MOGENS ODDERSHEDE LARSEN

MATRICER

og

LINEÆRE LIGNINGER

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

6. udgave 2016

FORORD

Dette notat viser hvorledes man kan dels kan løse lineære ligningssystemer ved Gaussmetode (håndregning), dels ved anvendelse af matrixregning. Yderligere vises hvorledes man kan løse overbestemte ligningsystemer (regression).

Regnemidler:
I dette notat er der i eksemplerne vist hvorledes beregningerne kan foretages med programmet TI-Nspire-CAS .

Ønskes bevis for en række af sætningerne i notatet kan henvises til lærebogssystemet "B. Hellesen, M. Oddershede Larsen : Matematik for Ingeniører" Bind 3 kapitlerne 16, 17 og 18. Bøgerne kan i pdf-format findes på adressen www.larsen-net.dk

På denne adresse findes også en række bøger, der behandler forskellige emner indenfor såvel grundlæggende som videregående matematik og statistik.

6. juli 2016 Mogens Oddershede Larsen

INDHOLD

1 Indledning

Ved problemer, hvis løsning kræver, at man opererer med et større antal sammenhørende lineære ligninger (førstegradsligninger), kan man med fordel anvende matrixregning.
Da det matematiske problem i sådanne tilfælde alene er bestemt af de konstanter, der forekommer i ligningssystemet, og ikke af de betegnelser vi giver de variable, er det praktisk ved behandlingen af ligningssystemerne blot at se på "skemaer" (såkaldte matricer) indeholdende konstanterne.

Eksempelvis vil man ved behandlingen af ligningssystemet

$$\begin{cases} \quad\;\; 3x_2 - 4x_3 - \;\; x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 \qquad\quad - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 \qquad\;\; - 3x_4 = -2 \end{cases}$$

med fordel kunne se på matricerne

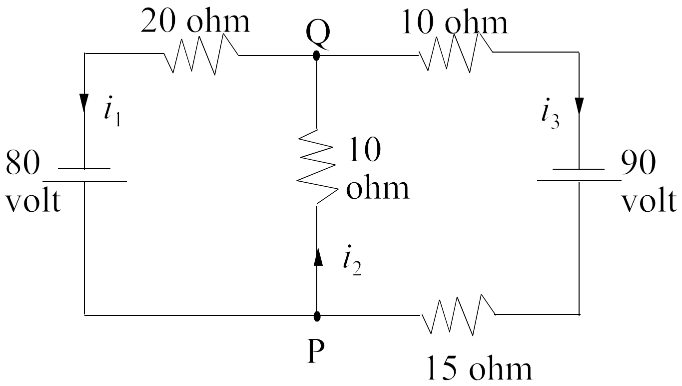
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$ (ligningssystemets "koefficientmatrix")

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$ (ligningssystemets "højre side")

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -4 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$ (ligningssystemets "totalmatrix").

Større systemer af ligninger forekommer f.eks. ved mange procestekniske beregninger, hvor man opstiller et system af "balanceligninger" (stofbalancer, energibalancer, økonomiske balancer, osv.), eller ved beregning af modstande og spændinger i elektriske kredsløb.

Et meget enkel eksempel herpå er følgende elektriske kredsløb:



Ved benyttelse af Kirchoffs strømlov fås

I punktet P: $i_1 - i_2 + i_3 = 0$

I punktet Q: $-i_1 + i_2 - i_3 = 0$

Højre kreds: $10i_2 + 25i_3 = 90$

Venstre kreds: $20i_1 + 10i_2 = 80$

Ligningssystemet der består af 4 ligninger med 3 ubekendte er så simpelt, at man umiddelbart kan løse det. Lidt større kredsløb vil føre til flere ligninger med mange ubekendte, og her vil den følgende matrixteori være nødvendig.

2. Lineære ligningssystemer

At et ligningssystem er lineært betyder, at de ubekendte alle er af første grad. Et ligningssystem hvori der forekommer x^2 er således ikke lineært.

Ved såkaldt Gauss-elimination kan man løse alle typer af lineære ligningssystemer uanset antallet af ligninger og ubekendte

Et eksempel på et sådant ligningssystem er

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_5 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 18x_5 = 6 \end{cases}$$

som har $n = 4$ ligninger med $m = 5$ ubekendte.

Man starter nu med at opskrive ligningssystemets "totalmatrix" T

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Løsningsmetoden er, at man ved passende såkaldte rækkeækvivalente operationer simplificerer ligningssystemet til et system, hvoraf man let kan finde de ubekendte.

Rækkeækvivalente operationer.
Et lineært ligningssystems løsningsmængde ændrer sig ikke, hvis

a) to ligninger ombyttes - svarende til rækkeombytning i totalmatricen T,
b) en ligning multipliceres med en konstant $k \neq 0$ - svarende til at en række i T multipliceres med $k \neq 0$.
c) en ligning L_p erstattes af ligningen $L_p + k \cdot L_q$ - svarende til at den q`te række i T multipliceres med k og adderes til den p`te række ($p \neq q$).

Punkterne a), b) og c) kaldes <u>rækkeoperationer</u> i totalmatricen T

Eksempel 2.1. Rækkeækvivalente operationer.
Ligningsystemet

$\begin{cases} r_1: \; 2x+3y=13 \\ r_2: \; 5x-2y=4 \end{cases}$ har løsningen x= 2 y= 3 (ses ved indsættelse)

a) $\begin{cases} 5x-2y=4 \\ 2x+3y=13 \end{cases}$ (r_1 ombyttet med r_2) har samme løsning.

b) $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 10x-4y=8 \end{cases}$ (2 r_2) har samme løsning.

c) $\begin{cases} 17x-3y=25 \\ 5x-2y=4 \end{cases}$ $(r_1 + 3 \cdot r_2)$ har samme løsning.

◆

To matricer A og B er <u>rækkeækvivalente</u> (skrives $A \approx B$), hvis de overføres i hinanden ved èn eller flere af de i punkterne a), b) og c) nævnte ændringer.

Echelon - matrix
Ideen i den såkaldte Gauss' elimination er, at man ved rækkeækvivalente operationer omdanner ligningssystemets totalmatrix til en såkaldt "echelon-matrix", hvorefter ligningssystemets løsning er nem at finde.

En matrix af typen $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ kaldes en echelon-matrix

(echelon = trinvis opstilling med skrå front). En sådan matrix er karakteriseret ved

1) at rækker, som består af lutter 0`er placeret nederst i matricen.

og for de øvrige rækker gælder

2) at i en række er det første fra 0 forskellige tal i rækken et 1-tal. Tallet kaldes for rækkens pivot-element, eller "ledende" 1-tal.
3) at for to på hinanden følgende rækker vil pivotelementet i den nederste af de to rækker stå længere til højre end pivotelementet i den øverste af de to rækker.

Andre eksempler på “echelon-matricer” er

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bemærk: Ethvert pivotelement har lutter 0`er under sig.

Gauss’ elimination

Det følgende eksempel viser Gauss eliminationsmetode på et mindre ligningssystem:

Eksempel 2.2. Gauss elimination

Løs ligningssystemet

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 10 \\ 7x_1 - 10x_2 + 5x_3 = 21 \end{cases}$$

Vi reducerer nu totalmatrix til echelon-form.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 10 \\ 7 & -10 & 5 & 21 \end{bmatrix}$$

Da vi skal have et 1-tal øverst og gerne vil undgå brøker flyttes række 2 op som række 1

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & 10 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 7 & -10 & 5 & 21 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}r_1]{} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 7 & -10 & 5 & 21 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2 - 3r_1 \\ r_3 - 7r_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 11 & -9 & -14 \\ 0 & 11 & -9 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - r_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 11 & -9 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{11}r_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{11} & -\frac{14}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi har: $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 7x_1 - 10x_2 + 5x_3 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_2 - \frac{9}{11}x_3 = -\frac{14}{11} \end{cases}$

Der er følgelig uendelig mange løsninger, idet en af de variable kan vælges frit.

Vælges x_3 som fri variabel fås $x_2 = -\frac{14}{11} + \frac{9}{11}x_3$, $x_1 = 5 + 3\left(-\frac{14}{11} + \frac{9}{11}x_3\right) - 2x_3$ eller

$$\underline{\underline{x_1 = \frac{13}{11} + \frac{5}{11}x_3, \quad x_2 = -\frac{14}{11} + \frac{9}{11}x_3, \quad x_3 \ fri}}$$

(Dette skyldes, at $r_3 = 2 \cdot r_1 + r_2$, dvs. reelt er der kun to ligninger med 3 ubekendte.

Eksempel 2.3 Ligningssystemers løsninger

Lad der være fundet følgende echelonmatricer

$$A=\begin{bmatrix}1&4&3&6\\0&1&1&3\\0&0&1&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&5&6&2\\0&1&2&7\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&6&6&4\\0&0&1&5\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1&5&4&3&8\\0&1&2&4&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Angiv om det tilsvarende ligningssystem har 1 løsning, ingen løsning eller uendelig mange løsninger. Hvis der er uendelig mange løsninger skal angives antallet af frie variable (variable der kan angives frit)

Løsning:

A: Netop én løsning, da der er et pivotelement i alle tre rækker i koefficientmatricen.

B: Uendelig mange løsninger, da antallet af ubekendte $m = 3$ er større end antallet af ligninger $n = 2$.
Antal parametre er $m - n = 1$ (jævnfør eksempel 6.2)

C: Ingen løsning, da en række har lutter 0 -er i koefficientmatricen, men et tal forskelligt fra nul på højre side ($0\,x = 1$).

D: Uendelig mange løsninger, da antallet af ubekendte $m = 4$ er større end antallet af ligninger $n = 2$. Antal frie variable er $m - n = 2$

Rang af matrix

Rangen af en matrix er lig med antallet af "uafhængige" rækker i matricen.
Rangen er derfor lig med antallet af ikke-nul rækker i en tilsvarende echelon-matrix.
Rangen af A skrives kort $\rho(A)$ eller rang(A).

Eksempel 2.4 (fortsat)

$\rho(A) = 3$ rang (koefficientmatrix) = 3, antal ubekendte=3 så netop 1 løsning

$\rho(B) = 2$ rang (koefficientmatrix)=2 , antal ubekendte =3 . 3 -2 = 1 fri variabel

$\rho(C) = 3$ rang (koefficientmatrix) =2 : antal ubekendte =3. Da 2 < 3 så L=Ø

$\rho(D) = 2$ rang (koefficientmatrix) =2: antal ubekendte = 4. 4-2 = 2 fri variable.

For større ligningssystemer er det meget tidsbesparende at benytte et program der kan omdanne en matrix til en echelon matrix. Imidlertid er det her arbejdsbesparende at reducere matricen yderligere ved at skaffe 0'er også over pivotelementerne.
Metoden forkortes til "rref" (reduced row echelon matrix)
Vi viser dette på samme ligningssystemet som i eksempel 2.2.

Eksempel 2.4. Gauss elimination ved TI-Nspire
Løs ligningssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 7x_1 - 10x_2 + 5x_3 = 21 \end{cases}$$

Løsning:
Totalmatricen indtastes. Lad matricens navn være t.
TI-Nspire: Beregninger ▶Skriv t:= ▶Matematikskabeloner ▶Tryk på matrix▶Angiv antal rækker og søjler ▶ok (ønskes facit på samme linie se kapitel 10 side 29)

$$t := \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & 10 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 7 & -10 & 5 & 21 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & 10 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 7 & -10 & 5 & 21 \end{bmatrix}$$

Skriv rref(t) (eller benyt Matrix og Vektorer▶ Reduceret række echelon form▶ t)

$$\text{rref}(t) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{11} & \frac{13}{11} \\ 0 & 1 & \frac{-9}{11} & \frac{-14}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Heraf fås $x_2 = -\frac{14}{11} + \frac{9}{11}x_3$, $x_1 = \frac{13}{11} + \frac{5}{11}x_3$, x_3 fri altså samme facit som i eksempel 2.1.

◆

Vi vil illustrere de forskellige løsningsmuligheder ved yderligere tre eksempler.

Eksempel 2.5. Netop en løsning

Løs ligningssystemet $\begin{cases} 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_4 = -2 \end{cases}$

Løsning:
Totalmatrix indtastes og kaldes t

$\text{rref}(t) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Heraf ses, at $\underline{\underline{x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1}}$

◆

Eksempel 2.6. Uendelig mange løsninger

Løs ligningssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_5 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 18x_5 = 6 \end{cases}$$

Løsning:

$$\operatorname{rref}\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 18 & 6 \end{bmatrix}\right) \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da rang(K) = rang(T) = 3 og antal ubekendte er 5, er der 5 - 3 =2 fri variable

Vi får: $x_5 = \frac{1}{3}$, $x_3 + 2x_4 = 0 \Leftrightarrow x_3 = -2x_4$,

$x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3x_2 - 4x_4$

$\underline{\underline{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-3x_2 - 4x_4, x_2, -2x_4, x_4, \frac{1}{3})}}$ ◆

Eksempel 2.7. Ingen løsning

Løs ligningssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4 \\ -x_1 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Løsning:

$$\operatorname{rref}\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\right) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da rang(K) = 3 < rang(T) = 4 har <u>ligningssystemet ingen løsning</u>.

(nederste ligning giver $0 \cdot x_3 = 1$) ◆

3. Matricer.

Ved en matrix forstås et regulært skema bestående af tal eller bogstavsymboler.

De enkelte symboler kaldes matricens elementer, og vil i denne bog være reelle tal.

Matricen $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ har 4 rækker og 4 søjler.

Man siger kort, at den er en 4 "gange" 4 matrix (4 *x* 4) matrix

Matricer, der som A har lige mange rækker og søjler kaldes **kvadratiske**.

Matricen $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ har 4 rækker og 1 søjle (er en (4 x 1) matrix).

Matricer, der som B kun har 1 søjle, kaldes også for **søjlematricer** eller søjlevektorer.
Ombyttes rækker og søjler i en matrix C, (1. række bliver til 1. søjle, 2. række bliver til 2. søjle osv.) fremkommer C's **transponerede matrix** C^T.

Eksempelvis har matricen $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 10 \\ 2 & 9 & 8 \\ 4 & 7 & 12 \end{bmatrix}$ den transponerede matrix $C^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 7 \\ 0 & 10 & 8 & 12 \end{bmatrix}$

Af definitionen følger: $(A^T)^T = A$.

TI-Nspire: Opret matrix C (se evt. metode side 6)
Transponeret matrix C^T: Skriv c ▶ Vælg i menu Matricer og Vektorer ▶ Transponere

Er $A^T = A$ kaldes *A* **symmetrisk**.
En symmetrisk matrix må nødvendigvis være kvadratisk.

Mere generelt skrives en matrix $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$

De enkelte symboler kaldes matricens elementer, og vil i dette notat være reelle tal.
I skemaets *m* (vandrette) rækker og *n* (lodrette) søjler indgår $m \cdot n$ tal, nummererede med dobbelte indekser, således at første indeks angiver rækkenummer, og andet indeks angiver søjlenummer. Elementet a_{rs} står således i den r`te række og den s`te søjle. Man siger kort, at A er en *m* gange *n* matrix (skrives *m x n*)

Elementerne a_{11}, a_{22}, a_{33} ……., osv. (dvs. elementerne hvor rækkenummeret = søjlenummeret) siges at udgøre matricens **diagonal.**

I $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 10 \\ 2 & 9 & 8 \\ 4 & 7 & 12 \end{bmatrix}$ er $c_{23} = 10$ og diagonalen er1, 6 , 8

$D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ er symmetrisk, da matricen er symmetrisk om diagonalen.

4. Regneregler for matricer

Lighed

To m *x* n matricer *A* og *B* kaldes ens (skrives *A* = *B*), hvis tilsvarende elementer i de to matricer er ens.

Eksempelvis er $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ens.

Multiplikation af matrix med tal (skalar).

For et vilkårligt reelt tal k og en vilkårlig matrix A defineres k A som en ny matrix, fremkommet ved at alle A`s elementer er multipliceret med k.

Eksempelvis gælder $3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 9 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$.

Addition af matricer.

Ved summen af to *m x n* matricer A og B forstås den *m x n* matrix, der fremkommer ved at tilsvarende elementer i A og B adderes.

Eksempelvis $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Det ses umiddelbart, at A + B = B + A (den kommutative lov gælder)

og A + (B + C) = (A + B) + C (den associative lov gælder)

<u>Bemærk:</u> Både A og B skal være *m x n* matricer.

Multiplikation af matricer
Lad der være givet to matricer A og B, hvor antallet af søjler i A er lig antallet af rækker i B. Elementerne i matricen $C = A \cdot B$ beregnes ved en "række-søjle multiplikation, dvs. hvis rækkerne i A opfattes som vektorer, og søjlerne i B ligeledes som vektorer, så fremkommer et element i C ved at rækkerne i A multipliceres skalært med søjlerne i B. Følgende eksempel illustrerer dette.

Eksempel 4.1. Multiplikation af matricer.

Lad $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. Beregn $A \cdot B$ og $B \cdot A$, hvis det er muligt.

Løsning:

$$AB = \begin{bmatrix} 5\cdot(-1)+1\cdot 1+(-2)\cdot 2 & 5\cdot 0+1\cdot 2+(-2)\cdot 1 & 5\cdot(-1)+1\cdot 2+(-2)\cdot(-2) & 5\cdot 2+1\cdot 3+(-2)\cdot(-1) \\ 3\cdot(-1)+1\cdot 1+7\cdot 2 & 3\cdot 0+1\cdot 2+7\cdot 1 & 3\ (-1)+1\cdot 2+7\cdot(-2) & 3\cdot 2+1\cdot 3+(7)\cdot(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} -8 & 0 & 1 & 15 \\ 12 & 9 & -15 & 2 \end{bmatrix}}}$$

$\underline{\underline{B \cdot A \text{ er ikke defineret da antal søjler i B er forskellig fra antal rækker i A.}}}$ ◆

TI-Nspire: Skriv a·b

Det ses ved udregning, at der gælder A · (B+C) = A · B+A · C   (den distributive lov)
De fleste af disse regneregler er ganske som regnereglerne for de reelle tal. Bemærk dog, at der ikke gælder nogen kommutativ lov for multiplikation, dvs. vi må normalt forvente, at $A \cdot B \neq B \cdot A$

5. Ligningssystem hvor koefficientmatrix er invertibel.

Vi vil i dette afsnit betragte lineære ligningssystemer, hvor der er lige mange ligninger og ubekendte, og som har netop én løsning. Et eksempel på et sådant ligningssystem er

$$\begin{cases} \quad\quad 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 \quad\quad - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 \quad\quad - 3x_4 = -2 \end{cases}$$

Dette ligningssystem kan nu skrives

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

eller kort K X = H, hvor

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$ er ligningssystemets koefficientmatrix

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ og } H = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$ er ligningssystemets højreside.

K er **kvadratisk**, da den har lige mange rækker og søjler

For at kunne løse en sådan ligning, ville det være godt, hvis der eksisterede en "invers" matrix A^{-1} så $A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$

Ligesom 0 ikke har noget inverst element i de reelle tal, findes der matricer, der ikke har en invers matrix.
Ved en **invertibel** matrix forstås en matrix, der har en invers matrix
Ved en **singulær** matrix, forstås en matrix, der ikke har en invers matrix.

Vi vil i dette kapitel kun betragte ligningssystemer, hvor den kvadratiske koefficientmatrix er invertibel.
Sammenlignes med en sædvanlig førstegradsligning $ax = 1 \Leftrightarrow x = a^{-1}, \quad a \neq 0$
ses, at man må indføre en matrix, som svarer til tallet 1.

DEFINITION af enhedsmatrix. *Ved en enhedsmatrix (skrives E eller E_n) forstås en kvadratisk n x n matrix, hvor alle elementer i diagonalen er* 1 *og alle elementer udenfor diagonalen er* 0.

Eksempelvis er $E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ en 4×4enhedsmatrix.

Ved direkte udregning ses, at for en vilkårlig *n x n* matrix A gælder $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$, dvs. enhedsmatricen E_n spiller samme rolle i mængden af kvadratiske *n x n* matricer, som 1 gør i de reelle tal.

DEFINITION af invers (reciprok) matrix. *Matricen A^{-1} kaldes invers matrix til matricen A, hvis $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$*
Man ser, at A^{-1} spiller samme rolle i forhold til A som f. eks. tallet $\frac{1}{2}$ gør i forhold til tallet 2. ($\frac{1}{2} \cdot 2 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$).

Man kunne forestille sig, at en matrix kunne have flere forskellige inverse matricer. Dette er imidlertid ikke tilfældet:

Bevis: Antag, at B og C begge er inverse matricer til A. Vi ville da få

$$B = B \cdot E = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = E \cdot C = C \qquad \text{dvs. } B = C .$$

Ved håndregning at beregne en invers matrix A^{-1} er så tidskrævende, at man altid for større matricer vil bruge et regneprogram.

Eksempel 5.1. Invers matrix

Find den inverse matrix til $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Løsning

a) Håndregning:

$$[A \vdots E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_2-2\cdot r \\ r_3-r_{[\ ]}}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_2-r_3 \\ r_1+r_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{-r_2 \\ -r_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Konklusion: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

b) **TI-Nspire** Matricen A indtastes

A $^{-1}$, ENTER Resultat: :

$$\mathbf{a}^{-1} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Har man først fundet A^{-1} er det hurtigt at finde løsningen til ligningssystemet A X = B, da

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow EX = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Eksempel 5.2. Løsning af ligningssystem

Løs ligningssystemet $\begin{cases} \quad\; 3x_2 - 4x_3 - \;\; x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 \qquad\;\; - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 \qquad\; - 3x_4 = -2 \end{cases}$

Løsning:
Vi har A X = B, hvor

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Matricerne A og B indtastes som angivet i eksempel 5.1

TI-Nspire: *X* findes ved indtastning af $A^{-1} \cdot B$

Vi får $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. dvs. $\underline{\underline{x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1}}$ ◆

6. Determinant

Til enhver kvadratisk $n \times n$ matrix A hører et tal kaldet **determinanten** for A.
Determinanter skrives kort det(A) eller $|A|$

Vi kender allerede for en 2×2 matrix determinanter, idet $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

Vi kender også dens geometriske betydning, idet determinanter numeriske værdi er arealet af det parallelogram der udspændes af de to rækkevektorer $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}$ og $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

Hvis determinanten er 0, vil de to vektorer være parallelle, dvs. $\vec{a}_1 = k \cdot \vec{a}_2$.
Det er overkommeligt på tilsvarende måde at udregne determinanten for en 3×3 determinant, hvis numeriske værdi er rumfanget af det parallelepipedum, der udspændes af de tre rækkevektorer.
Er determinanten 0 vil rumfanget være 0, dvs. vektorerne ligger i samme plan, hvilket igen vil sige, at den ene vektor kan udtrykkes ved de to andre $\vec{a}_1 = k_1\vec{a}_2 + k_2\vec{a}_3$
Man siger, at de 3 vektorer er lineært afhængige.

Generelt gælder, at hvis determinanten 0 er søjlevektorerne (og rækkevektorerne) lineært afhængige.

Beregningen af en determinant for en vilkårlig kvadratisk matrix kan principielt udføres på nedenfor beskrevne måde,(se eventuelt "Matematik for Ingeniører "bind 3, kapitel 18 for nærmere begrundelser), men er antal rækker stort, bliver regningerne så tidskrævende, at man må bruge et program .

Værdien af en determinant.

Værdien beregnes efter følgende forskrift:

1) Man udvælger en bestemt række r eller en bestemt søjle s

2) For hvert element a_{rs} i den valgte række eller søjle dannes et produkt af følgende 3 faktorer

   a) Elementet a_{rs} selv.

   b) Elementets "underdeterminant" D_{rs} , dvs. den determinant der fremkommer ved at slette både den række og søjle, hvori elementet indgår.

   c) Tallet $(-1)^{r+s}$

3) det(A) $(-1)^{r+1} \cdot a_{r1} \cdot D_{r1} + (-1)^{r+2} \cdot a_{r2} \cdot D_{r2} + ... + (-1)^{r+1} \cdot a_{rn} \cdot D_{rn}$

4) De fremkomne underdeterminanter opløses på tilsvarende måde, og sådan fortsættes til man når ned på 2×2 determinanter ,som kan udregnes direkte.

Eksempel 6.1 Beregning af determinant "ved håndregning"

Beregn ved håndregning determinanten D = $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

Løsning:

Man finder en række eller søjle med mange 0-er. Her vælges 3 række.

Vi har D = $(-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{3+3} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} + 0$

De 2 underdeterminanter efter henholdsvis 3 række og 1 række (fordi der er et 0 i disse rækker).

D = $(-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{3+3} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \left(0 + (-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \right)$

Vi kan nu udregne de 4 determinanter

D = $3 \cdot (8-4) - 3 \cdot (-12-8) - 2 \cdot ((-3) \cdot (-9-2) - (9-2)) = 12 + 60 - 2 \cdot (33-7) = \underline{\underline{20}}$

Eksempel 6.2. Beregning af determinant med TI-Nspire

Beregn determinanten T = $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

Løsning:

Matricen indtastes.

TI-Nspire: Skriv det(T) (eller vælg under "Matricer og vektorer" menuen determinant)

Resultat: 20

Det kan vises

Sætning 6.1. Invertibel matrix

***A* er invertibel** $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Denne sætning er nyttig til at afgøre om en kvadratisk matrix er invertibel (benyttes i næste afsnit).

7. Lineære ligningssystemer med parameter.

Benytter man eksempelvis Laplacetransformation til løsning af et differentialligningssystem, fremkommer et lineært ligningssystem, hvor koefficienterne sædvanligvis vil indeholde parameteren s, altså ikke alle være reelle tal.
Ligningssystemer som indeholder én eller flere parametre vil ofte give anledning til, at der for visse værdier af parametrene vil være specielle løsninger, f.eks. at der ingen løsninger er, eller der er uendelig mange. Regner men "i hånden" skal man derfor i forbindelse med reduktion til en echelon-matrix være opmærksom på, om man for visse værdier af parameteren dividerer med 0, da det så giver anledning til en undtagelse.

Benyttes et program, og er der lige mange ligninger og ubekendte, vil det sikreste være først at finde de værdier af parametrene, hvor determinanten af koefficientmatrix K er nul, da det viser, hvor ligningssystemet er singulært (ikke regulært).
Hvis man kun anvender rref-echelon-metoden, kan man risikere at overse en værdi af parameteren a, der gør K singulær.
Eksempelvis vil echelon-metoden reducere $(a-1)\cdot x_4 = 5(a-1) \Rightarrow x_4 = 5$ og derved vil man overse, at a = 1 gør K singulær.
Dette illustreres i eksempel 7.2
Hvis der også findes en parameter på højre side af ligningssystemet kan rref dog stadig risikere at dividere den væk, hvorved man kan tabe en løsning.
Det sikreste er derfor i tvivlstilfælde at regne i "hånden"

Eksempel 7.1 Ligningssystem med parameter
Find for enhver værdi af parameteren a løsningen til ligningssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 1 \\ -x_1 \qquad + ax_3 = -2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

Løsning:
Da koefficientmatrix er kvadratisk, beregnes først determinanten for koefficientmatrix, for at finde de værdier af parameteren a for hvilke ligningssystemet er "singulært".

Koefficientmatrix K = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ -1 & 0 & a \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ indtastes på sædvanlig måde.

Determinanten af K beregnes (som i eksempel 6.2):
Resultat: $|K| = -8(a-1)$.

Heraf ses, at $|K| = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

Vi må derfor dele op i 2 tilfælde $a \neq 1$ og $a = 1$.
Højre side B af ligningssystemet indtastes på sædvanlig måde.

TI-Nspire Skriv rref(augment(k,b)) : Totalmatricen dannes ved ordren augment (K,B)

Resultat: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2-\dfrac{1}{2(a-1)} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{2(a-1)} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-1}{2(a-1)} \end{bmatrix}$

$$\underline{\underline{x_1 = \frac{3}{2}-\frac{1}{2(a-1)},\quad x_2 = \frac{1}{2(a-1)},\quad x_3 = \frac{-1}{2(1-a)}}} \qquad \text{for } a \neq 1$$

Sættes a = 1 ind i totalmatricen , fås analogt echelon-matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Af nederste ligning $0 \cdot x_3 = 1$ ses, at ligningssystemet ingen løsning har.

At det virkeligt er nødvendigt først at se på determinanten ses af følgende eksempel.

Eksempel 7.2 Ligningssystem med parameter

Til beregning af 4 størrelser x_1, x_2, x_3 og x_4 er opstillet følgende ligningssystem:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + (a-3)\cdot x_3 + (a+1)\cdot x_4 = 3 \\ 2\cdot x_1 + x_2 + (2a-1)\cdot x_3 = a \\ (a-1)\cdot x_1 + a\cdot x_2 + (2a-3)\cdot x_4 = -a-1 \\ 3\cdot x_1 + 2x_2 + (a+2)\cdot x_3 - x_4 = a-2 \end{cases}$$

Løs ligningssystemet for alle værdier af a.

Løsning:

Først beregnes determinanten til koefficientmatrix K = $\begin{pmatrix} -1 & -1 & a-3 & a+1 \\ 2 & 1 & 2a-1 & 0 \\ a-1 & a & 0 & 2a-3 \\ 3 & 2 & a+2 & -1 \end{pmatrix}$

Koefficientmatrix K og højre side B indtastes på sædvanlig måde.
Man får det(K) = $a\cdot(a-2)\cdot(a+2)$
Heraf ses, at K er singulær for a = 0, a= 2 og a = -2.

TI-Nspire: Dannes totalmatricen T og anvendes rref(T) fås
Vi får for $a \neq 0 \wedge a \neq 2 \wedge a \neq -2$

$$\underline{\underline{x_1 = \frac{13a+6}{a(a+2)}+a-4,\quad x_2 = \frac{-10(2a+1)}{a(a+2)}-(a+4)+8,\quad x_3 = \frac{2(a+1)}{a(a+2)},\quad x_4 = \frac{1}{a}}}$$

Som det ses ville vi her ikke opdage, at der er en singularitet for a = 2.
Vi indsætter nu a= 0 analogt som i eksempel 7.1 og finder :Ingen løsninger
Derefter indsættes a = - 2 og man finder igen Ingen løsninger
Endelig indsættes a=2 og man finder uendelig mange løsninger $\underline{\underline{x_4 = \frac{1}{2},\ x_3 = t,\ x_2 = -5+t,\ x_1 = \frac{7}{2}-2t}}$

8. Cramers sætning (determinantmetoden).

I kapitel 5 løste vi et ligningssystem med lige mange ligninger og ubekendte hvor koefficient-matrix var invertibel.
Dette er den hurtigste metode, hvis man ønsker at finde alle de ubekendte. Hvis man kun ønsker at finde en enkelt variabels værdi f.eks. x_5 kan denne determinantmetode (Cramers metode) dog være velegnet. Endvidere har den stor teoretisk interesse.

Cramers sætning.

Lad der være givet et ligningssystem A X = B, hvis $\det(A) \neq 0$.

Den ubekendte x_k *findes som forholdet mellem 2 determinanter. Nævneren er determinanten af A og tælleren er determinanten af den matrix, som er A bortset fra, at den k'te søjle er erstattet af ligningssystemets højre side.*

Det følgende eksempel illustrerer metoden.

Eksempel 8.1. Determinantmetoden eller Cramers metode.

Find x_2 af ligningssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4 \\ -x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = -1 \end{cases}$$

Løsning:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}$$

De to matricer svarende til tæller og nævner indtastes benævnes A og B.
Man beregner nu det(A)/det(B) Resultat $\underline{\underline{x_2 = -1}}$ ◆

9. Overbestemt ligningssystem

I de foregående afsnit har vi antaget, at ligningssystemets konstanter er eksakte tal. I tekniske anvendelser er tallene ofte behæftet med måleusikkerhed og lignende, og så vil løsningen naturligvis heller ikke blive eksakt. For at mindske fejlen, benytter man ofte ekstra ligninger, som vist i følgende eksempel (og løser dem ved "mindste kvadraters metode").

Eksempel 9.1. Overbestemt ligningssystem.
På et laboratorium analyseres en blanding af tre organiske stoffer kvantitativt ved måling af et ultraviolet spektrum. Heraf fås følgende ligningssystem for koncentrationerne c_1, c_2 og c_3.

$$\begin{cases} 1.2c_1 + 1.0c_2 + 4.1c_3 = 6.3 \\ 1.3c_1 + 3.2c_2 + 1.1c_3 = 8.4 \\ 0.9c_1 + 1.1c_2 + 0.2c_3 = 4.5 \end{cases}$$

Ligningssystemet har netop én løsning, men da konstanterne er behæftet med uundgåelige småfejl (målefejl m.m.) , ønsker man at forbedre nøjagtigheden af løsningen ved at foretage nogle ekstra målinger.
Lad os for simpelheds skyld antage, at der kun forekommer yderligere én ligning:
$1.2c_1 + 3.5c_2 + 3.9c_3 = 10.4$.
Den sidste ligning burde være en linearkombination af de tre første, men på grund af målefejlene er dette sjældent tilfældet, så det samlede ligningssystem har normalt ingen eksakt løsning.
Opgaven er nu at finde et talsæt (c_1, c_2, c_3), som tilfredsstiller ligningssystemet "bedst muligt", dvs. således at residualerne (resterne) r_1, r_2, r_3 og r_4 givet ved

$$\begin{cases} r_1 = 1.2c_1 + 1.0c_2 + 4.1c_3 - 6.3 \\ r_2 = 1.3c_1 + 3.2c_2 + 1.1c_3 - 8.4 \\ r_3 = 0.9c_1 + 1.1c_2 + 0.2c_3 - 4.5 \\ r_4 = 1.2c_1 + 3.5c_2 + 3.9c_3 - 10.4 \end{cases} \qquad (1)$$

bliver "mindst mulige". Ved "mindste kvadraters metode" skal talsættet vælges således, at RMS-fejlen $\sqrt{\frac{1}{4}\left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2\right)}$ bliver mindst mulig (RMS = root mean square error).
Bemærk, at RMS vedrører fejl på ligningerne og ikke fejl på løsningen (c_1, c_2, c_3).
ADVARSEL: Det oprindelige ligningssystem må ikke ændres ved at man f.eks. multiplicerer en ligning med 10, da det jo ganger residualet med 10 (ligningen indgår med en anden "vægt") ◆

SÆTNING 9.1 (*løsning til overbestemt ligningssystem*). *For et overbestemt ligningssystem* $A \cdot X = B$ *vil den "løsning", som giver mindst mulig RMS-fejl på ligningssystemet , være en eksakt løsning til det såkaldte normalligningssystem* $A^T AX = A^T B$, dvs.
$X = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot (A^T \cdot B)$

Bevis
Fra en funktion af 1 variabel f(x) vides, at man finder stationære punkter (punkter hvor tangenten er vandret) ved at løse ligningen $\frac{dy}{dx} = 0$. Er dette tilfældet for x = a, så ved man, at hvis den anden afledede for x = a er positiv, så er der minimum for x = a.
Denne sætning kan generaliseres til funktioner af flere variable (se evt. bogen "Funktioner af flere variabel" på min hjemmeside).
Vi ser nu på et simpelt eksempel på et overbestemt ligningssystem, som let kan generaliseres.

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 7 \\ 1 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 = 8 \\ 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = 9 \end{cases}$$

Lad $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$. Så kan ligningssystemet skrives $A \cdot X = B$ hvor $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Residualerne er $r_1 = 2x_1 + 4x_2 - 7 \quad r_2 = x_1 - 6x_2 - 8 \quad r_3 = 3x_1 + 5x_2 - 9$

eller skrevet på matrixform $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = A \cdot X - B$

Vi søger et minimum for $f(x_1, x_2) = r_1^2 + r_2^3 + r_3^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow 2r_1 \cdot 2 + 2r_2 \cdot 1 + 2r_3 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow (2, 1, 3) \bullet \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow 2r_1 \cdot 4 + 2r_2 \cdot (-6) + 2r_3 \cdot 5 = 0 \Leftrightarrow (4, -6, 5) \bullet \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = 0$$

Dette kan skrives

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow A^T \cdot (A \cdot X - B) = 0 \Leftrightarrow (A^T \cdot A)X - A^T B = 0 \Leftrightarrow (A^T \cdot A)X = A^T B$$

Heraf fås $X = \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot \left(A^T \cdot B\right)$

At det er et minimum er nok ret klart, da RMS jo aldrig kan blive negativ. Et egentligt bevis kræver, at man ser på de anden afledede. (der henvises her til sætning 1.1 i notatet "Funktioner af flere variable") ◆

I sætningen indgår $A^T \cdot A$.

Er A eksempelvis $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ fås $A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 20 & 16 \\ 8 & 16 & 26 \end{bmatrix}$

Det ses, hvad gælder generelt, at matricen $A^T \cdot A$ er kvadratisk og symmetrisk (om diagonalen).Forudsat matricen A ikke er singulær, så vil $A^T \cdot A$ altid have en invers matrix, så det er muligt at beregne $\left(A^T A\right)^{-1}$

Formlerne, der skal anvendes ved benyttelse af regnemidler er:

Koefficienter $C = \left(A^T A\right)^{-1} \cdot (A^T B)$ Residualer: D = A* C - B

RMS: D, der er en søjlematrix opfattes nu som en vektor $\overline{d}$.

Idet n er antal rækker i B bliver formlen $\sqrt{\dfrac{\overline{d} \cdot \overline{d}}{n}}$.

Eksempel 9.2. Overbestemt ligningssystem (fortsættelse af eksempel 9.1).

1) Find den "løsning" til ligningssystemet

$$\begin{cases} 1.2c_1 + 1.0c_2 + 4.1c_3 = 6.3 \\ 1.3c_1 + 3.2c_2 + 1.1c_3 = 8.4 \\ 0.9c_1 + 1.1c_2 + 0.2c_3 = 4.5 \\ 1.2c_1 + 3.5c_2 + 3.9c_3 = 10.4 \end{cases}$$

som giver mindst mulig RMS-fejl.

2) Find endvidere residualerne og RMS-fejlen.

Løsning:

1) $X = \left(A^T A\right)^{-1} \cdot (A^T B)$

Koefficientmatrix A og højre side B indtastes.

TI-Nspire: $C := \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot (A^T \cdot B)$

Resultat: $\begin{bmatrix} 2.62 \\ 1.52 \\ 0.44 \end{bmatrix}$ som er blevet gemt i matricen C.

Heraf fås $\underline{\underline{c_1 = 2.620, \quad c_2 = 1.518, \quad c_3 = 0.437}}$ (her valgt at facit afleveres med 3 decimaler)

2) **Håndkraft**

Residualerne beregnes residualerne ved indsætning i de oprindelige ligninger:

$r_1 = 1.2 \cdot 2.62 + 1.0 \cdot 1.518 + 4.1 \cdot 0.437 - 6.3 = \underline{\underline{0.153}}$

$r_2 = 1.3 \cdot 2.62 + 3.2 \cdot 1.518 + 1.1 \cdot 0.437 - 8.4 = \underline{\underline{0.344}}$

$r_3 = 0.9 \cdot 2.62 + 1.1 \cdot 1.518 + 0.2 \cdot 0.437 - 4.5 = \underline{\underline{-0.385}}$

$r_4 = 1.2 \cdot 2.62 + 3.5 \cdot 1.518 + 3.9 \cdot 0.437 - 10.4 = \underline{\underline{-0.238}}$

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{0.153^2 + 0.344^2 + 0.385^2 + 0.238^2}{4}} = 0.2946 \approx \underline{\underline{0.29}}$$

TI-Nspire

Residualer: D = A· C - B $\quad \mathbf{d} := \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{b} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 0.153 \\ 0.345 \\ -0.385 \\ -0.238 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{rms} := \sqrt{\dfrac{\text{dotP}(\mathbf{d},\mathbf{d})}{4}} \blacktriangleright 0.295$

RMS:

vælg $\sqrt{}$ ► matricer og vektorer► vektor► prikprodukt►/4 $n = 4$ er antal rækker i B

Eksempel 9.3 Regressionsmodel

Ved et fysisk forsøg har man målt følgende sammenhørende værdier af x og y.

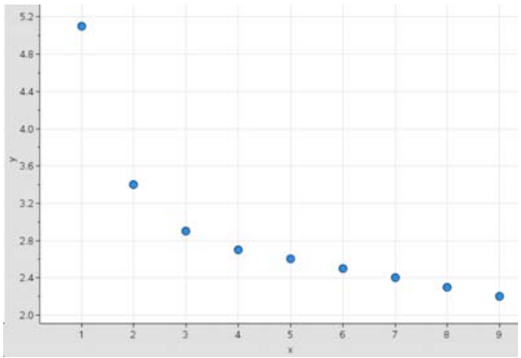
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	5.1	3.4	2.9	2.7	2.6	2.5	2.4	2.3	2.2

Punkterne tegnes ind i et koordinatsystem

TI-Nspire: Indsæt "lister og regneark", Tal indtastes i to kolonner.

Vælg "Diagrammer og statistik". Der fremkommer et diagram med punkter.

Indlæg x forneden og y i venstre side. Der viser sig så nedenstående punktplot.



Punkterne ligger næppe på en ret linie, men snarere på en hyperbel.

Man vælger derfor modellen $y = a + \dfrac{b}{x}$ (1).

Bestem ved mindste kvadraters metode konstanterne a og b.

Løsning:

Indsættes punkterne i ligning (1) fås 9 ligninger.

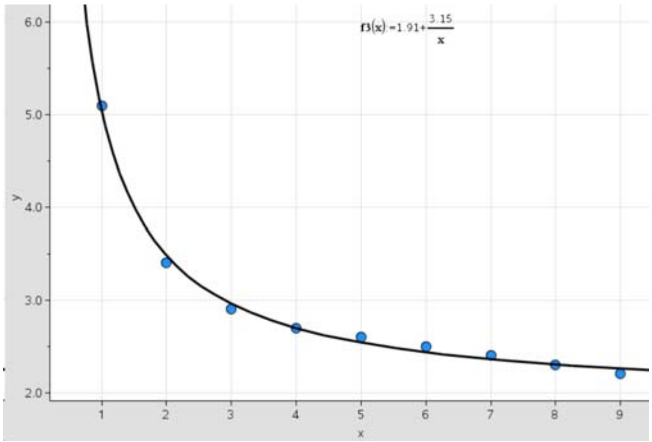
Koefficientmatrix A og højre side B indtastes, og man bestemmer a og b af det overbestemte ligningssystem: $X = \left(A^T A\right)^{-1} \cdot (A^T B)$

Vi får: $\begin{bmatrix} 1.90989 \\ 3.14989 \end{bmatrix}$ dvs. kurven bliver $y = 1.91 + \dfrac{3.15}{x}$

Grafen tegnes sammen med punkterne.

TI-Nspire Vælg under dokumentværktøjslinien"Undersøg data, Plotfunktion, skriv funktionen.

Man ser, at punkterne ligger "tilfældigt" og tæt omkring kurven.



At punkterne ligger tæt og tilfældigt omkring kurven kan også indses ved at beregne residualerne, og eventuelt RMS-fejlen.

10. Grundlæggende operationer med TI-Nspire og TI89.

1) **TI-Nspire**

Oprette en matrix A: Lad matricen have 2 rækker og 3 søjler
Vælg: Beregninger ▶ Skriv a:= ▶ Menu:Vælg Matricer og Vektorer ▶ Opret ▶ Matrix ▶ antal rækker=2, antal kolonner = 3 ▶ OK Udfyld skemaet med matricen A, ENTER

Regneoperationer

Transponeret matrix: A^T**:** Skriv a ▶ Vælg i menu Matricer og Vektorer ▶ Transponerer

Produkt af 2 matricer A og B: Skriv a·b.

Determinant : Skriv det(A)

Danne en totalmatrix T ud fra koefficientmatrix K og højre side H.
Matricerne K og H indtastes. T:=augment(K,H)

Gauss elimination
Skriv rref(t) (eller benyt Matrix og Vektorer ▶ Reduceret række echelon form ▶ t)

Resultater som eksakte tal eller decimaltal:
Er tallene i udtrykket eksakte bliver facit eksakt.
Facit ændres til decimaltal ved at markere tallet og vælg: CTRL+ Enter
Er der et tal i udtrykket med decimaler, bliver facit automatisk et decimaltal.
Ønskes facit med et bestemt antal cifre :
Lommeregner :Menu, Indstillinger og status, Dokumentindstillinger, vis cifre
PC: File, Indstillinger,Indstillinger og status, Dokumentindstillinger, vis cifre
Ønskes facit med 2 decimaler: Vælges : Fast 2: 5/3 =1.67
Ønskes facit med 2 cifre, vælg "Flydende 2" 5/3 = 1.7

Ønskes facit på samme linie:Tryk på højre musetast i dokumentet og vælg "tilføj noter"
Tryk igen på højre musetast og vælg "Indsæt Matematikfelt"

Gemme udskrifter som PDF-fil.
Skrive tekst i et teksbehandlingssystem som eksempelvis Word
Regne i Ti.Nspire . Overføre relevant udskrift ved at anvende "klippeværktøj/snipping tools"
Hentes :Vælg "Start", Alle programmer, Tilbehør , klippeværktøj,
Engelsk: all programs , "seach all programms" skriv "shipping tools".
Eller: brug Cutepdfwriter (led evt. Under "Google") Lav PDF-fil.

2) **TI-89**

Oprette en matrix A: Lad matricen have 2 rækker og 3 søjler
APPS, Data/Matrix ▶ Enter ▶ New ▶ Udfyld Type = Matrix, Variable = A, antal rækker=2 og søjler = 3, ENTER, ENTER. Udfyld skemaet med matricen A, Home

Bemærk:

a) Ofte er matricerne så store, at man i "Historik" feltet ikke kan se alle resultater. Så må man flytte feltet nedad ved at holde tasten"pil opad" (se øverste tastrække) nede samtidig med at man bruger piletasten nedad.
b) Hvis man i næste opgave ønsker igen at kalde en Matrix A, så må man i VAR-Link først slette den tidligere definerede matrix A.

Regneoperationer

Transponeret matrix A^T**:** A ▶ MATH ▶ nr 4: MATRIX, ENTER nr 1: ^{T} ▶ ENTER

Produkt af 2 matricer A og B: Skriv a*b

Invers matrix A^{-1} Skriv A ^-1

Determinant : MATH ▶ nr 4: MATRIX, ENTER ▶ nr 2 det(a)

Danne en totalmatrix T ud fra koefficientmatrix K og højre side H.
MATH ▶ nr 4: MATRIX, ENTER ▶ nr 7 augment(K,H)

Gauss elimination MATH ▶ nr 4: MATRIX, ENTER ▶ nr 4 rref(T)

Resultater som eksakte tal eller decimaltal:
Er tallene i udtrykket eksakte bliver facit eksakt.
Facit ændres til decimaltal ved trykke på gul tast + Enter
Er der et tal i udtrykket med decimaler, bliver facit automatisk et decimaltal.
Ønskes facit med et bestemt antal cifre : Vælg Mode ▶ Display Digits ▶ Fix 6 (hvis 6 cifre)

OPGAVER

Opgave 1.
Løs ligningssystemet uden brug af regnemidler

$$\begin{aligned} -x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1 + \ x_2 - \ x_3 &= 10 \\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Opgave 2.
Løs ligningssystemet uden brug af regnemidler

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ 3x_2 + 7\,x_3 &= 14 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 &= 14 \end{aligned}$$

Opgave 3.
Løs ligningssystemet uden brug af regnemidler

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \qquad - 3x_4 = -13 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 11 \\ x_1 - x_2 \qquad\quad - x_4 = -4 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

Opgave 4

Løs ligningssystemet
$$\begin{cases} x_1 + 4\,x_2 - x_3 = -5 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ -x_1 + 5x_2 \qquad = -7 \end{cases}$$

Opgave 5
Man ønsker at fremstille 10 ton af en næringsblanding bestående af 5 komponenter:

	komponent				ønsket blanding
	skummetmælk	kartofler	æbler	sojamel	
mængde (ton):	x_1	x_2	x_3	x_4	10
kulhydrat pr 100 g	5	20	10	25	15
protein pr 100 g	3	3	0	36	15
C-vitamin pr 100 g	1	10	7	0	6

For at kunne bestemme x_1, x_2, x_3 og x_4, således at den færdige blanding får det ønskede indhold af kulhydrater, protein og C-vitamin, opstilles ligningssystemet:

$$\begin{aligned} &\text{mængde:} && x_1 + \ x_2 + \ x_3 + \ x_4 = 10 \\ &\text{kulhydrat:} && 5x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 25x_4 = 150 \\ &\text{protein:} && 3x_1 + \ 3x_2 \qquad\quad + 36x_4 = 60 \\ &C-vitamin: && x_1 + \ 10x_2 + 7x_3 \qquad\quad = 60 \end{aligned}$$

Løs ligningssystemet.

Opgave 6.

Løs ligningssystemet $\begin{cases} -x_1+4x_2-3x_3+2x_4=3 \\ 2x_1-x_2+2x_3+x_4=1 \\ -3x_1+2x_2-x_3+3x_4=4 \\ -7x_1+x_2-x_3+3x_4=4 \end{cases}$

Opgave 7

Indledningen (med petit) kan overspringes, da den ikke er nødvendig for opgavens løsning.

Indledning.

En fabrik får til opgave at fremstille et produkt, der bl.a. skal indeholde 3.2 kg af stoffet I, 3.6 kg af stoffet II og 3.3 kg af stoffet III. Råstoffernes A, B, C og D's procentiske indhold af I, II og III fremgår af nedenstående tabel.

	A	B	C	D
I	20%	50%	30%	0 %
II	10%	40%	30%	20%
III	30%	0%	20%	50%

Forudsat at alle råstofferne kan udnyttes, ønsker man at finde de antal kg x_1, x_2, x_3 og x_4 af henholdsvis A, B. C og D, der skal benyttes ved fremstillingen. Specielt ønskes angivet den af de mulige løsninger, der giver det mindste forbrug af det dyre råstof A.

Givet ligningssystemet $\begin{cases} 2x_1+5x_2+3x_3=32 \\ x_1+4x_2+3x_3+2x_4=36 \\ 3x_1+2x_3+5x_4=33 \end{cases}$

1) Find den fuldstændige løsning til ligningssystemet.
2) Idet det antages, at $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, og $x_4 \geq 0$, skal man angive den løsning til ligningssystemet, der har den mindste værdi af x_1.

Opgave 8

En virksomhed fremstiller 4 typer produkter 1, 2, 3 og 4. Under tilblivelsesprocessen skal hvert produkt passere igennem alle virksomhedens 3 afdelinger, men beslaglægger her kapaciteten i forskellig grad:

	1 enhed af type 1	1 enhed af type 2	1 enhed af type 3	1 enhed af type 4
afdeling 1	5 %	10 %	10 %	15 %
afdeling 2	10 %	5 %	10 %	15 %
afdeling 3	20 %	10 %	15 %	10 %

Lad x_j betegne "antal producerede enheder af type j " i en uge.

Såfremt hver afdelings kapacitet skal udnyttes fuldt ud i denne uge, må der gælde:

afdeling 1: $5x_1+10x_2+10x_3+15x_4=100$

afdeling 2: $10x_1+5x_2+10x_3+15x_4=100$

afdeling 3: $20x_1+10x_2+15x_3+10x_4=100$

1) Vis, at ligningssystemet har en uendelighed af løsninger og angiv herunder den fuldstændige løsning ved hjælp af en parameter t.
Hvilke værdier af t kan forekomme i virkeligheden?
(husk, at $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$)
2) Hvad er det største antal emner af produkttype 3, som virksomheden kan fremstille pr. uge, når der ikke må være ledig kapacitet i nogen af de 3 afdelinger ?

(*Bemærk: I det matematiske fag "lineær programmering" behandles sådanne problemtyper - gerne med mange flere variable, idet der benyttes specielle teknikker i forbindelse med edb*).

Opgave 9

Idet $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, skal man undersøge om følgende relationer gælder:

1) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

2) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$.

Foretag beregningerne uden brug af regnemidler.

Opgave 10

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Beregn $2A + 3B + 5A - 2B$, $A \cdot B^T$ og $A^T B$ uden brug af regnemidler.

Opgave 11

Lad $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Udregn $A^3 - 2A^2 - 9A$ og $A^2 - 2A - 9E$, hvor *E* er en 3 *x* 3 enhedsmatrix.

Opgave 12

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Vis, at $A \cdot B = A \cdot C$ (trods det at B $\neq$ C).

Opgave 13

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Find. A^{-1}, $\left(B^T\right)^{-1}$, $(AB^T)^{-1}$ og $(BA^T)^{-1}$

Opgave 14

Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Find $2A+B$, $B+2A$, AB, BA, $A^T B^T$, A^{-1}, B^{-1}, $\left(A^T\right)^{-1}$ og $(AB)^{-1}$.

Opgave 15

Find den inverse matrix til hver af de følgende matricer:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Opgave 16

Lad $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Find A^{-1} og $\left(A^T\right)^{-1}$.

Opgave 17

Lad der være givet en invertibel matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Idet $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, skal man løse matrixligningen $AX = B$ ved anvendelse af A^{-1}.

Opgave 18

På et laboratorium analyseres en blanding af 4 organiske stoffer kvantitativt ved måling af et ultraviolet-spektogram. Heraf fås følgende ligningssystem for koncentrationerne c_1, c_2, c_3 og c_4 (millimol / liter) :

$$\begin{cases} 5.00c_1 + 1.00c_2 \qquad\qquad + 1.00c_4 = 30.0 \\ \qquad\qquad 6.00c_2 + 2.00c_3 + 1.00c_4 = 50.0 \\ 1.00c_1 + 1.00c_2 + 5.00c_3 \qquad\qquad = 33.0 \\ 5.00c_1 + 1.00c_2 \qquad\qquad + 5.00c_4 = 70.0 \end{cases}$$

Find c_1, c_2, c_3 og c_4, ved anvendelse af A^{-1}.

Opgave 19
Find værdien af determinanten

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 2 & 1 \\ 16 & 9 & 9 & 2 \\ 23 & 16 & 13 & 3 \\ 7 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Opgave 20
a) Beregn determinanten for koefficientmatricen i følgende ligningssystem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

b) Løs ligningsystemet.

Opgave 21.
Mellem variablene x og y gælder den teoretiske sammenhæng $y = A + Bx + Cx^2 + D2^{3-x}$
Fra laboratoriet er der kommet følgende måledata:

x	0	1	2	3
y	2	0	4	13

Opstil 4 ligninger til bestemmelse af konstanterne A, B, C, D og find derpå A, B, C og D.

Opgave 22
a) Beregn determinanten

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & a & 1 \\ a-3 & 2 & 2a & 0 \\ -4a+7 & -2 & 0 & 0 \\ -2a+6 & -6 & -3a & -2 \end{vmatrix}$$

b) Løs ligningssystemet for alle værdier af parameteren a.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + ax_3 + x_4 = 2 \\ (a-3)x_1 + 2x_2 + 2ax_3 = 2 \\ (-4a+7)x_1 - 2x_2 = -2 \\ (-2a+6)x_1 - 6x_2 - 3ax_3 - 2x_4 = -6 \end{cases}$$

Opgave 23

a) Beregn determinanten

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 & 1+a \\ 0 & -1 & a+1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{vmatrix}$$

b) Løs nedenstående ligningssystem for de værdier af *a*, for hvilke determinanten D er 0.

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 - x_3 + (1+a)x_4 = 0 \\ -x_2 + (a+1)x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 + ax_4 = -2 \end{cases}$$

Opgave 24

Der er givet ligningssystemet

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + (2a+3)x_3 = 7 \\ 2ax_1 + 4x_2 + (3a+4)x_3 = 12 \\ 3ax_1 + 5x_2 + (2a+4)x_3 = 13 \end{cases}$$

Løs ligningssystemet for de værdier af *a*, for hvilke ligningssystemet har netop én løsning.

Opgave 25

Benyt Cramers metode til at finde x_2 af nedenstående ligningssystem.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 = -2 \\ 4x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases}$$

Opgave 26

Benyt Cramers metode til at finde x_4 af nedenstående ligningssystem.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Opgave 27

De tre vinkler i en trekant ABC er målt til 0.53, 1.34, og 1.32(radianer).

Find den "løsning" til det overbestemte ligningssystem $\begin{cases} A = 0.53 \\ B = 1.34 \\ \pi - A - B = 1.32 \end{cases}$

som giver mindst mulig RMS-fejl.

Find endvidere residualerne og RMS-fejlen.

Opgave 28
Mellem de variable *x, y, z, w* gælder den teoretiske sammenhæng $w = Ax + By + Cz$.
Fra laboratoriet er der kommet følgende måledata:

x	y	z	w
1	0	0	0.0
0	1	0	1.0
0	0	1	0.1
0	1	1	0.9
1	1	0	1.2

1) Opstil 5 ligninger til bestemmelse af konstanterne A, B, C.
2) Find derpå konstanterne A, B, C, idet RMS-fejlen på de 5 ligninger skal være mindst mulig.
3) Find endvidere residualerne og RMS-fejlen.

Opgave 29
To tryk p_1 og p_2 samt differencen $p_1 - p_2$ er målt med samme nøjagtighed:

$$\begin{cases} p_1 \approx 10 \\ p_2 \approx 5 \\ p_1 - p_2 \approx 6 \end{cases}$$

Find p_1 og p_2 "bedst muligt".

Opgave 30
Der skal fremstilles 1 ton af et produkt ved at blande 3 råvarer (alle tal er i vægt %):

	råvare nr 1	råvare nr 2	råvare nr 3	ønsket produkt
protein fedt kulhydrat	0 % 30 % 20 %	10 % 10 % 30 %	20 % 0 % 10 %	10 % 20 % 20 %

Af råvarer bruges x_1 ton af nr 1, x_2 ton af nr 2 og $1 - x_1 - x_2$ ton af nr 3.

1) Opstil 3 ligninger til bestemmelse af x_1 og x_2 .
2) Find derpå x_1 og x_2 , idet RMS-fejlen på de 3 ligninger skal være mindst mulig.
3) Find til sidst residualerne og RMS-fejlen.

Opgave 31

Der foreligger følgende ligningssystem: $\begin{cases} x = 1.1 \\ x - y = 1 \\ x + y + z = 3.1 \\ y + z = 1.2 \end{cases}$

1) Vis, at ligningssystemet ikke har nogen eksakt løsning.
2) Løs ligningssystemet "bedst muligt", (dvs. således at RMS-fejlen bliver mindst mulig).

Opgave 32

For en bestemt proces, har man målt, at der gælder følgende overbestemte ligningssystem

$$\begin{cases} x+y \qquad = 2.00 \\ \qquad y+z = 4.00 \\ x \qquad +z = 5.00 \\ x-y \qquad = 0.00 \\ x \qquad -z = -1.00 \end{cases}$$

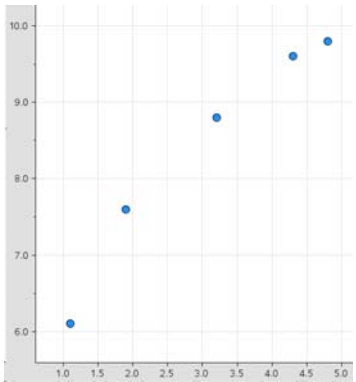
a) Løs ligningssystemet "bedst muligt", (dvs. således at RMS-fejlen bliver mindst mulig).

b) Find RMS-fejlen for den i spørgsmål a) fundne løsning.

Opgave 33

Ved et forsøg har man målt følgende sammenhørende værdier af x og y.

x	1.1	1.9	3.2	4.3	4.8
y	6.1	7.6	8.8	9.6	9.8



Punkterne blev indlagt i et koordinatsystem, og på basis heraf vurderede man, at $y = a + b \cdot \sqrt{x}$ med tilnærmelse kunne angive sammenhængen mellem x og y.

a) Find a og b.

b) Beregn residualerne

Facitliste

1 (13, -9, -6)
2 eksempelvis (4-2x_3 , 2 - x_3, x_3 fri)
3 $(1,4,1,1)$
4 Ø
5 (3 , 5, 1, 1)
6 eksempelvis $\left(-\frac{9}{16}+\frac{7}{16}x_4, \frac{9}{4}-\frac{7}{4}x_4, \frac{35}{16}-\frac{29}{16}x_4, x_4\right)$
7 1) eksempelvis $\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x_4, -\frac{11}{3}+\frac{5}{3}x_4, 17-3x_4, x4 \ \mathit{fri}\right)$ (2) $\left(\frac{2}{5}, 0, \frac{52}{5}, \frac{11}{5}\right)$
8 1) eksempelvis $\left(-\frac{20}{3}+\frac{5}{3}x_4, -\frac{20}{3}+\frac{5}{3}x_4, 20-4x_4, x_4 \ \mathit{fri}\right)$, $x_4 \in [4;5]$ 2) 4
9 1) nej 2) nej

10 $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 14 \\ 1 & -7 & 6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

12 -

13 $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -13 & 4 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -13 & 10 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

14 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

15 1) $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

16 $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

17 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

18 (3, 5, 5, 10)
19 -12
20 1) 60 2) $\left(-1, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$
21 (-6, 0, 2, 1)

22 a) $2a(2-a)$ b) $a \neq 0 \wedge a \neq 2$: (0, 1, 0 ,0) a = 0: (0, 1, x_3, 0) $a = 2$: $\left(x_4, 1-\frac{1}{2}x_4, \frac{1}{2}x_4, x_4\right)$

23 a) $2a^2 - a - 1$

b) eksempelvis a = 1 : $\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x_4, -2-x_4, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_4, x_4\right)$, x_4 *fri* a=$-\frac{1}{2}$: $\left(0, -2+\frac{1}{2}x_4, -2+x_4, x_4\right)$

24 $\left(\frac{3}{a+1}, \frac{1}{a+1}, \frac{2}{a+1}\right)$, $a \neq -1,\ a \neq 0$

25 -17

26 $\frac{17}{11}$

27 A=0.514, B = 1.324, $r_1 = r_2 = r_3 = -0.016$, RMS = 0.016

28 (A, B, C) = (0.1, 1, 0) $r_1 = 0.1,\ r_2 = 0,\ r_3 = -0.1,\ r_4 = 0.1,\ r_5 = -0.1$ RMS = 0.089

29 $\left(\frac{31}{3}, \frac{14}{3}\right)$

30 1) - 2) (0.5429, 0.2) 3) $r_1 = -0.0286,\ r_2 = -0.0171,\ r_3 = -0.00571,\ RMS = \frac{1}{5\sqrt{105}}$ =0.019518

31 $\left(\frac{41}{30,}, \frac{11}{30}, \frac{11}{10}\right) = (1.366, 0.366, 1.1)$

32 a) $\left(\frac{3}{2}, 1, 3\right)$ b) RMS = $\frac{1}{\sqrt{5}}$ =0.57735

33 a) (2.9617,3.1945) b) (0.2122, -0.2350,-0.1238, -0.0140, 0.1606)

STIKORD