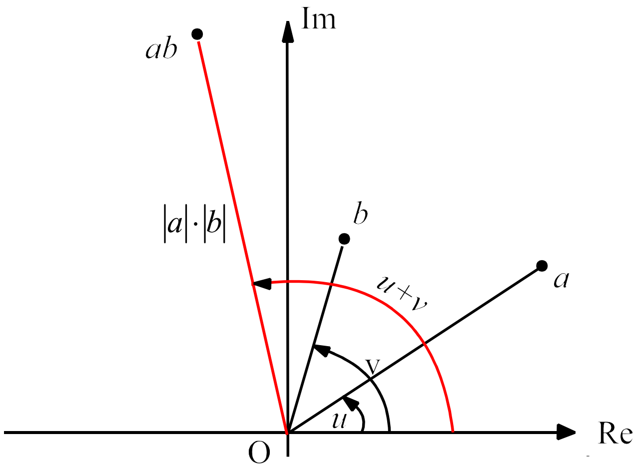
MOGENS ODDERSHEDE LARSEN

Sædvanlige Differentialligninger



1. udgave 2004

FORORD

Dette notat giver en indføring i teorien for sædvanlige differentialligninger. Der lægges især vægt på løsningen af lineære differentialligninger med konstante koefficienter. Til løsning af differentialligningssystemer og systemer med forsinkelse anvendes Laplacetransformation.
Det forudsættes, at man har en viden svarende til notatet "Matematiske Grundbegreber" , samt at man har et elementært kendskab til polynomier svarende til notatet "Komplekse tal".
Avancerede lommeregnere som Ti89 og matematkprogrammer som Maple kan let foretage beregninger med komplekse tal, finde rødder i polynomier osv. Der vil derfor blive givet eksempler på, hvorledes man kan foretage beregningerne med netop disse to regnemidler. Det må dog betones, at hvis man ikke er i stand til at manipulere med simple udtryk, bliver det næsten umuligt at læse en teknisk tekst eller forstå et foredrag, hvori der indgår nogen matematik. Det er derfor vigtigt. at man manuelt foretager beregningerne af enkle problemer. Dette er også nødvendigt for at kunne forstå og fortolke udskrifterne fra matematikprogrammerne.
Det forudsættes, at man har rådighed over en "matematiklommeregner" som eksempelvis Ti 89.
Da man må forudse, at man senere vil skulle kunne anvende et egentligt matematikprogram, som angives også nogle af ordrerne i programmet "Maple".

En del eksempler er hentet fra lærebogssystemet "Bjarne Hellesen, Mogens Oddershede Larsen: Matematik for Ingeniører". Jeg vil derfor gerne her benytte lejligheden til at takke Bjarne Hellesen for mange års inspirerende samarbejde.

Andre noter i samme "serie" er
"Matematiske grundbegreber"
Giver en kort gennemgang af definitioner og regneregler for de mest almindelige reelle funktioner af 1. variabel, disses differentiation og integration,
"Vektorer"
Indhold: **1)** Vektorer i plan og rum, **2)** Rumgeometri (relationer mellem punkt, linie og plan) **3)** Kurver i plan givet ved en parameterfremstilling
"Komplekse tal"
Indhold: **1)** Rektangulær og polær form, eksponentialfunktion, **2)** Binom- og andengradsligning **3)** Opløsning af polynomier i faktorer og dekomponering
"Matricer og lineære ligninger"
Indhold: **1)** Regneregler for matricer, **2)** Lineære ligningssystemer, herunder løsning af overbestemt ligningssystem
"Fourieranalyse"
Indhold: **1)** Reelle Fourierrækker, **2)** Fourierrækker på kompleks form, **3)** Fouriertransformation **4)** Diskret Fouriertransformation

Januar 2005 Mogens Oddershede Larsen

INDHOLD

1 Differentialligninger af 1. orden

1.1 Indledning

Ved en sædvanlig differentialligning forstås en ligning, der indeholder en eller flere afledede af en ukendt funktion $y(t)$, og som vi ønsker at finde ud fra ligningen. Eksempelvis er ligningen $2\frac{dy}{dt}+3y(t)=\sin t$ en "sædvanlig" differentialligning. Ordet sædvanlig betyder, at den ukendte funktion er en funktion af 1 variabel (i modsætning til de "partielle" differentialligninger, hvor den ukendte funktion er af 2 eller flere variable).

Vi vil i dette notat kun se på "sædvanlige" differentialligninger, og det vil derfor i det følgende være underforstået.

Ved en **differentialligning af 1. orden** forstås en ligning, hvori der indgår en ukendt funktions 1. afledede, men ingen højere afledede. Differentialligningen $2\frac{dy}{dt}+3y(t)=\sin t$ er således af 1. orden, mens $2\frac{d2y}{dt2}+3y(t)=\sin t$ er af anden orden.

Mange fysiske problemstillineg fører til differentialligninger, hvor den uafhængige variabel vil være tiden t. Dette er begrundelsen for at funktionerne i dette notat er funktioner af t (og ikke x)

Ved en (partikulær) *løsning* til en differentialligning forstås en differentiabel funktion $y(t)$ som er defineret i et interval I og i dette interval *) tilfredsstiller differentialligningen. Grafen for en løsning kaldes en løsningskurve eller en integralkurve

Mængden af samtlige løsninger kaldes den **fuldstændige** løsning.

.

Eksempel 1.1 Radioaktivt henfald

Eksperimenter viser, at et radioaktivt stof henfalder med en hastighed der er proportional med dens mængde $y(t)$ til et givet tidspunkt. Vi har følgelig $\frac{dy}{dt}=ky(t)$ hvor k er en konstant.

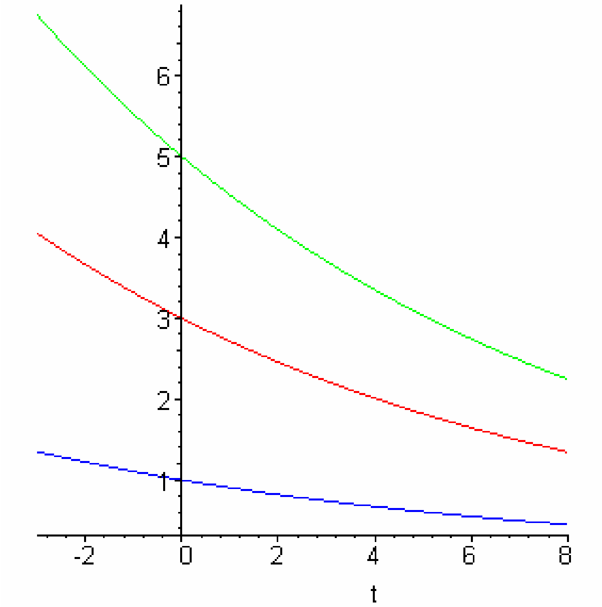
Vi antager i det følgende, at k = - 0.1.

1) Lad C være en vilkårlig (arbitrær) konstant. Vis, ved indsættelse, at $y=Ce^{-0.1t}$ er løsning til differentialligningen.
2) Tegn løsningskurverne i samme koordinatsystem for C= 1, 3 og 5
3) Find den løsning for hvilke det gælder, at til tiden t = 0 er startmængden af det radioaktive stof 2 gram, dvs. $y(0)=2$.

Løsning:

1) Da $y=Ce^{-0.1t}$ giver $y'=-0.1e^{-0.1t}=-0.1\cdot y$ ses ved indsættelse, at $y=Ce^{-0.1t}$ er en (partikulær) løsning til differentialligningen.
2) Løsningskurverne består af en skare af kurver svarende til forskellige værdier af C.
   Maple: plot([exp(-0.1*t),3*exp(-0.1*t), 5*exp(-0.1*t)],t=-3..8);

*) Vi vil altid forudsætte, at definitionsintervallet I er valgt størst muligt.



3)Indsættes $t = 0$ og $y = 2$ i $y = Ce^{-0.1t}$ fås $2 = Ce^{-0.10} \Leftrightarrow C = 2$

Den ønskede (partikulære) løsning med begyndelsesbetingelsen $y(0) = 2$ er følgelig $y = 2e^{kt}$

I eksempel 1.1 så vi, at der går netop én løsningskurve gennem ethvert punkt.. Dette gælder praktisk taget altid for en differentialligning, der er bragt på formen $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$.

Man kan vise, at er S en åben sammenhængende mængde i ty-planen, hvor $f(t, y)$ er kontinuert og har en kontinuert partiel afledet $\frac{\partial f}{\partial y}$ med hensyn til y, så går der gennem ethvert indre punkt (t_0, y_0) af S én og kun én løsningskurve til differentialligningen $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$.

Kontinuitet bestemmes som ved funktioner af en variabel. Eksempelvis er $f(t, y) = \cos(5y - t^3)$ kontinuert i hele ty-planen, idet ($25y$ kontinuert $\wedge\, t^3$ kontinuert) $\Rightarrow 5t - t^3$ kontinuert $\wedge$ cos kontinuert $\Rightarrow \cos(5y - t^3)$ kontinuert.

1.2 Numerisk løsning af 1. ordens differentialligning.

I det følgende betragtes en 1. ordens differentialligning, der er bragt på formen $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$.

Det er ofte umuligt at angive eksakte udtryk for $y(t)$. Imidlertid kender man jo i ethvert punkt (t, y) differentialkvotienten, og det kan man udnytte til gennem et stort antal punkter at tegne et kort liniestykke med den kendte hældning (kaldes linielementet i punktet.. Dette vil så give os et indtryk af løsningskurvernes udseende.

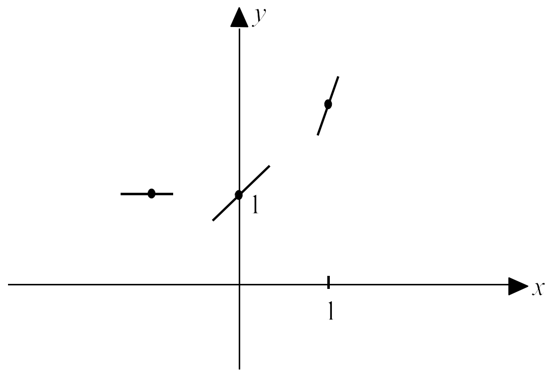
Eksempel 1.2. Grafisk løsning af differentialligning

Lad der være givet differentialligningen $\frac{dy}{dt} = y + t$.

1) Tegn i et koordinatsystem linielementerne gennem punkterne (t, y)=(-1, 0), (t, y) = (0, 1) og (t, y) = (1, 2)
2) Tegn ved hjælp af et edb - program et stort antal linielementer, og skitser på basis heraf løsningskurven gennem punktet (0,1)
3) Ud fra figuren synes en bestemt løsning tydelig. Angiv funktionsudtrykket for denne løsning, og vis ved indsættelse i differentialligningen at denne er en løsning..

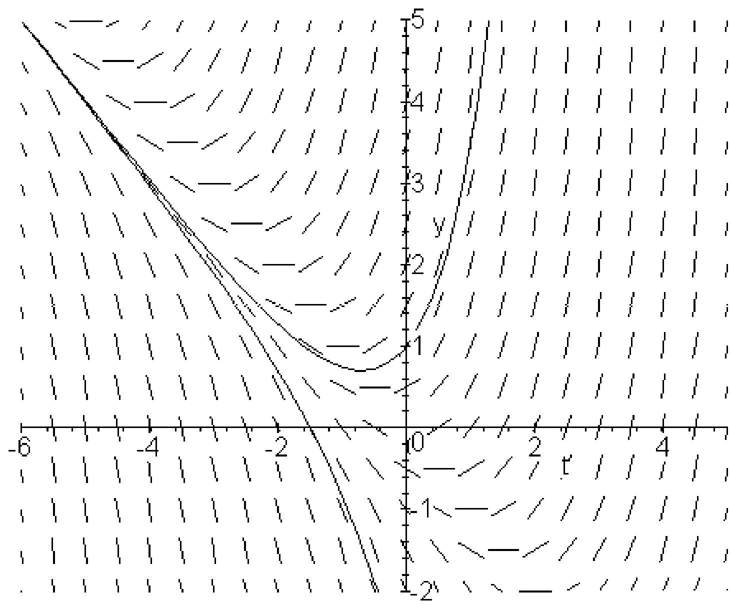
Løsning:

1) Vi har idet α er hældningskoefficienten:
$(t, y, \alpha) = (-1,1,0),\ (t, y, \alpha) = (0,1,1),\ (t, y, \alpha) = (1,2,3),$
Linielementerne ses på figuren til højre.



2)

Tegnes et stort antal linielementer fås figuren til højre



3) En ret linie med ligningen $y = -t - 1$ synes at være en løsning. Dette vises ved indsættelse i differentialligningen $\frac{dy}{dt} = y + t$. Da $-1 = (-t - 1) + t \Leftrightarrow 0 = 0$, er påstanden bevist.

Som eksempel 1.2 viser, kan linielementerne give et umiddelbart indtryk af løsningskurvernes forløb. Ønsker man en tabel over en løsning bestemt ved begyndelsesbetingelsen (t_0, y_0), sker det mere præcist ved ud fra punktet (t_0, y_0) at beregne et tilnærmet nabopunkt (t_1, y_1) ud fra dette et nyt punkt (t_2, y_2) osv.

Eulers metode.

Eulers metode bygger på, at man ud fra begyndelsespunktet (t_0, y_0) beregnes det næste punkt (t_1, y_1) ved at følge tangenten i P_0. Ud fra punktet (t_1, y_1) beregnes det næste punkt (t_2, y_2) ved at følge tangenten i P_1., osv. (se figur 2.1)

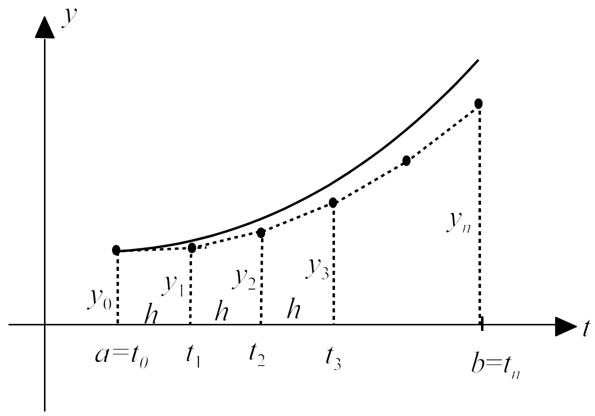


Fig 2.1. *Eulers metode*

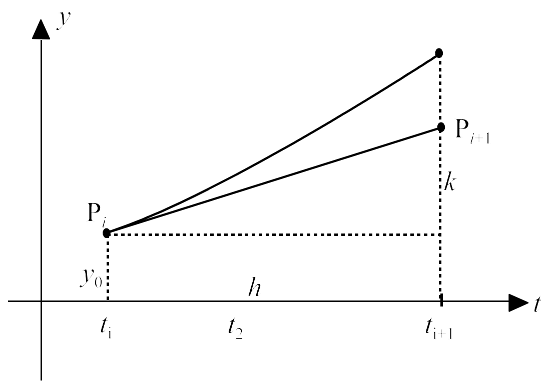


Fig 2.2. *Beregning af k*

Lad der være givet differentialligningen $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ med begyndelsesbetingelsen $y(a) = y_0$

I figur 2.2 går vi fra det i'te punkt $P_i(t_i, y_i)$ til det næste punkt $P_{i+1} = (t_{i+1}, y_{i+1})$ ved at følge tangenten i P_i. Denne tangent har hældningskoefficienten $\frac{dy}{dt} = f(t_1, y_i)$ i punktet P_i. Tangenten i P_i har derfor ligningen $y - y_i = f(t_i, y_i) \cdot (t - t_i)$

Indsættes $t = t_{i+1}$ fås $y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) \cdot (t_{i+1} - t_i)$. Ud fra koordinaterne til punktet $P_{i+1} = (t_{i+1}, y_{i+1})$ kan vi så på tilsvarende måde finde koordinaterne til næste punkt,.

Ønsker man at lave en tabel over løsningen i et interval $t \in [a, b]$, vil man sædvanligvis gøre det ved at Intervallet opdeles i n delintervaller med samme længde $h = \frac{b-a}{n}$ (se figur 2.1).

Indsættes $t_{i+1} = t_i + h$ i $y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) \cdot (t_{i+1} - t_i)$ fås $y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) \cdot h$. Sættes for kortheds skyld $k = f(t_i, y_i) \cdot h$ får vi, at $P_{i+1} = (t_{i+1}, y_{i+1}) = (t_i + h, y_i + k)$

Eulers metode kan sammenfattes i følgende algoritme:

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad t_0 = a$$

$$\text{Gentag for } i = 0,1,2,..,n-1 \begin{cases} k = h \cdot f(t_i, y_i) & \text{tilnærmet } y-\text{tilvækst} \\ t_{i+1} = t_i + h & \text{næste } t-\text{værdi} \\ y_{i+1} = y_i + k & \text{næste } y-\text{værdi} \end{cases}$$

På grund af den ringe nøjagtighed kan Eulers metode ikke anbefales til praktisk brug. En væsentlig mere nøjagtig metode er Runge-Kutta metode af 4. orden

Algoritmen for Runge Kutta af 4. orden:

$h = \frac{b-a}{n}, \quad t_0 = a$

$$\text{Gentag for } i = 0,1,2,..,n-1 \begin{cases} k_1 = h \cdot f(t_i, y_i) \\ k_2 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = h \cdot f(t_i + h, y_i + k_3) \\ t_{i+1} = t_i + h & \text{næste } t-\text{værdi} \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) & \text{næste } y-\text{værdi} \end{cases}$$

Eksempel 1.3. Numerisk løsning af differentialligning

Lad der være givet differentialligningen $\frac{dy}{dt} = y + t$, $y(0) = 1$, $t \in [0;2]$

1) Ved anvendelse af Eulers metode skal der beregnes punkter svarende til en skridtlængde på h = 2, og på h = 1.
2) Benyt lommeregnerens Euler program til at finde y(2) med en skridtlængde på 0.5.
3) Benyt lommeregnerens Runge-Kutta program til at finde y(2) med en skridtlængde på 0.5.
4) Benyt Maple til at finde y(2) med en skridtlængde på 0.5.

Løsning:

Startpunktet for algoritmen er $(t_0, y_0) = (0,1)$

1) h = 2. Hele intervallet $[0,2]$ gennemløbes i ét skridt:

$$k = h \cdot f(0,1) = 2 \cdot (1+0) = 2 \quad t_1 = t_0 + h = 0 + 2 = 2, \quad y_1 = y_0 + k = 1 + 2 = \underline{\underline{3}}$$

h = 1. Hele intervallet $[0,2]$ gennemløbes i to skridt:

$$k = h \cdot f(0,1) = 1 \cdot (1+0) = 1 \quad t_1 = t_0 + h = 0 + 1 = 1, \quad y_1 = y_0 + k = 1 + 1 = 2$$

$$k = h \cdot f(1,2) = 1 \cdot (1+2) = 3 \quad t_1 = t_1 + h = 1 + 1 = 2, \quad y_1 = y_1 + k = 2 + 3 = \underline{\underline{5}}$$

2) MODE, GRAPH = Diff.Equations, ENTER, ◇" Y=" t+y1 ENTER. yi1 = 1
   Bemærk: y1 ikke y, og gange skal skrives som *
   Windows, t0 =0, tmax =2, TSTEP =0.5, tplot=0,XMIN =0, XMAX=3, ... YMIN =1, YMAX=4, osv.ENTER.
   ◇, Graph, Man får tegnet en kurve .
   Tabellering:
   ◇ | (Graph Format), Axes on, Labels on, Solution Methods , Euler, Fields = Fldiff, ENTER
   Catalog, Blddata ENTER, skriv euler, ENTER
   APPS ,Data-Matrix, NEW, Variable=eul, APPS ,Data-Matrix, Current
   Der fremkommer en matrix

t	0	0.5	1	1.5	2
y(t)	1	1.5	2.5	4.25	<u>7.125</u>

3) Som i spørgsmål 2, men i "Graph Format" vælges som Solution Methods RK fremfor Euler

t	0	0.5	1	1.5	2
y(t)	1	1.797	3.435	6.456	<u>11.768</u>

4) I programmet Maple udføres en meget nøjagtig numerisk løsning ved ordrerne:
g:= dsolve({diff(y(t),t) = t+y(t), y(0)=1} ,y(t), numeric, output= array([0,0.5,1,1.5,2]));
Resultatet bliver

$$g := \begin{bmatrix} [t, y(t)] \\ \begin{bmatrix} 0. & 1. \\ 0.500000000000000000 & 1.79744247837652592 \\ 1. & 3.43656328273701028 \\ 1.50000000000000000 & 6.46337650839343426 \\ 2. & 11.7781079494629816 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

◆

I eksempel 1.3 ser vi som ventet, at Runge- Kutta ligger tættest ved det rigtige resultat, selv om vi kun havde anvendt en skridtlænge på 0.5, Med Euler skulle man have anvendt en meget mindre skridtlængde for at få et godt resultat. Problemet vil så være, at afrundingsfejlene ved så mange beregninger kan bevirke, at resultatet alligevel ikke bliver så nøjagtigt.

1.3 Differentialligninger hvor de variable kan adskilles.

Vi vil i dette afsnit betragte en differentialligning af typen $\frac{dy}{dx} = f(t) \cdot g(y)$

Sætning 1.1 (Adskillelse af de variable)

Lad f(t) være kontinuert i et interval I og lad g(y) være kontinuert og forskellig fra 0 i et interval J.

Der gælder da: $y(t)$ *er en løsning til* $\frac{dy}{dx} = f(t) \cdot g(y) \Leftrightarrow$ $y(t)$ *er en løsning til* $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t)dt$

Bevis: Lad $y = h(t)$ være en løsning til den givne differentialligning.
Vi har nu

$$\frac{dy}{dx} = f(t) \cdot g(y) \Leftrightarrow \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} = f(t) \qquad \text{da } g(y) \neq 0$$

$$\frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} = f(t) \Leftrightarrow \frac{1}{g(h(t))} h'(t) = f(t) \qquad \text{da } y = h(t)$$

$$\frac{1}{g(h(t))} h'(t)dt = f(t) \Leftrightarrow \int \frac{1}{g(h(t))} h'(t)dt = \int f(t)dt + C \qquad \text{er to funktioner ens er deres stamfunktioner ens pånær en konstant}$$

$$\int \frac{1}{g(h(t))} h'(t)dt = \int f(t)dt + C \Leftrightarrow \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t)dt + C \qquad \text{integration ved sunstitution, idet vi sætter y = h(t) og dy = h'(t)dt}$$

◆

I det specielle tilfælde, hvor $g(y) = 0$ for $y = a$ er $\frac{dy}{dx} = 0$, og man ser derfor, at

$$\frac{dy}{dx} = f(t) \cdot g(y) \Rightarrow 0 = f(t) \cdot 0 .$$

$y = a$ er derfor en retlinet løsning til differentialligningen.

Metoden huskes lettest ved at man opfatter $\frac{dy}{dx}$ som en brøk.

Man samler alt med y på venstre side af lighedstegnet og alt med t på højre side (adskiller de variable), og så integrerer på begge sider.

$$\frac{dy}{dx} = f(t)\cdot g(y) \Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(t)dt + C$$

I praksis er man ofte kun interesseret i en (partikulær) løsning, som opfylder en **begyndelsesbetingelse** $y(t_0) = y_0$ dvs. til tiden t_0 skal funktionsværdien være y_0.

Er $g(y_0) \neq 0$ kan en løsning gennem (t_0, y_0) findes ved at indsætte (t_0, y_0) i løsningen til differentialligningen og bestemme C.

Er man ikke interesseret i samtlige løsninger, men kun i en partikulær løsning gennem (t_0, y_0) kan man finde denne direkte af $\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(y)} dy = \int_{t_0}^{t} f(t)dt$

Metoden illustreres ved følgende eksempel:

Eksempel 1.4. Adskille variable

1) Find samtlige løsninger til differentialligningen $\frac{dy}{dt} = -4t(y-4)$

2) Find og skitsér de løsningskurver, som går gennem henholdsvis $(t, y) = (0,2)$ og $(t, y) = (1,4)$.

Løsning:

1) Forudsættes $y - 4 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 4$ kan de variable i differentialligningen adskilles: $\frac{dy}{y-4} = 3tdt$

Ved integration fås:

$$\int \frac{dy}{y-4} = -\int 4tdt + C \Leftrightarrow \ln|y-4| = -4\frac{t^2}{2} + C \Leftrightarrow |y-4| = e^{-2t^2+C} \Leftrightarrow |y-4| = e^C \cdot e^{-2t^2}$$

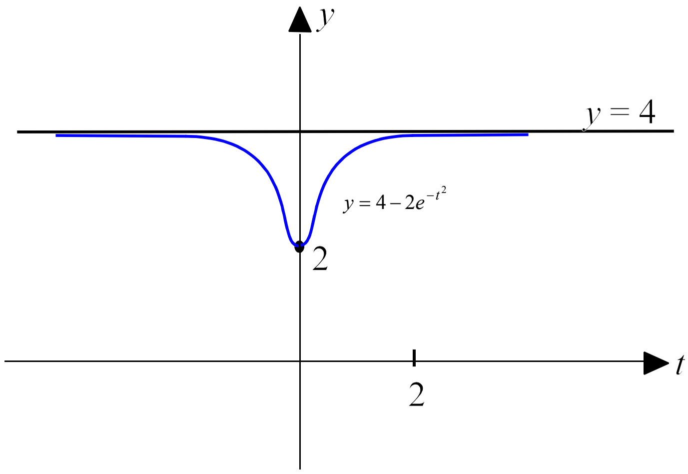
$$\Leftrightarrow y - 4 = \pm e^C e^{-2t^2} \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 4 + Ke^{-2t^2}}} \quad \text{hvor } K = \pm e^C \text{, dvs. } K \neq 0$$

$y = 4$: Ved indsættelse i differentialligningen ses. at den rette linie $\underline{\underline{y = 4}}$ er løsning

2) Indsættes $(t, y) = (0,2)$ fås $2 = 4 + Ke^0 \Leftrightarrow K = -2$ $\qquad \underline{\underline{y = 4 - 2e^{-2t^2}}}$

Da $(t, y) = (1,4)$ ligger på linien $\underline{\underline{y = 4}}$ er denne løsningen.

Det ses. at kurven for $y = 4 - 2e^{-2t^2}$ er symmetrisk omkring $t = 0$,har et minimum i punktet (0.2) og har linien y = 4 som asymptote



Ti 89:

1) deSolve(y' =-4*t*(y-4),t,y) Resultat: $y = C \cdot e^{-2t^2} + 4$

2) deSolve(y' =-4*t*(y-4) and y(0)=2,t,y) Resultat: $y = 4 - 2 \cdot e^{-2t^2}$

and findes under MATH, Test

Tegning:

MODE, GRAPH = FUNCTION, ENTER, ◆" Y="-4*x*(y-4) ENTER.

Indstil" Window" på passende værdier og tryk på Graph

Maple:

dsolve(diff(y(t),t)=-4*t*(y(t)-4),y(t)); $y(t) = 4 + e^{(-2t^2)}\_C1$

L:=dsolve({diff(y(t),t)=-4*t*(y(t)-4),y(0)=2},y(t)); $L := y(t) = 4 - 2e^{(-2t^2)}$

y:=unapply(rhs(L),t); $y := t \to 4 - 2e^{(-2t^2)}$

plot(y(t),t=-3..3);

◆

Eksempel 1.5. Anvendelse i reaktionskinetik

1) **Opstilling af differentialligning**.

Lad A og B være to stoffer, der reagerer med hinanden efter reaktionsligningen $A + B \to$ produkter produkter. Koncentrationerne af A og B til tiden t betegnes henholdsvis C_A og C_B [mol/liter]. Idet der pr. tidsenhed forsvinder lige mange mol af A og B, må der gælde $\frac{dC_A}{dt} = \frac{dC_B}{dt} \Leftrightarrow C_A = C_B + \text{konstant}$. (4)

Endvidere antages processen at følge den simple hastighedslov: $\frac{dC_A}{dt} = -k \cdot C_A \cdot C_B$ (5)

hvor $k = 2 - \frac{1}{t+1}$ er en "hastighedskonstant" (k afhænger af tiden som følge af, at temperaturen ændrer sig).

Lad koncentrationen af A og B til tiden $t = 0$ være $C_{A0} > 0$ og $C_{B0} > 0$ og lad $C_{A0} - C_{B0} = 1$

Heraf følger, at $C_{A0} = 1 + C_{B0} > 1$

Ifølge ligning (4) vil der da til enhver tid $t \geq 0$ gælde $C_A - C_B = 1 \Leftrightarrow C_B = C_A - 1$

Vi får derfor ved indsættelse i (5), at $\frac{dC_A}{dt} = -\left(2 - \frac{1}{t+1}\right) \cdot C_A \cdot (C_A - 1)$

Erstattes for kortheds skyld C_A med y og C_{A0} med y_0, bliver problemet at finde den løsning til differentialligningen

$\frac{dy}{dt} = -\left((2 - \frac{1}{t+1}\right) \cdot y \cdot (y-1)$, der går gennem punktet $(t, y) = (0, y_0)$ og hvor $t > 0, y > 1$ og $y_0 > 1$

Løsning af differentialligning. Ved at separere de variable (alternativ metode) fås

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y(y-1)} = -\int_0^t \left(2 - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

Ved hjælp af Ti89 (eller Maple) fås $\int \frac{dy}{y(y-1)} = \ln|y-1| - \ln|y|$

Vi har derfor

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y(y-1)} = -\int_0^t \left(2 - \frac{1}{t+1}\right) dt \Leftrightarrow \left[\ln|y-1| - \ln|y|\right]_{y_0}^{y} = \left[2t - \ln|t+1|\right]_0^t$$

Da $t > 0, y > 1$ og $y_0 > 1$ fås

$$\left[\ln|y-1| - \ln|y|\right]_{y_0}^{y} = \left[2t - \ln|t+1|\right]_0^t \Leftrightarrow \ln(y-1) - \ln y - (\ln(y_0 - 1) - \ln y_0) = -2t - \ln(t+1)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{y-1}{y}\right) - \ln\left(\frac{y_0 - 1}{y_0}\right) = -2t - \ln(t+1) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{y} = \left(1 - \frac{1}{y_0}\right) e^{-2t + \ln(t+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = 1 - \left(1 - \frac{1}{y_0}\right)(t+1)\, e^{-2t}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{y_0}\right)(t+1) e^{-2t}}$$

Tolkning af løsning. Erstattes y med C_A og y_0 med C_{A0} fås $C_A = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{C_{A0}}\right)(t+1) e^{-2t}}$

Det ses, at C_A efterhånden aftager mod 1, i overensstemmelse med at A reagerer med B, således at B efterhånden bliver næsten helt opbrugt.

◆

1.4. Den lineære differentialligning af 1. orden.

Ved en lineær differentialligning af første orden forstås en differentialligning der kan skrives på formen $\frac{dy}{dt} + p(t)\cdot y(t) = q(t)$ hvor $p(t)$ og $q(t)$ er funktioner af t

Betegnelsen "lineær" stammer fra, at de "ukendte størrelser" $\frac{dy}{dt}$ og $y(t)$ indgår på lignende måde, som de "ukendte størrelser" x og y indgår i en ret linies ligning .

Idet vi forudsætter, at funktionerne p og q er kontinuerte i et interval I, gælder følgende sætning:

Sætning 1.2 (lineær differentialligning af 1. orden).

Samtlige løsninger til differentialligningen $\frac{dy}{dt} + p(t)\cdot y(t) = q(t)\,,\quad t \in I$

er da givet ved $y(t) = e^{-\int p(t)dt}\int q(t)e^{\int p(t)dt}dt + Ce^{-\int p(t)dt}$,

hvor C er en vilkårlig (arbitrær) konstant.

(formlen kaldes populært for "panserformlen" da den er "pansret" i integraltegn)

Bevis:

Lad $P(t)$ være en stamfunktion til $p(t)$.

$y'(t) + p(t)\cdot y(t) = q(t) \Leftrightarrow \left[y'(t) + p(t)\cdot y(t)\right]e^{P(t)} = q(t)\cdot e^{P(t)}$ Mulplikation med $e^{P(t)}$

$\Leftrightarrow \left[y(t)e^{P(t)}\right]' = q(t)e^{P(t)}$ Omskrivning(ses ved at differentiere)

$\Leftrightarrow y(t)\cdot e^{P(t)} = \int q(t)\cdot e^{P(t)}dt + C \Leftrightarrow y(t) = e^{-P(t)}\int q(t)\cdot e^{P(t)}dt + Ce^{-P(t)}$ Integration og division med $e^{P(t)}$

◆

Panserformlen er ret kompliceret, så man foretrækker ofte følgende omskrivning:

Sætning 1.3 (lineær differentialligning af 1. orden).

Samtlige løsninger til den inhomogene differentialligningen $\frac{dy}{dt} + p(t)\cdot y(t) = q(t)\,,\quad t \in I$

er givet ved $y(t) = y_p(t) + C\cdot y_h(t)$ *, hvor C er en vilkårlig (arbitrær) konstant.*

hvor $y_h(t) = e^{-\int p(t)dt}$ *er en løsning til den homogene differentialligning* $\frac{dy}{dt} + p(t)\cdot y(t) = 0$ *og*

$y_p(t) = y_h(t)\int \frac{q(t)}{y_h(t)}dt$ *er en (partikulær) løsning til den inhomogene differentialligning,*

Bevis: Indsættes $q(t) = 0$ i "panserformlen" fås $y(t) = C\cdot y_h(t)$, hvor $y_h(t) = e^{-\int p(t)dt}$

Derefter er formlen blot en indsætning af $y_h(t)$ i "panserformlen"

Hvis $q(t)$ er en sum af flere led, vil man ofte for overskuelighedens skyld betragte differentialligninger svarende til hvert led for sig (jævnfør det følgende eksempel).

Eksempel 1.6. Lineær 1. ordens differentialligning

1) Find samtlige løsninger til differentialligningen $t\dfrac{dy}{dt}+y(t)=e^{-\frac{t}{2}}+t^3$, $t>0$.

2) Find den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $y(2)=2$

Løsning:

1) Først normeres differentialligningen ved division med t:

$$t\frac{dy}{dt}+y(t)=e^{-\frac{t}{2}}+t^3 \Leftrightarrow \frac{dy}{dt}+\frac{1}{t}y(t)=\frac{1}{t}e^{-\frac{t}{2}}+t^2$$

Homogen løsning: $\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{1}{t}y(t)=0$. $y_h(t)=e^{-\int\frac{1}{t}dt}=e^{-\ln t}=\dfrac{1}{t}$

a) Partikulær løsning til $\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{1}{t}y(t)=\dfrac{1}{t}e^{-\frac{t}{2}}$

$$.\ y_p(t)=y_h(t)\cdot\int\frac{q(t)}{y_h(t)}dt=\frac{1}{t}\int\frac{\frac{1}{t}e^{-\frac{t}{2}}}{\frac{1}{t}}dt=\frac{1}{t}\int e^{\frac{-t}{2}}dt=\frac{1}{t}\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\frac{-1}{2}}=-\frac{2}{t}e^{-\frac{t}{2}}$$

b) Partikulær løsning til $\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{1}{t}y(t)=t^2$

$$y_p(t)=y_h(t)\cdot\int\frac{q(t)}{y_h(t)}dt=\frac{1}{t}\int\frac{t^2}{\frac{1}{t}}dt=\frac{1}{t}\int t^3dt=\frac{1}{t}\frac{t^4}{4}=\frac{t^3}{4}$$

Fuldstændig løsning til $t\dfrac{dy}{dt}+y(t)=e^{-\frac{t}{2}}+t^3$

$$\underline{\underline{y(t)=-\frac{2}{t}e^{-\frac{t}{2}}+\frac{t^3}{4}+C\frac{1}{t}}}$$

2) Begyndelsesbetingelsen y(2) = 2 giver $2=-e^{-1}+\dfrac{8}{4}+\dfrac{C}{2}\Leftrightarrow C=2e^{-1}$

Den søgte partikulære løsning er altså $\underline{\underline{y(t)=-\dfrac{2}{t}e^{-\frac{t}{2}}+\dfrac{t^3}{4}+\dfrac{2}{t\cdot e}}}$

1. **Ti89:**MATH, Calculus, deSolve(t* y′ +y=e^(-1/2*t)+t^3,t,y)

   Resultat: y= $y\left(\dfrac{e^{-\frac{t}{2}}\left(\left(t^4+C\right)\cdot e^{\frac{t}{2}}-8\right)}{4t}\right)$ (som kan omskrives til samme resultat som før.

2. MATH, Calculus, deSolve(t* y′ +y=e^(-1/2*t)+t^3 and y(2)=2,t,y)
   Resultat ser igen anderledes ud, men kan omskrives.

Maple: dsolve(t*diff(y(t),t)+y(t)=exp(-t/2)+t^3,y(t));

$$y(t)=\frac{-2\,e^{\left(-\frac{t}{2}\right)}+\frac{t^4}{4}+\_C1}{t}$$

1.5. Eksempler på anvendelse af lineære differentialligninger af 1. orden.

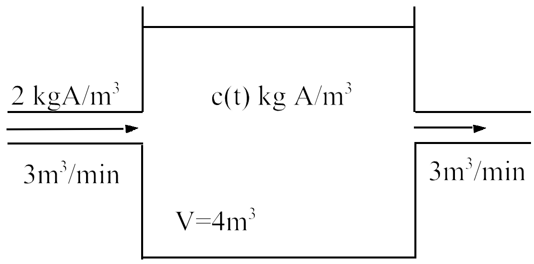
Eksempel 1.7 Reguleringsteknik

Skal man dæmpe "voldsomme svingninger" af et stof A i en strøm, benyttes i reguleringsteknik bl.a. én eller flere tanke som opløsningen pumpes igennem. Dette eksempel er et regneteknisk simpelt eksempel herpå.

Figuren viser en tank, hvori der foregår en opblanding af et stof A.

Koncentrationen c(t) [kgA/m^3] i tanken er en funktion af tiden *t*.

Systemet startes til tiden $t = 0$, og $c(0) = 0$.



1) Opstil en differentialligning hvoraf man kan finde $c(t)$ for alle $t \geq 0$.
2) Løs differentialligningen og find $c(t)$ i tilfældet $c(0) = 0$.

Løsning:

1) For tanken opstilles balancen: IND + PRODUCERET = UD + AKKUMULERET.
som et differentielt regnskab over, hvor mange ton A der passerer ind og ud af søen i et tidsinterval $[t\,;\,t + dt]$
   a) IND: Da tilførelseshastigheden til tidspunktet t er 3 [m^3/min] og koncentrationen af A er 2 [kgA/m^3] vil der i løbet af tiden dt blive tilført $2 \cdot 3 \cdot dt$ [kg A].
   b) PRODUCERET: Der vil ikke blive produceret A i søen.
   c) UD: Da koncentrationen i tanken til tidspunktet t er $c(t)$ [kg A/m^3] og fraløbet er 3 [m^3/min] vil der i løbet af tiden dt forsvinde $3 \cdot c(t) \cdot dt$ [kg] fra tanken.
   d) AKKUMULERET: Til tiden t er den totale mængde A i søen $3 \cdot c(t) \cdot dt$ [kg]. I løbet af det infinitesimale tidsrum dt vil der i søens totale A - indhold ske en differentiel ændring $d(4 \cdot c(t))$.

   Balanceligningen bliver altså $2 \cdot 3 \cdot dt + 0 = 3 \cdot c(t) \cdot dt + d(4 \cdot c(t))$

   Ved division med dt fås differentialligningen $6 = 3 \cdot c(t) + 4\dfrac{dc}{dt} \Leftrightarrow \underline{\underline{4\dfrac{dc}{dt} + 3 \cdot c(t) = 6}}$

2) $4\dfrac{dc}{dt} + 3 \cdot c(t) = 6 \Leftrightarrow \dfrac{dc}{dt} + \dfrac{3}{4}c(t) = \dfrac{3}{2}$

   Homogen løsning: $\dfrac{dc}{dt} + 0.75\, c(t) = 0 \Leftrightarrow c_h(t) = K \cdot e^{-0.75t}$

   Partikulær løsning: $c_p(t) = e^{-0.75t}\displaystyle\int \frac{1.5}{e^{-0.75t}}\,dt = e^{-0.75t} \cdot 1.5\int e^{0.75t}\,dt = e^{-0.75t} \cdot 1.5\frac{e^{0.75t}}{0.75} = 2$

   Fuldstændig løsning: $c(t) = K \cdot e^{-0.75t} + 2$.

   Indsættes $c(0) = 0$ fås $0 = K + 2 \Leftrightarrow K = -2$

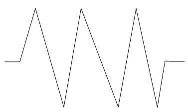
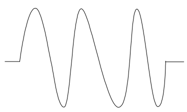
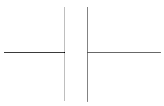
   $\underline{\underline{c(t) = 2 - 2 \cdot e^{-0.75t}}}$ ◆

Bemærk, at løsningen til den homogene ligning alene afhænger af systemets konstanter, mens "input" alene indgår i den partikulære løsning.

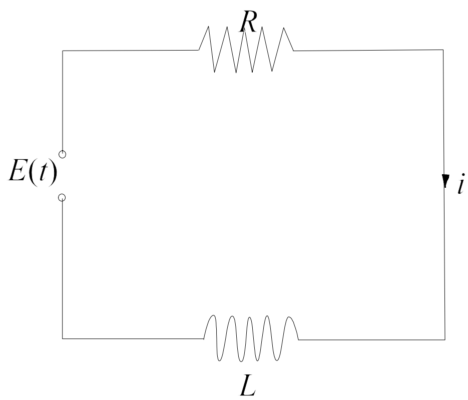
Havde input således lidt mere realistisk været periodisk f.eks. været $5 \cdot \cos(2t)$ [kg A/m^3] ville kun differentialligningens højre side have ændret sig, dvs. $4\frac{dc}{dt} + 3 \cdot c(t) = 3 \cdot 5\cos(2t)$.

Eksempel 1.8. Elektrisk kredsløb

Dette eksempel er hentet fra læren om elektriske kredsløb. I sådanne kan forekomme følgende 3 elementer:

Navn	Symbol	Notation	Enhed	Spændingsforskel
Ohms modstand		R	Ohm	Ri
Induktor, spole			H (henry)	$L\frac{di}{dt}$
Kondensator, Kapacitor		C	F (Farad)	$\frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt$

Lad os betragte følgende RL- kredsløb, hvor L = 0.1 Henry, R = 5 ohm or et 15 volt batteri giver den elektromotoriske kraft.Lad endvidere $i(0) = 0$.



1) Opstil en differentialligning hvoraf man kan finde $i(t)$ for alle $t \geq 0$.
2) Løs differentialligningen og find $i(t)$ i tilfældet $i(0) = 0$.

Løsning:

1) Spændingsfaldet over modstanden er $R \cdot i$, og spændingsfaldet over spolen er $L\frac{di}{dt}$.

   Summen af de to spændingsfald er lig den elektromotoriske kraft $E(t)$, dvs. $L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$

   Indsættes de givne tal fås $\underline{\underline{0.1\frac{di}{dt} + 5i = 12}}$

2) $0.1\frac{di}{dt}+5i=12 \Leftrightarrow \frac{di}{dt}+50i=120$

Homogen løsning: $\frac{di}{dt}+50i=0 \Leftrightarrow i_h(t)=Ce^{-50t}$

Partikulær løsning: $i_p(t)=e^{-50t}\int \frac{120}{e^{-50t}}dt = 120e^{-50t}\ \frac{1}{50}e^{-50t} = \frac{120}{50}=2.4$

$\frac{di}{dt}+50i=12 \Leftrightarrow i(t)=2.4+Ce^{-50t}$

Indsættes $i(0) = 0$ fås: $0=2.4+C \Leftrightarrow C=-2.4$. $\frac{di}{dt}+50i=12 \Leftrightarrow \underline{\underline{i(t)=2.4+Ce^{-50t}}}$

◆

Bemærk, at løsningen til den homogene ligning alene afhænger af systemets konstanter, mens "input" alene indgår i den partikulære løsning.
Havde input således været en påtrykt periodisk elektromotorisk kraft $E_0\sin(\omega t)$ ville det kun være differentialligningens højre side der ville have ændret sig.

2. Differentialligninger af 2. orden

2.1.Indledning

Vi vil i dette kapitel begrænse os til at se på lineære differentialligninger af 2. orden, dvs. differentialligninger af typen $\dfrac{d^2y}{dt^2}+p(t)\dfrac{dy}{dt}+q(t)y(t)=r(t)$, hvor funktionerne $p(t), q(t)$ og $r(t)$ antages kontinuerte i et interval I.

Eksempelvis er $\dfrac{d^2y}{dt^2}+3t^2\dfrac{dy}{dt}+6ty(t)=\sin(t)$ en lineær differentialligning af 2. orden,

Eksempel 2.1 (differentialligning af 2. orden).

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen $\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{1}{t}\dfrac{dy}{dt}=3t, \quad t>0$

Løsning:

$x(t)=\dfrac{dy}{dt}, \ \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d^2y}{dt^2}$, indsættes i differentialligningen, og vi får $\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{1}{t}x(t)=3t$.

Denne lineære differentialligning af 1. orden kan løses efter metoden i afsnit 1.4.

Homogen løsning: $\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{1}{t}x(t)=0 \quad x_h=e^{\int\frac{1}{t}dt}=e^{\ln t}=t$

Partikulær løsning: $x_p(t)=x_h(t)\cdot\displaystyle\int\frac{q(t)}{x_h(t)}dt=t\int\frac{3t}{t}dt=3t^2$

Vi har derfor: $\dfrac{dy}{dt}=x(t)=3t^2+C_1t$

som ved integration giver $y(t)=\displaystyle\int(3t^2+C_1t)dt+C_2 \Leftrightarrow \underline{\underline{y(t)=t^3+\frac{1}{2}C_1t^2+C_2t}}$

◆

I eksempel 2.1 fandt vi, at den fuldstændige løsning indeholdt 2 (arbitrære) konstanter C_1 og C_2.
Det kan vises at gælde generelt, idet man kan vise følgende sætning (der anføres uden bevis):

Sætning 2.1. Lineær differentialligning af 2. orden.

1) *Lad $f_1(t)$ og $f_2(t)$ være to ikke proportionale løsninger til den **homogene** differentialligning*

$$\frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}+q(t)y(t)=0. \qquad t\in I$$

Samtlige løsninger til den homogene differentialligning er da bestemt ved
$y(t)=C_1\cdot f_1(t)+C_2\cdot f_2(t)$, hvor C_1 og C_2 er to vilkårlige reelle konstanter.

2) *Lad $y_p(t)$ være en partikulær løsning til den inhomogene differentialligning*

$$\frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}+q(t)y(t)=r(t), \qquad t\in I$$

Samtlige løsninger til den inhomogene differentialligning er da bestemt ved
$y(t) = y_p(t) + C_1 \cdot f_1(t) + C_2 \cdot f_2(t)$ *, hvor C_1 og C_2 er to vilkårlige reelle konstanter.*

Eksempel 2.2 (illustration af sætning 2.1).

1) Vis, at $y_1(t) = C_1$ og $y_2(t) = C_2 t^2$ er to ikke proportionale løsninger til den homogene differentialligning $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} = 0, \quad t > 0$

2) Vis, at $y(t) = t^3$ er (partikulær) løsning til den inhomogene differentialligning $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} = 3t, \quad t > 0$

3) Angiv den fuldstændige løsning til differentialligningen $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} = 3t, \quad t > 0$

Løsning:

1) Da $y_1(t) = C_1$ ikke er lig med en konstant gange med $y_2(t) = C_2 t^2$ er funktionerne ikke proportionale.

Indsættes $y_1(t) = C_1$, $y_1'(t) = y_1''(t) = 0$ i $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} = 0$, fås 0 = 0.

Indsættes $y_2(t) = C_2 t^2$, $y_2'(t) = 2C_2 t$, $y_2''(t) = 2C_2$ i $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} = 0$, fås $2C_2 - \frac{1}{t} \cdot 2C_2 t = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$.

Heraf ses, at $y_1(t) = C_1$ og $y_2(t) = C_2 t^2$ er to ikke proportionale løsninger til den homogene differentialligning

2) Indsættes $y(t) = t^3$, $y'(t) = 3t^2$, $y_2''(t) = 6t$ i $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} = 3t$, fås $6t - \frac{1}{t}3t^2 = 3t \Leftrightarrow 0 = 0$,

dvs. $y(t) = t^3$ er løsning til den inhomogene differentialligning

3) Af sætning 2.1 følger da, at den fuldstændige løsning er $y(t) = t^3 + C_1 t^2 + C_2$
(svarende til løsningen i eksempel 2.1) ◆

Da udtrykket for samtlige løsninger indeholder netop 2 konstanter C_1 og C_2, skal der to betingelser til at fastlægge en bestemt løsning. Det mest almindelige er, at benytte såkaldte begyndelsesbetingelser, hvor man udover for en bestemt værdi t_0 at fastlægge $y(t_0)$ også fastlægger hældningskoefficienten $y'(t_0)$. Man kan vise, at sådanne begyndelsesbetingelser entydigt fastlægger løsningen.

Eksempel 2.3. Løsning til differentialligning

Lad der være givet differentialligningen : $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} = 3t, \quad t > 0$ (jævnfør eksempel 2.1)

Vi ønsker at bestemme den løsning $y(t)$, der opfylder begyndelsesbetingelsen $y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$

Løsning:

Fra eksempel 2.1 er den fuldstændige løsning $y(t) = t^3 + \frac{1}{2}C_1 t^2 + C_2 t$.

Indsættes begyndelsesbetingelsen haves:

$$\begin{cases} 1 = 1^3 + \frac{1}{2}C_1 \cdot 1^2 + C_2 \cdot 1 \\ 0 = 3 \cdot 1^2 + C_1 \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow (C_1, C_2) = \left(-3, \frac{3}{2}\right). \quad \underline{\underline{y(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t}}$$

Løsningsmetoden i eksempel 2.1 kan kun anvendes i de tilfælde, hvor den lineære differentialligning ikke indeholder for differentialligninger af typen $\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} = 0$.

Dette er også muligt for visse andre typer lineære differentialligninger af anden orden, men generelt er det imidlertid ikke muligt at angive en løsningsmetode, der som "panserformlen" udtrykker løsningen ved formler indeholdende integraler.
Det må i sådanne tilfælde anbefales eksempelvis at anvende et program som Maple, og håbe på, at den kan løse problemet.

Som de følgende afsnit viser, er det imidlertid forholdsvis let at angive en løsningsmetode for den ved anvendelserne vigtigste type differentialligninger

2.2 Den homogene lineære differentialligning af 2. orden med konstante koefficienter.

Differentialligningen $A\frac{d^2y}{dx^2} + B\frac{dy}{dx} + Cy(t) = 0 \qquad A \neq 0$ (1)

siges at være homogen og lineær med *konstante koefficienter A, B, C*.

Da en eksponentialfunktion optrådte i løsningen til den homogene lineære differentialligning af 1. orden, er det naturligt at søge en løsning af typen $y(t) = e^{\lambda t}$ hvor λ er en konstant.

Indsættes $y(t) = e^{\lambda t}$, $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ i differentialligningen (1), fås

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + B\lambda e^{\lambda t} + Ce^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda t}\left(A\lambda^2 + B\lambda + C\right) = 0 \Leftrightarrow A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \quad (\text{da } e^{\lambda t} \neq 0)$$

Funktionen $y(t) = e^{\lambda t}$ er altså en løsning til differentialligningen, hvis og kun hvis λ er en rod i den såkaldte **karakterligning** $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$.

Da $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}$, hvor $D = B^2 - 4AC$

bliver løsningerne afhængige af om : $D > 0$: To reelle rødder
$D = 0$: En reel dobbelt rod
D < 0: To komplekse rødder

Sætning 2.2 (løsning til homogen differentialligning med konstante koefficienter).
Den lineære homogene differentialligning med konstante koefficienter

$$A\frac{d^2y}{dx^2} + B\frac{dy}{dx} + Cy(t) = 0 \qquad A \neq 0, \quad A,\ B,\ C \text{ er reelle tal.} \tag{1}$$

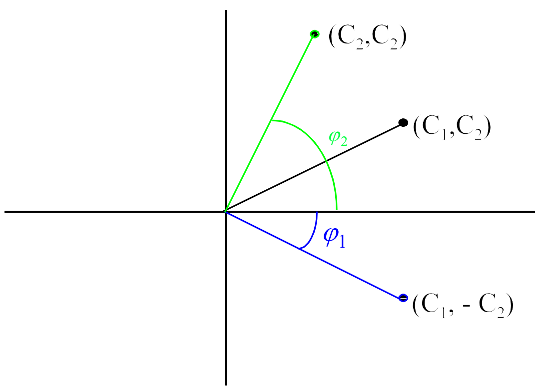
har karakterligningen $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$, *med diskriminanten* $D = B^2 - 4AC$
Der gælder da:

Rødder i karakterligning.	*Fuldstændig løsning til (1)*
D > 0: To reelle rødder λ_1 *og* λ_2, *hvor* $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$
D = 0: En reel dobbeltrod λ	$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot t \cdot e^{\lambda_2 t}$
D < 0: To komplekse rødder $r \pm i\omega$	$y(t) = C_1 e^{rt}\cos(\omega t) + C_2 \cdot e^{rt}\sin(\omega t)$ *eller* $y(t) = K \cdot e^{rt} \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$ *eller* $y(t) = K \cdot e^{rt} \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$

C_1 , C_2 ,*K og* φ *er reelle vilkårlige (arbitrære) konstanter.*

$K = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$

$\varphi_1 = \arg(C_1, -C_2), \quad \varphi_{21} = \arg(C\ , C_1)$,



Bevis:
I alle 3 tilfælde, er den fuldstændige løsning af typen $y(t) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$. Ifølge sætning 2.1 er det tilstrækkeligt, ved indsættelse i differentialligningen, at vise, at de to funktioner $f_1(t)$ og $f_2(t)$ opfylder ligningen (1),og at de ikke er proportionale.

I: *D* > 0 To forskellige reelle rødder.

Af udledningen af karakterligningen ses, at $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ og $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ er to forskellige løsninger til differentialligningen. Da de to funktioner ikke er proportionale er $y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ den fuldstændige løsning til differentialligningen.

II: *D* = 0.To ens reelle rødder.

Lad dobbeltroden være $\lambda = -\dfrac{B}{2A}$ Af udledningen af karakterligningen følger, at $y_1(t) = e^{\lambda t}$ er en løsning til differentialligningen. For at vise, at $y_2(t) = t \cdot e^{\lambda t}$ er en løsning indsættes $y_1(t) = t \cdot e^{\lambda t}$,

$y_1'(t) = \lambda \cdot t \cdot e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = e^{\lambda t}(\lambda \cdot t + 1)$ og $y_1''(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t}(\lambda \cdot t + 1) + \lambda \cdot e^{\lambda t} = \lambda \cdot e^{\lambda t}(\lambda \cdot t + 2)$ i (1):

$$A(\lambda \cdot e^{\lambda t}(\lambda t + 2) + B \cdot e^{\lambda t}(\lambda t + 1) + C \cdot t \cdot e^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow t \cdot e^{\lambda t}\left(A\lambda^2 + B\lambda + C\right) + (2A\lambda + B) \cdot e^{\lambda t} = 0$$

Da $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ (fordi λ er rod i karakterligningen) og $2A\lambda + B = 0$ (da $\lambda = -\dfrac{B}{2A}$)

ses, at $y_2(t) = t \cdot e^{\lambda t}$ er løsning til (1)

Da funktionerne $y_1(t) = e^{\lambda t}$ og $y_2(t) = t \cdot e^{\lambda t}$ ikke er proportionale følger af sætning 2.1 at den fuldstændige løsning til differentialligningen er $y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot t \cdot e^{\lambda_2 t}$

Man kan undre sig over hvorledes man første gang har gættet, at den anden løsning er $y_2(t) = te^{\lambda t}$. Det kunne være sket ved, at man opfatter dobbeltroden som to nærliggende rødder $\lambda + \Delta\lambda$ og λ og derpå lade $\Delta\lambda \to 0$

Samtlige løsninger er $y(t) = C_1 e^{(\lambda + \Delta\lambda)t} + C_2 e^{\lambda t}$.

Sættes $C_1 = \dfrac{1}{\Delta\lambda}$ og $C_2 = \dfrac{-1}{\Delta\lambda}$, fås $y(t) = \dfrac{e^{(\lambda + \Delta\lambda)t} - e^{\lambda t}}{\Delta\lambda}$

Da $\dfrac{d\,f}{d\,\lambda}$ er defineret ved $\dfrac{f(\lambda + \Delta\lambda, t) - f(\lambda, t)}{\Delta\lambda} \to \dfrac{d\,f}{d\,\lambda}$ for $\Delta\lambda \to 0$ fås $y(t) \to \dfrac{d\,e^{\lambda t}}{d\lambda} = te^{-\lambda t}$ for $\Delta\lambda \to 0$

Det er derfor nærliggende at formode, at udtrykket $y_2(t) = te^{\lambda t}$ er en løsning til differentialligningen.

III: D < 0: To komplekse rødder.

Karakterligningen har de to komplekse rødder $r \pm i\omega$. $y_1(t) = e^{(r+i\omega)t}$ og $y_2(t) = e^{(r-i\omega)t}$ er da "komplekse" løsninger til (1). Da $e^{(r+i\tau\omega)t} = e^{rt}\cos(\omega t) + ie^{rt}\sin(\omega t)$ er det rimeligt at antage, at realdel og imaginærdel hver for sig er reelle løsninger til (1).

Ved indsættelse i ligning (1) ses (beregningen udført nedenfor), at de er løsninger, og da de to funktioner ikke er proportionale, er den fuldstændige løsning: $y(t) = C_1 e^{rt}\cos(\omega t) + C_2 e^{rt}\sin(\omega t)$

Beregning: $y_1(t) = e^{rt} \cdot \cos(\omega t)$, $y_1'(t) = e^{rt}\left(r \cdot \cos(\omega t) - \omega \cdot \sin(\omega t)\right)$

$y''(t) = e^{rt}\left(r^2 \cdot \cos(\omega t) - r\omega \cdot \sin(\omega t) - r \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) - \omega^2 \cdot \cos(\omega t)\right)$ indsættes i (1)

$$e^{rt}\left(A(r^2 - \omega^2)\cos(\omega t) - 2A \cdot r \cdot \omega\sin(\omega t) + B \cdot r \cdot \cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t) + C \cdot \cos(\omega t)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(A(r^2 - \omega^2) + B \cdot r + C\right)\cos(\omega t) - \omega(2A \cdot r + B)\sin(\omega t) = 0$$

Vi har $\lambda = \dfrac{-B \pm i\sqrt{-D}}{2A} = r \pm i\omega \Leftrightarrow r = \dfrac{-B}{2A} \wedge \omega^2 = \dfrac{-D}{4A^2}$

Heraf fås, at $r = \frac{-B}{2A} \Leftrightarrow 2A \cdot r + B = 0$ og $A(r^2 - \omega^2) + B \cdot r + C = A\left(\left(\frac{-B}{2A}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{-D}}{2A}\right)^2\right) + B\left(\frac{-B}{2A}\right) + C$

$= \frac{B^2 - (-(B^2 - 4AC))}{4A} - \frac{B^2}{2A} + C = \frac{2B^2}{4A} + C - \frac{B^2}{2A} + C = 0$

Hermed ses, at $y_1(t) = e^{rt} \cdot \cos(\omega t)$ er løsning til (1).

På tilsvarende måde ses, at $y_2(t) = e^{rt} \cdot \sin(\omega t)$ er løsning til (1).

Ifølge additionsformlerne fås:

$Ke^{rt}\cos(\omega t + \varphi) = Ke^{rt}(\cos(\omega t) \cdot \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \cdot \sin(\varphi)) = e^{rt}\left(C_1 \cos((\omega t) + C_2 \sin(\omega t)\right)$

hvor $C_1 = K\cos(\varphi) \wedge C_2 = -K\sin(\varphi)$, Heraf ses, at $y_1(t) = Ke^{rt}\cos(\omega t + \varphi)$ er løsning til (1).

På tilsvarende måde ses, at $y_1(t) = Ke^{rt}\sin(\omega t + \varphi)$ er løsning til (1).

Endvidere følger heraf omregningen mellem C_1, C_2 og K, φ

Eksempel 2.4. Homogen lineær differentialligning med konstante koefficienter

1) Find samtlige løsninger til differentialligningen $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y(t) = 0$

2) Find samtlige løsninger til differentialligningen $\frac{1}{3}\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 3y(t) = 0$

3) Find samtlige løsninger til differentialligningen $\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 20y(t) = 0$, samt den partikulære løsning, der opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0)= -1$ og $y'(0) = 2$

Løsningen ønskes angivet på såvel formen $C_1e^{rt}\cos(\omega t) + C_2e^{rt}\sin(\omega t)$ som på formen $Ke^{rt}\cos(\omega t + \varphi)$

Løsning:

1) Karakterligningen:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = -3$$

Samtlige løsninger: $\underline{\underline{y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-3t}}}$

2) Karakterligningen: $\frac{1}{3}\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3}}{2 \cdot \frac{1}{3}} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \lambda = 3$

Samtlige løsninger: $\underline{\underline{y(t) = C_1e^{3t} + C_2t \cdot e^{3t}}}$

3) Karakterligningen:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 20 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{-64}}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{4 \pm i8}{2} \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm 4i$$

Samtlige løsninger: $\underline{\underline{y(t) = C_1 e^{2t}\cos(4t) + C_2 e^{2t}\sin(4t)}}$

Partikulær løsning svarende til $y(0) = -1$ og $y'(0) = 2$:

$y(t) = C_1 e^{2t}\cos(4t) + C_2 e^{2t}\sin(4t)$ differentieres:

$y'(t) = 2C_1 e^{2t}\cos(4t) - 4C_1 e^{2t}\sin(4t) + 2C_2 e^{2t}\sin(4t) + 4C_2 e^{2t}\cos(4t)$

Ved indsættelse af begyndelsesbetingelserne fås

$y(0) = -1 \Leftrightarrow C_1 = -1$, $y'(0) = 2 \Leftrightarrow 2C_1 + 4C_2 = 2$

Heraf ses, at $C_1 = -1$ og $C_2 = 1$

Den søgte partikulære løsning er altså $\underline{\underline{y(t) = -e^{2t}\cos(4t) + e^{2t}\sin(4t)}}$

Partikulær løsning på formen $y(t) = Ke^{2t}\cos(4t + \varphi)$

Af sætning 2.1 fås $K = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

$\varphi = \arg(C_1, -C_2) = \arg(-1, -1) = -\dfrac{3\pi}{4}$

$$\underline{\underline{y(t) = \sqrt{2}e^{2t}\cos\left(4t - \frac{3\pi}{4}\right)}}$$

.

Ti89: MATH, Calculus, deSolve ,ENTER desolve(y``-4*y`+20*y=0,t,y)

Resultat: $y(t) = C_1 e^{2t}\cos(4t) + C_2 e^{2t}\sin(4t)$

Partikulær løsning: desolve(y``-4*y`+20*y=0 and y(0)=-1 and y`(0)=2,t,y)

Maple:

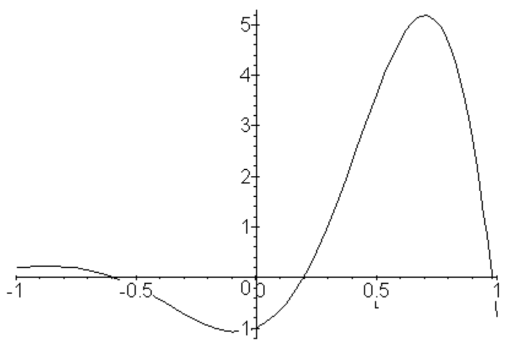
dsolve(diff(y(t), t, t) - 4 * diff(y(t), t) + 20*y(t) =0, y(t));

L := dsolve({diff(y(t), t, t) - 4 * diff(y(t), t) + 20*y(t) =0, y(0)=-1, D(y)(0)=2}, y(t));

Ønskes grafen tegnet i intervallet fra -1 til 1 sker dette med følgende ordrer:

y:=unapply(rhs(L), t):

plot(y(t), t=-1..1);

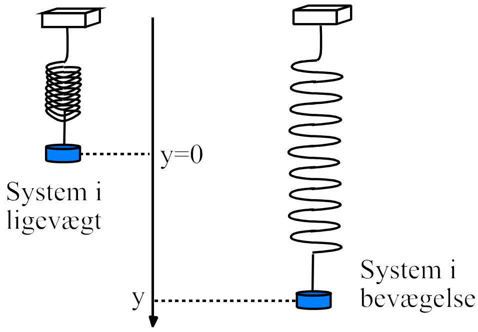


Eksempel 2.5. Svingning med luftmodstand

Et lod med massen m er fastgjort til en fjeder. I startsituationen er systemet i ligevægt, idet den nedadgående tyngdekraft og den opadgående fjederkraft er lige store. (se figuren)

Vi trækker nu ned i loddet til en passende afstand, og slipper loddet. Loddet vil nu bevæge sig op og ned . Vi ønsker at bestemme loddets bevægelse som funktion af tiden t.

Lad os som på figuren indføre en y - akse. Til ligevægtstillingen svarer $y = 0$, og til tiden t er loddet placeret i en afstand $y(t)$ fra ligevægtstillingen (positiv når loddet ligger under og negativ når loddet ligger over ligevægtstillingen)



Ifølge Newtons anden lov er Kraft = masse $\cdot$ acceleration, dvs. $K_1 = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2}$.

Ifølge Hookes lov er fjederkraften proportional med afstanden fra ligevægtstillingen, dvs. $K_2 = -k \cdot y$, hvor $k > 0$

Harmonisk svingning. Antager vi at dæmpningen (f. eks. luftmodstanden) er forsvindende, vil K_2 være den eneste kraft der påvirker bevægelsen, dvs. $m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -k \cdot y(t) \Leftrightarrow m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + k \cdot y(t) = 0$

Dette er en homogen differentialligning med konstante koefficienter.

Karakterligningen $m \cdot \lambda^2 + k = 0 \Leftrightarrow \lambda = i\sqrt{\frac{k}{m}}$ .Sættes $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$ bliver løsningen $y(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Bevægelsen er en harmonisk svingning med en periode på $\frac{2\pi}{\omega_0}$. Legemet udfører følgelig $\frac{\omega_0}{2\pi}$ svingninger pr. sekund.

Dæmpet svingning. Antager vi at dæmpningen ikke er forsvindende (Eksempelvis fordi loddet er bredt, eller bevægelsen foregår i vand), så er dæmpningskraften K_3 (med tilnærmelse) proportional med loddets hastighed og modsat rettet bevægelsen, dvs. $K_3 = -c\frac{dy}{dt}$

Vi har nu differentialligningen $m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -k \cdot y(t) - c\frac{dy}{dt} \Leftrightarrow m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + k \cdot y(t) = 0$. Vi har igen en harmonisk differentialligning. Karakterligningen $m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4 \cdot m \cdot k}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$

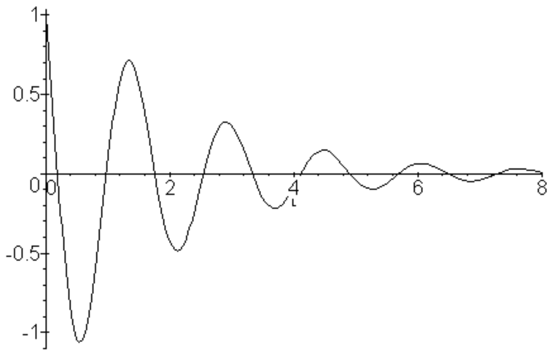
Vi kan nu dele op i 3 tilfælde afhængig af fortegnet for diskriminanten $D = c^2 - 4 \cdot m \cdot k$

I: $D < 0$ **Dæmpede svingninger**.

Dette tilfælde indtræffer, når dæmpningen c er så lille, at $c^2 < 4 \cdot m \cdot k$ Karakterligningen har 2 komplekse rødder: $\lambda = r \pm i\omega$

Samtlige løsninger til differentialligningen bliver $y(t) = Ae^{-rt}\cos(\omega t + \varphi)$

Faktoren e^{-rt} bevirker, at svingningernes amplitude nærmer sig til 0 (dæmpede svingninger, se figuren):



***D* = 0, Kritisk dæmpning.** Dette tilfælde indtræder, når dæmpningen c er nået op på en bestemt kritisk størrelse, sådan at $c^2 = 4 \cdot m \cdot k$ hvorved svingninger netop ikke kan forekomme.

Vi har da $m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4 \cdot m \cdot k}}{2m} \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{-c}{2m}$

Samtlige løsninger er $y(t) = C_1 e^{-\frac{c}{2m}t} + C_2 \cdot t \cdot e^{-\frac{c}{2m}t}$

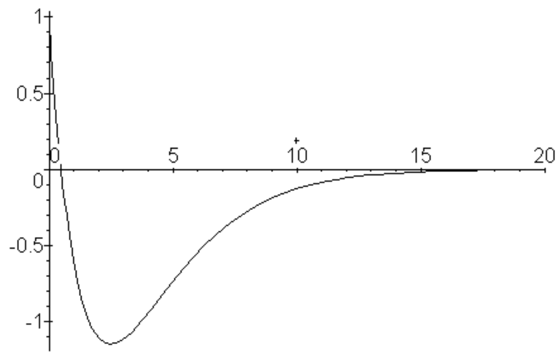
Det ses, at $y(t) \to 0$ for $t \to 0$

***D* > 0: Overkritisk dæmpning.** Dette tilfælde indtræffer, når dæmpningen c er større end den kritiske værdi, sådan at $c^2 > 4 \cdot m \cdot k$

Så har karakterligningen to forskellige reelle rødder: $-r_1$ og $-r_2$

Samtlige løsninger til differentialligningen er $y(t) = C_1 e^{-r_1 t} + C_2 \cdot e^{-r_2 t}$

Det ses, at $y(t) \to 0$ for $t \to 0$ (se figuren)



Eksempel 2.6 Harmonisk svingning, Dæmpet svingning

Lad det i eksempel 2.8 angivne lod have massen m =4, og lad fjederen have proportionalitetskonstanten k = 17.
Lad endvidere loddet til tiden t = 0 befinde sig i en afstand af 3 fra hvilestillingen og der have hastigheden 0, dvs. $y(0) = 3$ og $y'(0) = 0$

1) Lad dæmpningsfaktoren c = 0.
   a) Opstil differentialligningen for bevægelsen
   b) Angiv den løsning, der svarer til ovennævnte begyndelsesbetingelse, og skitser grafen for $t \in [0;2\pi]$
2) Lad dæmpningsfaktoren c = 4.
   a) Opstil differentialligningen for bevægelsen
   b) Angiv den løsning, der svarer til ovennævnte begyndelsesbetingelse, og skitser grafen for $t \in [0;2\pi]$

Løsning:

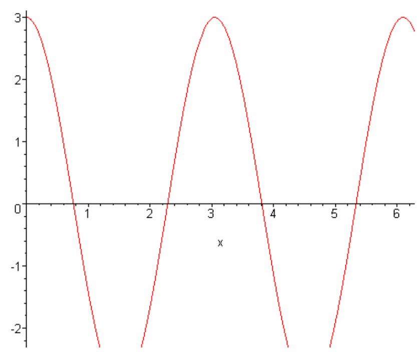
1) a) $\underline{\underline{y''(t) + 17y(t) = 0}}$

b) Da $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$ er $y(t) = A\cos(\dfrac{\sqrt{17}}{2}t + \varphi)$

Ved differentiation fås: $y'(t) = -\dfrac{\sqrt{17}}{2}A\sin(\dfrac{\sqrt{17}}{2}t + \varphi)$

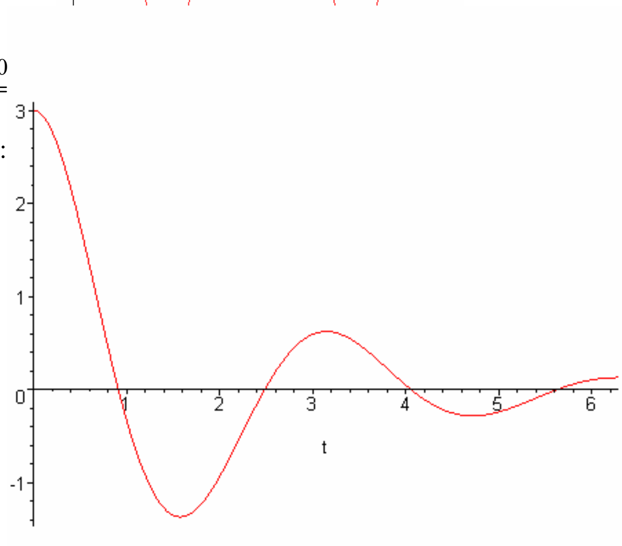
$\begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\cos\varphi = 3 \\ -\dfrac{\sqrt{17}}{2}A\sin\varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ A = 3 \end{cases}$, dvs. den søgte løsning er: $\underline{\underline{y(t) = 3\cos(\dfrac{\sqrt{17}}{2}t)}}$

Maple: > plot(3*cos(sqrt(17)/2*t), t=0..2*Pi);



2) a) $\underline{\underline{4y'' + 4y'(t) + 17y(t) = 0}}$

b) Karakterligning:



$4\lambda^2 + 4\lambda + 17 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot4\cdot17}}{2\cdot4}$

$y(t) = Ae^{-\frac{1}{2}t}\cos(2t + \varphi)$,

$y'(t) = -\dfrac{1}{2}Ae^{-\frac{1}{2}t}\cos(2t + \varphi) - 2Ae^{-\frac{1}{2}t}\sin(2t$

$\begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\cos\varphi = 3 \\ -\dfrac{1}{2}A\cos\varphi - 2A\sin\varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \\ -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

$\underline{\underline{y(t) = 3.10053e^{-0.5t}\cos(2t - 0.255342}}$

.

◆

2.3 Den inhomogene lineære differentialligning af 2. orden med konstante koefficienter.

Lad der være givet differentialligningen $$A\frac{d^2y}{dx^2}+B\frac{dy}{dx}+Cy(t)=q(t) \qquad A\neq 0 \qquad (1)$$
hvor $q(t)$ er kontinuert i et interval I og A, B og C er reelle konstanter.
Hvis $q(t)\neq 0$ siges differentialligningen at være **inhomogen**.
Hvis $q(t)=0$ fås den tilsvarende homogene differentialligning, hvis fuldstændige løsning blev fundet i afsnit 2.2.
Den følgende sætning viser, at den "homogene løsning" indgår i løsningen til den inhomogene ligning.

Sætning 2.3 (løsningens struktur). *Samtlige løsninger til den inhomogene lineære differentialligning (1) fremkommer ved til en vilkårlig partikulær løsning* $y_p(t)$ *til (1) at lægge den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning* $y_h(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)$
Den inhomogene løsning kan altså skrives $y(t)=y_p(t)+C_1y_1(t)+C_2y_2(t)$

Bevis. For en vilkårlig løsning y til (1) kan der altid findes en funktion f, sådan at $y=y_p+f$.
Ved indsættelse i (1) fås da

$A(y_p+f)''+B(y_p+f)'+C(y_p+f)=q \Leftrightarrow Ay_p''+By_p'+Cy_p+Af''+Bf'+C=q$

$\Leftrightarrow q+A\cdot f''+B\cdot f'+C=q$ (da y_p er en løsning til (1))

$\Leftrightarrow A\cdot f''+B\cdot f'+C=0$

◆

Da vi let kan finde samtlige løsninger til den homogene differentialligning, er problemet reduceret til at finde en partikulær løsning $y_p(t)$ til den inhomogene ligning (1).

Som nedenstående sætning viser, er det muligt at udtrykke $y_p(t)$ ved integraler.

Sætning 2.4 (Integralmetoden til bestemmelse af partiel løsning af inhomogen differentialligning med konstante koefficienter).

Den lineære differentialligning med konstante koefficienter

$$A\frac{d^2y}{dx^2}+B\frac{dy}{dx}+Cy(t)=q(t) \qquad A\neq 0, \quad A,\ B,\ C \text{ er reelle tal.} \tag{2}$$

har karakterligningen $A\lambda^2+B\lambda+C=0$, *med diskriminanten* $D=B^2-4AC$

Der gælder da:

Rødder i karakterligning.	*Partikulær løsning* $y_p(t)$ *til* (2)
D > 0: To reelle rødder λ_1 *og* λ_2, *hvor* $\lambda_1\neq\lambda_2$	$y_p(t)=\frac{e^{\lambda_1 t}}{A(\lambda_1-\lambda_2)}\int q(t)e^{-\lambda_1 t}dt-\frac{e^{\lambda_2 t}}{A(\lambda_1-\lambda_2)}\int q(t)e^{-\lambda_2 t}dt$
D = 0: *En reel dobbeltrod* λ	$y_p(t)=\frac{te^{\lambda_1 t}}{A}\int q(t)e^{-\lambda_1 t}dt-\frac{e^{\lambda_1 t}}{A}\int q(t)e^{-\lambda_1 t}dt$
D < 0:To komplekse rødder $r\pm i\omega$	$y(t)=\frac{e^{rt}\sin(\omega t)}{A\cdot\omega}\int q(t)e^{-rt}\cos(\omega t)dt + \frac{e^{rt}\cos(\omega t)}{A\cdot\omega}\int q(t)e^{-rt}\sin(\omega t)dt$

Beviset for sætningen kan findes i “Matematik for Ingeniører side 194.
Som det fremgår af formlerne bliver integralerne ofte meget komplicerede, og det vil ikke altid være muligt at finde en stamfunktion. Det kan dog vises, at hvis $q(t)$ enten er et polynomium med reelle koefficienter, en af funktionerne sin(t), cos(t) , e^{rt} eller en sum eller et produkt af disse, så kan man finde den partielle løsning udtrykt ved de kendte funktioner. På grund af de besværlige integraler er det dog i alle tilfælde tilrådeligt at benytte et integralprogram (som i Ti89 eller Maple)

Hvis differentialligningens højre side $q(t)$ er en sum eller differens af flere led, er det endvidere klogt at simplificere integralerne ved at betragte differentialligninger hvor højre side kun består af et enkelt led. (som det allerede skete i eksempel 1.6, og i det følgende eksempel 27)

Eksempel 2.7 (Integralmetoden).

Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$2\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+4y(t)=\cos(e^t)+2e^t\cos(2t)$$

Løsning:

Homogen løsning: $2\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+4y(t)=0$

Karakterligning:

$$2\lambda^2+6\lambda+4=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot 2\cdot 4}}{4} \Leftrightarrow \lambda=\frac{-6\pm 2}{4} \Leftrightarrow \lambda=-4 \vee \lambda=-1$$

Ifølge sætning 2.2 har den homogene differentialligning den fuldstændige løsning:

$y_h(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$

Partikulær løsning:

1) $2\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+4y(t)=\cos(e^t)$

$$y_p(t)=\frac{e^{-t}}{2(-1-(-2))}\int\cos(e^t)e^t\,dt-\frac{e^{-2t}}{2(-1-(-2))}\int\cos(e^t)e^{2t}\,dt$$

$$\Leftrightarrow y_p(t)=\frac{e^{-t}}{2}\int\cos(e^t)e^t\,dt-\frac{e^{-2t}}{2}\int\cos(e^t)e^{2t}\,dt$$

Benyttes Ti 89 til udregningen fås $y_p(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos(e^t)$

2) $2\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+4y(t)=2e^t\cos(2t)$

$$y_p(t)=\frac{e^{-t}}{2(-1-(-2))}\int 2e^t\cos(2t)e^t\,dt-\frac{e^{-2t}}{2(-1-(-2))}\int 2e^t\cos(2t)e^{2t}\,dt$$

$$\Leftrightarrow y_p(t)=e^{-t}\int e^{2t}\cos(2t)dt-e^{-2t}\int e^{3t}\cos(2t)dt$$

Benyttes Ti 89 til udregningen fås $y_p(t)=\frac{e^t}{52}\left(\cos(2t)+5\sin(2t)\right)$

Samtlige løsninger til differentialligningen

$$\underline{\underline{y(t)=\frac{e^t}{52}\left(\cos(2t)+5\sin(2t)\right)-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos(e^t)+C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}}}$$

Lidt lettere er det, direkte at løse differentialligningen:

Ti 89: deSolve(2* y'' + osv.= osv.,t,y)

Resultatet bliver meget stort, men hvis man reducerer det med propFrac(udtrykket) fås samme facit som ovenfor.

◆

Ovennævnte integralmetode har den begrænsning , at den kun kan anvendes for differentiallig-

ninger af 2. orden med konstante koefficienter. Det samme gælder " deSolve" i Ti89, som kun kan løse differentiallignnger af 1. og 2. orden.
Maple kan derimod godt løse differentialligninger af højere end anden orden.

Skal man løse differentialligninger af højere orden, eller har man ikke rådighed over en avanceret lommeregner er den følgende "gættemetode" anbefalelsesværdig, også fordi den kun kræver viden om differentiation.

Gættemetoden.

Denne metode kan anvendes, hvis $q(t)$ er en funktion, hvis første til n'te afledede er af samme "type" som funktionen selv. Mere konkret drejer det sig om at $q(t)$ enten er et polynomium med reelle koefficienter, en af funktionerne sin(t), cos(t) , e^{rt} eller en sum eller et produkt af disse.

Ideen bag metoden er, at man skal gætte på en partikulær løsning $y_p(t)$ af lignende type som højresiden $q(t)$. Er højresiden eksempelvis $q(t) = 5t^2 + 2$ gættes på et andengradspolynomium $y_p(t) = at^2 + bt + c$. Den gættede funktion $y_p(t)$ indsættes derpå i differentialligningen (1) og de ukendte konstanter a, b og c kan nu fastlægges. Andre eksempler på gæt er:

$q(t) = 4e^{5t}$	Gæt: $y_p(t) = ae^{5t}$
$q(t) = 3\cdot\cos(2t)$	Gæt: $y_p(t) = a\cdot\cos(2t) + b\cdot\sin(2t)$
$q(t) = \left(4t^2 + 2\right)e^{3t}$	Gæt: $y_p(t) = \left(at^2 + bt + c\right)e^{3t}$
$q(t) = \left(6t^2 + 2t\right)e^{2t}\sin(3t)$	Gæt: $y_p(t) = \left(at^2 + bt + c\right)e^{2t}\cos(3t) + \left(dt^2 + ft + g\right)e^{2t}\sin(3t)$

Grunden til at der må gættes på en sum bestående af både cosinus og sinus er, at ved indsættelse af cosinus-led i differentialligningen vil der også fremkomme sinus-led (og omvendt).

I visse tilfælde kan konstanterne (a, b, c osv.) ikke bestemmes (bl.a. når $q(t)$ er løsning til den homogene differentialligning). I alle sådanne tilfælde kan man multiplicere det oprindelige gæt med t, og hvis det ikke hjælper, kan man multiplicere med endnu et t, osv. [*)].

Eksempel 2.8. Gættemetoden.

---

*) De ændrede gæt er nødvendige, når og kun når $r + i\omega$ er en rod i karakterligningen. Hvis $r + i\omega$ er netop p gange rod i karakterligningen, så vil netop det oprindelige gæt multipliceret med t^p føre til en partikulær løsning.

Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$2\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-6y(t)=6e^{-4t}-20\sin(2t)+6t$$

Løsning:

Homogen løsning: $2\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-6y(t)=0$

Karakterligning: $2\lambda^2+\lambda-6=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{4} \Leftrightarrow \lambda=\frac{3}{2} \vee \lambda=-2$

Samtlige løsninger til den tilsvarende homogene differentialligning: $y(t)=C_1e^{\frac{3}{2}t}+C_2e^{-2t}$

Inhomogen ligning:

Da højre side $q(t)$ er en sum af et polynomium, en trigonometrisk funktion, og en eksponential-funktion betragtes disse funktioner hver for sig:

1) $2\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-6y(t)=6e^{-4t}$

Gæt: $y_p(t)=ae^{-4t}$ (giver med sikkerhed en løsning, da ikke løsning til den homogene)

$y_p'(t)=-4ae^{-4t}$, $y_p''(t)=16ae^{-4t}$ indsættes i ligningen:

$2\left(16ae^{-4t}\right)-4ae^{-4t}-6ae^{-4t}=6e^{-4t} \Rightarrow 32a-4a-6a=6 \Leftrightarrow a=\frac{3}{11}$ $\underline{y_p(t)=\frac{3}{11}e^{-4t}}$.

2) $2\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-6y(t)=-20\sin(2t)$

Gæt: $y_p(t)=a\cos(2t)+b\sin(2t)$ $y_p'(t)=-2a\sin(2t)+2b\cdot\cos(2t)$

$y_p''(t)=-4a\cos(2t)-4b\cdot\sin(2t)$ indsættes i ligningen:

$2(-4a\cos(2t)-4b\sin(2t))+(-2a\sin(2t)+2b\cos(2t))-6(a\cos(2t)+b\sin(2t))=-20\sin(2t)$

$\Leftrightarrow (-8a+2b-6a)\cos(2t)+(-8b-2a-6b)\sin(2t)=-20\sin(2t)$

Heraf fås $\begin{cases}-14a+2b=0\\ .-2a-14b=-20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=7a\\ -2a-98a=-20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{5}\\ b=\frac{7}{5}\end{cases}$ $\underline{y_p(t)=\frac{1}{5}\cos(2t)+\frac{7}{5}\sin(2t)}$

3) $2\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-6y(t)=6t$

Gæt: $y_p(t)=at+b$, $y_p'(t)=a$, $y_p''(t)=0$, indsættes i ligningen:

$0+a-6(at+b)=6t \Rightarrow -6a=6 \wedge a-6b=0 \Leftrightarrow a=-1 \wedge b=-\frac{1}{6}$ $\underline{y_p(t)=-t-\frac{1}{6}}$

Samtlige løsninger: $\underline{\underline{y(t)=\frac{3}{11}e^{-4t}+\frac{1}{5}\cos(2t)+\frac{7}{5}\sin(2t)-t-\frac{1}{6}+C_1e^{\frac{3}{2}t}+C_2e^{-2t}}}$ ◆

Eksempel 2.9. Gættemetoden.

Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$2\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-6y(t)=7e^{-2t}$$

Løsning:

Homogen løsning: $2\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-6y(t)=0$

Karakterligning: $2\lambda^2+\lambda-6=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{4} \Leftrightarrow \lambda=\frac{3}{2} \vee \lambda=-2$

Samtlige løsninger til den tilsvarende homogene differentialligning: $y(t)=C_1e^{\frac{3}{2}t}+C_2e^{-2t}$

Inhomogen ligning:

Da $q(t)=7e^{-2t}$ er løsning til den homogene ligning, gættes ikke på ae^{-2t}, men på $y_p(t)=ate^{-2t}$.

$$y_p'(t)=ae^{-2t}-2ate^{-2t}=ae^{-2t}(1-2t),$$

$$y_p''(t)=-2ae^{-2t}(1-2t)-2ae^{-2t}=-2ae^{-2t}(1-2t+1)=-4ate^{-2t}(1-t).$$

$$-4ate^{-2t}(1-t)+ae^{-2t}(1-2t)-6ate^{-2t}=7e^{-2t} \Rightarrow -7a=7 \Leftrightarrow a=-1$$

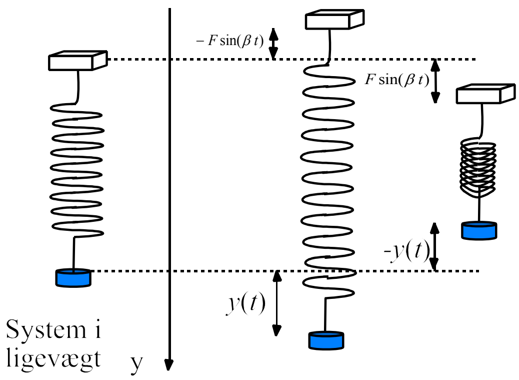
$$y_p(t)=-te^{-2t}$$

Fuldstændig løsning: $\underline{\underline{y(t)=-te^{-2t}+C_1e^{\frac{3}{2}t}+C_2e^{-2t}}}$

Eksempel 2.9. Tvungen svingning, resonans.

Indledning:

I eksempel 2.5 så vi på et lod med massen m der var fastgjort til en fjeder. Vi tænker os nu samme situation, men antager yderligere, at fjederens fastspændingspunkt bevæger sig frem og tilbage på en sådan måde, at afvigelsen fra det oprindelige fastspændingspunkt til tiden t er $F\sin(\beta t)$ (se figuren),



Hermed ændrer fjederens længde med $y(t)-F\sin(\beta t)$, og fjederkraften bliver $-k(y(t)-F\sin(\beta t))$.

Bevægelsesligningen bliver nu: $m\cdot y''(t)+c\cdot y'(t)+k\cdot y(t)=k\cdot F\cdot\sin(\beta t)$ (1)

Den fuldstændige løsning til differentialligningen (1) er en sum af en partikulær løsning $y_p(t)$ til (1) og den fuldstændige løsning $y_h(t)$ til den tilsvarende homogene differentialligning

$m\cdot y''(t)+c\cdot y'(t)+k\cdot y(t)=0$ (2)

I eksempel 2.5 løste vi den homogene differentialligning (2), og her fandt vi, at på grund af dæmpningen c, vil den homogene løsning $y_h(t) \to 0$ gå mod 0 for $t \to \infty$, dvs. løsningen til (1) vil for store værdier af t være lig den partikulære løsning. Umiddelbart vil partikulær løsning derfor være en løsning af samme type som input $k \cdot F \sin(\beta\, t)$ med samme frekvens, dvs. $y_p(t) = A\sin(\beta\, t + \varphi)$.

For visse værdier af β kan der opstå "resonans", dvs. amplituden for "output" bliver meget stor. Dette kan bevirke at systemet ødelægges. Maskiner, biler, skibe, flyvemaskine og broer er svingende mekaniske systemer, og det er her vigtigt at de er fri for uønsket resonans.

Problem:

1) Find en partiel løsning til differentialligningen $m \cdot y''(t) + c \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = k \cdot F \cdot \sin(\beta\, t)$ (1)

   i det tilfælde, hvor dæmpningen er " lille", dvs. hvor karakterligningens diskriminanten $D = c^2 - 4 \cdot m \cdot k < 0$.
2) Find den værdi af β for hvilken der er resonans.

Løsning:

1) For at finde en partikulær løsning til differentialligningen (1) kunne vi anvende integralmetoden under benyttelse af Ti89 (eller Maple), men det fremkomne udtryk viser sig at blive meget langt og svært at reducere.
   I stedet benyttes gættemetoden, selv om det også giver besværlige regninger:

   $y(t) = a\cos(\beta\, t) + b\sin(\beta\, t),\ \ y'(t) = -a\beta\sin(\beta\, t) + b\beta\cos(\beta\, t),\ \ y''(t) = -a\beta^2\cos(\beta\, t) - b\beta^2\sin(\beta\, t)$

   Ved indsættelse i (1) og ordning efter cos og sin fås:

   $$\left(m \cdot (-a\beta^2) + c \cdot b \cdot \beta + k \cdot a\right)\cos(\beta\, t) + \left(m \cdot (-b\beta^2) - c \cdot a \cdot \beta + k \cdot b\right)\sin(\beta\, t) = k \cdot F \cdot \sin(\beta \cdot t)$$

   dvs. $$\begin{cases} (-m \cdot \beta^2 + k)a + c \cdot \beta \cdot b = 0 \\ \left(-m\beta^2 + k\right)b - c \cdot \beta \cdot a = k \cdot F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{-(-m \cdot \beta^2 + k)a)}{c \cdot \beta} \\ \left(-m\beta^2 + k\right)\dfrac{-(-m \cdot \beta^2 + k)a)}{c \cdot \beta} - c \cdot \beta \cdot a = k \cdot F \end{cases}$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{-(k - m \cdot \beta^2)a}{c \cdot \beta} \\ \dfrac{-\left(k - m \cdot \beta^2\right)^2 - \left(c \cdot \beta\right)^2}{c \cdot \beta} \cdot a = k \cdot F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{-(k - m \cdot \beta^2)a}{c \cdot \beta} \\ a = -\dfrac{k \cdot F \cdot c \cdot \beta}{\left(k - m \cdot \beta^2\right)^2 + \left(c \cdot \beta\right)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{(k - m \cdot \beta^2)k \cdot F}{\left(k - m \cdot \beta^2\right)^2 + \left(c \cdot \beta\right)^2} \\ a = -\dfrac{k \cdot F \cdot c \cdot \beta}{\left(k - m \cdot \beta^2\right)^2 + \left(c \cdot \beta\right)^2} \end{cases}$$

   Vi har følgelig at den partielle løsning kan skrives $\underline{\underline{y(t) = a\cos(\beta\, t) + b\sin(\beta\, t)}}$

   Mere anskueligt kan svingningen udtrykkes ved amplitude og fase $\underline{\underline{y(t) = A\cos(\beta\, t + \varphi)}}$, hvor (A, φ) er de polære koordinater til punktet $(a, -b)$ (se eventuelt sætning 2.2).

   Som nævnt vil bidraget fra den homogene løsning efter en vis tid blive betydningsløst, hvorefter partiklen praktisk taget kun udfører svingningen $y(t) = A\cos(\beta t + \varphi)$

2) **Resonans.**
   For visse værdier af β har amplitude A et maksimum.

   Vi har nemlig $A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(-\dfrac{k \cdot F \cdot c \cdot \beta}{\left(k - m \cdot \beta^2\right)^2 + \left(c \cdot \beta\right)^2}\right)^2 + \left(\dfrac{(k - m \cdot \beta^2)k \cdot F}{\left(k - m \cdot \beta^2\right)^2 + \left(c \cdot \beta\right)^2}\right)^2}$

   $$= k \cdot F\sqrt{\frac{\left(c \cdot \beta\right)^2 + (k - m \cdot \beta^2)^2}{\left(\left(k - m \cdot \beta^2\right)^2 + \left(c \cdot \beta\right)^2\right)^2}} = \frac{k \cdot F}{\sqrt{\left(k - m \cdot \beta^2\right)^2 + \left(c \cdot \beta\right)^2}}$$

   Da A er størst for nævneren mindst, skal man finde minimum af

$$f(\beta) = \left(k - m \cdot \beta^2\right)^2 + (c \cdot \beta)^2 = k^2 - 2m \cdot k \cdot \beta^2 + m^2\beta^4 + c^2\beta^2 = m^2\beta^4 + (c^2 - 2mk)\beta^2 + k^2$$

$$f'(\beta) = 4m^2 \cdot \beta^3 + 2(c^2 - 2mk)\beta$$

$$f'(\beta) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 \cdot \beta^2 + 2(c^2 - 2mk) = 0 \Leftrightarrow \beta^2 = -\frac{c^2 - 2mk}{2m^2} \Leftrightarrow \beta = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}}$$

Da punktet må være et minimumspunkt (grenene vender opad) fås, at amplituden er størst for $\underline{\underline{\beta = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}}}}$

Vi har altså resonans for denne værdi af β og den største amplitude er

$$A_{\max} = \frac{kF}{\sqrt{\left(k - \left(\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}\right)\right)^2 + c^2\left(\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}\right)}} = \frac{kF}{\sqrt{\frac{c^4}{4m^2} + \frac{c^2k}{m} - \frac{2c^4}{4m^2}}} = \frac{kF}{\frac{c}{2m}\sqrt{4mk - c^2}} = \underline{\underline{\frac{2mkF}{c\sqrt{4mk - c^2}}}}$$

.

Eksempel 2.10. Tvungen svingning, resonans

Lad det i eksempel 2.9 angivne lod have massen m =4, lad fjederen have proportionalitetskonstanten k = 17 og lad dæmpningsfaktoren c = 4.

Lad endvidere loddet til tiden $t = 0$ befinde sig i en afstand af 3 fra hvilestillingen og der have hastigheden 0, dvs. $y(0) = 3$ og $y'(0) = 0$. (Samme talkonstanter som i eksempel 2.6)

Fjederens fastspændingspunkt bevæges nu til tiden t med en afvigelse $y(t)$ fra det oprindelige fastspændingspunkt på $y(t) = 2 \cdot \sin(\beta t)$

1) Lad $\beta = 1$
   a) Opstil differentialligningen for bevægelsen
   b) Angiv den løsning, der svarer til ovennævnte begyndelsesbetingelse, og skitser grafen for $t \in [0;6\pi]$
   c) Angiv den værdi af β for hvilken der er resonans, og den dertil svarende amplitude.

Løsning:

1) a) $\underline{\underline{4y''(t) + 4 \cdot y'(t) + 17 \cdot y(t) = 34\sin t}}$

   b) Ifølge eksempel 2.6 har den homogene differentialligning den fuldstændige løsning

$$y_h(t) = Ae^{-\frac{1}{2}t}\cos(2t + \varphi)$$

Af eksempel 2.9 fås, at en partikulær løsning er

$$y_p(t) = a\cos t + b\sin t \text{ , hvor } \begin{array}{l} a = -\dfrac{k \cdot F \cdot c \cdot \beta}{\left(k - m \cdot \beta^2\right)^2 + (c \cdot \beta)^2} = -\dfrac{17 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1}{\left(17 - 4 \cdot 1^2\right)^2 + (4 \cdot 1)^2} = -\dfrac{136}{185} \\ b = \dfrac{(k - m \cdot \beta^2)k \cdot F}{\left(k - m \cdot \beta^2\right)^2 + (c \cdot \beta)^2} = \dfrac{(17 - 4 \cdot 1^2)17 \cdot 2}{\left(17 - 4 \cdot 1^2\right)^2 + (4 \cdot 1)^2} = \dfrac{442}{185} \end{array}$$

Den fuldstændige løsning er $y(t) = -\frac{136}{185}\cos t + \frac{442}{185}\sin t + Ae^{-\frac{1}{2}t}\cos(2t + \varphi)$

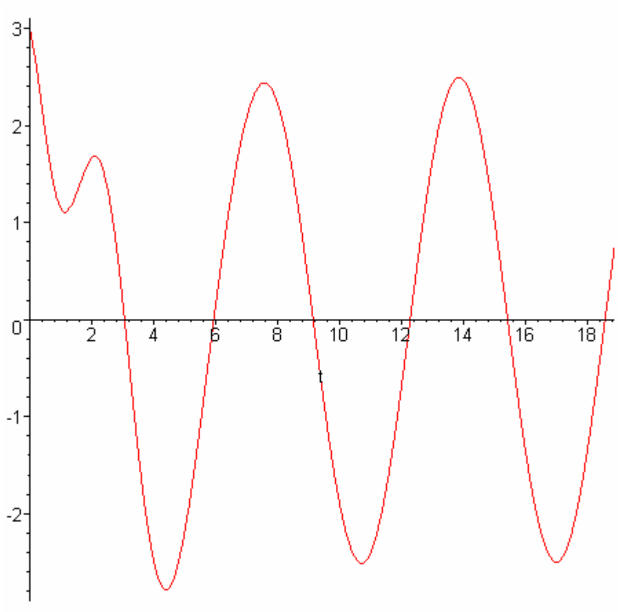
Idet $y'(t) = \frac{136}{185}\sin t + \frac{442}{185}\cos t + Ae^{-\frac{1}{2}t}\left(-\frac{1}{2}\cos(2t + \varphi) - 2\sin(2t + \varphi)\right)$ fås

$$\begin{cases} y(0)=3 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{136}{185}+A\cos\varphi=3 \\ \dfrac{442}{185}-\dfrac{1}{2}A\cos\varphi-2A\sin\varphi=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{691}{185\cos\varphi} \\ \dfrac{442}{185}-\dfrac{691}{2\cdot 185}-\dfrac{2\cdot 691}{185}\tan\varphi=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{691}{185\cos\varphi} \\ \tan\varphi=\dfrac{193}{1382} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3.7714 \\ \varphi=0.1388 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{y(t)=-\frac{136}{185}\cos t+\frac{442}{185}\sin t+3.7714\cdot e^{-\frac{1}{2}t}\cos(2t+0.1388)}}$$

Den partikulære løsnings amplitude er $A=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(\frac{136}{185}\right)^2+\left(\frac{442}{185}\right)^2}=2.500$

Dette stemmer godt med den følgende tegning, der også viser, at frekvensen hurtigt bliver den samme som "input"



Man kunne tro, det var lettere at løse differentialligningen med Ti 89:
F3: C:deSolve(4* y'' +4* y' +17*y=34*sin8t) and y(0)=3 and $y'(0)=(0,t,y)$.
men resultatet bliver et meget kompliceret trigonometrisk udtryk, som er vanskeligt at simplificere.

c) $\beta=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{2m^2}}=\sqrt{\frac{17}{4}-\frac{4^2}{2\cdot 4^2}}=\underline{\underline{1.9365}}$

$$A_{max}=\frac{2mkF}{c\sqrt{4mk-c^2}}=\frac{2\cdot 4\cdot 17\cdot 2}{4\sqrt{4\cdot 4\cdot 17-4^2}}=\frac{272}{4\sqrt{256}}=\frac{17}{4}=\underline{\underline{4.25}}$$

3. Differentialligninger af *n*'te orden

3.1. Indledning.

Som de forrige afsnit viste, er det let at finde anvendelser der fører til differentialligninger af 1. og 2. orden. Dette er ikke tilfældet for differentialligninger af tredie eller højere orden. Vi vil derfor behandle emnet meget kort, og kun for differentialligninger med konstante koefficienter.

3.2 Den lineære differentialligning af n'te orden med konstante koefficienter

Ved en lineær differentialligning af n' te orden med konstante koefficienter forstås differentialligningen $a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = q(t)$ (1)

hvor koefficienterne $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ er reelle tal og $a_n \neq 0$.

Er $q(t) = 0$ siges differentialligningen at være homogen.

Der gælder da analogt til de tilsvarende sætninger for 2'ordens differentialligninger, følgende :

Sætning 3.1 (løsning til lineær differentialligning med konstante koefficienter).

Lad $y_p(t)$ være en partikulær løsning til differentialligningen

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = q(t) \text{ hvor } a_n \neq 0 \tag{1}$$

Den fuldstændige løsning til (1) fås da ved til $y_p(t)$ at addere den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene differentialligning. $a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = 0$ (2)

Den fuldstændige løsning til den homogene differentialligning (1) er givet ved $y(t) = C_1 y_1(t) + y_2(t) + \ldots + C_n y_n(t)$ hvor $C_1, C_2, \ldots, C_n$ er vilkårlige (arbitrære) konstanter.

Funktionerne $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ kan bestemmes ud fra de n rødder $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ i karakterligningen $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots a_1 \lambda + a_0$ på følgende måde:

Rødder i karakterligning	*Tilhørende funktioner* $y_i(t)$
λ *er* p *gange reel rod*	$e^{\lambda t}, t \cdot e^{\lambda t}, t^2 \cdot e^{\lambda t}, \ldots, t^{p-1} \cdot e^{\lambda t}$
$r + i\omega$ *(og dermed også* $r - i\omega$ *)* *er* p *gange kompleks rod.*	$e^{rt} \cos(\omega t)$, $e^{rt} \sin(\omega t)$, $t \cdot e^{rt} \cos(\omega t), t \cdot e^{rt} \sin(\omega t)$, $t^2 \cdot e^{rt} \cos(\omega t), t^2 \cdot e^{rt} \sin(\omega t)$, $\ldots \quad \ldots$ $t^{p-1} \cdot e^{rt} \cos(\omega t), t^{p-1} \cdot e^{rt} \sin(\omega t)$,

Sætningen anføres uden bevis

Eksempel 3.1. Differentialligning af *n*'te orden

1) Find samtlige løsninger til differentialligningen:

$$2\frac{d^5y}{dt^5}-4\frac{d^4y}{dt^4}+12\frac{d^3y}{dt^3}+16\frac{d^2y}{dt^2}-30\frac{dy}{dt}+100y=0$$

2) Find samtlige løsninger til differentialligningen:

$$2\frac{d^5y}{dt^5}-4\frac{d^4y}{dt^4}+12\frac{d^3y}{dt^3}+16\frac{d^2y}{dt^2}-30\frac{dy}{dt}+100y=4e^{-3t}+10t-20$$

Løsning:

1) Maple kunne læse differentialligningen direkte, mens Ti 89 kun kan løse første og anden ordens differentialligninger.

Ti 89: Karakterligningen løses:

Mode, Complex format=Rectangular, F2, A:Complex =

csolve(2z^5-4z^4+12z^3+16z^2-30z+100=0,z). Resultat z = -2, z =1+2*i*, *z* =1-2*i*.

Da vi kun finder 3 rødder ud af de 5 mulige, må nogle af disse være multiple rødder.

For at undersøge dette opløses udtrykket i faktorer

MATH, ALGEBRA, factor(2z^5-4z^4+12z^3+16z^2-30z+100=0,z)

Resultat:2(z+2)($2(z+2)(z^2-2z+5)^2$

Heraf ses, at det er 1+2*i* (og 1-2*i*) der er dobbeltrødder.

Fuldstændig løsning:

$$\underline{\underline{y(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^t\cos(2t)+C_2e^t\sin(2t)+C_2te^t\cos(2t)+C_2te^t\sin(2t)}}$$

2) Gættemetoden:

Gæt: $y(t)=ae^{-3t}+bt+c,\quad y'(t)=-3ae^{-3t}+b,\quad y''(t)=9ae^{-3t},\quad y'''(t)=-27ae^{-3t}$

$y^{(4)}(t)=81ae^{-3t},\quad y^{(5)}(t)=-243ae^{-3t}$ indsættes:

$$e^{-3t}\left(-2\cdot 243a-4\cdot 81a-12\cdot 27a+16\cdot 9a+30\cdot 3+100a\right)=4e^{-3t}\Rightarrow -800a=4\Leftrightarrow a=-\frac{1}{200}$$

$$-30\cdot b+100\cdot(bt+c)=10t-20\Leftrightarrow 100bt+100c-30b=10t-20\Rightarrow 100b=10\wedge 100c-30b=-20\Leftrightarrow b=\frac{1}{10}\wedge c=-\frac{17}{100}$$

$$\underline{\underline{y(t)=-\frac{1}{200}e^{-3t}+\frac{1}{10}t-\frac{17}{100}+C_1e^{-2t}+C_2e^t\cos(2t)+C_2e^t\sin(2t)+C_2te^t\cos(2t)+C_2te^t\sin(2t)}}$$

Maple:

```
> ligning2:=2*diff(y(t),t$5)-4*diff(y(t),t$4)+12*diff(y(t),t$3)+16*diff(y(t),t$2)-
30*diff(y(t),t$1)+100*y(t)=4*exp(-3*t)+10*t-20:
> dsolve(ligning2);
```

$$y(t)=-\frac{1}{200}e^{(-3t)}+\frac{t}{10}-\frac{17}{100}+\_C1\ e^{(-2t)}+\_C2\ e^t\sin(2t)+\_C3\ e^t\cos(2t)$$
$$+\_C4\ e^t\sin(2t)\,t+\_C5\ e^t\cos(2t)\,t$$

◆

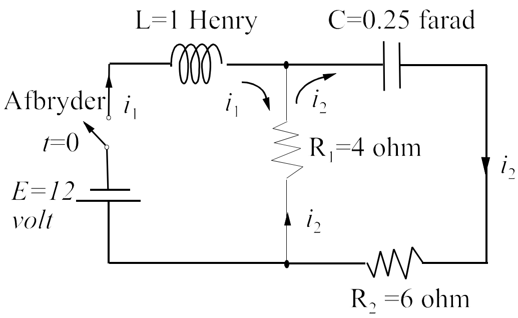
4. System af differentialligninger af 1'te orden

4.1 Indledning.

Ved mange anvendelser vil man møde systemer af sammenhørende differentialligninger. Det følgende eksempel giver et eksempel herpå hentet fra elektriske kredsløb, og i næste kapitel ses på mere avancerede eksempler hentet fra reguleringsteknikken.

Eksempel 4.1 Model af et elektrisk kredsløb

Lad der være givet det på figuren angivne kredsløb



Opstil 2 differentialligninger til bestemmelse af i_1 og i_2, idet det antages, at alle ladninger og strømme er 0 til tiden t = 0, hvor afbryderen lukkes.

Løsning:

Venstre kredsløb giver (se eventuelt eksempel 1.8) $\quad 1\cdot\dfrac{d\,i_1}{dt}+R_1(i_1-i_2)=12$

Højre kredsløb giver: $R_2\cdot i_2+R_1(i_2-i_1)+\dfrac{1}{C}\int i_2dt=0$ som ved differentiation giver

$$(R_2+R_1)\frac{d\,i_2}{dt}-R_1\frac{d\,i_1}{dt}+\frac{1}{C}\cdot i_2=0$$

Indsættes de på figuren angivne tal fås $\begin{cases}\dfrac{d\,i_1}{dt}+4i_1-4i_2=12\\[2mm] 10\dfrac{d\,i_2}{dt}-4\dfrac{d\,i_1}{dt}+4i_2=0\end{cases}$

Vi har dermed 2 sammenhørende differentialligninger til bestemmelse af i_1 og i_2.

De i eksempel 4.1 fundne differentialligninger kan med de givne begyndelsesbetingelser løses ved metoder vi udleder i næste kapitel. Imidlertid er dette ikke altid muligt, og man må så løse dem ved numeriske metoder.
Metoderne vil være generaliseringer af Euler (eller bedre af Runge-Kuttas metode), men vi vil her nøjes med at benytte lommeregneren ved løsningen.

4.2 Numeriske metoder til løsning af sammenhørende differentialligninger af 1. orden.

Lad os betragte et system af 2 sammenhørende differentialligninger af 1. orden.

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = f(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Vi ønsker at finde løsninger $x(t)$ og $y(t)$ der opfylder ligningerne. Ofte ønsker vi ikke at finde den fuldstændige løsning, men blot den partielle løsning, der opfylder en given begyndelses-betingelse (t_0, x_0, y_0)

Grafisk kan man naturligvis afbilde de 2 funktioner i et sædvanligt koordinatsystem, men ofte er man mere interesseret i at afbilde parameterfremstillingen $(x(t), y(t))$ i et x - y koordinatsystem (kaldet et fasediagram).Det følgende eksempel demonstrere dette ved anvendelse af Ti89 og Maple.

Eksempel 4.2. Numerisk løsning af sammenhørende differentialligninger

Indledning: I et isoleret område er føden for en bestemt rovdyrart *R* hovedsagelig en bestemt græsæder *G*. Antallet af *R* afhænger derfor af antallet af *G*. Når der er mange af G i forhold til R vil det bevirke, at antallet af *R* vil stige, da ungerne får rigeligt med føde. På et tidspunkt vil det betyde, at der dræbes flere af *G*, end der fødes, dvs. antallet af *G* falder. Så bliver der hungersnød blandt de mange *R*'er så deres antal vil også falde, osv. En populær biologisk model for dette er følgende

Idet antallet af *R* som funktion af tiden *t* er *x*(*t*) og antallet af *G* er *y*(*t*) opstilles modellen:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + k_1 x(t) + k_2 x(t) \cdot y(t) = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} + k_3 y(t) + k_4 x(t) \cdot y(t) \end{cases}$$, hvor $k_1, k_2 k_3$ og k_4 er konstanter.

Det viser sig, at det ikke er muligt ved hjælp af Maple eller andre programmer direkte at bestemme x(t) og y(t), så man må benytte en numerisk metode.

Problem: Lad et differentialligningssystem være givet ved:

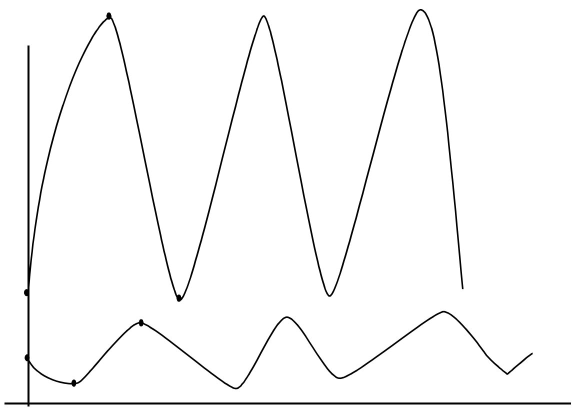
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x(t) - 0.2x(t) \cdot y(t) = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} - 2y(t) + x(t) \cdot y(t) = 0 \end{cases}$$ med begyndelsesbetingelsen $x(0) = 2$ og $y(0) = 5$

1) Skitser i intervallet $0 \le t \le 12$ funktionerne *x*(*t*) og *y*(*t*)i samme koordinatsystem.
2) Bestem på basis af figuren den maksimale værdi af *x*(*t*) og *y*(*t*).
3) Man må forvente, at maksimum af antal græsædere sker før maksimum af antal rovdyr. Vurder på basis af figuren om det er tilfældet, og angiv i bekræftende fald tidsforskellen.
4) Skitsér vektorfunktionen $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 12$, og find $\vec{r}(2.4)$

Løsning:
Ti 89:
1) Man isolerer de 2 differentialkvotienter:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x(t) - 0.2x(t)\cdot y(t) = 0 \\ \frac{dy}{dt} - 2y(t) + x(t)\cdot y(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x(t) + 0.2x(t)\cdot y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 2y(t) - x(t)\cdot y(t) \end{cases}$$

Mode , Graph=Diff Equations, Y= ,
y1'=-2*y1+0.2*y1*y2
yi1=2
y2'=2*y2-y1*y2
yi2=5
◇ | Axes =ON, Labels = ON, Solutions Method = RK, Fields=FLFOFF
WINDOWS , t0=0 , tmax=12, tstep=0.1, tplot=0, xmin=-1,xmax=13, xcl=5, ymin=-1,ymax=20
osv.
De to funktioner ses, at være periodiske.



2) Med Trace findes: $x(t)$ har maksimum $\underline{\underline{3.5}}$ for $t = 2.4$, og $y(t)$ har maksimum $\underline{\underline{17.5}}$ for t = 1.8
3) Det ses som forventet, at maksimum af antal græsædere sker før maksimum af antal rovdyr.
   Tidsforskellen er 2.4 - 1.8 =$\underline{\underline{0.6}}$.
4) Y=, ◇ | , Fields=DIRFLD, Y=, ENTER
   Der vises en lukket kurve i x-y-koordinat-systemet , samt et retningsfelt, hvoraf man kan skønne hvordan kurverne ville være for andre begyndelsesbetingelser.

   F3:Trace: Sæt t = 2.4. Man finder $r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 10.6 \end{pmatrix}$.

Maple:
1) sys1 := {diff(x(t),t) =-2*x(t)+0.2*x(t)*y(t), diff(y(t),t) =2*y(t)-1*x(t)*y(t)};

$$sys1 := \{ \frac{d}{dt} x(t) = -2\,x(t) + 0.2\,x(t)\,y(t), \frac{d}{dt} y(t) = 2\,y(t) - x(t)\,y(t) \}$$

begynd:={x(0)=2,y(0)=5};

$$begynd := \{ x(0) = 2, y(0) = 5 \}$$

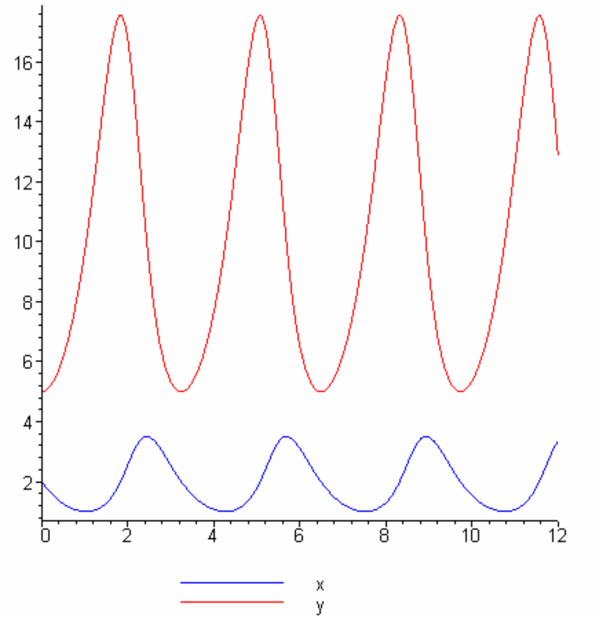
Lb := dsolve(sys1 union begynd, {x(t),y(t)},type=numeric,output=listprocedure);

Lb := [*t* = (**proc (t) ... end proc**), *x*(*t*) = (**proc (t) ... end proc**),
y(*t*) = (**proc (t) ... end proc**)]

f:=subs(Lb,x(t)); g:=subs(Lb,y(t));

f := **proc (t) ... end proc** *g* := **proc (t) ... end proc** plot([f,g],0..12,color=[blue,red],legend=["x","y"]);

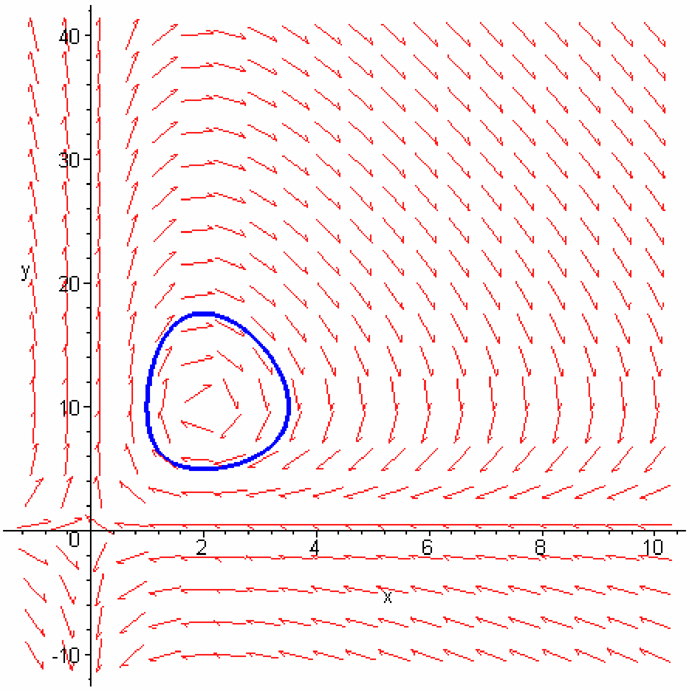
>



2) Af figuren aflæses, at maksimum for y(t) ligger omkring t = 1.8 og maksimum for x(t) ligger omkring 2.4
g(1.7),g(1.8), g(1.9);
17.1303223840070587, 17.5349802199422982, 17.4436455873006829

f(2.3),f(2.4),f(2.5);
3.39849079965526934, 3.50258372659834105, 3.49646942987516552

Heraf ses, at $x(t)$ har maksimum 3.5 for $t = 2.4$, og $y(t)$ har maksimum 17.5 for t = 1.8
3) Det ses som forventet, at maksimum af antal græsædere sker før maksimum af antal rovdyr. Tidsforskellen er 2.4 - 1.8 =0.6.
4) with(DEtools):
DEplot(sys1, [x,y], t=0..12, {[0,2,5]} , x=-1..10,y=-10..40, stepsize=0.05,linecolor=blue);



Vi ser en lukket kurve x-y-koordinatsystemet (fasediagrammet) , samt et retningsfelt, hvoraf man kan skønne, hvordan kurverne ville være for andre begyndelsesbetingelser.

f(2.4),g(2.4);

3.502583726598341O5, 10.6795222381936360

$$\vec{r}(2.4) = \begin{pmatrix} x(2.4) \\ y(2.4) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3.5 \\ 10.7 \end{pmatrix}}}.$$

4.3.Numerisk løsning af differentialligninger af 2 eller højere orden.

Kan man ikke finde en eksakt løsning til en differentialligning af højere orden, må man benytte en numerisk metode. Dette kan ske ved at ligningen omformes til et system af lineære differentialligninger af 1. orden, hvorefter det løses som vist i afsnit 4.2. Denne omformning vises i nedenstående eksempel.

Eksempel 4.3. Omformning af differentialligninger af 3 orden til 3 differentialligninger af 1. orden.

Omform differentialligningen $\frac{d^3y}{dt^3} + \sqrt{t}\,\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t^2}\,\frac{dy}{dt} + t \cdot y(t) = \sin(t)$

til 3 differentialligninger af 1. orden.

Løsning:

Lad $z = \frac{dy}{dt}$, $w = \frac{dz}{dt}$

Vi har da systemet

$$\underline{\underline{\begin{cases} \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = w \\ \frac{dw}{dt} + \sqrt{t} \cdot w + \frac{1}{t^2} \cdot z + t \cdot y = \sin(t) \end{cases}}}$$

5. Laplacetransformation

5.1. Indledning.

I eksempel 4.1 betragtede vi et elektrisk kredsløb, som førte til et system af differentialligninger med konstante koefficienter. Vi var interesseret i at finde en bestemt (partikulær) løsning som opfyldte en begyndelsesbetingelse.
Et sådant problem løses nemmest ved en teknik, der kaldes Laplace-transformation.
Også mere komplicerede problemer, hvori der indgår funktioner med "spring" og med "forsinkelse" løses lettest ved denne metode.
Nedenstående eksempel fra reguleringsteknikken viser netop et sådant problem, hvis løsning lettest sker ved anvendelse af Laplacetransformation.

Eksempel 5.1. Differentialligning med forsinkelse.

Figur 5.1 viser et system, hvor der fra tank1 efter starten til $t = 0$ kommer en koncentration af 1 kg/m^3 af et stof A. Til tiden $t = \pi$ sker en omkobling til tank 2, hvor koncentrationen varierer periodisk som $5 \cdot \sin t$ kgA/ m^3. Hastigheden af strømmen ind i tank 3 er 3 m^3/min. Væske fra tank 3 pumpes gennem et langt rør (kølespiral) til tank 4. Hver væskedel er 1 minut om at gennemløbe røret, og hastigheden af strømmen fra tank 3 til tank 4 er 2 m^3/min.
Rumfanget af tank 2 og tank 3 fremgår af figuren ligesom det ses, at der yderligere pumpes væske ud af de to tanke med den angivne hastighed.
Til tiden $t = 0$ er $y(0) = 0$, $z(0) = 0$ og rent vand i kølespiralen.
Lad $y(t)$ og $z(t)$ betegne koncentrationerne af et stof A i to tanke:
Bestem koncentrationen $z(t)$ for alle $t \geq 0$.

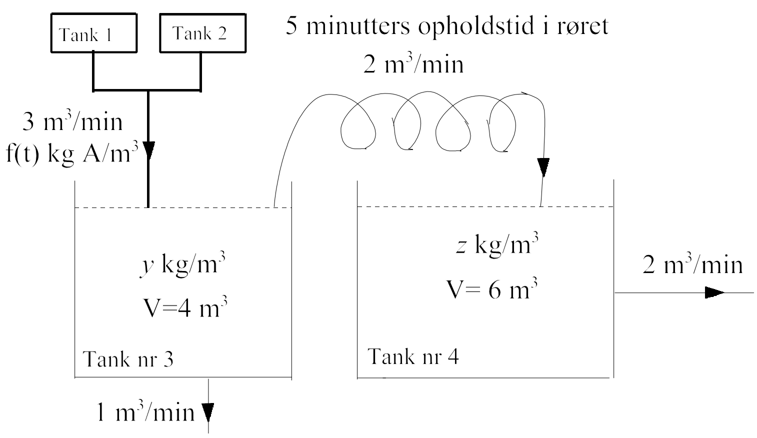


Fig.5.1. *2 tanke med opkobling mellem tank1 og 2*

◆

Eksempel 5.1 illustrerer to væsentlige forhold for de differentialligningsproblemer, som kan løses ved Laplacetransformation.

1) Man er kun interesseret i en bestemt løsning bestemt ved en begyndelsesbetingelse for $t = 0$, og man er kun interesseret i de fysiske størrelsers ændringer fremad i tiden (for $t \geq 0$)
2) "Input" må gerne være funktioner, der har "endelige" spring. I eksempel 5.1 sker dette ved at man til tiden $t = 1$ kobler om fra en beholder til en anden, hvorved "input" $f(t)$ bliver bestemt ved den stykkevis kontinuerte funktion $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq t < 1 \\ 5 \cdot e^{-t} & \text{for } t \geq 1 \end{cases}$.

   Sådanne pludselige spring hidrørende fra åbning af en ventil, afbrydelse af en elektrisk kontakt eller tilsætning af en katalysator forekommer ofte.

5.2. Laplace-transformation.

Lad i det følgende $f(t)$ være en funktion som er "eksponentielt begrænset", dvs. som er stykkevis kontinuert på ethvert endeligt interval for $t \geq 0$ og for hvilke der findes konstanter M og k, så $|f(t)| \leq Me^{-kt}$

Man kan vise, at så vil det "uegentlige"integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{t \to \infty} \int_0^t e^{-st} f(t)dt$ eksisterer (for en passende stor værdi af s). Værdien kaldes for den **Laplace-transformerede** af f og benævnes $L\{f\}$, F(s) eller $\bar{f}(s)$.

Eksempel 5.2. Laplacetransformation af e^{-at}.

Lad $f(t) = e^{-at}$, hvor a er en konstant.

$$L\{e^{-at}\} = \int_0^\infty e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(a+s)t} dt = \lim_{t \to \infty} \left[\frac{e^{-(a+s)t}}{-(a+s)} \right]_0^t$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{e^{-(a+s)t}}{-(a+s)} - \frac{1}{-(a+s)} = \underline{\underline{\frac{1}{s+a}}}$$

◆

$L^{-1}\{F\} = f$ kaldes den inverse Laplace-transformerede.

Eksempelvis følger af eksempel 5.2 at $L^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$

Sætning 5.1. Linearitetsregel.

$$L\{a\cdot f(t)+b\cdot g(t)\} = a\cdot L\{f(t)\}+b\cdot L\{g(t)\} \qquad (1)$$

$$L^{-1}\{a\cdot F(s)+b\cdot G(s)\} = a\cdot L^{-1}\{F(s)\}+b\cdot L^{-1}\{G(s)\} \qquad (2)$$

Bevis:
Af definitionen følger

$$L\{a\cdot f(t)+b\cdot g(t)\} = \int_0^\infty (a\cdot f(t)+b\cdot g(t))e^{-st}dt = a\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}dt + b\int_0^\infty g(t)\cdot e^{-st}dt = aL\{f(t)\}+bL\{g(t)\}$$

Hermed er regel (1) bevist.

$$L\{a\cdot f(t)+b\cdot g(t)\} = aL\{f(t)\}+bL\{g(t)\} \Leftrightarrow L^{-1}\{L\{a\cdot f(t)+b\cdot g(t)\}\} = L^{-1}\{aL\{f(t)\}+bL\{g(t)\}\}$$

$$\Leftrightarrow a\cdot f(t)+b\cdot g(t) = L^{-1}\{aF(s)+bG(s)\} \Leftrightarrow aL^{-1}\{F(s)\}+bL^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\{aF(s)+bG(s)\}$$

Hermed er regel (2) bevist.

Der er udarbejdet meget omfangsrige Laplace-tabeller[1].
I appendix 5.1 findes en tabel over de Laplace-transformerede af de almindeligste funktioner og i appendix 5.2 en tabel over de invers Laplacetransformede.
Det følgende 2 eksempler øver anvendelsen af disse 2 tabeller.

Eksempel 5.2. Laplacetransformation ved anvendelse af tabel.

Lad $f(t) = 5+2^{2-t}+\cos(3t)$. Find $\bar{f}(s) = L\{f(t)\}$

Løsning:

$$\bar{f}(s) = L\{5+2^{2-t}+\cos(3t)\} = L\{5\}+L\{2^{2-t}\}+L\{\cos(3t)\} = 5L\{1\}+4L\{e^{-t\cdot\ln 2}\}+L\{\cos(3t)\}$$

Af appendix 5.1 fås:

formel 1: $5\cdot L\{1\} = 5\cdot\dfrac{1}{s}$, $4L\{e^{-t\cdot\ln 2}\} = 4\dfrac{1}{s+\ln 2}$

formel 4: $L\{\cos(3t)\} = \dfrac{s}{s^2+3^2}$

$$\underline{\underline{\bar{f}(s) = \frac{5}{s}+\frac{4}{s+\ln 2}+\frac{1}{s^2+9}}}$$

[1] Eksempelvis "G.E.Roberts and H. Kaufman: Table of Laplace-Transforms" W.B.Saunders Company 1966 (367 sider)

Eksempel 5.3. Invers Laplacetransformation ved anvendelse af tabel.

Lad $\overline{y}(s) = L\{y(t)\} = \dfrac{4}{s^2+4s+13} + \dfrac{3}{2s^2-s-3}$.

Find $y(t)$.

Løsning:

1) $s^2+4s+13=0 \Leftrightarrow s = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-4\cdot 13}}{2} \Leftrightarrow s = \dfrac{-4\pm 6i}{2} \Leftrightarrow s = -2 \pm 3i$

$s^2+4s+13 = (s-(-2))^2+3^2 = (s+2)^2+3^2$

$$L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+4s+13}\right\} = 4\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+3^2}\right\} = 4\cdot\frac{1}{3}e^{-2t}\sin(3t) \qquad \text{(formel 25)}$$

2) $2s^2-s-3=0 \Leftrightarrow s = \dfrac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 2\cdot(-3)}}{4} \Leftrightarrow s = \dfrac{1\pm 5}{4} = \begin{cases} -1 \\ \dfrac{3}{2} \end{cases}$

$$\frac{3}{2s^2-s-3} = \frac{3}{2(s+1)\left(s-\frac{3}{2}\right)}$$

Brøken dekomponeres (se eventuelt "komplekse tal afsnit 6.4)

Ti 89: MATH, ALGEBRA, expand(3/(2*x^2-x-3),x). **Maple:** convert(3/(2*x^2-x-3),parfrac,x)

Resultat: $\dfrac{6}{5(2x-3)} - \dfrac{3}{5(x+1)}$

$$L^{-1}\left\{\frac{3}{2s^2-s-3}\right\} = \frac{3}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-\frac{3}{2}}\right\} - \frac{3}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = \frac{3}{5}e^{\frac{3}{2}t} - \frac{3}{5}e^{-t} \qquad \text{(formel 16)}$$

$$\underline{\underline{y(t) = \frac{4}{3}e^{-3t} + \frac{3}{5}e^{\frac{3}{2}t} - \frac{3}{5}e^{-t}}}$$

◆

5.3. Laplacetransformation af differentialkvotienter.

Laplace-transformation er en metode til løsning af differentialligninger med konstante koefficienter. Hertil anvendes følgende differentiationsregel:

Sætning 5.1 . Differentiationsreglen.

Lad funktionen f og dens afledede $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ være eksponentielt begrænsede.

Så gælder $L\{f'\} = s \cdot L\{f\} - f(0)$

$$L\{f''\} = s^2 \cdot L\{f\} - s \cdot f(0) - f'(0)$$

$$L\{f'''\} = s^3 \cdot L\{f\} - s^2 \cdot f(0) - s \cdot f'(0) - f''(0)$$

. . . . . .

$$L\left\{f^{(n)}\right\} = s^n \cdot L\left\{f\right\} - s^{n-1} \cdot f(0) - s^{n-2} \cdot f'(0) - \ldots - s \cdot f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Bevis: Ved delvis integration fås

$$L\{f'\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\left(e^{-st}\right)' dt = 0 - f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t) = -f(0) + s \cdot L\{f\}$$

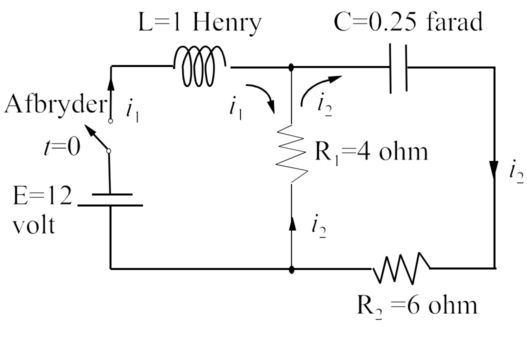
Hermed er sætningen bevist for $n = 1$.
Ved to gange at anvende den lige beviste formel fås:

$$L\{f''\} = s \cdot L\{f'\} - f'(0) = s \cdot \left(s \cdot L\{f\} - f(0)\right) - f'(0) = s^2 \cdot L\{f\} - s \cdot f(0) - f'(0)$$

Hermed er sætningen også bevist for $n = 2$.
Tilsvarende kan den for n = 1 beviste formel nu anvendes 3 gange, så fire gange osv.
På denne måde kan det indses, at sætningen gælder for ethvert positivt helt tal n.

Eksempel 5.4. Differentialligningssystem.

I eksempel 4.1 blev der opstillet det på figuren tegnede elektrisk kredsløb:
Der blev opstillet følgende 2 differentialligninger til bestemmelse af i_1 og i_2, idet det antages, at alle ladninger og strømme er 0 til tiden t = 0, hvor afbryderen lukkes.



$$\begin{cases} \dfrac{d\,i_1}{dt} + 4i_1 - 4i_2 = 12 \\ 10\dfrac{d\,i_2}{dt} - 4\dfrac{d\,i_1}{dt} + 4i_2 = 0 \end{cases}$$

med $i_1(0) = i_2(0) = 0$

Find $i_1(t)$ og $i_2(t)$.

Løsning:
Differentialligningssystemet Laplacetransformeres:

$$\begin{cases} s\cdot\bar{i}_1 - 0 + 4\bar{i}_1 - 4\bar{i}_2 = 12\dfrac{1}{s} \\ 10\left(s\cdot\bar{i}_2 - 0\right) - 4\left(s\cdot\bar{i}_1 - 0\right) + 4\bar{i}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s+4)\cdot\bar{i}_1 - 4\cdot\bar{i}_2 = \dfrac{12}{s} \\ -2s\cdot\bar{i}_1 + (5\cdot s+2)\cdot\bar{i}_2 = 0 \end{cases}$$

Ligningssystemet kan nu løses som et almindeligt lineært ligningssystem(2 ligninger med 2 ubekendte). Dette er vist til sidst, men det er sædvanligvis lettere at løse systemet ved matrixregning (og Ti 89)

Ti89:

Matricerne $A = \begin{pmatrix} s+4 & -4 \\ -2s & 5s+2 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} \dfrac{12}{s} \\ 0 \end{pmatrix}$

Matricerne A og B indtastes:
APPS, Data/Matrix editor, New, Udfyld Type = Matrix, Variable = A, antal rækker=2 og søjler = 2, ENTER, ENTER. Udfyld skemaet med matricen A, Home. Nu er matricen A indtastet.
APPS, Data/Matrix editor, New, Udfyld Type = Matrix, Variable = B, antal rækker=2 og søjler = 1, ENTER. Udfyld skemaet med matricen B, Home Nu er også matricen B er indtastet

A, ENTER, ^-1, ENTER * , B, ENTER, ENTER. $A\cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} \dfrac{12(5s+2)}{s\left(5s^2+14s+8\right)} \\ \dfrac{24}{5s^2+14s+8} \end{pmatrix}$

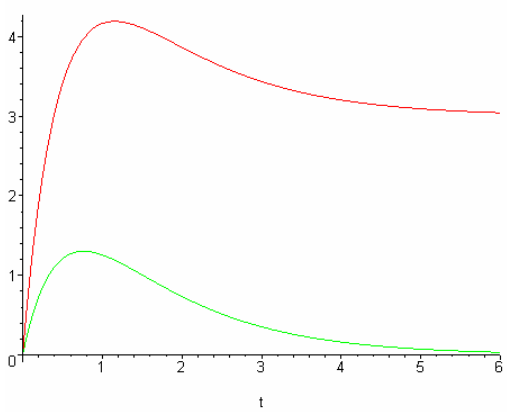
MATH, ALGEBRA, expand(12*(5*x+29/(x*(5*x^2+14*x+8)),x),

Resultat: $\bar{i}_1 = \dfrac{25}{5x+4} - \dfrac{8}{x+2} + \dfrac{3}{x} = 5\dfrac{1}{s+\frac{4}{5}} - 8\dfrac{1}{s+2} + 3\dfrac{1}{s}$

Tilsvarende fås: $\bar{i}_2 = \dfrac{20}{5x+4} - \dfrac{4}{x+2} = 4\dfrac{1}{s+\frac{4}{5}} - 4\dfrac{1}{s+2}$

Af formel 16 fås: $\underline{\underline{\begin{matrix} i_1(t) = 5e^{-\frac{4}{5}t} - 8e^{-2t} + 3 \\ i_2(t) = 4e^{-\frac{4}{5}t} - 4e^{-2t} \end{matrix}}}$,

Tegnes de 2 kurver i samme koordinatsystem fås
Som man ville forvente, vil
$i_1(t) \to 3$ og $i_2(t) \to 0$ for $t \to \infty$.



Håndregning:

$$\begin{cases}(s+4)\cdot\bar{i}_1-4\cdot\bar{i}_2=\dfrac{12}{s}\\ -2s\cdot\bar{i}_1+(5\cdot s+2)\cdot\bar{i}_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\bar{i}_2=-\dfrac{3}{s}+\dfrac{1}{4}(s+4)\cdot\bar{i}_1\\ -2s\cdot\bar{i}_1+(5\cdot s+2)\cdot\left(-\dfrac{3}{s}+\dfrac{1}{4}(s+4)\cdot\bar{i}_1\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\bar{i}_2=-\dfrac{3}{s}+\dfrac{s+4}{4}\cdot\bar{i}_1\\ \bar{i}_1\left(-2s+\dfrac{(5\cdot s+2)(s+4)}{4}\right)=\dfrac{3(5\cdot s+2)}{s}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\bar{i}_2=-\dfrac{3}{s}+\dfrac{s+4}{4}\cdot\bar{i}_1\\ \bar{i}_1\left(\dfrac{5\cdot s^2+14s+8}{4}\right)=\dfrac{3(5\cdot s+2)}{s}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\bar{i}_2=-\dfrac{3}{s}+\dfrac{s+4}{4}\cdot\bar{i}_1\\ \bar{i}_1=\dfrac{12(5\cdot s+2)}{s(5\cdot s^2+14s+8)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\bar{i}_2=-\dfrac{3}{s}+\dfrac{s+4}{4}\cdot\dfrac{12(5\cdot s+2)}{s(5\cdot s^2+14s+8)}\\ \bar{i}_1=\dfrac{12(5\cdot s+2)}{s(5\cdot s^2+14s+8)}\end{cases}\Leftrightarrow\underline{\underline{\begin{cases}\bar{i}_2=\dfrac{24}{5\cdot s^2+14s+8}\\ \bar{i}_1=\dfrac{12(5\cdot s+2)}{s(5\cdot s^2+14s+8)}\end{cases}}}$$

◆

Eksempel 5.5. Differentialligning af 2. orden.

I eksempel 2.9 betragtede vi et lod som blev sat i tvungne svingninger.
Loddets bevægelse fandt vi var bestemt ved en anden ordens differentialligning, som blev løst ved anvendelse af gættemetoden. I eksempel 2.10 blev konkrete der indsat konkrete tal for loddets masse osv. Der ønskes løst den derved fremkomne differentialligning ved anvendelse af Laplace,
Løs differentialligningen: $4y''(t)+4\cdot y'(t)+17\cdot y(t)=34\sin t$
med begyndelsesbetingelserne $y(0)=3$ og $y'(0)=0$.

Løsning:
Differentialligningen Laplacetransformeres:

$$4\left(s^2\bar{y}-s\cdot 0-3\right)+4\cdot(s\cdot\bar{y}-0)+17\cdot\bar{y}=34\frac{1}{s^2+1^2}\Leftrightarrow\left(4s^2+4s+17\right)\bar{y}=12+\frac{34}{s^2+1}$$

$$\Leftrightarrow\bar{y}=\frac{12}{4s^2+4s+17}+\frac{34}{\left(s^2+4\right)\left(4s^2+4s+17\right)}$$

Vi dekomponerer den sidste brøk:
expand(34/((4*x^2+4*x+17)*(x^2+1)),x). Resultat:

$$\bar{y}=\frac{12}{4s^2+4s+17}+\frac{544}{185}\frac{s}{4s^2+4s+17}-\frac{1224}{185}\frac{1}{4s^2+4s+17}-\frac{136}{185}\frac{s}{s^2+1}+\frac{442}{185}\frac{1}{s^2+1}$$

$$4s^2+4s+17=0\Leftrightarrow s=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot 4\cdot 17}}{8}=\frac{-4\pm 16i}{8}=-\frac{1}{2}\pm 2i$$

$$4s^2+4s+17=4\left(\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+2^2\right)$$

$$\bar{y}=+\frac{136}{185}\frac{s}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+2^2}+\frac{249}{185}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+2^2}-\frac{136}{185}\frac{s}{s^2+1}+\frac{442}{185}\frac{1}{s^2+1}$$

Af appendix 5.2 formel 25 og 26 fås:

$$y(t) = \frac{136}{185}\left(\cos t - \frac{1}{4}\sin t\right)e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{249}{185}\cdot 2\cdot e^{-\frac{1}{2}t}\sin t - \frac{136}{185}\cos t + \frac{442}{185}\sin t$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y(t) = \frac{136}{185}e^{-\frac{1}{2}t}\cos t + \frac{464}{185}\cdot e^{-\frac{1}{2}t}\sin t - \frac{136}{185}\cos t + \frac{442}{185}\sin t}}$$

5.4. Enhedstrinfunktion.

Som nævnt i indledningen er en meget stor fordel ved Laplacemetoden er, at man let kan løse problemer af den type der er nævnt i eksempel 5.1, hvor en omkobling fra en beholder til en anden giver et pludselig spring i koncentrationen af det indstrømmende stof. Det samme sker for en elektrisk strøm, ved afbrydelse af en kontakt, eller for trykket ved åbning af en ventil.
For at kunne behandle sådanne tilfælde indføres den såkaldte "enhedstrinfunktion" (også kaldet "Heaviside funktion") u ("unit step function")

Definition af enhedstrinfunktion *u* med spring i *a*.

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < a \\ 1 & \text{for } t \geq a \end{cases} \qquad \text{(se figur 5.2)}$$

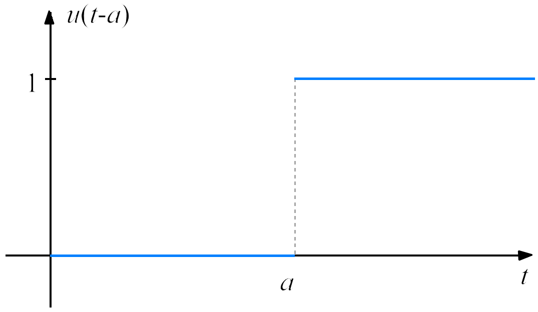


Fig 5.2. *Enhedstrinfunktion med spring i a*

Enhver stykkevis funktion f kan udtrykkes ved hjælp af enhedstrinfunktioner (jævnfør eksempel 5.6

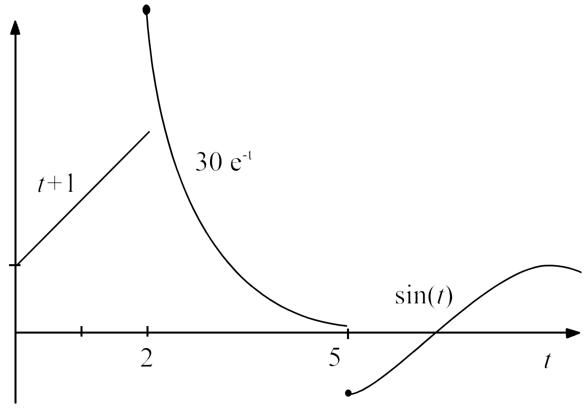
Eksempel 5.6. Stykkevis funktion udtrykt ved enhedstrinfunktion.

Lad funktionen

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{for} \quad 0 \le t < 2 \\ 30e^{-t} & \text{for} \quad 2 \le t < 5 \\ \sin(t) & \text{for} \quad 5 \le t < \infty \end{cases}$$

(se figuren)

Udtryk $f(t)$ ved enhedstrinfunktionen.



Løsning:

$$\underline{\underline{f(t) = (t+1) + \left(30 \cdot e^{-t} - (t+1)\right)u(t-2) + \left(\sin(t) - 30 \cdot e^{-t}\right)u(t-5)}}$$

◆

Enhedsfunktionen benyttes sædvanligvis ved problemer, hvor man "tænder" eller "slukker" for "kontakter" eller ventiler.
Dette er vist på nedenstående figurer.
Figur 5.3 viser funktionen $f(t)$

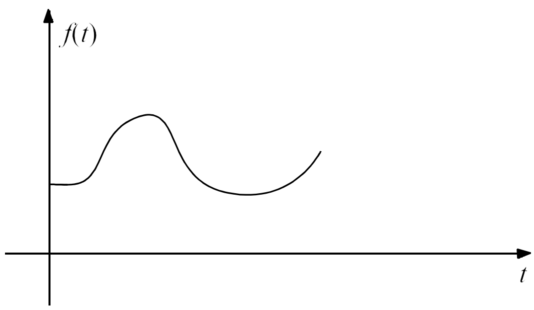
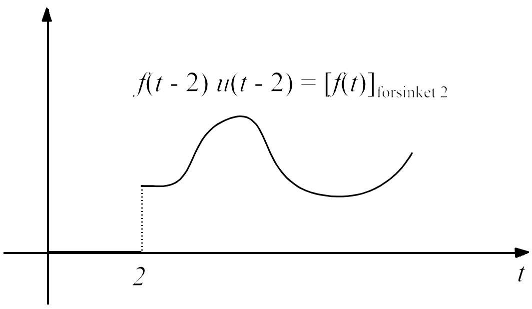


Fig 5.3. *Funktionen f(t)*

I figur 5.3a er $f(t)$ blevet "forsinket" 2 sekunder (parallelforskudt 2 sekunder)
I figur 5.3b har funktionen været slukket fra $t = 0$ til $t = 2$ og bliver så "tændt"



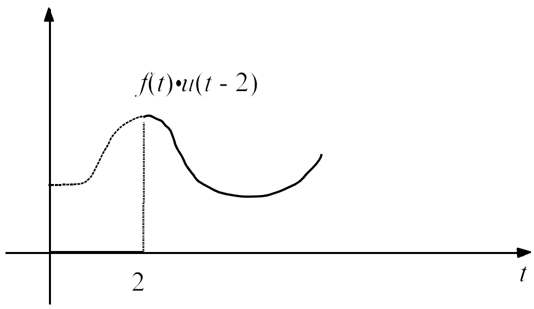


Fig. 5.3a. *f(t) forsinket* 2 **Fig. 5.3b.** *f(t) tændes til tiden t = 2*

Funktionen givet ved $f(t-a)\cdot u(t-a)$ siges at være "forsinket med a" i forhold til $f(t)$, og vi vil ofte blot skrive $\left[f(t)\right]_{\text{forsinket } a}$.

5.5. Forsinkelsesregel

Sætning 5.2. Forsinkelsesregel..

Lad funktionen f være eksponentielt begrænset, $L\{f(t)\} = F(s)$ og lad $a > 0$.

Der gælder:

$$L\{f(t-a)\cdot u(t-a)\} = e^{-as}\cdot L\{f(t)\} \qquad (1)$$

$$L\{f(t)\cdot u(t-a)\} = e^{-as}\cdot L(f(t+a)) \qquad (2)$$

$$L^{-1}\{e^{-as}\cdot F(s)\} = f(t-a)\cdot u(t-a) = \left[f(t)\right]_{\text{forsinket } a} \qquad (3)$$

Bevis:

(1): $L\{f(t-a)\cdot u(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t-a)\cdot u(t-a)dt = \int_a^\infty e^{-st}\cdot f(t-a)dt = \int_a^\infty e^{-s(t-a)}\cdot e^{-sa}\cdot f(t-a)dt$

Sættes $x = t-a$ fås $L\{f(t-a)\cdot u(t-a)\} = e^{-sa}\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\cdot f(x)dx = e^{-sa}\cdot L\{f(t)\}$ dvs. formel (1) er bevist.

(2): Indsættes $g(t) = f(t-a)$, hvorved $g(t+a) = f(t)$ i formel (1) fås

$L\{f(t-a)\cdot u(t-a)\} = e^{-as}\cdot L\{f(t)\} = L\{g(t)\cdot u(t-a)\} = e^{-as}\cdot L(g(t+a))$ dvs. formel (2) er bevist.

(3) $L\{f(t-a)\cdot u(t-a)\} = e^{-as}\cdot L\{f(t)\} \Leftrightarrow L^{-1}\{L\{f(t-a)\cdot u(t-a)\} = L^{-1}\{e^{-as}\cdot L\{f(t)\}\}\} \Leftrightarrow f(t-a)\cdot u(t-a) = e^{-as}\cdot L\{f(t)\}$

◆

Eksempel 5.7. Træning i forsinkelsesreglen.

Find

1) $L\{e^{-2t}\cdot u(t-4)\}$ 2) $L^{-1}\left\{\frac{2\cdot e^{-4s}}{s^2+4}\right\}$

Løsning:

1) Ved benyttelse af formel (2) og appendix 5.1 formel 1 fås:

$$L\{e^{-2t}\cdot u(t-4)\} = e^{-4s}L\{e^{-2(t+4)}\} = e^{-4s}\cdot e^{-8}L\{e^{-2t}\} = \underline{\underline{e^{-4s-8}\frac{1}{s+2}}}$$

2) Ved benyttelse af formel (3) og appendix 5.2 formel 25 fås:

$$L^{-1}\left\{\frac{2\cdot e^{-4s}}{s^2+4}\right\} = 2\left[L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2^2}\right\}\right]_{\text{forsinket } 4} = 2\cdot\left[\frac{1}{2}e^{-0t}\sin(2t)\right]_{\text{forsinket } 4}$$

$$= \sin(2(t-4))\cdot u(t-4) = \underline{\underline{\sin(2t-8)\cdot u(t-4)}}$$

◆

I eksempel 5.1 opstilledes følgende problem, som vi nu kan løse.

Eksempel 5.8. System af differentialligninger med forsinkelse

Figur 5.1 viser et system, hvor der fra tank1 efter starten til $t = 0$ kommer en koncentration af 10 kg/m^3 af et stof A. Til tiden $t = \pi$ sker en omkobling til tank 2, hvor koncentrationen varierer periodisk som $(5 \cdot \sin t + 5)$ kgA/ m^3. Hastigheden af strømmen ind i tank 3 er 3 m^3/min. Væske fra tank 3 pumpes gennem et langt rør (kølespiral) til tank 4. Hver væskedel er 1 minut om at gennemløbe røret, og hastigheden af strømmen fra tank 3 til tank 4 er 2 m^3/min.
Rumfanget af tank 2 og tank 3 fremgår af figuren ligesom det ses, at der yderligere pumpes væske ud af de to tanke med den angivne hastighed.
Til tiden $t = 0$ er $y(0) = 0$, $z(0) = 0$ og rent vand i kølespiralen.
Lad $y(t)$ og $z(t)$ betegne koncentrationerne af et stof A i to tanke:
Bestem koncentrationen $z(t)$ for alle $t \geq 0$

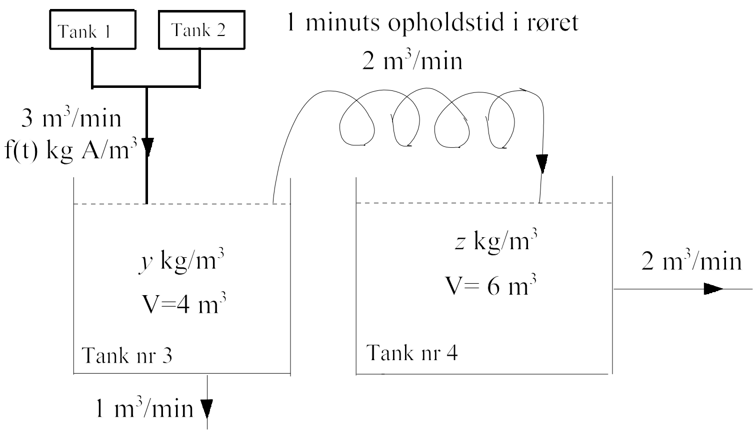


Fig.5.1. *2 tanke med opkobling mellem tank1 og 2*

Løsning:
"Input" til tank 3 er givet ved at man til tiden $t = \pi$ kobler om fra tank1 til tank2
Den er derfor bestemt ved den stykkevis kontinuerte funktion

$$f(t) = \begin{cases} 10 & \text{for } 0 \leq t < \pi \\ 5 + 5 \cdot \sin t & \text{for } t \geq \pi \end{cases} \text{ eller}$$

$$f(t) = 10 + (5 + 5 \cdot \sin t - 10) \cdot u(t - \pi) = 10 + (5\sin(t) - 5) \cdot u(t - \pi) .$$

Opstilling af differentialligninger.
For tankene 3 og 4 opstilles massebalancen IND + PRODUCERET = UD + AKKUMULERET som et differentielt regnskab over, hvor mange kg A der passerer ind og ud i et tidsinterval $[t\,;\, t + dt\,]$:
Tank 3:
IND: $3 \cdot f(t)dt$,
PRODUCERET: 0 (da der ikke produceres A i tanken)
UD: $1 \cdot y(t) \cdot dt + 2 \cdot y(t) \cdot dt = 3 \cdot y(t) \cdot dt$
AKKUMULERET: $d(4 \cdot y(t) = 4 \cdot d(y(t))$ (da der i tanken er 4 y kg A og der sker en differentiel ændring i denne mængde)
Dette giver ligningen: $3 \cdot f(t)dt + 0 = 3 \cdot y(t) \cdot dt + 4 \cdot dy$

Tank 4:
IND: $2\cdot y(t-1)\cdot u(t-1)$ da der det første minut kun løber rent vand ind i tanken, og derefter med en koncentration svarende til den der var i tank 3 for 1 minut siden. ,
PRODUCERET: 0 (da der ikke produceres A i tanken)
UD: $2\cdot z(t)\cdot dt$
AKKUMULERET: $d(6\cdot z(t) = 6\cdot d(z(t))$ (da der sker en differentiel ændring i mængden af A i tanken)
Massebalancen: $2\cdot y(t-1)\cdot u(t-1)dt + 0 = 2\cdot z(t)\cdot dt + 6\cdot dz$
Ved division med dt fås differentialligningerne:

$$3\cdot f(t) = 3\cdot y(t) + 4\cdot\frac{dy}{dt} \tag{1}$$

$$2\cdot y(t-1)\cdot u(t-1) = 2\cdot z(t) + 6\cdot\frac{dz}{dt} \tag{2}$$

Af ligning (1) fås: $4\cdot\frac{dy}{dt} + 3\cdot y(t) = 3\cdot\left(10 + (5\cdot\sin(t)-5)\cdot u(t-\pi)\right)$

Ligning (1) Laplacetransformeres:

$$4\cdot s\cdot\bar{y} + 3\cdot\bar{y} = 3\left(\frac{10}{s} + 5e^{-\pi s}\cdot L\{\sin(t+\pi)-1\}\right) \Leftrightarrow (4s+3)\bar{y} = \frac{30}{s} + 15\cdot e^{-\pi s}\cdot\left(\frac{s\cdot\sin\pi + 1\cdot\cos\pi}{s^2+1^2} - \frac{1}{s}\right)$$

$$\Leftrightarrow \bar{y} = \frac{30}{s(4s+3)} - \left(\frac{15}{(4s+3)(s^2+1)} + \frac{15}{s(4s+3)}\right)e^{-\pi s} \tag{3}$$

Ligning (2) Laplacetransformeres:

$$2\cdot e^{-s}\cdot\bar{y} = 2\cdot\bar{z} + 6s\cdot\bar{z} \Leftrightarrow (3s+1)\bar{z} = e^{-s}\cdot\bar{y} \Leftrightarrow \bar{z} = e^{-s}\cdot\frac{1}{3s+1}\cdot\bar{y} \tag{4}$$

Ligning (3) indsættes i ligning (4) og vi får:

$$\bar{z} = e^{-s}\cdot\frac{1}{3s+1}\cdot\left(\frac{30}{s(4s+3)} - \left(\frac{15}{(4s+3)(s^2+1)} + \frac{15}{s(4s+3)}\right)e^{-\pi s}\right)$$

$$= e^{-s}\cdot\frac{30}{(3s+1)(4s+3)s} - e^{-(1+\pi)s}\left(\frac{15}{(4s+3)(s^2+1)(3s+1)} + \frac{15}{s(4s+3)(3s+1)}\right)$$

De to brøker dekomponeres ved at benytte Ti89 (expand)

$$e^{-s}\cdot\frac{30}{(3s+1)(4s+3)s} = e^{-s}\cdot\left(\frac{32}{4s+3} - \frac{54}{3s+1} + \frac{10}{s}\right) = e^{-s}\cdot\left(8\frac{1}{s+\frac{3}{4}} - 18\frac{1}{s+\frac{1}{3}} + 10\frac{1}{s}\right)$$

$$e^{-(1+\pi)s}\frac{15}{(4s+3)(s^2+1)(3s+1)} = e^{-(1+\pi)s}\cdot\left(\frac{-192}{25(4s+3)} + \frac{81}{10(3s+1)} - \frac{39s}{50(s^2+1)} - \frac{27}{50(s^2+1)}\right)$$

$$= e^{-(1+\pi)s}\cdot\left(-\frac{48}{25}\frac{1}{s+\frac{3}{4}} + \frac{27}{10}\frac{1}{s+\frac{1}{3}} - \frac{39}{50}\frac{s}{s^2+1} - \frac{27}{50}\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$\bar{z} = e^{-s}\cdot\left(8\frac{1}{s+\frac{3}{4}}-18\frac{1}{s+\frac{1}{3}}+10\frac{1}{s}\right)-e^{-(1+\pi)s}\cdot\left(-\frac{48}{25}\frac{1}{s+\frac{3}{4}}+\frac{27}{10}\frac{1}{s+\frac{1}{3}}-\frac{39}{50}\frac{s}{s^2+1}-\frac{27}{50}\frac{1}{s^2+1}+4\frac{1}{s+\frac{3}{4}}-9\frac{1}{s+\frac{1}{3}}+5\frac{1}{s}\right)$$

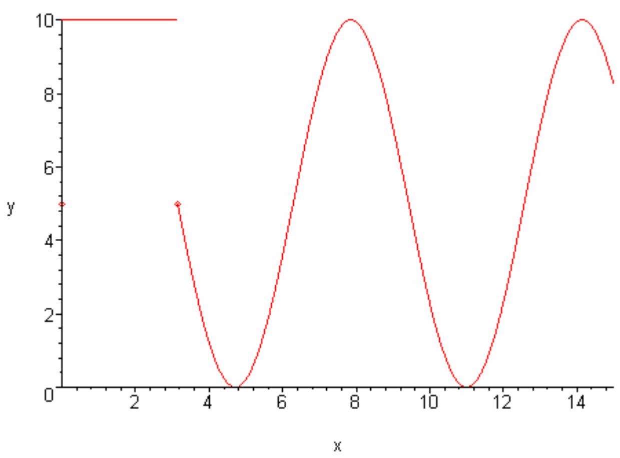
$$\Leftrightarrow \bar{z} = e^{-s}\cdot\left(8\frac{1}{s+\frac{3}{4}}-18\frac{1}{s+\frac{1}{3}}+10\frac{1}{s}\right)+e^{-(1+\pi)s}\cdot\left(-\frac{52}{25}\frac{1}{s+\frac{3}{4}}+\frac{63}{10}\frac{1}{s+\frac{1}{3}}-\frac{39}{50}\frac{s}{s^2+1}-\frac{27}{50}\frac{1}{s^2+1}-5\frac{1}{s}\right)$$

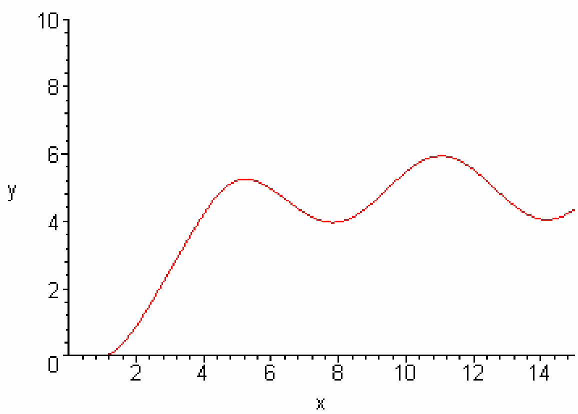
Ved tilbagetransponering (appendix 5.2 formel 16+25) fås

$$\underline{\underline{z(t) = \left[8e^{-\frac{3}{4}t}-18e^{-\frac{1}{3}t}+10\right]_{\text{forsinket }1}+\left[-\frac{52}{25}e^{-\frac{3}{4}t}+\frac{63}{10}e^{-\frac{1}{3}t}+\frac{39}{50}\cos t+\frac{27}{50}\sin t-5\right]_{\text{forsinket }1+\pi}}}$$

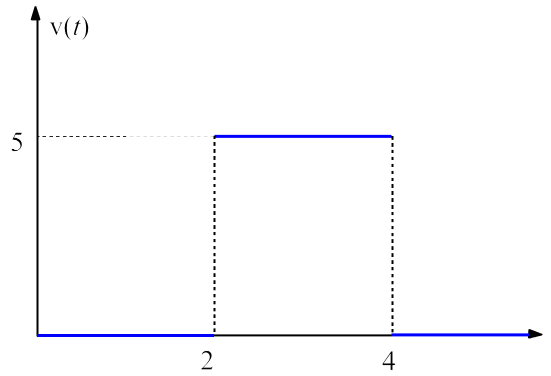
Det ses som forventet, at for store værdier af tiden t vil koncentrationen nærme sig til $z(t) = 5+\frac{39}{50}\cos t+\frac{27}{50}\sin t = 5+0.9\cos(-0.606)$, dvs. tanksystemet har dæmpet svingningerne fra en amplitude på 5 til en amplitude på 0.9.

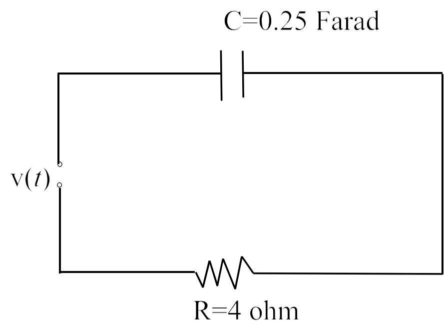
Graferne for “input” og “output” er følgende (tegnet i Maple):





Eksempel 5.9. Elektrisk kredsløb udsat for en "firkantimpuls".





Find strømmen $i(t)$ i ovenstående kredsløb
hvis det i tidsrummet $2 \le t \le 4$ bliver påført en firkantimpuls på 5 volt. I tidsrummet $0 \le t < 2$ er $i(t) = 0$.

Løsning:
Ligningen for kredsløbet kan skrives (se eventuelt eksempel 1.8)

$$R \cdot i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = v(t) \Leftrightarrow 4 \cdot i(t) + \frac{1}{0.25}\int_0^t i(t)dt = v(t)$$

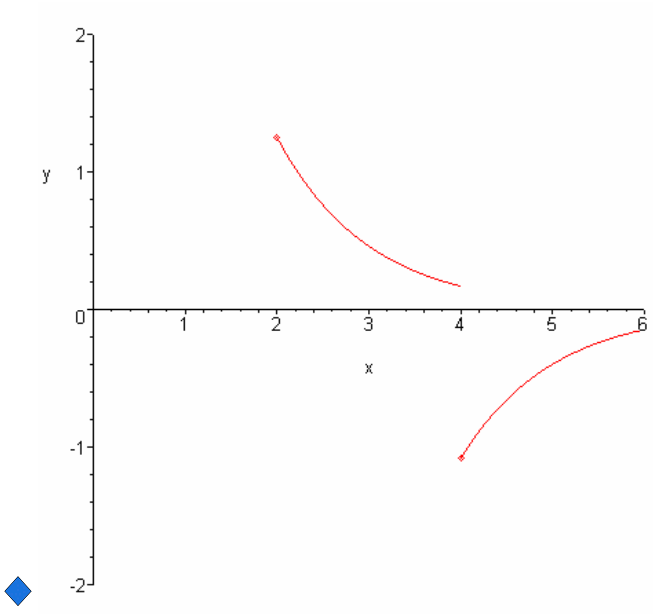
Ved differentiation fås $4\frac{di}{dt} + 4 \cdot i(t) = \frac{dv}{dt}$

Ligningen Laplacetransformeres: $4(s \cdot \bar{i} - 0) + 4 \cdot \bar{i} = s\bar{v} - 0 \Leftrightarrow 4(s+1) \cdot \bar{i} = s\bar{v}$

$$v(t) = (5-0) \cdot u(t-2) + (0-5) \cdot u(t-4) = 5 \cdot \left[u(t-2) - u(t-4)\right] \qquad \bar{v} = 5 \cdot \left(\frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s}e^{-4s}\right)$$

$$4(s+1) \cdot \bar{i} = s\bar{v} \Leftrightarrow 4(s+1) \cdot \bar{i} = 5 \cdot s \cdot \frac{1}{s}\left(e^{-2s} - e^{-4s}\right) \Leftrightarrow \bar{i} = \frac{5}{4(s+1)}\left(e^{-2s} - e^{-4s}\right)$$

$$i(t) = \frac{5}{4}\left(\left[e^{-t}\right]_{\text{forsinket 2}} - \left[e^{-t}\right]_{\text{forsinket 4}}\right) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \le t < 2 \\ \frac{5}{4}e^{-(t-2)} = \frac{5e^2}{4}e^{-t} & \text{for } 2 \le t < 4 \\ \frac{5}{4}\left(e^{-(t-2)} - e^{-(t-4)}\right] = \frac{5(e^2 - e^4)}{4}e^{-t} & \text{for } t \ge 4 \end{cases}$$

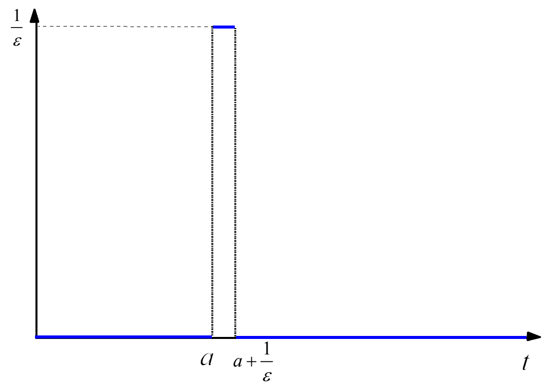


5.6. Dirac's deltafunktion

Ofte antager en fysisk størrelse store værdier i et meget kort tidsrum. Det sker eksempelvis, når en kondensator kortsluttes, eller når man pludselig tilsætter en stor mængde salt til en opløsning. For at kunne behandle sådanne tilfælde betragter vi funktionen

$$\delta_\varepsilon(t-a)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon} & \text{for } \ a \le t < a+\varepsilon \\ 0 & \text{ellers}\end{cases}$$

(jævnfør figuren)



Vi har $\delta_\varepsilon(t-a)=\left(\frac{1}{\varepsilon}-0\right)\cdot u(t-a)+\left(0-\frac{1}{\varepsilon}\right)\cdot u\left(t-a-\frac{1}{\varepsilon}\right)=\frac{1}{\varepsilon}\left(a(t-a)-u(t-a-\frac{1}{\varepsilon}\right)$

Laplacetransformeres fås: $L\left\{\delta_\varepsilon(t-a)\right\}=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{s}e^{-as}-\frac{1}{s}e^{-(a+\varepsilon)s}\right)=\frac{1-e^{-\varepsilon s}}{s\varepsilon}e^{-as}$.

Benyttes l'hospitals regel fås $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1-e^{-\varepsilon s}}{s\varepsilon}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{se^{-\varepsilon s}}{s}=1$, dvs.

$$L\left\{\delta_\varepsilon(t-a)\right\}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}e^{-as}$$

Man definerer derfor Diracs deltafunktion $\delta(t-a)$ ved, at $L\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$.

$\delta(t-a)$ er ikke en sædvanlig funktion, men ved de førnævnte problemer, hvor der pludselig opstår en kortvarig "impuls", er det praktisk, at opfatte den som en sædvanlig funktion.
Dette illustreres i følgende eksempel:

Eksempel 5.10. Dirac's deltafunktion.

Lad os igen betragte tankproblemet i eksempel 5.8. men nu antager vi yderligere, at der i tank1 6 minutter efter starten hældes 20 kg rent A.
Vi ønsker igen at finde koncentrationen $z(t)$ for $t \geq 0$.

Løsning:

For tank1 bliver IND: $3 \cdot f(t) + 20 \cdot \delta(t-6)$

Resten er uændret, dvs. differentialligningen bliver $3 \cdot f(t) + 20 \cdot \delta(t-6) = 3 \cdot y(t) + 4 \cdot \dfrac{dy}{dt}$

Ligningen Laplacetransformeret bliver derfor som før, kun med leddet $20 \cdot e^{-6s}$ tilføjet.

$$4 \cdot s \cdot \bar{y} + 3 \cdot \bar{y} = 3\left(\frac{10}{s} + 5e^{-\pi s} \cdot L\{\sin(t+\pi) - 1\}\right) \Leftrightarrow (4s+3)\bar{y} = \frac{30}{s} + 15 \cdot e^{-\pi s} \cdot \left(\frac{s \cdot \sin\pi + 1 \cdot \cos\pi}{s^2+1^2} - \frac{1}{s}\right) + 20e^{-6s}$$

$$\Leftrightarrow \bar{y} = \frac{30}{s(4s+3)} - \left(\frac{15}{(4s+3)(s^2+1)} + \frac{15}{s(4s+3)}\right)e^{-\pi s} + \frac{20}{4s+3}e^{-6s}$$

Dette giver igen

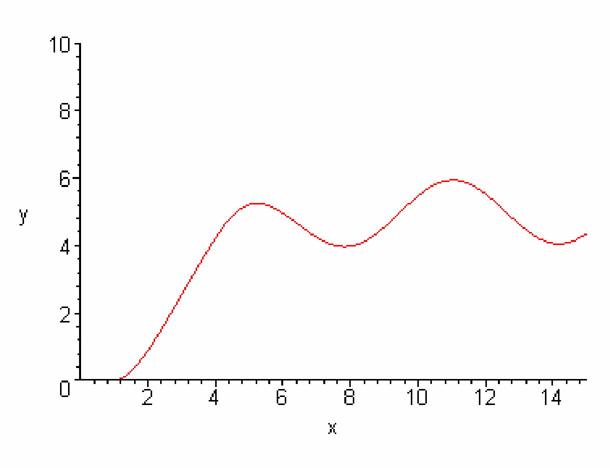
$$\bar{z} = e^{-s} \cdot \frac{30}{(3s+1)(4s+3)s} - e^{-(1+\pi)s}\left(\frac{15}{(4s+3)(s^2+1)(3s+1)} + \frac{15}{s(4s+3)(3s+1)}\right) + e^{-7s}\frac{20}{(4s+3)(3s+1)}$$

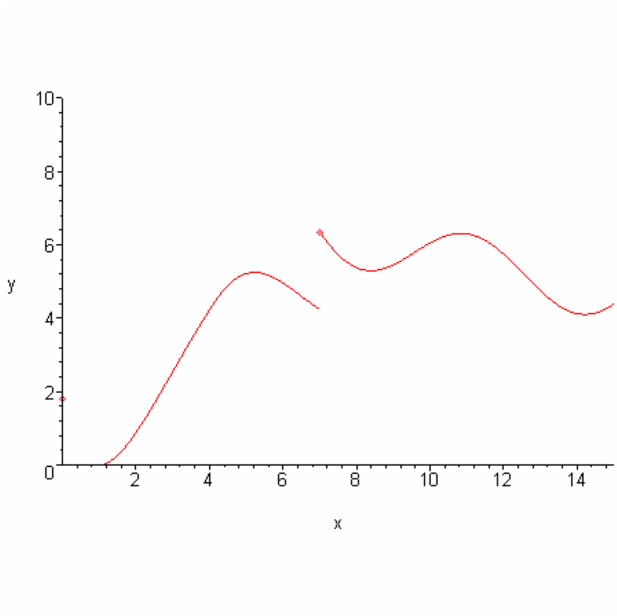
Dekomponeres det sidste led fås $4\dfrac{1}{s+\frac{1}{3}} - 4\dfrac{1}{s+\frac{3}{4}}$

Dette led tilbagetransponeres, og den samlede løsning bliver derfor:

$$z(t) = \left[8e^{-\frac{3}{4}t} - 18e^{-\frac{1}{3}t} + 10\right]_{\text{forsinket 1}} + \left[-\frac{52}{25}e^{-\frac{3}{4}t} + \frac{63}{10}e^{-\frac{1}{3}t} + \frac{39}{50}\cos t + \frac{27}{50}\sin t - 5\right]_{\text{forsinket } 1+\pi} + \left[4e^{-\frac{1}{3}t} - 4e^{-\frac{3}{4}t}\right]_{\text{forsinket 7}}$$

For sammenligningens skyld, er løsningen tegnet først for det oprindelige tanksystem, og derefter med tilsætning af 20 kg A.





Som det ses, betyder tilsætningen af 20 kg A, et spring i “output”, men derefter stabiliserer det sig igen .

Appendix 5.1. Tabel over Laplace-transformerede

Nr	$f(t)$	$L\{f(t)\} = F(s)$
1	e^{-at} $a = 0$: 1	$\frac{1}{s+a}$, $\quad a = 0$: $\frac{1}{s}$
2	$t \cdot e^{-at}$ $a = 0$: t	$\frac{1}{(s+a)^2}$ $\quad a = 0$: $\frac{1}{s^2}$
3	$t^n \cdot e^{-at}$, $n \geq 0$, hel $a = 0$: t^n	$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \, . \, . \, . \, . \cdot n}{(s+a)^{n+1}}$ $\quad a = 0$: $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n}{s^{n+1}}$
4	$\cos(\omega t + \varphi)$ (spec. $\varphi = 0$)	$\frac{s \cdot \cos(\varphi) - \omega \cdot \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2}$, $\quad \varphi = 0$: $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
5	$t \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ (spec. $\varphi = 0$)	$\frac{\left(s^2 - \omega^2\right)\cos(\varphi) - 2\omega \cdot s \cdot \sin(\varphi)}{\left(s^2 + \omega^2\right)^2}$, $\quad \varphi = 0$: $\frac{s^2 - \omega^2}{\left(s^2 + \omega^2\right)^2}$
6	$t^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ (spec. $\varphi = 0$)	$\frac{\left(2s^3 - 6\omega^2 s\right)\cos(\varphi) + \left(-6\omega \cdot s^2 + 2 \cdot \omega^3\right)\sin(\varphi)}{\left(s^2 + \omega^2\right)^3}$, $\quad \varphi = 0$: $\frac{2s^3 - 6\omega^2 s}{\left(s^2 + \omega^2\right)^3}$
7	$e^{-bt} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ (spec. $\varphi = 0$)	$\frac{\left(s+b\right)\cos(\varphi) - \omega \cdot \sin(\varphi)}{(s+b)^2 + \omega^2}$, $\quad \varphi = 0$: $\frac{s+b}{(s+b)^2 + \omega^2}$
8	$t \cdot e^{-bt} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ (spec. $\varphi = 0$)	$\frac{\left((s+b)^2 - \omega\right)\cos(\varphi) - 2 \cdot \omega \cdot (s+b) \cdot \sin(\varphi)}{\left((s+b)^2 + \omega^2\right)^2}$, $\quad \varphi = 0$: $\frac{(s+b)^2 - \omega^2}{\left((s+b)^2 + \omega^2\right)^2}$
9	$t^2 \cdot e^{-bt} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ (spec. $\varphi = 0$)	$\frac{\left(2(s+b)^3 - 6\omega^2(s+b)\right)\cos(\varphi) + \left(-6 \cdot \omega \cdot (s+b)^2 + 2\omega^3\right) \cdot \sin(\varphi)}{\left((s+b)^2 + \omega^2\right)^3}$ $\quad \varphi = 0$: $\frac{(s+b)^3 - 6 \cdot \omega^2 (s+b)}{\left((s+b)^2 + \omega^2\right)^3}$
10	$\sin(\omega t + \varphi)$ (spec. $\varphi = 0$)	$\frac{s \cdot \sin(\varphi) + \omega \cdot \cos(\varphi)}{s^2 + \omega^2}$, $\quad \varphi = 0$: $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
11	$t \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ (spec. $\varphi = 0$)	$\frac{\left(s^2 - \omega^2\right)\sin(\varphi) + 2\omega \cdot s \cdot \cos(\varphi)}{\left(s^2 + \omega^2\right)^2}$, $\quad \varphi = 0$: $\frac{2\omega \cdot s}{\left(s^2 + \omega^2\right)^2}$
12	$t^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ (spec. $\varphi = 0$)	$\frac{\left(2s^3 - 6\omega^2 s\right)\sin(\varphi) + \left(6\omega \cdot s^2 - 2 \cdot \omega^3\right)\cos(\varphi)}{\left(s^2 + \omega^2\right)^3}$, $\quad \varphi = 0$: $\frac{6\omega \cdot s^2 - 2\omega^3}{\left(s^2 + \omega^2\right)^3}$
13	$e^{-bt} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ (spec. $\varphi = 0$)	$\frac{\left(s+b\right) \cdot \sin(\varphi) + \omega \cdot \cos(\varphi)}{(s+b)^2 + \omega^2}$, $\quad \varphi = 0$: $\frac{\omega}{(s+b)^2 + \omega^2}$
14	$t \cdot e^{-bt} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ (spec. $\varphi = 0$)	$\frac{\left((s+b)^2 - \omega\right)\sin(\varphi) + 2 \cdot \omega \cdot (s+b) \cdot \cos(\varphi)}{\left((s+b)^2 + \omega^2\right)^2}$, $\quad \varphi = 0$: $\frac{2\omega(s+b)}{\left((s+b)^2 + \omega^2\right)^2}$
15	$t^2 \cdot e^{-bt} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ (spec. $\varphi = 0$)	$\frac{\left(2(s+b)^3 - 6\omega^2(s+b)\right)\sin(\varphi) + \left(6 \cdot \omega \cdot (s+b)^2 + 2\omega^3\right) \cdot \cos(\varphi)}{\left((s+b)^2 + \omega^2\right)^3}$ $\quad \varphi = 0$: $\frac{6 \cdot \omega \cdot (s+b)^2 - 2\omega^3}{\left((s+b)^2 + \omega^2\right)^3}$

Appendix 5.2. Tabel over invers-Laplace-transformerede

Det forudsættes, at F(s) er en bruden rational funktion, hvor nævneren er af højst fjerde grad

Andengradspolynomier med komplekse rødder $a \pm ib$ omskrives til $(s-a)^2+b^2$.

Nr	$F(s)=L\{f(t)\}$	$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$
16	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
17	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t\cdot e^{-at}$
18	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$
19	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)\cdot e^{-at}$
20	$\frac{s}{(s+a)^3}$	$\left(t-\frac{1}{2}at^2\right)e^{-at}$
21	$\frac{s^2}{(s+a)^3}$	$\left(t+\frac{1}{2}a^2t^2\right)e^{-at}$
22	$\frac{s}{(s+a)^4}$	$\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6}at^3\right)e^{-at}$
23	$\frac{s^2}{(s+a)^4}$	$\left(t-at^2+\frac{1}{6}a^2t^3\right)e^{-at}$
24	$\frac{s^3}{(s+a)^4}$	$\left(1-3at+\frac{3}{2}a^2t^2-\frac{1}{6}a^3t^3\right)e^{-at}$
25	$\frac{1}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{1}{b}\cdot e^{-at}\cdot\sin(bt)$
26	$\frac{s}{(s+a)^2+b^2}$	$\left(\cos(bt)-\frac{a}{b}\sin(bt)\right)e^{-at}$ eller $\frac{1}{b}\sqrt{a^2+b^2}\,e^{-at}\sin(bt+\varphi),\ \varphi=\tan^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)$
27	$\frac{1}{\left((s+a)^2+b^2\right)^2}$	$-\frac{t}{2b^2}e^{-at}\cos(bt)+\frac{1}{2b^3}\sin(bt)$
28	$\frac{s}{\left((s+a)^2+b^2\right)^2}$	$\frac{a\cdot t}{2b^2}e^{-at}\cos(bt)+\left(\frac{t}{2b}-\frac{a}{2b^3}\right)e^{-at}\sin(bt)$
29	$\frac{s^2}{\left((s+a)^2+b^2\right)^2}$	$\frac{b^2-a^2}{2b^2}te^{-at}\cos(bt)+\left(\frac{a^2+b^2}{2b^3}-\frac{a}{b}t\right)e^{-at}\sin(bt)$
30	$\frac{s^3}{\left((s+a)^2+b^2\right)^2}$	$\left(1-\frac{a(a^2-3b^2)}{2b^2}t\right)e^{-at}\cos(bt)+\left(\frac{-a(a^2+3b^2)}{2b^3}+\frac{3a^2-b^2}{2b}t\right)e^{-at}\sin(bt)$

Opgaver.

d1.1. Lad der være givet differentialligningen $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t+y+3}$

Der ønskes i intervallet $1 \le t \le 3$ tabellagt den løsning, for hvilken $y(1) = 2$

1) Der ønskes anvendt Eulers metode svarende til skridtlængden $h = 2$ og $h = 1$. (mellemregninger skal anføres)
2) Benyt lommeregnerens Euler program til at finde $y(3)$ med en skridtlængde på $h = 0.5$.

d1.2. Lad der være givet differentialligningen $\frac{dy}{dt} = t \cdot \ln y$

Der ønskes i intervallet $2 \le t \le 3$ tabellagt den løsning, for hvilken $y(2) = 1.2$

1) Der ønskes anvendt Eulers metode svarende til skridtlængden $h = 2$ og $h = 1$. (mellemregninger skal anføres)
2) Benyt lommeregnerens Euler program til at finde $y(3)$ med en skridtlængde på $h = 0.5$.

d1.3. For differentialligningen $\frac{dy}{dt} = t + \frac{1}{y^2}$ ønsker man i intervallet [0 ; 2] at bestemme den partikulære løsning $y = y(t)$, der svarer til begyndelsesbetingelsen $y(0) = 1$ ved hjælp af Eulers metode.
Først benyttes skridtstørrelsen $h = 2$ og man finder $y(2) = 3.500$.

1) Beregn med en skridtstørrelse på $h = 1$ værdien af $y(1)$ og $y(2)$. Metoden skal klart fremgå af besvarelsen (det er altså ikke nok med et regnemaskineprogram).
2) Benyt lommeregnerens Euler program til at finde $y(2)$ med en skridtlængde på $h = 0.5$.

Giv på dette grundlag en vurdering af hvor nøjagtig $y(2)$ er beregnet.

d1.4. Lad der være givet differentialligningen $\frac{dy}{dt} = 3t^2(y+1)$.

Find den løsning $y(t)$ som opfylder begyndelsesbetingelsen $y(0) = 7$.

d1.5. 1) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t^2-1}$, $t \ne \pm 1$

2) Find og skitsér den partikulære løsningskurve, som går gennem punktet $(t, y) = (0,1)$.

d1.6 1) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dt} = \frac{y^2}{t^2}$, $t \ne 0$

2) Find og skitsér de partikulære løsningskurver, som går gennem henholdsvis $(t, y) = (1,1)$, $(t.y) = (1, \frac{1}{2})$ og $(t, y) = (1,0)$.

d1.7. 1) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dt} = 2t \cdot (y-1)^2$.

2) Find og skitsér de partikulære løsningskurver, som går gennem henholdsvis $(t, y) = 2,1)$ og $(t, y) = (0,0)$.

d1.8 Lad $y(t)$ være antallet af individer bakterier i en bakteriekultur til tiden t.

1) Som arbejdshypotese har man at individantallet øges med en hastighed der er proportional med det øjeblikkelige antal af individer $y(t)$ (målt i tusinder). Lad proportionalitetsfaktoren være k.
a) Opstil en differentialligning til bestemmelse af $y(t)$.
b) Find $y(t)$ i det tilfælde, hvor k = 1.5 og antallet af individer til tiden $t = 0$ er 100.

2) Da de målte tal ikke stemmer overens med de beregnede, opstiller man nu den hypotese, at på grund af mangel på næring, bliver faktoren k erstattet af størrelsen $b - a \cdot y$, hvor konstanterne a og b er positive.
a) Opstil en differentialligning til bestemmelse af $y(t)$.
b) Find (eventuelt ved at benytte Ti89 eller Maple) $y(t)$ i det tilfælde, hvor $a = 3.4$ og $b = 2 \cdot 10^{-4}$ og antallet af individer til tiden $t = 0$ er 100.
c) Benyt Ti89 eller Maple til at skitsere ovennævnte løsningskurve.
(Denne S-formede kurve er et eksempel på en såkaldt "logistisk kurve").

d1.9. 1) Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y^2 - 1}{2(t-1) \cdot y}, \qquad t > 1 \wedge y \neq 0$$

2) Find og skitsér de 2 partikulære løsningskurver, som går gennem henholdsvis punktet $(t, y) = (2,1)$ og $(t, y) = (2,4)$

d1.10 1) Find (eventuelt ved at benytte Ti89 eller Maple) samtlige løsninger til differentialligningen $\frac{dy}{dt} = \frac{y^3 + 1}{y^2 \cdot t \cdot \ln(t)}$, $t > 1 \wedge y < 0$

2) Find og skitser den løsningskurve, der går gennem punktet (t, y)=(2, -1)

d1.11. 1) Find (eventuelt ved at benytte Ti89 eller Maple) den løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{y-1}}{2\sqrt{t-1}}$, der går gennem punktet (t, y)=(2, 5).

d1.12. 1) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$t\frac{dy}{dt} + y(t) = 3t^2, \quad t > 0.$$

2) Find og skitsér den partikulære løsningskurve, som går gennem punktet $(t, y) = (1,2)$.

d1.13. 1) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen $2\dfrac{dy}{dt} - t \cdot y(t) = t$,

2) Find og skitsér den partikulære løsningskurve, som går gennem punktet $(t, y) = (0\,,0)$.

d1.14. 1) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(1+2t)\frac{dy}{dt} - y(t) = 1, \quad t > -\frac{1}{2}$$

2) Find og skitsér den partikulære løsningskurve, som går gennem punktet $(t, y) = (0\,,0)$.

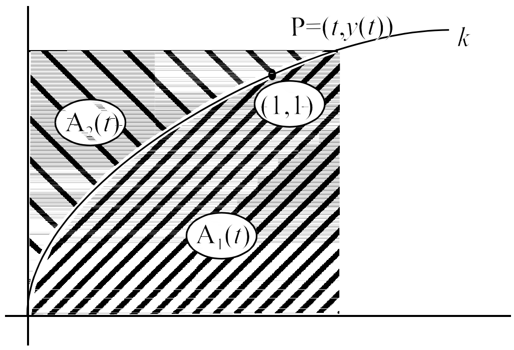
d1.14. 1) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$t\frac{dy}{dt} + (t^2 - 1)\cdot y(t) = 2t^3, \qquad t > 0$$

2) Find og skitsér den løsningskurve, som går gennem punktet $(t, y) = (1\,,2)$.

d1.15. Eksperimenter viser, at den hastighed hvormed et legeme afkøles i en luftstrøm er tilnærmelsesvis proportional med $T - T_{luft}$, hvor T er legemets temperatur og T_{luft} er luftens temperatur (Newtons lov for afkøling i en strøm).
Lad temperaturen T_{luft} i luftstrømmen konstant være 30^0 C. Legemets temperatur er 100^0 C til tiden $t = 0$ og 70^0 C til tiden $t = 3$ min. Hvornår er legemets temperatur blevet 40^0 C.

d1.16. Lad grafen for funktionen $y(t)$ for $t \geq 0$ være en kontinuert kurve k, og lad punktet P være et vilkårligt punkt på kurven.
Lad endvidere $A_1(t)$ og $A_2(t)$ være de på figuren afgrænsede arealer mellem k og henholdsvis x - aksen og y - aksen.
Find funktionen $y(t)$ sådan at
1) $y(1) = 1$ og
2) $A_1(t) = 3 \cdot A_2(t)$ for alle $t \geq 0$



d1.17. I et præparat vil antallet af ^{14}C-atomer, som henfalder radioaktivt pr. tidsenhed være proportionalt med det øjeblikkelige antal tilstedeværende ^{14}C-atomer. Der går ca. 5700 år, inden 50% af ^{14}C-atomerne er henfaldet. Hvor lang tid går der, inden 90% af ^{14}C-atomerne er henfaldet ?

d1.18. 1) Find samtlige løsninger til differentialligningen $2(t-2)\dfrac{dy}{dt}+y(t)=-1,\quad t>2$

2) Find den løsning til ovennævnte differentialligning, som er bestemt ved $y\,(3) = 0$
Skitsér grafen for $y(t)$.

d1.19. 1) Find eventuelt ved at benytte Ti89 eller Maple) samtlige løsninger til differentialligningen $\left(t^2+1\right)\dfrac{dy}{dt}+t\cdot y(t)=t^3$

2) Find og skitsér grafen for den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $y(0)=-\dfrac{2}{3}$.

d1.20. Benyt Ti89 eller Maple til at finde den løsning til differentialligningen

$$(t-2)\left(t^2+1\right)\frac{dy}{dt}+\left(-2t^2+67+1\right)\cdot y(t)=t,\qquad t<2$$

som opfylder begyndelsesbetingelsen $y(0)=\dfrac{2}{3}$

d2.1. Find samtlige løsninger til hver af differentialligningerne

1) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-4\dfrac{dy}{dt}+4y(t)=0$

2) $3\dfrac{d^2y}{dt^2}-6\dfrac{dy}{dt}+30y(t)=0$

3) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-y(t)=0$

d2.2. Find den løsning til differentialligningen $\dfrac{1}{4}\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+5y=0$, der opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0)=\sqrt{2}$ og $y'(0)=2\sqrt{2}$.

Løsningen ønskes angivet såvel på formen $C_1e^{rt}\cos(\omega t)+C_2e^{rt}\sin(\omega t)$ som på formen $Ae^{rt}\cos(\omega t+\varphi)$.

d2.3. Find samtlige løsninger til hver af differentialligningerne

1) $y''(t)+5y'(t)+4y(t)=e^t$ 2) $y''(t)+5y'(t)+4y(t)=e^{-t}$

d2.4. Find samtlige løsninger til differentialligningen $2y''(t)+16y'(t)+32y(t)=e^{-4t}+t$

d2.5. Find samtlige løsninger til differentialligningen $y''+4y'+6y=5\sin t$

d2.6. Find samtlige løsninger til differentialligningen $y'' - 2y' + y = t \cdot e^{-t}$.

d2.7. Find samtlige løsninger til differentialligningen $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t} + 8t^2$.

d2.8. Find samtlige løsninger til differentialligningen $y'' + 4y = 4\sin(2t)$

d2.9. Find samtlige løsninger til differentialligningen $y'' + 4y' + 13y = 13t^2$

d2.10. Find samtlige løsninger til differentialligningen $y'' + 6y' + 9y = e^{-3t}$

d2.11. Find samtlige løsninger til differentialligningen $y'' + 4y' + 13y = 2e^{-2t}$

d2.12. 1) Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 5t + 4e^t + 2\sin t$$

2) Find den partikulære løsning, som opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$

d2.13. 1) Find samtlige løsninger til differentialligningen $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} - 2y = 6e^t - 4t$

2) Find den partikulære løsning, som opfylder begyndelsesbetingelserne $y(9) = 1$ og $y'(0) = 2$.

d2.14. Benyt et matematikprogram (som Ti 89 eller Maple) til at finde den løsning til differentialligningen $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 10\dfrac{dy}{dt} + 26y(t) = 2e^t\cos t + e^t\sin t + e^{5t}\cos(2t)$

som opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = \dfrac{1}{8}$ og $y'(0) = \dfrac{1}{8}$

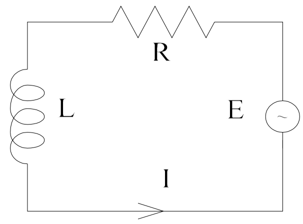
d2.15. Benyt et matematikprogram (som Ti 89 eller Maple) til at finde den løsning til differentialligningen $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \left(t^2 + t\right)e^{3t}$

som opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = 1$ og $y'(0) = -1$.

d2.16. Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} + 16y = 5\sin 2t + 3e^{-4t}$$

d2.17. I et elektrisk kredsløb med en vekselspændingskilde E og en indskudt modstand R og en spole med selvinduktion L - serieforbundne, jfr. figuren - gælder for tiden $t > 0$ idet $I = I(t)$ betegner strømstyrken og den "påtrykte" elektromotoriske kraft $E = E_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ følgende differentialligning: $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E_m}{L} \sin \omega t$.



Find, idet R = 100 Ohm, L = 20 Henry, E_m=220 Volt og $\omega = \frac{R}{L}$, den løsning til differentialligningen, for hvilken $I(0) = 0$.

d2.18. Find samtlige løsninger til differentialligningen $\frac{d^2y}{dt^2} + y = \frac{1}{\cos t}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

Vink: Benyt integralmetoden.

d2.19. Find (eventuelt ved benyttelse af et matematikprogram som Ti89 eller Maple) samtlige løsninger til hver af differentialligningerne

1) $y''(t) + 4y(t) = 0$

2) $y''(t) + 4y(t) = e^t \cos(2t)$

3) $y''(t) + 4y(t) = \frac{1}{\sin(2t)}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$

Find dernæst den partikulære løsning til differentialligningen (1), som opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$. Løsningen skal skrives på formen $A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

d2.20. Find (eventuelt ved benyttelse af et matematikprogram som Ti89 eller Maple) samtlige løsninger til hver af differentialligningerne

1) $2y''(t) + 3y'(t) + y(t) = 0$

2) $2y''(t) + 3y'(t) + y(t) = \frac{2}{e^t + 1}$

d3.1 Find samtlige løsninger til hver af differentialligningerne

1) $y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = 0$

2) $y^{(4)}(t) + 6y'''(t) + 5y''(t) - 24y'(t) - 36y(t) = 0$

3) $y^{(5)}(t) - 3y^{(4)}(t) + 3y'''(t).y''(t) = 0$

d3.2. Find samtlige løsninger til differentialligningen

$y'''(t) - 5y''(t) + 11y'(t) - 15y(t) = 32e^{-t} - 20\sin t$

d3.3. Lad et polynomium være givet ved $P(z) = 2z^3 + 5z^2 + 6z + 2$.
1) Find samtlige rødder i polynomiet P.
2) Find samtlige løsninger til differentialligningen $2y''' + 5y'' + 6y' + 2y = 0$
3) Find samtlige løsninger til differentialligningen $2y''' + 5y'' + 6y' + 2y = te^{-t}$

d3.4. Find samtlige løsninger til differentialligningen $y''' - 3y' + 2y = t^2 - \frac{1}{2}$

d3.5. Find samtlige løsninger til differentialligningen
$y^{(7)}(t) + 3y^{(6}(t) + 6y^{(5)}(t) + 8y^{(4)}(t) + 9y'''(t) + 7y''(t) + 4y'(t) + 2y(t) = 0$

d3.6. Find samtlige løsninger til differentialligningen $y''' + 3y'' = 3e^{-3t}$

d3.7. Find samtlige løsninger til differentialligningen $y^{(6)}(t) + 2y''(t) + 2y(t) = 0$

d3.8. 1) Find (eventuelt ved hjælp af et matematikprogram som Ti89 eller Maple) samtlige løsninger til differentialligningen $y'''(t) - 62y''(t) + 25y'(t) + 82y(t) = 0$
2) Find den løsning til ovennævnte differentialligning som opfylder betingelsen $y(0) = 0, \quad y'(0) = -6, \quad y''(0) = 13$

d.3.9. Find samtlige løsninger til differentialligningen $y'''(t) + 27y(t) = e^t + \sin t$

d4.1. Lad et differentialligningssystem være givet ved
$$\begin{cases} x' = 2x + 2y \\ y' = 5x - y \end{cases}, \qquad x(0) = 0, \quad y(0) = -7$$
Skitser i intervallet $0 \le t \le 10$ funktionerne $x(t)$ og $y(t)$ i samme koordinatsystem ved benyttelse af et matematikprogram (Ti89 eller Maple).

d4.2. Lad et differentialligningssystem være givet ved
$$\begin{cases} y' = 2y + 3z \\ z' = \frac{1}{3}y + 2z \end{cases} \qquad y(0) = 0, \quad z(0) = 2$$

Skitser i intervallet $0 \le t \le 10$ funktionerne $y(t)$ og $z(t)$ i samme koordinatsystem ved benyttelse af et matematikprogram (Ti89 eller Maple).

d5.1. Lad $f(t) = 6 + 4 \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t) + 2t + 3$ Find $\bar{f}(s) = L\{f(t)\}$

d5.2. Lad $f(t) = 3 + 4t \cdot e^{-2t} \cdot \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + 6 \cdot e^{-2t} - e^{-2(t-3)} + 2^{-t}$

Find $\bar{f}(s) = L\{f(t)\}$

d5.1. Find $L^{-1}\left\{\frac{5}{s+4} + \frac{5s+16}{s^2+4s-5}\right\}$

d5.2. Find $L^{-1}\left\{\frac{s+5}{s^3-3s^2-4s+12}\right\}$

d5.3. Find $L^{-1}\left\{\frac{3}{s+2} + \frac{s}{s^2-6s+8} + \frac{7}{s(s^2+6s+25)}\right\}$

d5.4. Find $L^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{2}{(s+3)^2} + \frac{s}{s^2+2s+26} + \frac{1}{(s^2+2s)^2}\right\}$

d5.5. Lad der være givet differentialligningen $\frac{dy}{dt} + y = \sin t$

Find ved hjælp af Laplacetransformation den løsning $y(t)$ $(t \in [0;\infty]$ for hvilken $y(0) = 1$.

d5.6. Lad der være givet følgende differentialligning: $2\frac{dy}{dt} + 3y = 4 + 6t + 11e^{-7t}$.

1) Find <u>uden</u> at benytte Laplacetransformation den løsning, for hvilken det gælder, at $y(0) = 8$
2) Find ved at benytte Laplacetransformation den løsning, for hvilken det gælder, at $y(0) = 8$.

d5.7 Lad der være givet differentialligningen $\frac{dy}{dt} + 3y = 7 + t^4 + 2e^{5t}$ med begyndelsesbetingelsen y(0) = 6

Find ved hjælp af Laplacetransformation løsningen $y(t)$ $(t \in [0;\infty]$

d5.8. Lad der være givet differentialligningen $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 3y = 4e^{-t}$

Find ved hjælp af Laplacetransformation den løsning $y(t)$ $(t \in [0;\infty]$ for hvilken $y(0) = 0$, $\frac{dy}{dt}(0) = 1$.

d5.9. Lad der være givet differentialligningen $\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}+y=e^{-t}$

Find ved hjælp af Laplacetransformation den løsning $y(t)$ $(t\in[0;\infty]$ for hvilken $y(0)=1,\quad \dfrac{dy}{dt}(0)=-1$.

d5.10. Lad der være givet differentialligningssystemet $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+x-y=2\\ \dfrac{dy}{dt}-x+y=0\end{cases}$

Find ved hjælp af Laplacetransformation den løsning $y(t)$ $(t\in[0;\infty]$ for hvilken $x(0)=1,\quad y(0)=0$.

d5.11. Lad der være givet differentialligningssystemet $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-2y=t^2\\ \dfrac{dy}{dt}-x=e^t\end{cases}$

Find ved hjælp af Laplacetransformation den løsning $y(t)$ $(t\in[0;\infty]$ for hvilken $x(0)=0,\quad y(0)=1$.

5.12. Lad der være givet differentialligningssystemet $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y(t)\\ \dfrac{dy}{dt}=x(t)+1+e^{-2t}\end{cases}$

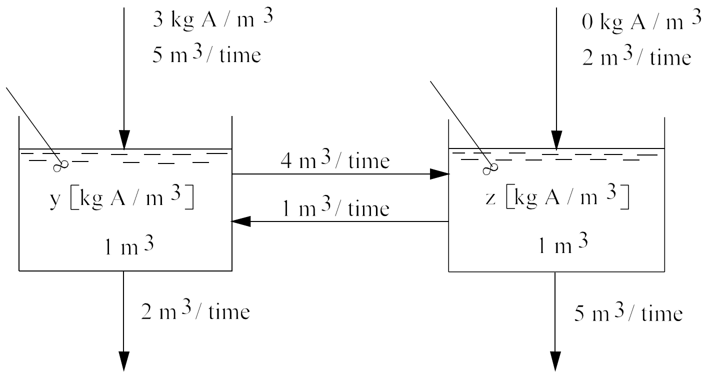
Find ved hjælp af Laplacetransformation den løsning $x(t)$ $(t\in[0;\infty]$ for hvilken $x(0)=0,\quad y(0)=4$.

5.13. Find $y=y(t),\ (t\in[0;\infty])$ ved hjælp af Laplace-transformation for følgende differentialligningsproblem: $\begin{matrix}\dfrac{dy}{dt}+3y-4z=e^{-t}\\ \dfrac{dz}{dt}+y+7z=-2e^{-t}\end{matrix}$, $y(0)=0.\quad z(0)=0$

5.14. Betragt differentialligningssystemet $\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=z(t)\\ \dfrac{dz}{dt}=-y(t)-2z(t)\end{cases}$ med $y(0)=3$ og $z(0)=-3$

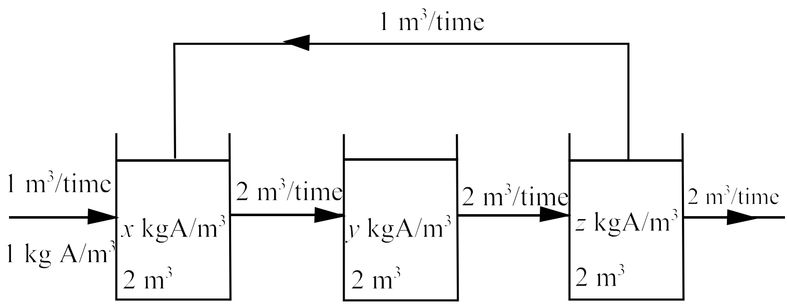
Find $y(t)$.

5.15. Lad $y = y(t)$ og $z = z(t)$ betegne koncentrationerne af et stof A i to tanke:



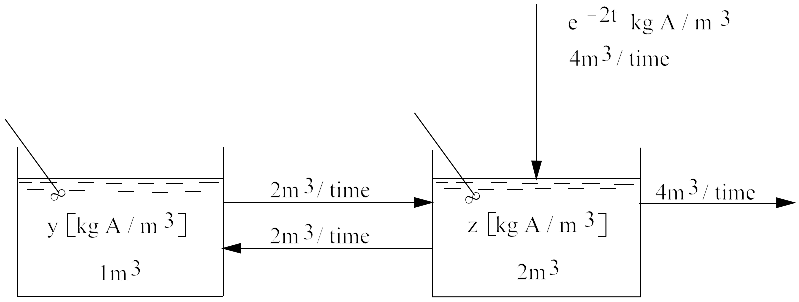
Til tiden $t = 0$ timer er koncentrationerne i tankene $y(0) = z(0) = 1$ kg A/m^3.
Find $z(t)$ for alle $t \in [0; \infty[$ ved hjælp af Laplacetransformation.

5.16. Lad $x(t)$, $y(t)$ og $z(t)$ betegne koncentrationen af et stof A i tre tanke.



Til tiden t = 0 er koncentrationen i tankene $x(0) = 1$ kgA/m^3, y(0) = 0 og z(0) = 0.
Find z(t).

5.17. Lad $y(t)$ og $z(t)$ betegne koncentrationerne af et stof A i to tanke:
Til tiden $t = 0$ timer er koncentrationerne i tankene $y(0) = 0$ og $z(0) = 0$.



Find $z(t)$ for alle $t \geq 0$.

5.18. Udtryk funktionen $f(t) = \begin{cases} 2t & \text{for } 0 \leq t < 1 \\ e^{1-t} & \text{for } 1 \leq t < 3 \\ 2 & \text{for } 3 \leq t \end{cases}$ ved hjælp af enhedstrinfunktioner.

5.19. Givet funktionen $f(t) = \begin{cases} 2t & \text{for } 0 \leq t < 1 \\ e^{1-t} & \text{for } 1 \leq t < 3 \\ 2 & \text{for } 3 \leq t \end{cases}$.

Find f's Laplacetransponerede $\bar{f}(s) = L\{f(t)\}$

5.20. Givet funktionen $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{for } 0 \leq t < 2 \\ e^{2-t} & \text{for } t \geq 2 \end{cases}$

Find f's Laplacetransponerede $\bar{f}(s) = L\{f(t)\}$

5.21. Givet funktionen $f(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) & \text{for } 0 \leq t < 3 \\ e^{3-t} & \text{for } t \geq 3 \end{cases}$

Find f's Laplacetransponerede $\bar{f}(s) = L\{f(t)\}$

5.22. Givet funktionen $f(t)=\begin{cases} e^{3t} & \text{for } 0\le t<2 \\ 4 & \text{for } 2\le t<3 \\ t & \text{for } 3\le t \end{cases}$.

Find f's Laplacetransponerede $\bar{f}(s)=L\{f(t)\}$

5.23. Find $L\{u(t-\pi)\sin t\}$ og $L^{-1}\left\{\dfrac{2}{(s+5)^3}e^{-4s}\right\}$

5.24. Find $L^{-1}\left\{\dfrac{s+2}{s^2+4s+13}e^{-2s}\right\}$

5.25. Find $L^{-1}\left\{\dfrac{s+e^{-2s}}{s^2+5s+4}\right\}$

5.26. Find $L^{-1}\left\{4e^{-3s}+\dfrac{se^{-3s}}{s^2+18s+82}\right\}$

5.27. Find $L^{-1}\left\{\dfrac{2\cdot(s^2-4)e^{-3s}}{\left(s^2+4\right)^2}\right\}$

5.28. Find $L^{-1}\left\{e^{-3s}\dfrac{2s}{(2s-1\cdot\left(s^2-4s+8\right)}\right\}$

5.29. Find $L^{-1}\left\{\dfrac{34e^{-3s}}{(2s+1)(s+1)^2(s^2+2s+5)}\right\}$

5.30. 1) Skitsér grafen for $x(t)=\begin{cases} 2 & \text{for } t\in[0\,;1[\\ 4 & \text{for } t\in[1\,;2[\\ 0 & \text{for } t\in[2\,;\infty[\end{cases}$

2) Find $y(t)$ $\quad (t\in\left[0;\infty\right]$ ved hjælp af Laplacetransformation for differentialligningen

$$\frac{dy}{dt}+2y=x(t),\qquad y(0)=0$$

3) Skitsér grafen for $y(t)$.

5.31. Lad funktionen $f(t)$ være givet ved følgende “gaffelforskrift”

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{for}\quad 0\le t<2\\ \frac{1}{2}t-1 & \text{for}\quad 2\le t<4\\ \frac{1}{2}t-1-e^{-4t} & \text{for}\quad 4\le t\end{cases}$$

1) Skitsér grafen for $f(t)$
2) Opskriv funktionen f(t) udtrykt ved enhedstrinfunktionen *u*.
3) Find den Laplacetransformerede $L\{f(t)\}$.
4) Find den løsning til differentialligningen
$\frac{dy}{dt}+\frac{1}{2}y(t)=f(t)$, for hvilket $y(0)=1$.
Løsningen skal dels udtrykkes ved enhedstrinfunktionen *u* og dels ved en “gaffelforskrift”.

5.32. Lad der være givet differentialligningen $\frac{dy}{dt}+3y(t)=f(t)$, hvor

$$f(t)=\begin{cases}e^{t} & \text{for}\quad 0\le t<\ln 2\\ 4e^{-t} & \text{for}\quad t\ge \ln 2\end{cases}$$

1) Skitser grafen for $f(t)$.
2) Find den løsning til differentialligningen $y(t)$ som svarer til begyndelsesbetingelsen $y(0)=1$

5.33. Der er givet differentialligningssystemet

$$\begin{cases}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}-y(t)-10z(t)=0\\ \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+5\frac{dz}{dt}+y(t)+10z(t)=x(t)\end{cases}\quad \text{hvor } x(t)=\begin{cases}2e^{t} & \text{for}\quad 0\le t<3\\ 0 & \text{for}\quad t\ge 3\end{cases}$$

Find $z(t)$, svarende til begyndelsesbetingelsen $y(0)=2$ og $y'(0)=z(0)=z'(0)=0$.

5.34. Der er givet differentialligningssystemet

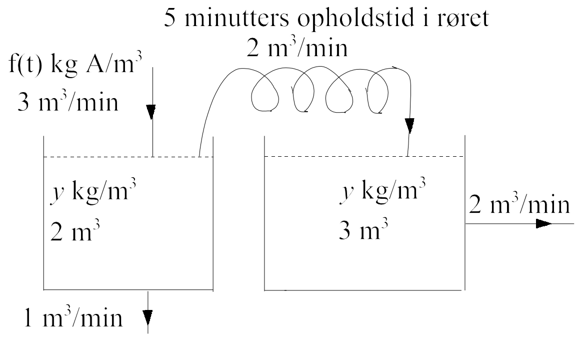
$$\begin{cases}\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}=x(t)\\ -\frac{dy}{dt}+z(t)=1\end{cases}\quad \text{hvor } x(t)=\begin{cases}1 & \text{for}\quad 0\le t<2\\ e^{-t} & \text{for}\quad t\ge 2\end{cases}$$

Find y (t), svarende til begyndelsesbetingelsen $y(0)=0$ og $z(0)=1$.

5.35. 1) Lad $f(t)=\begin{cases}1+\sin(2t) & for\ \ 0\le t<\pi\\ 1+e^{-t}\cdot\sin(2t) & for\ \ t\ge\pi\end{cases}$

Beregn $L\{f(t)\}$

2) Lad $y(t)$ og $z(t)$ betegne koncentrationerne af et stof A i to tanke:

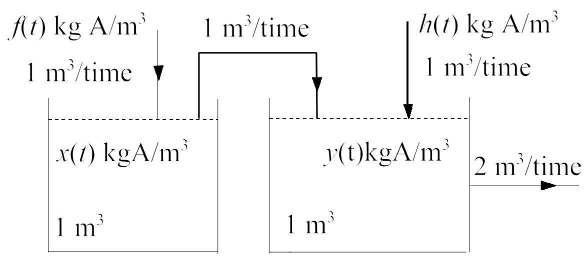


Det viste system startes til tiden t = 0 med y(0) = 0, z(0) = 0 og koncentrationen 0 i spiralrøret.
Opstil differentialligningerne til bestemmelse af koncentrationerne $y(t)$ og $z(t)$.

3) Find den Laplace-transformerede $\bar{z}(s)$

4) Lad $\bar{z}(s)=\dfrac{6e^{-3s}}{(5+s)(2s+3)}$. Find $z(t)$

5.36. Lad x(t) og y(t) betegne koncentrationerne af et stof A i to tanke:



Her er $f(t)=\begin{cases}0 & \text{for}\quad 0\le t<1\\ 1 & for\quad 1\le t\end{cases}$ og $h(t)=\begin{cases}0 & \text{for}\quad 0\le t<1\\ 1 & for\quad 1\le t\end{cases}$

Find y(t) når $x(0)=0$ og $y(t)=0$

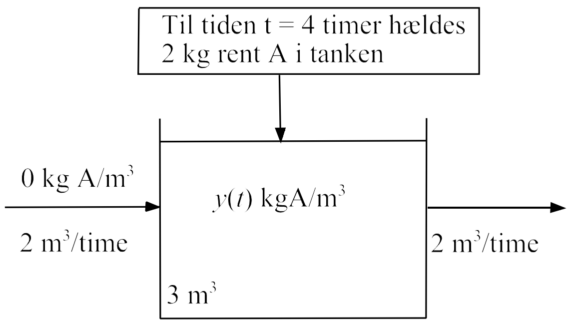
5.37. Lad der være givet differentialligningen $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y(t) = 2 \cdot \delta(t-5) + x(t)$

hvor $x(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{for} \quad 0 \le t < 2 \\ 0 & \text{for} \quad 2 \le t \end{cases}$ og δ er Diracs deltafunktion.

Find den løsning $y(t)$, som svarer til begyndelsesbetingelsen $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

Løsningen ønskes angivet som en stykkevis defineret funktion (en gaffelforskrift som $x(t)$)

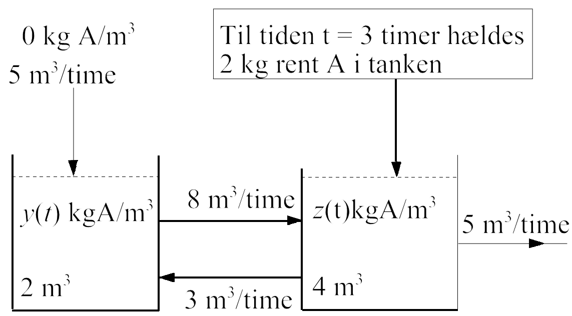
5.38. Lad $y(t)$ betegne koncentrationen af et stof A i en tank:



Systemet startes til tiden $t = 0$, hvor $y(0) = 1$ kg A/m^3

Find $y(t)$ for $t \ge 0$

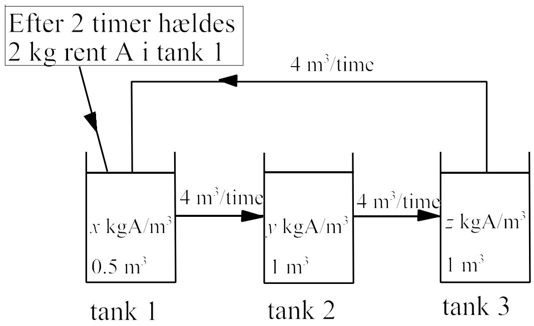
5.39. Lad $y(t)$ og $z(t)$ betegne koncentrationerne af et stof A i to tanke:



Til tiden t = 0 er koncentrationerne i tankene y(0) = 0 kgA/m^3 og $z(0) = \frac{1}{2}$ kgA/m^3

Find $z(t)$.

5.40. En væske cirkulerer mellem tre tanke med en hastighed på 4 m^3/time. (se figuren). Til tiden t = 0 gælder $x(0) = 1,\ \ y(0) = z(0) = 0$. Efter 2 timers forløb hældes der pludselig 2 kg rent A i tank 1.



Find $z(t)$ for $t \geq 0$.

STIKORD