver for u er parallelle linier, og jo større niveau (større samlet nytte) jo længere op vil linierne skære x_2 -aksen.

Da hældningen for linie (1) er $\alpha_1 = -\frac{13}{23} = -0{,}57$, hældningen for linie (2) er $\alpha_2 = -\frac{1}{3}$ og hældningen for niveaulinierne er $\alpha_n = -\frac{1}{2}$, ses, at den største nytte fås i vinkelspidsen S .

Ved løsning af de to ligninger (1a) og (2a) fås
(2a): $x_A + 3x_B = 400 \Leftrightarrow x_A = 400 - 3x_B$ som indsættes i (1a)

$13 \cdot (400 - 3x_B) + 23 \cdot x_B = 4000 \Leftrightarrow -39x_B + 23x_B = 4000 - 13 \cdot 400 \Leftrightarrow -16x_B = -1200 \Leftrightarrow x_B = 75$

Af (1a) fås nu $x_A = 400 - 3 \cdot 75 = 175$

Vi har, at skæringspunktet er $S = (x_A, x_B) = (175{,}75)$

Konklusion: Man skal sende 175 stykker ammunnition af typen A og 75 stk ammunition af typen B for at få den største nyttevirkning.
Nyttevirkningen bliver u = $5 \cdot 175 + 10 \cdot 75) = 1625$

Et karakteristisk træk ved løsningen er, at den optimale løsning falder i en vinkelspids i polygonen. Endvidere ses, at selvom omkostningskoefficienterne ændres lidt, skal planen ikke ændres. Så længe hældningskoefficienten α for niveaulinierne ligger mellem α_1 og α_2 er planen uændret. Et skøn for nytten, der eksempelvis bevirkede at $\alpha = -\frac{1}{4}$ vil derimod flytte den optimale løsning fra S til punktet A på figur 1.1.

3. Simplexmetoden

Er LP-problemet i 2 variable indså vi geometrisk, at en mulig optimal løsning må ligge i en af vinkelspidserne i den polygon, der bestemmes af begrænsningerne.

Er LP - problemet i 3 variable kan problemet illustreres geometrisk på følgende måde.
En ulighed $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \le b$ fremstiller et "halvrum" begrænset af en plan. Fællesmængden af alle sådanne halvrum danner en punktmængde (på figuren et polyeder.) begrænset af planer.Da objekt-funktionens niveauflader også er planer, virker det rimeligt, at en optimal løsning i hvert fald findes i en hjørnespids.
Generelt gælder det for et LP-problem i *n* variable, at har problemet en optimal løsning, så findes der en "hjørnespids", hvor den optimale løsning indtræffer.
Er antallet af variable stort, bliver antallet af mulige "hjørnespidser" så stort, at det ikke er overkommeligt at undersøge dem alle.

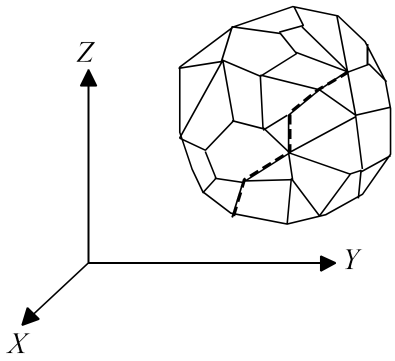


Fig 1.2. *Polyeder*

Simplexmetoden (udarbejdet af B.G. Dantzig i 1948) angiver en fremgangsmåde, hvor man ud fra en tilfældig "hjørnespids" udvælger en der ligger nærmere den optimale, ud fra denne vælger man igen en bedre osv. (svarende til den stiplede linie på figur 1.3).
Metoden er regneteknisk ret simpel, og er derfor ret let, at programmere på en computer. Uden denhelt store regnekraft kan man så let løse LP-probkemer med mange hundrede variable og begrænsninger.
Det ligger udenfor dette notats formål at gennemgå metoden (der bl.a. kræver et vist kendskab til matrixregning). Excel har imidlertid indbygget et sådant program, som vi vil benytte.
Det skal dog her gøres opmærksom på, at et egentligt LP-program, kan dels løse flere varianter (bl.a. hvis ønsket begrænse løsningerne til hele tal) og give flere oplysninger om løsningens "følsomhed" overfor ændringer i de givne størrelser.

4 LP-problemer løst ved Excel

For helt at forstå hvordan inddata skal indtastes, og uddata skal fortolkes, regnes først eksempel 1.2 inden vi så løser det større eksempel 1.1.

Først skal vælges et tilføjelsesprogram:
I Excel 2003: Vælg "Funktioner", "Tilføjelsesprogrammer", marker "Problemløser"
I Excel 2007: Vælg "Excel-Office-knappen", "Excel indstillinger (findes forneden)", Tilføjelses-programmer","Udfør","marker Problemløser", "Installer".

Eksempel 1.4. Eksempel 1.2 regnet med Excel

Vi havde i eksempel 1.2 følgende LP-problem:
Objektfunktion: Find maksimum for funktionen $u = 5 \cdot x_A + 10 \cdot x_B$
Begrænsninger:

$13 \cdot x_A + 23 \cdot x_B \le 4000$ (1)

$x_A + 3x_B \le 400$ (2)

$x_A \ge 40$ (3)

$x_B \ge 25$ (4)

Løsning:
Da cellerne i Excel kaldes A1, A2 osv. omdøber vi for simpeheds skyld x_A og x_B til a1 og a2, og angiver med b1, b2 ..., c1 i hvilke celler de forskellige udtryk skal stå
Vi får
Objektfunktion: Find maksimum for $c1 = 5 \cdot a1 + 10 \cdot a2$
Begrænsninger:

$b1 = 13 \cdot a1 + 23 \cdot a2$ $\quad b1 \le 4000$ (1)

$b2 = a1 + 3 \cdot a2$ $\quad b2 \le 400$ (2)

$b3 = a1$ $\quad b3 \ge 40$ (3)

$b4 = a2$ $\quad b4 \ge 25$ (4)

Excel ordrer:
I cellerne a1 til a2 skrives startværdier (vælg f. eks. 0 og 0)
I cellen b1 skrives +13*a1+23*a2 svarende til venstre side af begrænsning 1
I cellen b2 skrives +a1+3*a2 svarende til venstre side af begrænsning 2,
I cellen b3 skrives +a1 svarende til venstre side af begrænsning 3
I cellen b4 skrives +a2 svarende til venstre side af begrænsning 4,
I cellen c1 skrives objektfunktionen +5*a1+10*a2

Der bør nu stå 0 i alle cellerne.
Man vælger nu "problemløser"
Findes i Excel 2003 i menuen "funktioner"
Findes i Excel 2007: øverst til højre
Skriv i
"angiv målcelle": c1
"lig med" marker "maks"

"redigering af celler" : a1:a2
Tryk på tilføj. skriv b1 ≤ 4000 tryk på tilføj: skriv b2 ≤ 400 tryk på tilføj: skriv b3 ≥ 40
tryk på tilføj: skriv b4 ≥ 25 OK
Vælg "indstillinger", Marker "Antag lineær model" og "Antag ikke negativ" OK
Tryk på "løs" Nu skrives forhåbentlig at en løsning er fundet.
Under "Rapporter" marker "Svar", "Sensitivitet" (Grænse giver intet nyt, så den udelades)
Nederst i regnearket ses de to rapporter

Tolkning af rapporterne.
Rapporten "Svar"

Celle	Navn	Oprindelig værdi	Slutværdi
C1		0	1625

Celle	Navn	Oprindelig værdi	Slutværdi
A1		0	175
A2		0	75

Celle	Navn	Celleværdi	Formel	Status	Overskydende
B1		4000	B1<=4000	Bindende	0
B2		400	B2<=400	Bindende	0
B3		175	B3>=40	Ikke bindende	135
B4		75	B4>=25	Ikke bindende	50

Det ses heraf, at A1 får værdien 175 og A2 værdien 75, og at maksimum er 1625
Konklusion:
Man skal sende 175 stykker ammunnition af typen A og 75 stk ammunition af typen B for at få den største nyttevirkning. Nyttevirkningen bliver u = 1625

Endvidere, at B1= 4000 og B2 = 400. Dette betyder, at vi medbringer det maksimalt tilladte mængde ammunition, både hvad angår vægt og areal. Geometrisk betyder det, at maksimumspunktet ligger på de to linier (1) og (2). (se nedenstående figur)

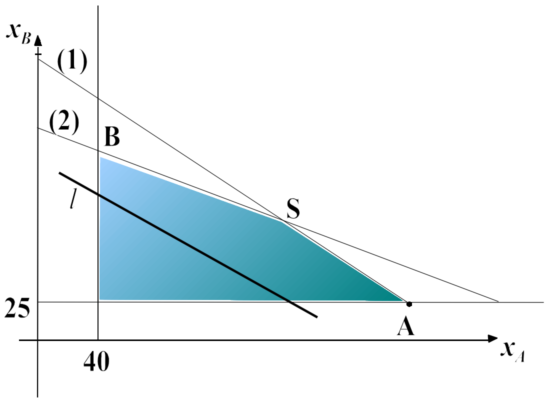


Fig 1.2 . *Begrænsninger og niveaukurve*

B3 = 175, dvs. vi er 135 kasser A over det minimum på 40 kasser man ønskede.
B4 = 75, dvs. vi er 50 kasser B over det minimum på 25 kasser man ønskede.

Sensitivitet

Justerbare celler

Celle	Navn	Slut-værdi	Reduceret omkostning	Mål-koefficient	Tilladelig forøgelse	Tilladeligt fald
A1		175	0	5	0,652173913	1,666666667
A2		75	0	10	5	1,153846154

Betingelser

Celle	Navn	Slut-værdi	Skygge Pris	Betingelse Højre side	Tilladelige Forøgelse	Tilladelige Fald
B1		4000	0,3125	4000	800	720
B2		400	0,9375	400	93,91304348	61,53846154
B3		175	0	40	135	1E+30
B4		75	0	25	50	1E+30

Justerbare celler

Disse angiver, at planen ikke ændrer sig, selv om vore skøn af at den militære nytte af 1 stk ammuniton på henholdsvis 5 og 10 af A og B ikke var helt præcise. Vi ser således, at nytten af A kan stige fra 5 til 5 + 0.65 eller falde fra 5 til 5-1.67 uden at planen ændres.
Geometrisk betyder det, at linien *l* kan dreje sig så meget uden at man får et andet maksimums-punkt end S.

Betingelser

Ser vi på linien (1) på tegningen, så vil en forøgelse af højre side af ligningen $13\cdot x_A + 23\cdot x_B = 4000$ fra 4000 til større værdier bevirke en parallelforskydning af linien "opad" (se figur 1.4). Samtidig rykker maksimumspunktet S nedad indtil vi når punktet C.

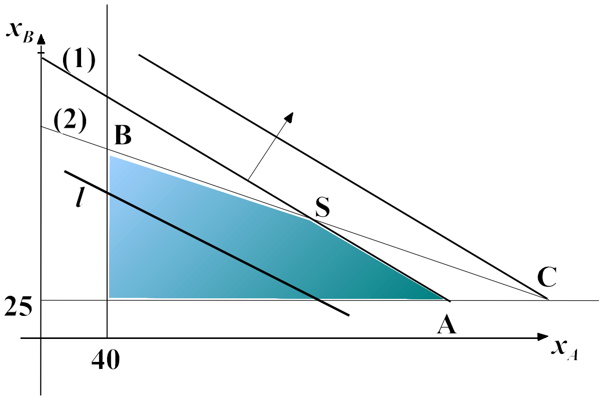


Fig 1.3 . *Parallelforskydning af* (1) *til C*

B1 begrænsningen fortæller os, er , at hvis vi er i stand til at øge vægtgrænsen på 4000 med 800 fra 4000 til 4800, (dvs S glider nedad til punktet C) så vil maksimumsnytten stige med "skyggeprisen" 0.3125 pr. ekstra stk. ammunition.
Tilsvarende tolkes de øvrige begrænsninger.

◆

Da vi gemmer de variable i Excel-cellerne a1, a2 osv. er det praktisk allerede ved formulering af problemet at benyte disse navne. Dette gøres i det følgende eksempel.

Eksempel 1.5. Eksempel 1. 1 regnet med Excel

Man skal under en militærøvelse forsyne 4 militærenheder A, B C og D med i alt 600 raketter. Raketterne er placeret i to lagre P og Q. Militærenhedernes behov og lagrenes kapacitet er angivet i følgende skema.
Af nedenstående skema kan f. eks. aflæses, at det tager 2 enheder brændstof , at transportere en raket fra lager P til militærenhedenhed B, og at P har et lager på 200 raketter, og at B har behov for 100 raketter.

Enhed / Lagre	A	B	C	D	Lagre
P	3	2	1	4	200
Q	2	4	6	3	450
Bestillinger	200	100	200	100	

En officer får til opgave at planlægge leveringen af raketter således, at udgifterne til brændstof bliver mindst mulig.
I eksempel.1 fandtes såvel objektfunktion som begrænsninger.

a) Angiv ved et tilsvarende skema som ovenfor hvorledes flytningen af raketterne skal ske, så udgifterne til brændstof bliver mindst mulig. Angiv endvidere hvad dette mindste brændstof-forbrug bliver.
b) Vurderingen af størrelsen af brændstofforbruget ved at transportere en raket fra P til C er ret usikker. Hvis forbruget ikke var 1 men 2 enheder, vil det så få betydning for den i punkt B angivne plan.
c) Hvilken ændring i den spørgsmål B angivne plan ville det have givet, hvis militærenhed C havde et behov på 230 raketter.

Løsning:
I nedenstående skema er a - værdierne antallet af raketter, der transporteres fra et lager til en enhed

Enhed / Lagre	A	B	C	D	Lagre
P	$3/\ a_1$	$2/\ a_2$	$1/\ a_3$	$4/\ a_4$	200
Q	$2/\ a_5$	$4/\ a_6$	$6/\ a_7$	$3/\ a_8$	450
Bestillinger	200	100	200	100	

Vi fandt i eksempel 1.1 en LP-plan. Denne oversætter vi nu til "Excelceller".

Objektfunktion:
Find minimum for $c1 = 3 \cdot a1 + 2 \cdot a2 + a_3 + 4 \cdot a4 + 2 \cdot a5 + 4 \cdot a6 + 6 \cdot a7 + 3 \cdot a8$

Begrænsninger

$b1 = a1 + a2 + a3 + a4 \qquad b1 \leq 200$

$b2 = a5 + a6 + a7 + a8 \qquad b2 \leq 450$

$b3 = a1 + a5 \qquad b3 = 200$

$b4 = a2 + a6 \qquad b4 = 100$

$b5 = a3 + a7 \qquad b5 = 200$

$b6 = a4 + a8 \qquad b6 = 100$

Excel-ordrer:
I cellerne a1 til a8 skrives startværdierne (vælg f. eks. 0 i alle celler)
I cellen b1 skrives +a1+a2+a3+a4
I cellen b2 skrives +a5+a6+a7+a8
I cellen b3 skrives +a1+a5
I cellen b4 skrives +a2+a6
I cellen b5 skrives +a3+a7
I cellen b6 skrives +a4+a8
I cellen c1 skrives objektfunktionen +3*a1+2*a2+a3+4*a4+2*a5+4*a6+6*a7+3*a8

Man vælger nu under menuen "funktioner" problemløser" og
skriv i "angiv målcelle": c1 i "lig med" marker "min"
ved redigering af celler : a1:a8
Tryk på tilføj. skriv b1 ≤ 200 tryk på tilføj: skriv b2 ≤ 450 tryk på tilføj: skriv b3 = 200
tryk på tilføj: skriv b4 = 100 tryk på tilføj: skriv b5 =200 tryk på tilføj: skriv b6 = 100 OK
Vælg "indstillinger", Marker "lineær model" og "ikke negativ" OK
Tryk på "løs" Nu skrives forhåbentlig at en løsning er fundet.
Under "Rapporter" marker "Svar" og "Sensitivitet" .
Nederst i regnearket ses de to rapporter.

Svar:

Målcelle (Min.)

Celle	Navn	Oprindelig værdi	Slutværdi
C1		0	1300

Justerbare celler

Celle	Navn	Oprindelig værdi	Slutværdi
A1		0	0
A2		0	0
A3		0	200
A4		0	0
A5		0	200
A6		0	100
A7		0	2,84217E-14
A8		0	100

Betingelser

Celle	Navn	Celleværdi	Formel	Status	Overskydende
B5		200	B5=200	Ikke bindende	0
B3		200	B3=200	Ikke bindende	0
B1		200	B1<=200	Bindende	0
B2		400	B2<=450	Ikke bindende	50
B4		100	B4=100	Ikke bindende	0
B6		100	B6=100	Ikke bindende	0

Sensitivitet

Justerbare celler

Celle	Navn	Slut-værdi	Reduceret omkostning	Mål-koefficient	Tilladelig forøgelse	Tilladeligt fald
A1		0	6	3	1E+30	6
A2		0	3	2	1E+30	3
A3		200	0	1	3	1E+30
A4		0	6	4	1E+30	6
A5		200	0	2	6	1E+30
A6		100	0	4	3	1E+30
A7		2,84217E-14	0	6	1E+30	3
A8		100	0	3	6	1E+30

Betingelser

Celle	Navn	Slut-værdi	Skygge Pris	Betingelse Højre side	Tilladelige Forøgelse	Tilladelige Fald
B5		200	6	200	50	0
B3		200	2	200	50	200
B1		200	-5	200	0	50
B2		400	0	450	1E+30	50
B4		100	4	100	50	100
B6		100	3	100	50	100

Svar på spørgsmål:

a) Det ses, af "Svar" at brændstofudgifterne bliver mindst, nemlig 1300 enheder, hvis flytningen af raketterne sker som vist på nedenstående skema som viser antallet af raketter, der transporteres fra et lager til en enhed

Enhed / Lagre	A	B	C	D	Lagre
P	0	0	200	0	0
Q	200	100	0	100	50
Bestillinger	200	100	200	100	

Endvidere fremgår det af "betingelser", at kun for begrænsning (2) gælder ulighedstegnet, dvs. i lager Q er der 50 raketter tilbage.

b) Under sensitivitet viser skemaet for de justerbare celler dels slutværdierne i cellerne, men også under "målkoefficient" brændstofforbruget".

Ved celle A3 står korrekt at brændstofforbruget tallet 1, som angiver brændstofforbruget ved at flytte en raket fra P til C. Under "tilladelig forøgelse" står 3. Dette betyder, at øger man brændstofforbruget fra 1 op til 4 enheder giver det ingen ændring i planen.

Øges brændstofforbruget derfor til 2 enheder , er flytningen af raketterne den samme som i spørgsmål a) og da "Reduceret omkostning" er 0, vil der kun ske at 200 raketter giver en forøgelse af brændstofudgifterne på $1 \cdot 200 = 200$ enheder.

(Af den reducerede omkostning ses, at hvis vi (i modstrid med planen) alligevel sendte en raket fra P til A, så vil det forøge brændstofforbruget med 6 enheder.)

c) Begrænsningen B5 (den begrænsning, der sagde, at militærenhed C skulle have 200 raketter) vil så blive øget fra 200 til 230.

Under sensitivitet viser skemaet for "Betingelser", at en "tilladelig forøgelse" er 50

Vi kan altså godt forøge antallet med op til 50 raketter, uden at planen iøvrigt ville have ændret sig.
Ved at sætte tallet op til 230 raketter, så vil det eneste der vil ændre sig være, at der fra lager Q til C ville afgå 20 ekstra raketter, og så ville der kun være 30 tilbage i lager Q. Resten var uændret.
Skyggeprisen viser (ikke overraskende), at pr raket ville prisen stige med 6 enheder brændstof.

Opgaver

Opgave 1
Lad der være givet følgende LP-problem:

Maksimer $z = 2x_1 + 3x_2$
når $5x_1 + 2x_2 \le 20$,
$3x_1 + 6x_2 \le 30$
og $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

a) Find de værdier af x_1 og x_2 der gør værdien af z størst, og angiv størsteværdien for z.
b) Hvis objektfunktionen ændres til $z = 3x_1 + 3x_2$ vil det så ændre de i spørgsmål a) fundne værdier af x_1 og x_2.

Opgave 2
Lad der være givet følgende LP-problem
Bestem minimum for funktionen
$z = x_1 + 6x_2 + 2x_3$
under opfyldelse af begrænsningerne
$x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2$ (1)
$2x_1 + x_2 \le 4$ (2)
$3x_1 + 4x_3 \le 3$ (3)
og $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$

a) Find de værdier af x_1, x_2 og x_3 der gør værdien af z mindst, og angiv mindsteværdien for z.
b) En af begrænsningerne kunne udelades uden at det havde betydning for løsningen. Hvilken?
c) Hvor meget skal højresiden i den i spørgsmål b) fundne begrænsning ændres for at den får betydning for løsningen.

Opgave 3
Lad der være givet følgende LP-problem
Bestem minimum for funktionen
$z = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3$
under opfyldelse af begrænsningerne
$3x_1 - 4x_2 - 6x_3 \le 2$ (1)
$2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 11$ (2)
$x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 5$ (3)
og $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$

a) Find de værdier af x_1, x_2 og x_3 der gør værdien af z mindst, og angiv mindsteværdien for z.
b) En af begrænsningerne kunne udelades uden at det havde betydning for løsningen. Hvilken?

c) Hvor meget skal højresiden i den i spørgsmål b) fundne begrænsning ændres for at den får betydning for løsningen.

Opgave 4
En fabrik fremstiller i en afdeling to slutprodukter A og B, som kan sælges med nettofortjenester på henholdsvis 80 kr/ton og 180 kr/ton.
Både A og B skal passere 3 maskiner. Driftstimer og maksimal driftstid ses af skemaet:

	Driftstimer for 1 ton A	Drifttimer for 1 ton B	Største totale antal driftstimer pr uge for hver maskine
Maskine 1	1	6	36
Maskine 2	1	1	11
Maskine 3	2	1	20

Lad x_1 og x_2 betegne det antal ton, der produceres pr. uge af henholdsvis produkt A og B.
Planlæg produktionen så den giver størst overskud, dvs. find de værdier af x_1 og x_2 som giver størst overskud.

a) Angiv LP-problemets objektfunktion og begrænsninger
b) Løs problemet, dvs. angiv hvor mange ton A og B der skal produceres pr uge for at få det største overskud, samt værdien af dette overskud.
c) Vil det ændre produktionsplanen, hvis nettofortjenesten for produkt B falder til 100 kr/ton, mens nettofortjenesten på produkt A er uændret?.

Opgave 5
En logistikofficer skal planlægge en forsyning med to typer forsyningsgenstande A og B. Forsyningen skal ske med én helikopter, der dog er begrænset i løftekapacitet både hvad angår volumen og vægt. Der kan kun flyves én gang.
Helikopteren har en maksimal nyttevolumen på 2000 liter og kan højst løfte 900 kg. Forsyningsgenstande af typen A fylder 60 liter og vejer 24 kg pr stk. Forsyningsgenstande af typen B fylder 20 liter og vejer 18 kg pr. stk. Den militære nytte af typen A er dobbelt så stor som af typen B.
Logistikofficeren skal beregne det optimale antal af de to forsyningsgenstande, idet den militære nytte skal maksimeres.

a) Angiv LP-problemets objektfunktion og begrænsninger.
b) Løs problemet, dvs. angiv hvor mange forsyningsgenstande af typerne A og B der skal medbringes, for at den militære nytte kan blive så stor som mulig.
c) Vil det ændre ovennævnte plan, hvis man antager, at den militære nytte af typen A er 3 gange så stor som af typen B.

Opgave 6
Forsvaret skal gennemføre en række organisationsændringer i base- og støttestrukturen. I den forbindelse skal to ammunitionsdepoter A og B tømmes og ammunitionen overføres til to nye depoter C og D.
A indeholder 300 stk ammunition, og B indeholder 500 stk ammunition.
Flytningen medfører omkostninger for forsvaret. For 1 stk ammunition vil det koste 130 kr at flytte fra A til C og 150 kr at flytte fra A til D. Tilsvarende er flytteomkostningerne 220 kr fra B til C og 180 kr fra B til D.

Overførslen af ammunition fra de gamle depoter A og B til de nye depoter C og D skal ske for den for forsvaret billigste måde, idet de nye depoter hver skal indeholde mindst 200 stk ammunition.

a) Angiv LP-problemets objektfunktion og begrænsninger.
b) Løs problemet, dvs. angiv hvor mange stk ammunition der skal flyttes fra A og B til henholdsvis C og D, så flytteomkostningerne bliver så små som muligt.
c) Vil det ændre ovennævnte plan, hvis omkostningen ved at flytte 1 stk ammunition fra A til C stiger fra 130 kr til 140 kr ?
d) Vil det ændre ovennævnte plan, hvis der ønskes, at der i depot C skal anbringes mindst 350 stk ammunition ?

Opgave 7

I to havnebyer A og B står der henholdsvis 12 og 8 tankbiler. Bilerne, som er lige store, skal transportere olie til byerne S og T, men der må ikke sendes over 16 biler til nogen af de to byer. Afstanden (i km) fra A og B til S og T er

	S	T
A	30	60
B	20	40

Hvordan skal bilerne fordeles på de to byer, når de tilsammen skal køre det mindst mulige antal kilometer?

a) Angiv LP-problemets objektfunktion og begrænsninger.
b) Løs problemet, dvs. angiv hvor mange biler der skal køre fra A til S, fra A til T, fra B til S og fra B til T. Angiv endvidere det kørte antal km..
c) Vil det ændre ovennævnte plan, hvis man sletter den begrænsning, at der ikke må sendes over 16 biler til byen S?

Opgave 8

Søværnet har fået til opgave at stille et skib til rådighed for at kunne transportere forsyninger til et katestroferamt område.

Forsyningslagrene består af meget store mængder af 4 forskellige varetyper.

Nytteværdi, vægt og rumfang af 1 stk af hver af de tre varetyper fremgår af nedestående skema. Transportflyet har en maksimal transportkapacitet på 260 vægtenheder eller 300 volumenenheder.

	Varetype 1	Varetype 2	Varetype 3	Varetype 4
Vægt pr. stk.	4	2	3	5
Rumfang pr. stk.	3	5	4	2
Nytteværdi pr. stk.	1	3	1	2

En logistikofficer skal beregne det optimale antal af de 4 varetyper, idet nytteværdien skal maksimeres.

a) Angiv LP-problemets objektfunktion og begrænsninger
b) Løs problemet, dvs. angiv hvor mange stk af hver varetype der skal medbringes, så nytteværdien bliver så stor som muligt.
(Bemærk: Excel-løsningen er ikke et hele tal, så man må rette lidt på denne løsning)

Opgave 9

Under indsatsen i Afganistan består en eskadrille af 12 F16-fly. I eskadrillen planlægges en mission med det mål, at få en vigtig bro med omkringliggende installationer neutraliseret.
Under denne mission kan et F16-fly medbringe 2 stk. MK84-bomber eller 6 stk. MK82-bomber. Én MK-84 bombe vejer 2000 lbs og erfaringsmæssigt ved man, at 50% af sådanne bomber vil ramme målet. Én MK-82 bombe vejer 500 lbs og erfaringsmæssigt ved man, at $\frac{1}{3}$ af sådanne bomber vil ramme målet.
Til loadning af flyene forud for missionen kan højst anvendes 120 minutter. Én MK84-bombe loades på flyet på 7 minutter og 1 MK82-bombe loades på flyet på 1 minut. Den tjenestegørende CAT-gruppe kan kun loade 1 bombe ad gangen.
Eskadrillen ønsker den samlede bombelast (bombemasse), der forventes at ramme målet, maksimeret, hvorfor man gerne vil have oplyst det antal F16-fly, der skal oploades med henholdsvis 2 MK84-bomber og 6 MK82-bomber til missionen.

a) Angiv LP-problemets objektfunktion og begrænsninger.
b) Løs problemet, dvs. angiv det antal F16-fly, der skal oploades med henholdsvis 2 MK84-bomber og 6 MK82-bomber så den samlede bombelast der forventes at ramme målet, maksimeres. Angiv endvidere den samlede bombelast.
c) Vil det ændre ovennævnte plan, hvis man i stedet skønner, at også 50% af MK-82 bomberne rammer målet?

Opgave 10

Forsvaret deltaget med personel og materiel i en øvelse i Nordnorge. En dansk officer får til opgave at forsyne fire deployerede enheder A, B, C og D med nødgeneratorer. De deployerede enheders behov er henholdsvis 9, 6 , 7 og 9 nødgeneratorer.
Nødgeneratorerne er i det uvejsomme område placeret i to bunkers P og Q.
De to bunkers har henholdsvis 15 og 13 nødgeneratorer. Kun én nødgenerator ad gangen vil med helikopter kunne flyttes fra en bunker til en enhed. Af skemaet herunder fremgår de udgifter (i 100 kr) der er forbundet med levering af 1 nødgenerator.

	A	B	C	D
P	45	17	21	30
Q	14	18	19	31

Den danske officer har fået til opgave at planlægge leveringen af nødgeneratorer på en sådan måde, at udgifterne med leveringen minimeres.

a) Angiv LP-problemets objektfunktion og begrænsninger
b) Løs problemet, dvs. angiv hvor mange nødgeneratorer der skal flyttes fra P til A, fra P til B osv. så udgifterne bliver mindst. Angiv endvidere de samlede udgifter ved dette.
c) Da der er færre generatorer i lagrene end behovet, kan ikke alle behov opfyldes. Angiv hvilke enheder der ikke får deres behov dækket.

Opgave 11
FMT fordeler reservedele fra lagre på de tre flyvestationer til de respektive eskadriller.
Fem eskadriller A, B, C, D og E efterspørger henholdsvis 11, 17 , 7, 17 og 24 stykker af samme reservedel til levering på samme tidspnkt. Lagrene på flyvestationerne Skrydstrup, Karup og Aalborg har henholdsvis 19, 28 og 25 eksemplarer af reservedelen til levering på det pågældende tidspunkt. Hver reservedel skal transporteres seperat på en blokvogn. Prisen (i 100 kr) for transport af en reservedel fra flyvestationslageret til eskadrille fremgår af følgende skema:

	A	B	C	D	E
Skrydstrup	42	42	44	40	44
Karup	34	42	40	46	48
Aalborg	46	44	42	48	46

Der skal opstilles et transportskema, således at den samlede transportpris minimeres.
a) Angiv LP-problemets objektfunktion og begrænsninger
b) Løs problemet, dvs. angiv hvor mange reservedele der skal flyttes fra Skrydstrup til A, til B osv. så udgifterne bliver mindst. Angiv endvidere de samlede udgifter ved dette.
c) Da der er færre reservedele i lagrene end behovet, kan ikke alle behov opfyldes. Angiv hvilke enheder der ikke får deres behov dækket.

Opgve 12
Tre legeringer L_1, L_2 og L_3 ønskes blandet til en ny legering.
Der ønskes fremstillet i alt 10 tons af denne nye legering, og den skal indeholde mindst 15% zink og højst 37% tin (vægtprocent).
Sammensætning og priser er angivet i nedenstående tabel:

	L_1	L_2	L_3
Tin	40%	40%	30%
Zink	30%	20%	10%
Andet	30%	40%	60%
Pris i 1000 i kr/ton	11	2	1

Find den blanding af L_1, L_2 og L_3, der tilfredsstiller ovennævnte krav og er billigst.

Facitliste for udvalgte opgaver

Kapitel 1

1) (a) $x_1 = 2.5,\ x_2 = 3.75$, z = 16.75 (b) nej

2) (a) $x_1 = 1,\ x_2 = 0.5,\ x_3 = 0$ (b) begrænsning (2) (c) fra 4.5 til 2.5

3) (a) $x_1 = 0,\ x_2 = 4,\ x_3 = 3.5$ (b) begrænsning (1) (c) under -37 (d) -5 nej, -2 ja

4) (a) - (b) $x_1 = 6,\ x_2 = 5$, z = 1380 (c) uændret

5) (a) - (b) Antal af A: 30, af B: 10 (c) nej

6) (a) - (b) 300 fra A til C, 500 fra B til D, (c) nej (d) ja

7) (a) - (b) 12 fra A til S, 4 fra B til S, 4 fra B til T (c) nej

8) (a) - (b) 47 stk af type 2 og 33 stk af type 4

9) (a) - (b) 6 fly med MK84 og 6 fly med MK 82 (c) nej

10) (a) - (b) P til A: 0, P til B 6, P til C 3 osv. Mindste udgift 547 (c) D

11) (a) - (b) S til A: 0, K til A 11, Aa til A 0 osv. Mindste udgift 287800 kr (c) E

(12) (a) - (b) L_1 : 0, L_2: 5 $L_{3:5}$

STIKORD