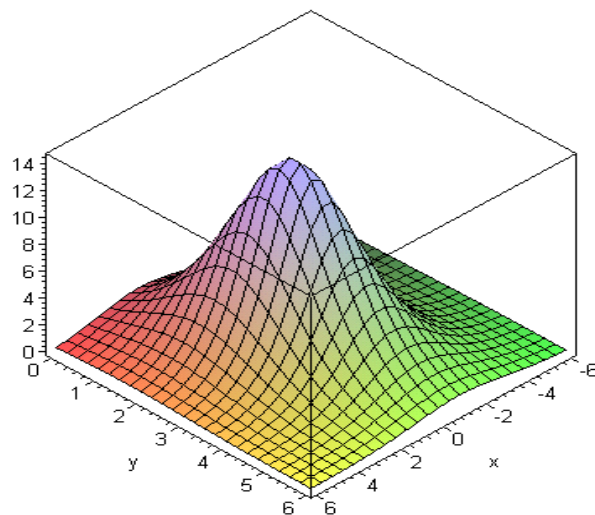


MOGENS ODDERSHEDE LARSEN

Funktion af to eller flere variable I

Differentiation og Optimering



1. udgave 2005

FORORD

Dette notat giver en indføring i de grundlæggende begreber for analyse af reelle funktioner af to og flere variable. Specielt behandles optimering udførligt.

Forudsætninger: Der forudsættes et kendskab til differentialregning svarende til nedenfor anførte note om “Matematiske grundbegreber”. I afsnit 2.4.3 forudsættes endvidere at man har kendskab til grundlæggende regneregler for matricer svarende til kapitel 1 i nedenfor anførte note om matricer.

Regnemidler: Der vil i eksemplerne blive vist hvorledes man kan foretage beregningerne med “matematiklommeregneren” Ti 89.

Da man må forudse, at man senere vil skulle kunne anvende et egentligt matematikprogram, så angives også nogle af ordrene i programmet “Maple”

Enkelte eksempler er hentet fra lærebogen “Bjarne Helleesen, Mogens Oddershede Larsen: Matematik for Ingeniører bind 2.

Andre noter i samme “serie” er

“Matematiske grundbegreber”

Giver en kort gennemgang af definitioner og regneregler for de mest almindelige reelle funktioner af 1. variabel, disses differentiation og integration,

“Vektorer”

Indhold: 1) Vektorer i plan og rum, 2) Rumgeometri (relationer mellem punkt, linie og plan)
3) Kurver i plan givet ved en parameterfremstilling

“Komplekse tal”

Indhold: 1) Rektangulær og polær form, eksponentialfunktion, 2) Binom- og andengradslikning
3) Opløsning af polynomier i faktorer og dekomponering

“Matricer og lineære ligninger”

Indhold: 1) Regneregler for matricer,
2) Lineære ligningssystemer, herunder løsning af overbestemt ligningssystem

“Differentialligninger”

Indhold: 1) 1. orden (seperable, lineære, numerisk løsning),
2) 2. og højere orden med konstante koefficienter,
3) Laplacetransformation til løsning af differentialligningssystemer og differentialligninger med forsinkelse

“Fourieranalyse”

Indhold: 1) Reelle Fourierrækker, 2) Fourierrækker på kompleks form, 3) Fouriertransformation
4) Diskret Fouriertransformation

Alle de nævnte notater kan i pdf-format findes på adressen www.larsen-net.dk

januar 2006 Mogens Oddershede Larsen

INDHOLD

1 Grundlæggende begreber

1.1	Indledning	1
1.2	Funktion af 2 variable	1
1.2.1	Grafisk fremstilling	2
1.2.2	Partiel differentiation	4
1.2.3	Grænseværdi, kontinuitet, differentiability	7
1.2.4	Tangentplan	9
1.2.5	Differential	10
1.2.6	Kæderegel	13
1.2.7	Gradient og retningsafledede	15
1.2.8	Taylorpolynomium	17
1.3	Funktion af mere end 2 variable	20
1.3.1	Grafisk fremstilling	20
1.3.2	Differential, kæderegel, gradient, Taylorpolynomium	20
	Opgaver	23

2 Optimering

2.1	Indledning	30
2.2	Generelle begreber	30
2.3	Optimering for funktioner af 2 variable	32
2.3.1	Globale ekstrema i lukket begrænset mængde	32
2.3.2	Lokale ekstrem	35
2.4	Lineær programmering	37
2.4.1	Indledning	37
2.4.2	Problemstilling	37
2.4.3	Simplexmetoden	40
2.4.3.1	LP-problem på normalform	40
2.4.3.2	Den primale simplexmetode	41
2.4.3.3	Den reviderede simplexmetode	44
2.4.3.4	LP-problemer hvor første basisløsning ikke er mulig	48
2.4.3.5	Anvendelse af LP-program	53
2.5	Optimering af ikke lineære funktioner	55
	Opgaver	56

Stikord		60
----------------	--	----

1 Grundlæggende begreber

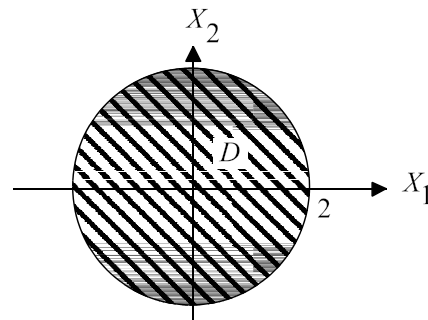
1.1 Indledning

Man siger, at der foreligger en (reel) funktion f af n variable x_1, x_2, \dots, x_n hvis der til ethvert talsæt (x_1, x_2, \dots, x_n) i en definitions­mængde D er tilordnet netop ét reelt tal $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

For kortheds skyld vil vi ofte skrive $f(\bar{x})$ hvor $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Eksempel 1.1. Funktioner af flere variable

- 1) $f(x_1, x_2) = \sqrt{4 - x_1^2 + x_2^2}$ er en funktion af 2 variable x_1, x_2 med definitions­mængden $D = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$ (cirkelskive med radius 2, se figuren).



- 2) Trykket P af en bestemt gas afhænger af temperaturen T , rumfanget V og mol-antallet n bestemt ved funktionen $P = f(V, T, n) = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$, hvor R er en konstant.



1.2 Funktion af 2 variable

1.2.1. Grafisk fremstilling.

En funktion af 2 variable $z = f(x, y)$ vil grafisk sædvanligvis kunne fremstilles i et rumligt koordinatsystem som en flade med “bakker” og “dale”.

En sådan rumlig tegning kan være vanskelig at forestille sig. Man vil derfor ofte i stedet tegne “niveaukurver”, som svarer til højdekurver på et geodætisk kort. Ligesom en dygtig orienteringsløber kan se landskabet for sig ved at betragte højdekurverne på et kort, kan man ved at studere niveaukurverne få et godt indtryk af fladen.

En **niveaukurve** er en punktmængde $\{(x, y) \mid f(x, y) = k\}$ hvor $f(x, y)$ har en konstant værdi k . På figur 1.1 er der vist niveaukurver for en funktion med et lokalt maksimum samt den samme funktions 3-dimensionale udseende. På figur 1.2 er de tilsvarende figurer tegnet for et lokalt minimum, og på figur 1.3 er der tegnet en funktion med et saddelpunkt (disse begreber defineres mere præcist i et senere kapitel).

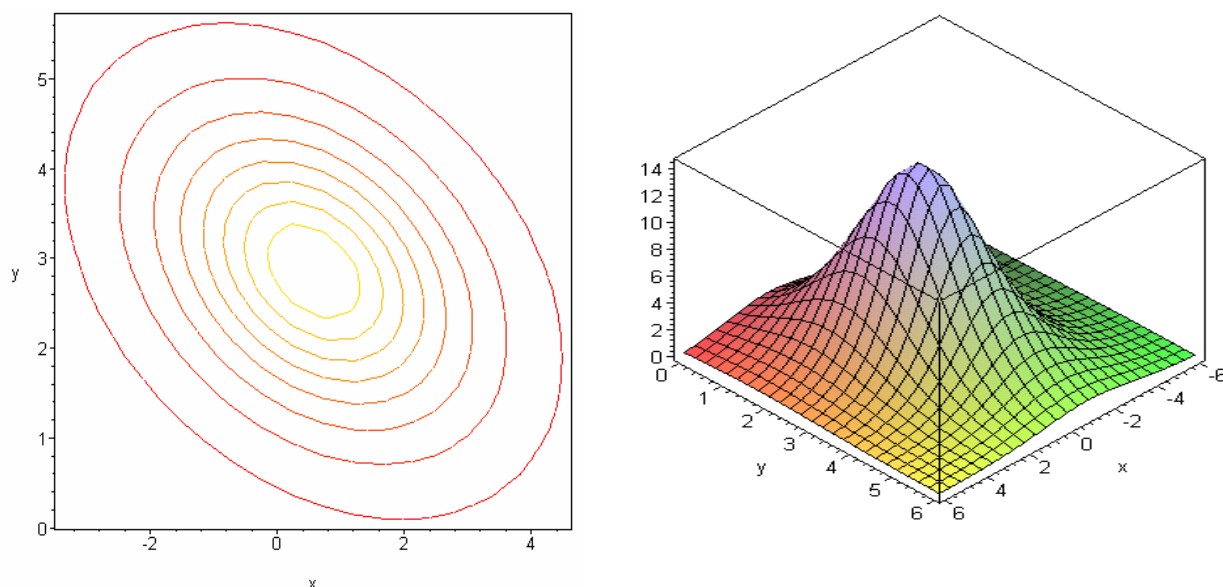


Fig. 1.1. Niveaukurvediagram og tredimensional graf for funktionen

$$f(x, y) = 100 \cdot e^{-\sqrt{(x-2)^2 + 2(y-3)^2 + xy}} \text{ som har med maksimum.}$$

Maple: with(plots): > contourplot(100*exp(-sqrt((x-2)^2+2*(y-3)^2+x*y)),x=-6..6,y=0..6);
> plot3d(100*exp(-sqrt((x-2)^2+2*(y-3)^2+x*y)),x=-6..6,y=0..6);

Ti 89: Mode: Graph = 3D, Y= (indtast funktion), rude | ,vælg akser m.m., F2, Vælg ZoomStd,

Se på figuren, og eventuelt: i Windows ændre xmax osv, ved piletaster ændre hvorledes grafen ses, tryk på X,Y og Z for at se i akseretninger.

Niveaukurver : Tryk på | . Jo større Grid vælges jo mere detaljeret bliver tegningen, og jo længere tid tager det et tegne den

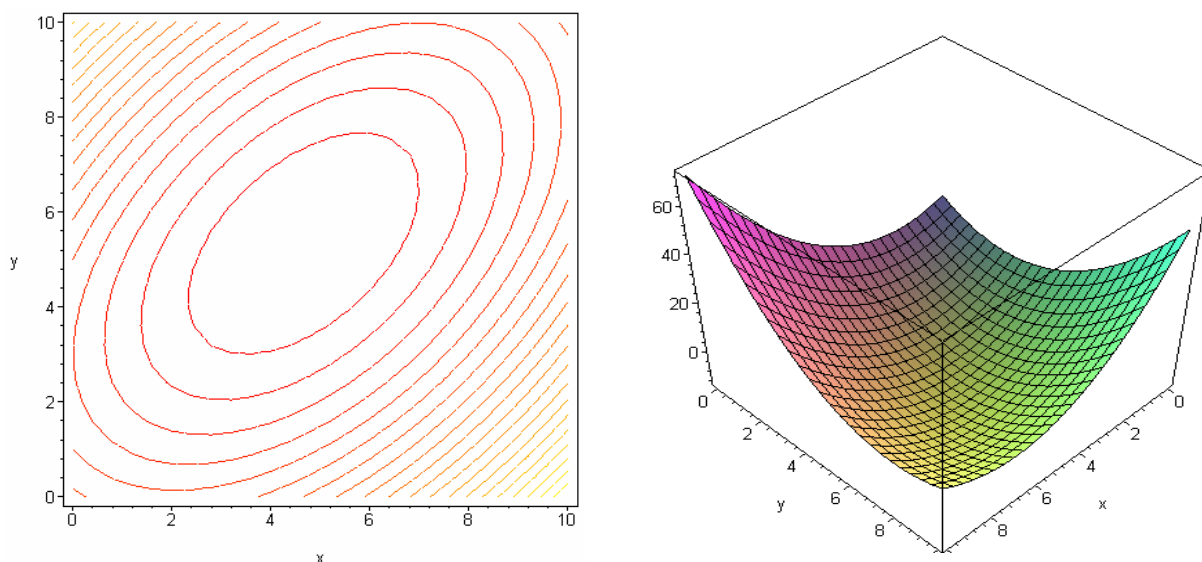


Fig. 1.2. Niveaukurvediagram og tredimensional graf for en funktion

$$g(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 - x \cdot y + 10 \text{ med minimum.}$$

with(plots):
> contourplot((x-2)^2+(y-3)^2-x*y,x=0..10,y=0..10,contours=20);
> plot3d((x-2)^2+(y-3)^2-x*y,x=0..10,y=0..10);

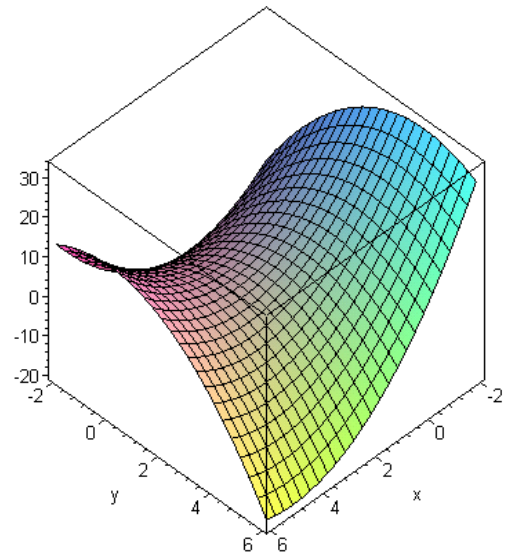
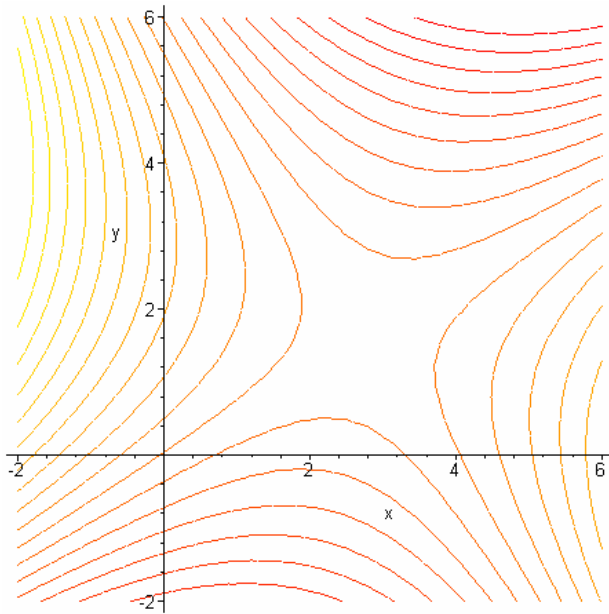


Fig. 1.3. Niveaukurvedigram og tredimensional graf for en funktion $h(x, y) = (x - 2)^2 - (y - 3)^2 - xy + 10$ med saddepunkt.

```
Maple
> contourplot((x-2)^2-(y-3)^2-x*y+10,x=-2..6,y=-2..6,contours=20);
> plot3d((x-2)^2-(y-3)^2-x*y+10,x=-2..6,y=-2..6);
```

Sædvanligvis er det alt for besværligt selv at tegne en rumlig flade og dens niveaukurver. Kun hvis niveaukurverne er velkendte kurver som linier, cirkler hyperbler og parabler kan det være hensigtsmæssigt selv at skitsere fladerne. Det følgende er et eksempel herpå.

Eksempel 1.2. Grafisk fremstilling af enkle funktioner af to variable.

Der ønskes en grafisk fremstilling af funktionen $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Løsning:

Lad $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Først tegnes nogle niveaukurver.

Lad $a > 0$ være en given konstant.

Vi har da: $z = a \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = a \Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2$

Niveaukurverne er følgelig cirkler med centrum i (0,0) se fig. 1.4.

Heraf kan sluttes, at fladen må være af form som en "rund skål" med minimum 0 i punktet (0.0).

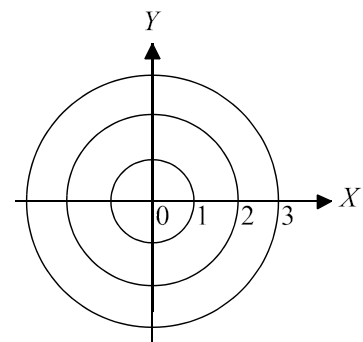


Fig. 1.4.

For at få et "tværsnit" af "skålen" skæres fladen med xz-planen ved at indsætte $y = 0$ i ligningen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Vi får da: $z = \sqrt{x^2} \Leftrightarrow z = |x|$ (se fig. 1.5).

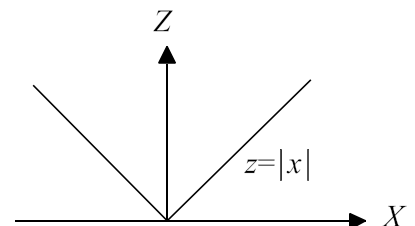


Fig. 1.5. 3

Vi kan nu se, at "skålen" er en kegle med spidsen nedad.
(se fig. 1.6).

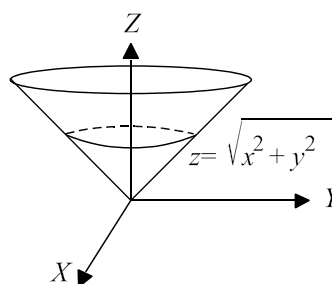


Fig. 1.6.



1.2.2 Partiel differentiation

Hvis man for funktionen $z = f(x, y)$ holder y konstant på værdien y_0 , så vil $f(x, y_0)$ være en funktion af én variabel x .

Er denne funktion differentiable, så kan man på sædvanlig måde finde dens afledede funktion.

Denne kaldes **f 's partielle afledede** med hensyn til x og skrives $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$ eller $f_x(x, y_0)$.

Tilsvarende defineres **f 's partielle afledede** $\frac{\partial f}{\partial y}$ med hensyn til y .

Tegnet ∂ læses "blødt d" og markerer, at funktionen har flere variable. Dette indebærer nemlig, at $\frac{\partial f}{\partial x}$ (i modsætning til $\frac{df}{dx}$) ikke uden videre kan opfattes som en brøk i beregninger.

Eksempel 1.3. Partiel differentiation

Lad funktionen f være givet ved $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 \cdot y^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x$

- 1) Find de to partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$
- 2) Find $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$.

Løsning:

1) Idet vi opfatter f som en funktion af x alene, dvs. opfatter y som en konstant, fås umiddelbart

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2}x \cdot y^2 + 0 + \frac{1}{2}$$

Tilsvarende fås $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}x^2 \cdot y + y$

- 2) Ved indsættelse af $(x, y) = (0, 1)$ fås $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = \frac{1}{2}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 1$



Såfremt det af sammenhængen klart fremgår, hvilket punkt (x,y) der er tale om, udelades det ofte af betegnelserne, således at man kun skriver $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$

Andre skrivemåder.

I stedet for $\frac{\partial f}{\partial x}$ skrives ofte f'_x eller $\frac{\partial z}{\partial x}$ når $z = f(x,y)$.

Undertiden skrives $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ hvor der foruden er angivet, hvad de andre variable er. Eksempelvis kan energien E af en gas

enten opfattes som en funktion af tryk og rumfang eller som en funktion af tryk og temperatur. Derfor ville $\frac{\partial E}{\partial P}$ være et tvetydigt

symbol, mens $\left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_V$ og $\left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_T$ er entydige.

Geometrisk tolkning af partielle afledede

De partielle afledede kan som anskueliggøres i eksempel 1.4 geometrisk tolkes som hældningskoefficienter til tangenter.

Eksempel 1.4. Geometrisk betydning af partielle afledede.

På fig. 1.7 er tegnet grafen for $f(x,y) = \frac{1}{4}x^2 \cdot y^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x$ for $0 \leq x \leq 1$ og $1 \leq y \leq 2$

På figuren er k_1 skæringskurven mellem planen $y = 1$ og grafen for f mens k_2 er skæringskurven mellem planen $x = 0$ og grafen for f .

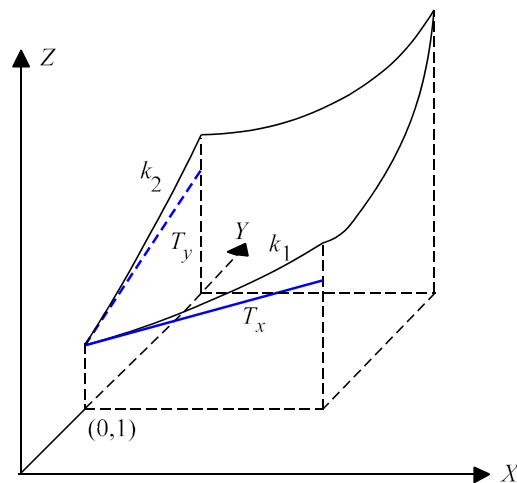


Fig. 1.7. De to partielle differentialkvotienter i $(0,1)$ er hældningskoefficienterne for tangenterne T_x og T_y

Den plan, som er bestemt ved tangenterne T_x og T_y kaldes **tangentplanen** for grafen for f i punktet $(0,1)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ er hældningskoefficienten af tangenten T_x til kurven k_1 for $(x,y) = (0,1)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$ er hældningskoefficienten af tangenten T_y til kurven k_2 for $(x,y) = (0,1)$.

Partielle afledede af højere orden.

Har f partielle afledede af første orden i definitionsmængden D , kan $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

igen opfattes som funktioner af to variable i D . Hvis disse nye funktioner selv har partielle afledede, siges f at have **partielle afledede af anden orden** i D . Disse skrives

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \text{ og } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

For de to sidste "blandede" afledede gælder, at de "sædvanligvis"¹ er ens, dvs, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Eksempel 1.5. Partielle afledede af anden orden

I eksempel 1.3 fandt man for funktionen $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 \cdot y^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x$ de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2}x \cdot y^2 + \frac{1}{2} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}x^2 \cdot y + y$$

- 1) Find de partielle afledede af anden orden for funktionen f .
- 2) Find værdierne af ovennævnte partielle afledede i punktet $(x, y) = (0, 1)$.

Løsning:

$$1) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}x^2y + y \right) = x \cdot y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2}x^2y + y \right) = \frac{1}{2}x^2 + 1$$

Da de blandede anden aflede er ens, er det unødvendigt at beregne den anden kombination

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 1) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 1) = 1,$$



Analogt defineres partielle afledede af højere end anden orden, og også for disse kan differentiationernes rækkefølge normalt vælges vilkårligt, f.eks.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$$

Ved mere komplekse funktioner kan det være arbejdsbesparende at benytte et matematikprogram til beregningerne.

¹Dette gælder for alle funktioner som er dannet af de sædvanlige stamfunktioner, jævnfør evt. sætning 1.1

Eksempel 1.6. Partiel differentiation ved benyttelse af Maple og TI 89

Find $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ af funktionen $f(x, y) = x \cdot e^{2y} + \cos\left(\frac{x}{y^2 + 1}\right)$

Løsning:

Ti89: "differentialet d' " står over 8-tallet $\frac{\partial f}{\partial x} : d(x \cdot e^{(2 \cdot y)} + \cos(x/(y^2 + 1)), x)$

Maple: > diff(x*exp(2*y)+cos(x/(y^2+1)),x);

$$\text{Resultat: } e^{2y} - \frac{\sin\left(\frac{x}{y^2 + 1}\right)}{y^2 + 1}$$

Ti89: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : d(d(x \cdot e^{(2 \cdot y)} + \cos(x/(y^2 + 1)), x), x)$

Maple: > diff(x*exp(2*y)+cos(x/(y^2+1)),x,x);

$$\text{Resultat: } \frac{-\cos\left(\frac{x}{y^2 + 1}\right)}{(y^2 + 1)^2}$$

**1.2.3 Grænseværdi, kontinuitet, differentiabilitet**

De følgende definitioner på grænseværdi, kontinuitet og differentiabilitet er generaliseringer af tilsvarende begreber for funktion af 1 variabel.

Intuitivt kan man forestille sig kontinuerte funktioner som funktioner, hvis graf er "ubrudt". På figur 1.8 er vist nogle ikke-kontinuerte funktioners grafer.

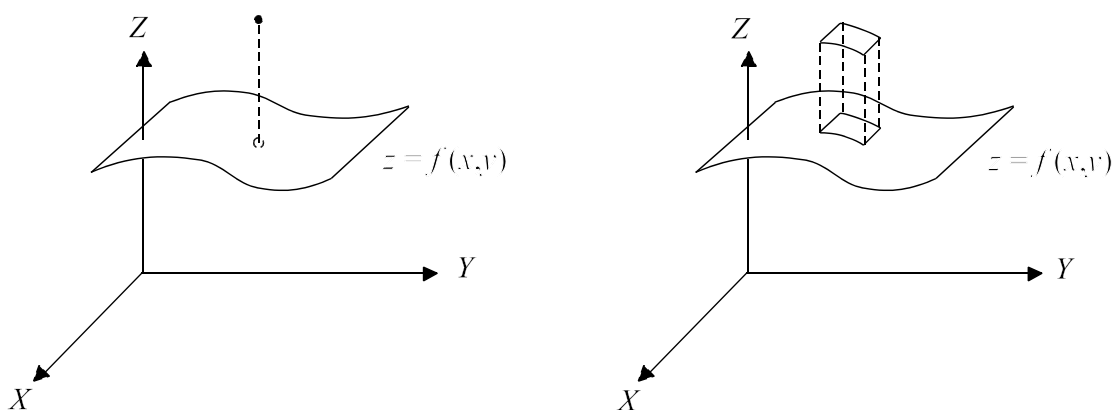


Fig. 1.8. Nogle ikke-kontinuerte funktioners grafer.

På basis af disse definitioner, kan man vise følgende sætninger, som gør, at det er nemt at afgøre om en funktion af flere variable er differentiabel.

Sætning 1.1

Har en funktion f kontinuerte partielle afledede i en åben mængde D , da er f differentiabel i D (og dermed også kontinuert).

Til at afgøre om en funktion er kontinuert gælder følgende:

Sætning 1.2.

Enhver funktion, der ved "sædvanlig regning" ($f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}, f \circ g$) kan dannes ud fra standardfunktionerne (exp, ln, potens, sin, cos, osv.), blive kontinuert i sin definitionsmængde.

Eksempel 1.7. Kontinuert funktion.

- 1) Bestem definitionsmængden for funktionen $f(x, y) = \cos(x \cdot y^3) + \frac{\ln(y-x)}{x+y}$.
- 2) Skraver definitionsmængden i et xy - koordinatsystem
- 3) Bestem de værdier af (x,y) for hvilke f er kontinuert.
- 4) Bestem de værdier af (x,y) for hvilke f er differentiabel

Løsning:

- 1) $\cos(x \cdot y^2)$ er defineret for alle værdier af x og y .

$\ln(y-x)$ er defineret for $y-x > 0 \Leftrightarrow y > x$

Nævneren $x+y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq -x$

Definitionsmængden $D = \{(x, y) | y > x \wedge y \neq -x\}$

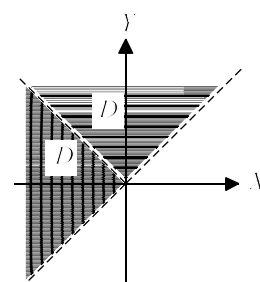


Fig. 1.9. Definitionsmængden D

- 2) På figur 1.9 er definitionsmængden D skraveret.
- 3) Da de indgående funktioner er kontinuerte hvor de er defineret, og f er fremkommet ved sædvanlig regning, er funktionen kontinuert i D (i hver af de to skraverede delmængder).
- 4) Da de partielt afledede er kontinuerte i D (ses umiddelbart), er funktionen differentiabel i D . ◆

I det følgende gives en kortfattet gennemgang af definitionerne for grænseværdi, kontinuitet og differentiabilitet **Grænseværdi.**

Grænseværdi for en funktion af to variable defineres analogt til grænseværdi for en funktion af én variabel. Lad $f(x, y)$ have definitionsmængden D . Lad endvidere a være et reelt tal, og lad (x_0, y_0) være et punkt i D . Hvis $f(x, y)$ er vilkårlig tæt¹ på a , blot (x, y) er tilstrækkelig tæt på (x_0, y_0) siger vi, at $f(x, y)$ har grænseværdien a for (x, y) gående mod (x_0, y_0) . Vi skriver da $f(x, y) \rightarrow a$ for $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ eller $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} = a$

Da definitionen af grænseværdi er analog med den der gælder for funktioner af 1 variabel gælder også de samme regneregler.

¹ Da "vilkårlig tæt" ikke er særlig præcist, er den præcise definition følgende:
For ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $\delta > 0$, således at det for alle $(x, y) \in D$ gælder, at

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - a| < \varepsilon$$

Kontinuitet

DEFINITION af kontinuitet. Lad $f(x, y)$ have definitionsmængden D og lad (x_0, y_0) være et punkt i D . Vi siger da, at f er kontinuert i (x_0, y_0) , hvis $f(x, y) \rightarrow f(x_0, y_0)$ for $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Hvis f er kontinuert i hele sin definitionsmængde, siger vi kort, at f er kontinuert.

Differentiabilitet.

En funktion f af én variabel siges som bekendt at være differentiable i x_0 hvis der findes et reelt tal α , sådan at

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow \alpha \text{ for } \Delta x \rightarrow 0$$

Dette kan skrives $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - \alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} \rightarrow 0$ for $\Delta x \rightarrow 0$

Den sidste skrivemåde vil generaliseres til funktioner af 2 variable.

Lad f være en funktion af 2 variable med definitionsmængden D , lad $(x_0, y_0) \in D$ og $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$.

Lad endvidere vektoren $\vec{\Delta x} = (\Delta x, \Delta y)$

DEFINITION af differentiabilitet.

Funktionen f siges at være **differentiable** i (x_0, y_0) hvis der findes en vektor $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ sådan at

$$\frac{f(x_0 + \Delta x_1, y_0 + \Delta y_0) - f(x_0, y_0) - \vec{a} \cdot \vec{\Delta x}}{|\vec{\Delta x}|} \rightarrow 0 \text{ for } \vec{\Delta x} \rightarrow 0$$

1.2.4 Tangentplan

Lad funktionen f være differentiable i et punkt (x_0, y_0) og lad $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Lad k_1 være skæringskurven mellem planen $y = y_0$ og grafen for f , og T_x være tangenten til k_1 med røringsspunkt i (x_0, y_0) .

Tilsvarende er k_2 er skæringskurven mellem planen $x = x_0$ og grafen for f og T_y er tangenten til k_2 .

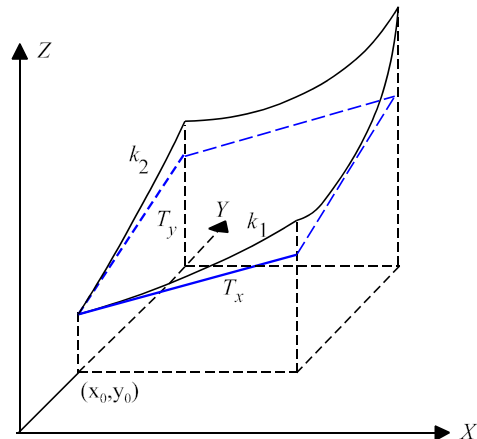


Fig. 1.10. Tangentplan i (x_0, y_0)

Den plan, som er bestemt ved tangenterne T_x og T_y kaldes **tangentplanen** for grafen for f i punktet (x_0, y_0) .

Ligningen for tangentplan
$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Bevis:

Lad for kortheds skyld $f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ og $f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

Da f'_x er hældningskoefficienten for tangenten T_x til kurven k_1 har en retningsvektor for T_x koordinaterne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x \end{pmatrix}$

Tilsvarende er $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y \end{pmatrix}$ retningsvektor for T_y .

En normalvektor til tangentplanen er følgelig $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{pmatrix}$

Planens ligning bliver følgelig $-f'_x \cdot (x - x_0) - f'_y \cdot (y - y_0) + 1 \cdot (z - z_0) = 0$ ◆

Eksempel 1.8. Tangentplan

Lad der være givet funktionen $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 \cdot y^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x$.

Find ligningen for tangentplanen til funktionen f i punktet $(0, 1)$.

Løsning:

I eksempel 1.3 fandt man for funktionen $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 \cdot y^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x$ at $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = \frac{1}{2}$ og

$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 1$. Idet $f(0, 1) = \frac{1}{2}$ fås ligningen: $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x - 0) + 1 \cdot (y - 1) \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}$ ◆

1.2.5. Differential

Differential for funktion af 1 variabel

Følger vi grafen for en differentiabel funktion $y = f(x)$ fra et punkt med abscissen x_0 til et punkt med abscissen $x_0 + \Delta x$ bliver funktionstilvæksten $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ jævnfør figur figur 1.11.

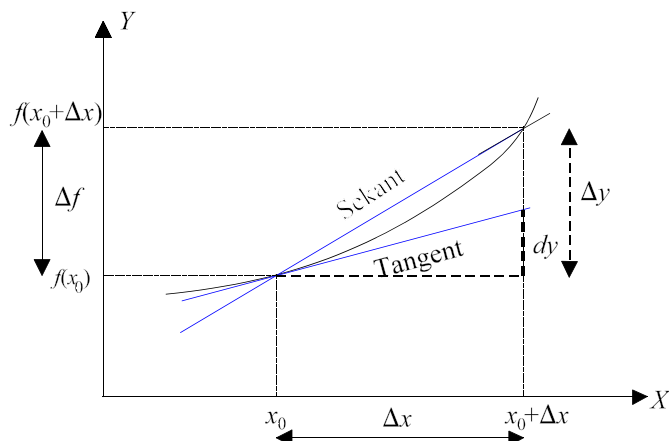


Fig. 1.11. Tilvækst i tangents retning

I stedet for at følge grafen fra x_0 til $x_0 + \Delta x$ kunne vi som en tilnærmelse følge tangenten i x_0 . I så fald bliver y -tilvæksten $f'(x_0) \cdot \Delta x$ som kaldes differentialet dy eller df .

For den afhængige variabel x , gælder $\Delta x = dx$

(betragtes den identiske funktion $f(x) = x$ får vi nemlig $df = dx = 1 \cdot \Delta x$, dvs. $dx = \Delta x$)

Vi har derfor $df = f'(x_0)dx$.

Divideres med dx , fås den kendte sammenhæng $\frac{df}{dx} = f'$.

Bemærk, at man altid gerne må dividere med dx , når blot $dx \neq 0$.

Navnet differentialkvotient betyder netop en kvotient mellem differentialer.

Eksempel 1.9. Differential

Find differentialet af funktionen $f(x) = 5x^4$

Løsning:

Differentialet $df = f'(x)dx = \underline{\underline{20x^3 dx}}$



Differential for funktion af 2 variable

Lad funktionen f være differentiabel i et punkt (x_0, y_0) og lad $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Går vi fra punktet (x_0, y_0) til punktet $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ bliver funktionstilvæksten $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ jævnfør figur 1.9.

I stedet for at følge grafen for f , kunne vi som en tilnærmelse følge tangentplanen i (x_0, y_0) d.v.s. den plan der udspændes af tangentterne AB og AD på figur 1.12.

Da tangentplanen har ligningen $z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$

bliver z -tilvæksten $z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y$

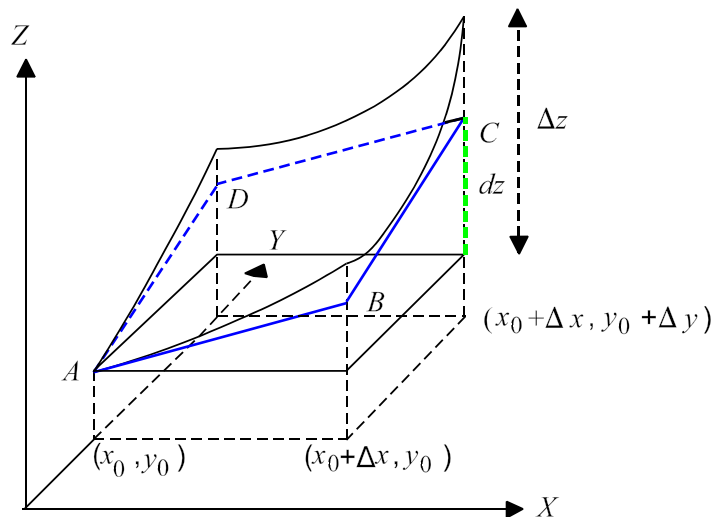


Fig. 1.12. Differential dz

Denne z -tilvækst, som fås ved at følge tangentplanen, kaldes differentialet df eller dz .

Ligesom for funktioner af 1 variabel gælder, at man kan erstatte Δx med dx og Δy med dy ,

hvorved differentialet kan skrives
$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Ved visse anvendelser kaldes differentialet for det "totale differential" af f .

Eksempel 1.10. Differential

Lad funktionen f være givet ved $z = f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 \cdot y^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x$

- 1) Beregn Δz når punktet (x, y) ændrer sig fra $(2, 1)$ til $(2.03, 0.98)$
- 2) Beregn dz når punktet (x, y) ændrer sig fra $(2, 1)$ til $(2.03, 0.98)$

Løsning:

1) $\Delta z = f(2.03, 0.98) - f(2, 1) = 2.48463 - 2.5 = \underline{\underline{-0.0153}}$

2) $dz = \left(\frac{1}{2}x_0 \cdot y_0^2 + \frac{1}{2}\right)dx + \left(\frac{1}{2}x_0^2 y_0 + y_0\right)dy$ hvor $x_0 = 2, y_0 = 1, dx = 0.03$ og $dy = -0.02$

$$dz = 1.5 dx = 1.5 \cdot 0.03 + 3 \cdot (-0.02) = \underline{\underline{-0.150}}$$



Fejlvurdering.

Som det ses af eksempel 1.10 kan man erstatte funktionstilvæksten med differentialet når blot ændringerne i x og y er små. Dette udnyttes ved fejlvurderinger. Koefficienterne $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$

kaldes så f 's følsomhed overfor fejl på henholdsvis x og y .

Ved den absolutte fejl Δx på en talværdi x forstås $\Delta x = x_0 - x$ hvor x_0 betegner den sande værdi.

Ved den maksimale absolutte fejl på x forstås $|\Delta x|$

Ved den relative fejl $rel(x)$ på x forstås $\frac{\Delta x}{x_0} \approx \frac{\Delta x}{x}$. Ved den maksimale relative fejl forstås $|rel(x)|$

Eksempel 1.11. Fejlvurdering.

Et cylindrisk hul med radius r og højde h bores i en metalblok.

Man ved, at $r = 3 \pm 0.1$ cm og $h = 6 \pm 0.2$ cm

- 1) Find den maksimale absolutte fejl på hullets volumen V
- 2) Find den maksimale relative fejl på V
- 3) Har V størst følsomhed overfor r eller overfor h ?

Løsning.

$V = \pi \cdot r^2 h$. Differentialet på V er $dV = \pi \cdot r^2 dh + 2\pi \cdot r \cdot h dr$

1) Den maksimale absolutte fejl på hullets volumen V :

$$|dV| = |\pi \cdot 3^2 dh + 2\pi \cdot 3 \cdot 6 dr| = 9\pi \cdot 0.2 + 36\pi \cdot 0.1 = \underline{\underline{16.96}}$$

2) $V = 169.646$.

Den maksimale relative fejl er $\left|\frac{dV}{V}\right| = \underline{\underline{10\%}}$

3) V har størst følsomhed over for fejl på r , da $\frac{dV}{dr} = \pi \cdot 36 < \frac{dV}{dh} = \pi \cdot 3^2$



1.2.6. Kæderegel

Ved differentiation af en sammensat funktion som eksempelvis $y = \sin(3t^2)$ benyttes differentiationsreglen:

Lad $y = f(g(t))$ og lad $x = g(t)$ Vi har da $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$.

Eksempel 1.12. differentiation af sammensat funktion

Find differentialkvotienten af $y = \sin(3t^2)$

Løsning:

Sættes $y = \sin(x)$, hvor $x = 3t^2$ fås $\frac{dy}{dt} = \cos(x) \cdot 6t = 6t \cdot \cos(3t^2)$ ◆

For en funktion af to variable gælder tilsvarende regler (kort kaldes kæderegler).

Sætning 1.2. Kæderegel 1

Lad $z = f(x, y)$ være en funktion af x og y med kontinuerte partielle afledede, og lad x og y være differentiable funktioner af t . Da gælder

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Formlen fremkommer formelt ud fra differentialet $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ ved division med dt .

Eksempel 1.13. Kæderegel 1

Lad $z = x^2 \cdot y^3$, hvor $x = \cos(t) + 1$ og $y = 2 \cdot \sin(t) + 1$

Find $\frac{dz}{dt}$ for $t = 0$

Løsning:

Vi har $\frac{dx}{dt} = -\sin t$, $\frac{dy}{dt} = 2 \cos(t)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cdot y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2$

Indsættes $t = 0$, fås $x = 2$, $y = 1$, $z = 4$, $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 2$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 8$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 12$

Ved indsættelse i kæderegel 1 fås $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 8 \cdot 0 + 12 \cdot 2 = \underline{\underline{24}}$ ◆

Eksempel 1.14 Anvendelse af kæderegel 1.

Når en cylinder varmes op vokser såvel radius r som højde h .

Til tiden $t = 0$, hvor $r = 10$ cm og $h = 100$ cm vokser r med 0.2 cm pr time og h med 0.5 cm pr time.

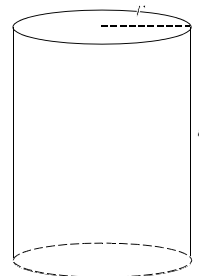
Hvor hurtigt vokser cylinderens overflade O ?

Løsning:

$$O = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2$$

$$\frac{dO}{dt} = \frac{\partial O}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial O}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$= (2\pi h + 4\pi r) \cdot 0.2 + (2\pi r) \cdot 0.5 = 58\pi = \underline{\underline{182.21 \text{ cm}^2}}$$



Sætning 1.3. Kæderegel 2

Lad $z = f(x, y)$ være en funktion af x og y med kontinuerte partielle afledede, og lad x og y være differentiable funktioner af s og t . Da gælder

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}}$$

Hvis t holdes fast, vil x og y være funktioner af s alene. Man kan så benytte kæderegel 1.

Eksempel 1.14. Kæderegel 2

Lad $z = \sin(x^2 \cdot y)$, hvor $x = s \cdot t^2$ og $y = s^2 + \frac{1}{t}$

Find $\frac{\partial z}{\partial t}$ ved anvendelse af kæderegel 2.

Løsning:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 2x \cdot y \cdot \cos(x^2 \cdot y) \cdot 2 \cdot s \cdot t + x^2 \cdot \cos(x^2 \cdot y) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) \\ &= \left(4 \cdot s^2 \cdot t^3 \left(s^2 + \frac{1}{t}\right) - \frac{s^2 \cdot t^4}{t^2}\right) \cdot \cos\left(s^2 \cdot t^4 \left(s^2 + \frac{1}{t}\right)\right) = \underline{\underline{(4s^4 t^3 + 3s^2 t^2) \cos(s^4 t^4 + s^2 t^3)}} \end{aligned}$$



1.2.7. Gradient og retningsafledede

Gradient: Ved gradienten til en funktion f forstås vektoren $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$

Symbolet ∇ kaldes "nabla"

Eksempel 1.12. Gradient

Lad funktionen f være givet ved $z = f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 \cdot y^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x$

1) Find gradienten $\nabla f(x, y)$

2) Find $\nabla f(2, -3)$

Løsning:

$$1) \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x^2y + y \end{pmatrix}$$

$$2) \nabla f(2, -3) = \begin{pmatrix} \frac{19}{2} \\ -9 \end{pmatrix}$$



Retningsafledet

Lad \vec{a} være en vilkårlig vektor, og $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ enhedsvektoren i \vec{a} 's retning.

Ved den **retningsafledede** $D_{\vec{e}}f$ i vektoren \vec{a} 's retning forstås $D_{\vec{e}}f = \nabla f \cdot \vec{e}$

Er specielt $\vec{a} = \vec{i}$ (basisvektoren i x -aksens retning) bliver den retningsafledede

$$D_{\vec{i}}f = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (\text{i overensstemmelse med at hældningskoefficienten er funktionstilvæksten svarende}$$

til en x -tilvækst på 1).

Tilsvarende bliver den retningsafledede i y -aksens retning lig med den partielle afledede efter y .

$$\text{Differentiallet } df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

Heraf ses, at den retningsafledede i en vektor \vec{a} 's retning er tilvæksten df når vi går 1 enhed i \vec{a} 's retning. Man kan også sige, at det angiver, "hvor stærkt" funktionen ændrer sig i vektoren \vec{a} 's retning.

Da et skalært produkt er størst hvis de to vektorer er ensrettede, ses, at en **funktion stiger hurtigt i gradientens retning og falder hurtigt i den modsatte retning**

Eksempel 1.13. Retningsafledede

Lad funktionen f være givet ved $z = f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 \cdot y^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x$

- 1) Find den retningsafledede af funktionen f i punktet $(2, -3)$ i retningen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
- 2) Angiv den retning hvori funktionen i punktet $(2, -3)$ vokser hurtigst, og angiv den retningsafledede i denne retning..

Løsning:

1) Ifølge eksempel 1.12 er $\nabla f(2, -3) = \begin{pmatrix} 19 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$. $D_{\vec{a}}f = \nabla f \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} 19 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{9+16}} = \underline{\underline{-1.5}}$

I punktet $(2, -3)$ falder funktionen i retningen \vec{a} med en hastighed på 1.5.

2) Funktionen vokser hurtigst i gradientens retning, dvs. i retningen $\nabla f(2, -3) = \begin{pmatrix} 19 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$.

$$D_{\nabla f}f = \nabla f \cdot \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \begin{pmatrix} 19 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\frac{361}{4} + 81}} = \underline{\underline{13.086}}$$



For en niveaukurve svarende til niveauet k er funktionen jo konstant k . Det betyder igen at funktionstilvæksten langs kurven er 0. Det betyder igen, at den retningsafledede i kurvens retning må være 0. Da et skalært produkt af 2 vektorer kun er 0 hvis de to vektorer står vinkelret på hinanden, **må gradientvektoren stå vinkelret på niveaukurven i det pågældende punkt.** (se figur 1.13)

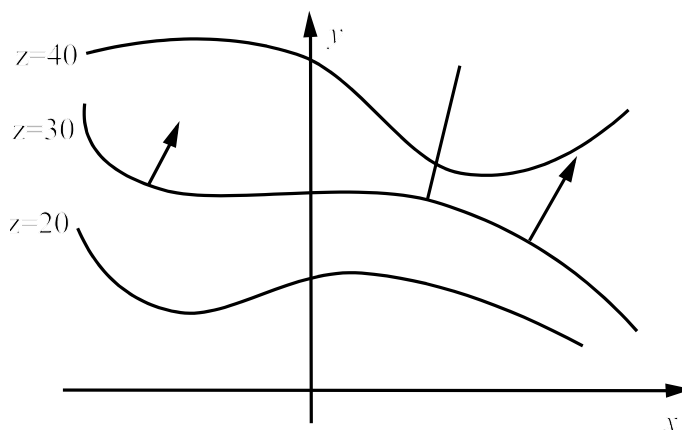


Fig 1.13. Niveaukurver med gradienter

Som eksempler på anvendelser af gradientbegrebet kan nævnes

- 1) Temperaturgradienten ∇T står vinkelret på isotermerne og peger modsat den retning varmen vil vandre (varme vandrer fra højere temperatur mod lavere).
- 2) Er den potentielle energi E_p vil $\vec{F} = \nabla(-E_p) = -\nabla(E_p)$ være den dertil svarende kraft, og stå vinkelret på ækvipotentiafladerne.

1.2.8. Taylorpolynomium

Som vi har set (eksempelvis i forbindelse med fejlvurdering), kan det være nyttigt i omegnen af et punkt (x_0, y_0) at erstatte en funktion $z = f(x, y)$ med sin "tangentplan":

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

("man siger ofte, at man har lineariseret funktionen")

Ønskes en bedre approksimation, kunne man tilnærme funktionen med et andengradspolynomium eller måske endnu bedre med et polynomium af tredje grad.

For funktioner af 1 variabel udviklede vi funktionen $y = f(x)$ i et såkaldt Taylorpolynomium: (se eventuelt "Matematiske grundbegreber kapitel ?)

$$\tilde{f}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

Dette polynomium har i punktet x_0 samme funktionsværdi og samme første, anden og tredje afledede osv. som $f(x)$

Tilsvarende kan man udvikle en funktion af 2 variable i et Taylorpolynomium.

Sætning 1.4. Taylorpolynomium af højst 2. grad.

Lad funktionen $z = f(x, y)$ have kontinuerte partielle variable af 1. og anden orden i punktet (x_0, y_0)

Ved det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt (x_0, y_0) forstås polynomiet

$$\tilde{f}(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \right] + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) (y - y_0)^2 \right]$$

Bevis:

Lad $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$

Vi danner funktionen $F(t) = f(x_0 + t \cdot h, y_0 + t \cdot k)$ hvor $0 \leq t \leq 1$.

Det ses, at $F(0) = f(x_0, y_0)$ og $F(1) = f(x, y)$

Da $F(t)$ er en funktion af 1 variabel t , som vi opskrive Taylorrækken for den i punktet 0.

$$\tilde{F}(t) = F(0) + \frac{1}{1!} F'(0) \cdot t + \frac{1}{2!} F''(0) \cdot t^2$$

Ved at benytte kæderegel 1 fås

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot \frac{d(x_0 + th)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot \frac{d(y_0 + tk)}{dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot k$$

$$F''(t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot h + \frac{\partial}{\partial y}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot k \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot h + \frac{\partial}{\partial y}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot k \right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot h^2 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot h \cdot k + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot k \cdot h + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot k^2$$

Vi har nu

$$\tilde{F}(1) = \tilde{f}(x, y) = F(0) + \frac{1}{1!} F'(0) \cdot 1 + \frac{1}{2!} F''(0) \cdot 1^2$$

$$\Leftrightarrow \tilde{f}(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot h \cdot k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot k^2$$



Eksempel 1.14. Taylorpolynomium

Lad den optimale temperatur T i en bestemt reaktor være bestemt ved $T = 3 \cdot e^{x-y+1} - \ln(x+y-2)$ hvor x og y er to koncentrationer. I en omegn omkring driftspunktet $(x_0, y_0) = (1, 2)$ ønskes funktionen tilnærmet ved et Taylorpolynomium.

- 1) Benyt et Taylorpolynomium af 1. orden til at beregne ΔT , når punktet (x, y) ændrer sig fra punktet $(1, 2)$ til punktet $(0, 8, 2.1)$
- 2) Benyt et Taylorpolynomium af 2. orden til at beregne ΔT , når punktet (x, y) ændrer sig fra punktet $(1, 2)$ til punktet $(0, 8, 2.1)$
- 3) Beregn ΔT eksakt når punktet (x, y) ændrer sig fra punktet $(1, 2)$ til punktet $(0, 8, 2.1)$.
(ved at benytte en lommeregner).

Løsning:

Først finder vi funktionsværdien og de partielle afledede i udviklingspunktet:

$T = f(x, y) = 3 \cdot e^{x-y+1} - \ln(x+y-2)$	$f(2, 1) = 3 - 0 = 3$
$\frac{\partial T}{\partial x} = 3e^{x-y+1} - \frac{1}{x+y-2}$	$\frac{\partial T}{\partial x}(1, 2) = 3 - 1 = 2$
$\frac{\partial T}{\partial y} = -3e^{x-y+1} - \frac{1}{x+y-2}$	$\frac{\partial T}{\partial y}(1, 2) = -3 - 1 = -4$
$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 3e^{x-y+1} + \frac{1}{(x+y-2)^2}$	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(1, 2) = 3 + 1 = 4$
$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 3e^{x-y+1} + \frac{1}{(x+y-2)^2}$	$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(1, 2) = 3 + 1 = 4$
$\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = -3e^{x-y+1} + \frac{1}{(x+y-2)^2}$	$\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}(1, 2) = -3 + 1 = -2$

Vi har $\Delta x = 0.8 - 1 = -0,2$, $\Delta y = 2.1 - 2 = 0.1$

$$1) \tilde{T}(x, y) = 3 + \frac{1}{1!} (2(x-1) - 4(y-2)) \quad \Delta T = 2\Delta x - 4\Delta y = 2(0 - 0.2) - 4(0.1) = \underline{\underline{-0.8}}$$

$$2) \tilde{T}(x, y) = 3 + \frac{1}{1!}(2(x-1) - 4(y-2)) + \frac{1}{2!}(4(x-1)^2 + 4(y-2)^2 + 2 \cdot (-2)(x-1)(y-2))$$

$$\Delta T = -0.8 + \frac{1}{2}(4\Delta x^2 + 4(\Delta y)^2) - 4(\Delta x)(\Delta y) = -0.8 + \frac{1}{2}(4 \cdot (-0.2)^2 + 4 \cdot (0.1)^2 - 4(-0.2)(0.1)) = \underline{\underline{-0.74}}$$

$$3) \Delta T = 3 \cdot e^{0.8-2.1+1} - \ln(0.8+2.1-2) - (3 \cdot e^{1-2+1} - \ln(1+2-2)) = 2.3278 - 3 = \underline{\underline{-0.67}}$$

$$1) \Delta z = \left(\frac{1}{2}x_0 \cdot y_0^2 + \frac{1}{2}\right)\Delta x + \left(\frac{1}{2}x_0^2 y_0 + y_0\right)\Delta y \text{ hvor } x_0 = 2, y_0 = 1, \Delta x = 0.1 \text{ og } \Delta y = -0.2$$

$$\Delta z = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2}\right)0.1 + \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 1\right)(-0.2) = \underline{\underline{0.75}}$$

$$2) \Delta z = 0.75 + \frac{1}{2!} \left(\left(\frac{1}{2} \cdot y_0^2\right)\Delta x^2 + 2(x_0 y_0)\Delta x \Delta y + \left(\frac{1}{2}x_0^2 + 1\right)\Delta y^2 \right)$$

$$= 0.75 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot 0.1^2 + 2 \cdot 2 \cdot 0.1 \cdot (-0.2) + \left(\frac{1}{2} \cdot 4 + 1\right)(-0.2)^2 \right) = \underline{\underline{0.7725}}$$

$$3) \Delta z = 2.0756 - 2.5 = \underline{\underline{-0.4244}}$$

1.3.Funktion af mere end 2 variable

De definitioner og begreber som er gælder for funktioner af 2 variable kan umiddelbart generaliseres til funktioner af 3 og flere variable.

1.3.1 Grafisk fremstilling

Grafen for en funktion af 3 variable $f(x,y,z)$ kan naturligvis ikke tegnes i et 4-dimensionalt rum. Derimod er det muligt at tegne en niveauflade hvor $f(x,y,z)$ har en konstant værdi k . Eksempelvis er en såkaldt orbital eller bølgefunktion $\Psi(x,y,z)$ for et atom anskueliggjort ved en niveauflade for $|\Psi|$ på figur 1.4. (Orbitaler spiller en stor rolle for forståelsen af atomers og molekylers egenskaber).

Et andet eksempel er nogle kugleformede niveauflader for tyngdepotentialet $\frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ omkring jorden vist på figur 1.5.

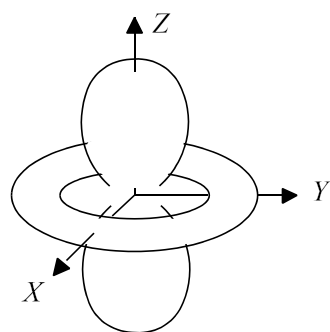


Fig. 1.4. Niveauflade for en atomorbital $\Psi(x,y,z)$

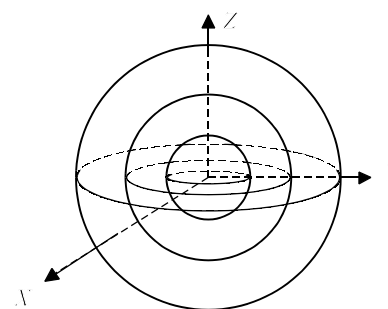


Fig. 1.5. Niveauflader for tyngdepotentialet omkring jorden

1.3.2 Differential, kæderegel, gradient, Taylorpolynomium

Begreberne kan umiddelbart generaliseres fra 2 til flere variable.

Lad $u = f(x, y, z)$

Partiel differentiation forløber efter ganske de samme retningslinier som for 2 variable. For de blandede partielle afledede kan differentiationernes rækkefølge vælges vilkårligt.

Differential $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$

Kæderegel 1: Lad $x(t), y(t)$ og $z(t)$ være differentiable funktioner af t

Da gælder: $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$

Kæderegel 2: Lad $x(s,t), y(s,t)$ og $z(s,t)$ være differentiable funktioner af s og t

Da gælder: $\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$

$$\text{Gradient: } \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Den retningsafledede $D_{\vec{e}} f$ i vektoren \vec{a} 's retning er bestemt ved $D_{\vec{e}} f = \nabla f \cdot \vec{e}$

hvor $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ er enhedsvektoren i \vec{a} 's retning.

Gradienten og den retningsafledes geometriske betydning er den samme som for 2 variable.

Taylorpolynomium

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & f(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial f}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} (y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z} (z - z_0) \right] \\ & + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (y - y_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} (z - z_0)^2 \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x - x_0)(y - y_0) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} (x - x_0)(z - z_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} (y - y_0)(z - z_0) \right] \end{aligned}$$

Eksempel 1.15. Funktion af 3 variable

Lad funktionen f være bestemt ved $f(x, y, z) = x^2 \cdot e^{3y-z}$

1) Find differentialet for funktionen f i punktet $(x, y, z) = (1, 1, 3)$

2) Find den retningsafledede $D_{\vec{e}} f$ i vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ i punktet $(1, 1, 3)$

3) Find det 2' Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt $(1, 1, 3)$

Løsning:

$$1) \frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{3y-z}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 3) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2e^{3y-z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 3) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -x^2e^{3y-z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 3) = -1$$

$$\underline{\underline{df = 2dx + 3dy - dz}}$$

$$2) \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \quad D_{\vec{e}} f = \nabla f \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{1}{3} = \underline{\underline{3}}$$

$$3) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{3y-z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1, 3) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 9x^2e^{3y-z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1, 3) = 9$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = x^2e^{3y-z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1, 1, 3) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xe^{3y-z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1, 3) = 6$$

Funktioner af to eller flere variable

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -2xe^{3y-z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1,1,3) = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -3x^2e^{3y-z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1,1,3) = -3$$

$$\underline{\underline{\tilde{f}(x, y, z) = 1 + 2(x-1) + 3(y-1) - (z-3)}}$$

$$\underline{\underline{+ \frac{1}{2}(2(x-1)^2 + 9(y-1)^2 + (z-3)^2 + 6(x-1)(y-1) - 2(x-1)(z-3) - 3(y-1)(z-3))}}$$

Opgaver

Opgave 1.1

Lad f være en funktion givet ved $f(x, y) = x^2 y$

- 1) Skitsér i et xy - koordinatsystem f 's niveaukurver svarende til niveauerne $0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$ og ± 2 .
- 2) Afgør ud fra niveaukurverne om funktionen har noget lokalt minimum? - lokalt maksimum? - saddepunkt?

Opgave 1.2

Man er interesseret i grafisk fremstilling af funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Der ønskes hovedsageligt betragtet punkter, hvor $f(x, y) \leq 3$ og der lægges ikke vægt på nøjagtighed, men på principielle træk. Såvel positive som negative x - og y -værdier betragtes.

- 1) Skitsér i et xy - koordinatsystem f 's niveaukurver svarende til niveauerne $0, 1, 2$ og 3 .
- 2) Har funktionen noget lokalt minimum? - lokalt maksimum? - saddepunkt?
- 3) Skitsér i et yz - koordinatsystem skæringskurven mellem f 's graf og planen $x = 0$.
- 4) Lav en skitse, der giver et indtryk af grafens 3-dimensionale udseende.

Opgave 1.3

Lad f være en reel funktion af to variable givet ved $f(x, y) = \frac{4}{3} \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

- 1) Angiv f 's definitionsmængde (skitsér den i xy - planen).
- 2) Skitsér i et xy - koordinatsystem f 's niveaukurver svarende til niveauerne $0, 1, 2, 3$ og 4 .
- 3) Skitsér i et xz - koordinatsystem skæringskurven mellem f 's graf og planen $y = 0$.
- 4) Skitsér grafen for f i et xyz - koordinatsystem, således at man får et indtryk af grafens 3-dimensionale udseende.

Opgave 1.4

Man er interesseret i grafisk fremstilling af funktionen $f(x, y) = y^2 - x^2$.

Der ønskes hovedsageligt betragtet punkter, hvor $-2 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 2 \wedge -2 \leq f(x, y) \leq 2$, og der lægges ikke vægt på nøjagtighed, men på principielle træk.

- 1) Skitsér i et xy - koordinatsystem f 's niveaukurver svarende til niveauerne $-2, -1, 0, 1$ og 2 .
- 2) Har funktionen noget lokalt maksimum? - lokalt minimum? - saddepunkt?
- 3) Lav en skitse, der giver et indtryk af grafens 3 - dimensionale udseende.

Opgave 1.5

Man er interesseret i grafisk fremstilling af funktionen $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$

- 1) Skitsér i et xy - koordinatsystem f 's niveaukurver svarende til niveauerne $\frac{1}{2}, 1, 2, 4$ og 16 .
- 2) Skitsér i et xz - koordinatsystem skæringskurven mellem f 's graf og planen $y = 0$.
- 3) Skitsér grafen for f i et xyz - koordinatsystem, således at man får et indtryk af grafens 3-dimensionale udseende.
- 4) Har funktionen noget lokalt maksimum? - lokalt minimum? - saddepunkt?

Opgave 1.6

Find de partielle afledede af første og anden orden for følgende funktioner

- 1) $f(x, y) = x^3 y^2 + 2x^2 y + 4$
- 2) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} \quad (x > y)$
- 3) $f(x, y) = \sqrt{e^{3x-y}}$
- 4) $f(x, y) = \ln(\sqrt{1+x^2 y^4})$

Opgave 1.7

- 1) Van der Waal's tilstandsligning for n mol gas er $P = \frac{nRT}{V-nb} - a \frac{n^2}{V^2}$, hvor R , a og b er

konstanter. Find udtryk for $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T,n}$, $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,n}$ og $\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_{V,T}$

- 2) Redlich-Kwong-tilstandsligningen for n mol gas er $P = \frac{nRT}{V-nb} - \frac{an^2}{V(V+nb)\sqrt{T}}$, hvor R , a og

b er konstanter. Find udtryk for $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T,n}$, $\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{P,V}$ og $\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,n}$

hvor R , a og b er konstanter.

Opgave 1.8

Find ligningen for tangentplanen for

- 1) $f(x, y) = x^2 y - xy^2$ i punktet $(x, y) = (-2, 3)$
- 2) $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$ i punktet $(x, y) = (2, -1)$

Opgave 1.9

Find differentialet af funktionen

- 1) $f(x, y) = 4x^4 y + y^2$
- 2) $f(x, y) = 2^{x+y} + 4$ i punktet $(1, 0)$
- 3) $f(x, y) = \frac{x}{y^2} - \ln\left(\frac{x}{y^2}\right) + e^{(x-19)(y+2)}$ i punktet $(1, -2)$
- 4) $f(x, y) = 2xe^{(xy-2)}$ i punktet $(1, 2)$

Opgave 1.10

For 1 mol af en ideal gas gælder tilstandsligningen $PV = RT$, hvor P er trykket i N/m^2 , V er volumenet i m^3 , T er temperaturen i grader K, og $R=8.3143 \text{ J/(K}\cdot\text{mol)}$ er en konstant. Af tilstandsligningen kan P beregnes, når T og V er målt.

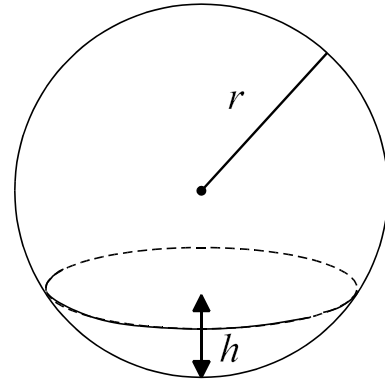
- 1) Angiv ved hjælp af et differential et tilnærmet udtryk for, hvor meget den beregnede P -værdi bliver for stor, hvis $T=500 \text{ K}$ og $V=0.15 \text{ m}^3$ er målt henholdsvis ΔT og ΔV for store.
- 2) Beregn den maksimale absolutte og relative fejl på P , når $T = 500 \pm 10$ og $V = 0.15 \pm 0.005$

Opgave 1.11

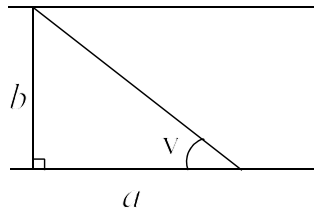
En kugleformet tank har radius r . Med en pejlestok måler man væskehøjden h for at kunne beregne

væskerumfanget $V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h)$

Angiv ved hjælp af et differential et tilnærmet udtryk for, hvor meget V bliver for stor, hvis $h = 0.1$ m og $r = 1$ m er målt henholdsvis Δh og Δr for store.

**Opgave 1.12**

Bredden b af en kløft beregnes, ved at man afsætter stykket a , og måler vinklen v , se figuren.



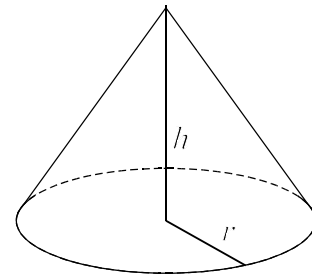
Angiv ved hjælp af et differential et tilnærmet udtryk for, hvor meget b bliver for stor, hvis $a = 10$ m og $v = 30^\circ$ er målt henholdsvis Δa og Δv for store.

Opgave 1.13

En bunke har form som en kegle med højde h og grundfladeradius r . Man måler h og r , for at

kunne beregne rumfanget $V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 h$

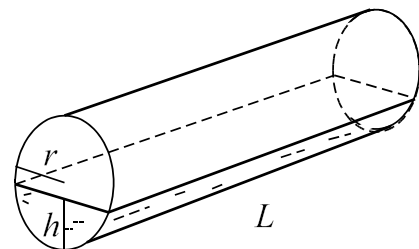
- 1) Angiv ved hjælp af et differential et tilnærmet udtryk for, hvor meget V bliver for stor, hvis $h = 10$ m og $r = 10$ m er målt henholdsvis Δh og Δr for store.
- 2) Lad $\Delta h = 0.1$ m og $\Delta r = 0.2$ m. Find den relative fejl på V .

**Opgave 1.14**

En tank har form som en cirkulær cylinder med radius r og længde L . Idet cylinderaksen er vandret, måler man væskehøjden h med en pejlestok for at kunne beregne rumfanget

$$V = Lr^2 \text{ARC} \cos\left(\frac{r-h}{r}\right) - L(r-h)\sqrt{2rh-h^2}$$

Angiv ved hjælp af et differential et tilnærmet udtryk for, hvor meget V bliver for stor, hvis $r = 2$ m, $L = 10$ m og $h = 1$ m er målt henholdsvis Δr , ΔL og Δh for store.



Opgave 1.15

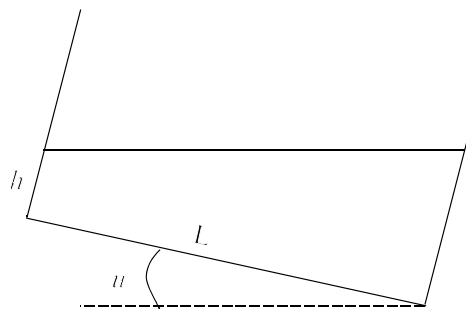
En olietank er kasseformet med længden $L = 3$ m, bredden $B = 1$ m og højden $H = 1$ m.

Tanken er nedgravet vandret, men ejeren får mistanke om, at den hælder en vinkel u .

For at finde u , hælder ejeren $V = 1 \text{ m}^3$ olie i den tomme tank, og måler oliestandens højde h i den højeste side til 0.20 m. (se figuren)

Vinklen u kan findes af formlen

$$u = \text{Arctan}\left(\frac{2V}{B \cdot L^2} - \frac{2h}{L}\right)$$



1) Find vinklen u .

2) Det anslås, at $V = 1 \pm 0.02$ og $h = 0.2 \pm 0.01$.

Find den maksimale absolutte fejl på u (alle resultater med 3 betydende cifre)

Opgave 1.16

Vi betragter en boble, der sidder på en plan flade. Boblens krumme overflade har form af en kuglekalot med arealet $A = \pi(r^2 + h^2)$,

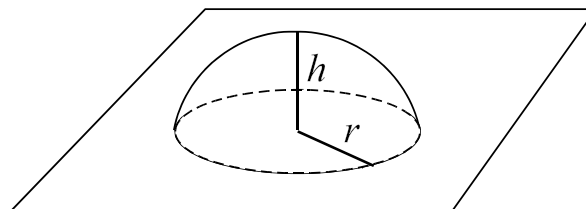
se figuren.

1) Idet både r og h er funktioner af tiden t , skal

man finde $\frac{dA}{dt}$ udtrykt ved $r, h, \frac{dr}{dt}$ og $\frac{dh}{dt}$

2) Find $\frac{dA}{dt}$ for $t = 1$, idet $r(1) = 2$, $h(1) = 5$,

$$\frac{dr}{dt}(1) = 3 \text{ og } \frac{dh}{dt}(1) = 1$$



Opgave 1.17

1) Lad $z = (x^2 + xy + y^2) \cdot 2^{y^3 + x - y}$, hvor $x = 2t^2 - 2t$, $y = t^3 - t^2 + 2t - 1$. Find $\frac{dz}{dt}$ for $t = 1$.

2) Lad $z = e^x \sin y + e^y \sin x$, hvor $x = 3t$, $y = 2t$.

Find $\frac{dz}{dt}$ udtrykt ved t .

3) Lad $z = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$, hvor $x = \tan(t)$, $y = \frac{1}{\cos^2 t}$.

Find $\frac{dz}{dt}$ for $t = \frac{\pi}{4}$.

Opgave 1.18

1) Lad $z = x^2 - y \cdot \ln x$ hvor $x = s \cdot \sin t, y = t \sin s$, Find $\frac{\partial z}{\partial t}$ udtrykt ved s og t

2) Lad $z = x^2 y$ hvor $x = 2t + s, y = 1 - st^2$, Find $\frac{\partial z}{\partial t}$ for $s = 1$ og $t = -2$

Opgave 1.19

Lad funktionen f være givet ved $f(x, y) = \text{Arcsin}(xy) + y^2 + y \cdot \sin x$

Lad endvidere g være en differentiabel funktion af én variabel med $g(0) = 1$ og $g'(0) = 7$.

Find ved hjælp af kædereglen for funktioner af flere variable $h'(0)$, når h er givet ved forskriften $h(t) = f(3t, g(t))$.

Opgave 1.20

Find i punktet P den retningsafledede af funktionen f i retningen \vec{a} hvis

1) $f(x, y) = x^2 y$, $P = (1, 2)$ og $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

2) $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2 y$, $P = (-1, 2)$ og $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

3) $f(x, y) = e^x \sin y$, $P = \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ og $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Opgave 1.21

Find i punktet P en enhedsvektor \vec{e} i den retning i hvilken funktionen f vokser hurtigst. idet

1) $f(x, y) = x^3 - y^5$, $P = (2, -1)$

2) $f(x, y) = \sin(3x - y)$, $P = \left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$

Opgave 1.22

Find i hvert af de følgende tilfælde det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt i punktet P .

1) $f(x, y) = x^2 y^3$, $P = (2, 1)$

2) $f(x, y) = x^2 y - xy^2$, $P = (1, 1)$

3) $f(x, y) = \frac{1}{1+x+y}$, $P = (0, 0)$

4) $f(x, y) = \cos(x + 2y - 4)$, $P = (2, 1)$

5) $f(x, y) = \ln(x \cdot y) + \frac{x}{y}$, $P = (1, 1)$

6) $f(x, y) = e^{x-2y} - xy^2 + \sqrt{1+x+y}$, $P = (2, 1)$

Opgave 1.23

Find de partielle afledede af første og anden orden for følgende funktioner

1) $f(x, y, z) = x^3 y^2 z^2 + xyz^3$

2) $f(x, y, z) = y \cdot \sin(xz) + 2^{xyz}$

3) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^4 \cdot x_2^3 \cdot x_3^2 \cdot x_4 + 17x_1$

Opgave 1.24

Find differentialet af funktionen

1) $f(x, y, z) = (\ln)^{(yz)}$ i punktet $(e, 1, 0)$

2) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot x_2^4 \cdot x_3^2 \cdot x_4^3 + 5$

Opgave 1.25

Lad $u = 2x^3y^2z + xyz^4$ hvor $x = 2t - 1$, $y = -3t + 2$ og $z = t^2 - 2t + 1$. Find $\frac{du}{dt}$ for $t = 1$.

Opgave 1.26

Lad $u = x^2yz^2 + 4xz^2 + 2xy^2 + 4y^2z$, hvor

$$x = t_1^2 \cdot t_3 \cdot t_4^2 + 3t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 + t_1 - 2t_2 + t_4$$

$$y = 3t_1^4 + t_1 \cdot t_2^2 + t_3 \cdot t_4 + 4t_2 + t_4 - 5$$

$$z = t_3 \cdot t_4^4 + t_2^2 \cdot t_3^2 + t_2 + t_3 + 2t_4 - 1$$

Find $\frac{\partial u}{\partial t_2}$ for $(t_1, t_2, t_3, t_4) = (-1, 1, -1, 1)$

Opgave 1.27

Det årlige overskud fra en virksomhed er beregnet til

$$u = [(1 + 0.2x)z + (3.1 + z)y + (2.1 - y)x - 9.0] \cdot 10^6 \text{ hvor}$$

$$x = 0.7 + 2s - 0.3t, \quad y = 0.6 + 0.4s - t, \quad z = -0.3 + 0.5s - 0.8t$$

Her betegner s og t dimensionsløse variable for henholdsvis markedsprisen på produktet og arbejdslønnen ved fabrikationen.

Idet $(s, t) = (1, 1)$, skal man beregne overskuddets følsomhed $\frac{\partial u}{\partial t}$ over for ændringer i arbejdslønnen.

Opgave 1.28

Find i punktet P den retningsafledede af funktionen f i retningen \vec{a} hvis

1) $f(x, y, z) = xy + z^2$, $P = (1, 1, 1)$ og $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) $f(x, y, z) = x^3y - y^2z^2$, $P = (-2, 1, 3)$ og $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

3) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $P = (1, -1, 2)$ og $\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Opgave 1.29

Temperaturen i en kugle med centrum i $(0,0,0)$ er givet ved $T(x, y, z) = \frac{200}{5 + x^2 + y^2 + z^2}$

- 1) Hvor er temperaturen højest i kuglen?
- 2) Find en vektor \vec{a} som peger i retning af den største stigning af temperaturen i punktet $(1, -1, 1)$
- 3) Peger \vec{a} mod kuglens centrum?

Opgave 1.30

Find i hvert af følgende tilfælde det 2. Taylorpolynomium i punktet P .

1) $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^3, \quad P = (2, 1, -1)$

2) $f(x, y, z) = x^2 yz - xyz^2, \quad P = (1, 1, 1)$

3) $f(x, y, z) = \frac{1}{1 + x + y + z}, \quad P = (0, 0, 0)$

4) $f(x, y, z) = e^{x+y-z-1}, \quad P = (1, 1, 1)$

2 OPTIMERING

2.1 Indledning

I det følgende betegner f en reel funktion af n variable. Ved optimering søges den "bedst"mulige løsning i en given situation. Først må man udtrykke, hvad der menes med "bedst", dvs. opstille en funktion f af én eller flere variable x_1, x_2, \dots, x_n , sådan at f 's største eller mindste værdi i definitionsmængden S angiver den bedste løsning på et problem.

Eksempel 2.1 Optimal produktionsplan

Skal man f.eks. finde en produktionsplan for en fabrik, således at man får den største fortjeneste f , må man først udtrykke, hvordan fortjenesten afhænger af de variable x_1, x_2, \dots, x_n i produktionsplanen.

Dernæst må man udtrykke de begrænsninger i produktionsforholdene, som skal overholdes (begrænset arbejdsstyrke, begrænset kapacitet af produktionsapparatet, visse kvalitetskrav til produktet osv.). Disse begrænsninger giver visse ligninger eller uligheder, som de variable x_1, x_2, \dots, x_n skal opfylde, og derved er definitionsmængden S fastlagt.

2.2. Generelle begreber.

Lad f være en funktion med definitionsmængde S og lad P_0 være et punkt i S .

Globalt minimum. Hvis $f(P_0) \leq f(P)$ for alle punkter P i S , så kaldes $f(P_0)$ for f 's **globale minimum** eller **mindsteværdi**. og P_0 kaldes et **globalt minimumspunkt** for f .

Analogt defineres globalt maksimum (eller størsteværdi) og globalt maksimumspunkt. Som en fællesbetegnelse for globalt minimum og globalt maksimum anvendes udtrykket **globalt ekstremum**. Er misforståelser udelukket, stryges ofte ordet globalt

Lokalt minimum Lad P_0 være et indre punkt i S og $M \subset S$ være en omegn af P_0 . Hvis $f(P_0) \leq f(P)$ for alle punkter P i M , så kaldes denne værdi for f 's **lokale minimum**

Da maksimumspunkter for f er minimumspunkter for $-f$ kan minimums- og maksimumsproblemer behandles helt parallelt. Funktionen f kaldes for **objektfunktionen**.

Nedenstående figur leder os ind på, at det som et led i ekstremumsbestemmelser kan være nyttigt

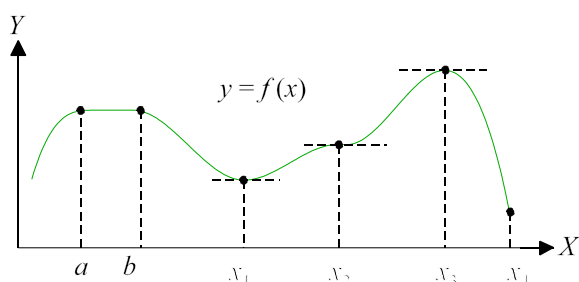


Fig. 2.1. Stationære punkter

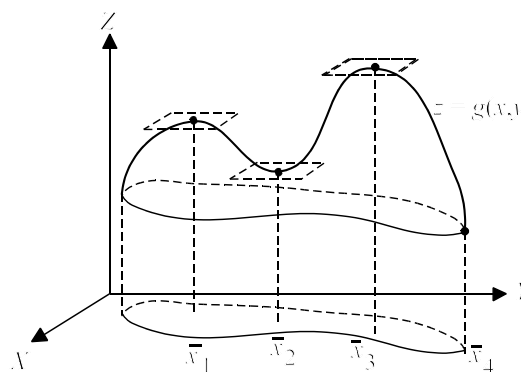


Fig 2.2. Stationære punkter

at se på punkter, hvor grafen har "vandret tangent(plan)" - såkaldte stationære punkter. På figurerne har f (og g) vandret tangent (tangentplan) i x_1 (\bar{x}_1), x_2 (\bar{x}_2) og x_3 (\bar{x}_3), globalt maksimum i x_3 (\bar{x}_3) og globalt minimum i x_4 (\bar{x}_4)
 Endvidere er grafen for f vandret mellem a og b.
 For differentiable funktioner, hvor der er vandret tangent /tangentplan er $f'(x) = 0 / \nabla g(\bar{x}) = 0$
 På figur 2.1 er således $f'(x_1) = 0$ og på figur 2.2 er $\nabla g(\bar{x}_1) = 0$
 Sådanne punkter kaldes stationære punkter

Definition (stationært punkt).

Lad f være kontinuert i S . Et indre punkt \bar{x}_0 i S kaldes et stationært punkt for f , hvis $\nabla f(\bar{x}_0)$ eksisterer og $\nabla f(\bar{x}_0) = 0$,

$$\text{dvs. } \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_0) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}_0) = 0,$$

Eksempel 2.1. Stationære punkter.

En funktion f er givet ved $f(x, y) = x^2y - x^3 - 2x^2 + 3y^2 + 8y - 2$

Find de stationære punkter for f .

Løsning:

De stationære punkter for f findes af ligningssystemet

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - 3x^2 - 4x = 0 & (1) \\ x^2 + 6y + 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

I ligning (1) kan x sættes udenfor en parentes.

$$\text{Vi får: } x \cdot (2y - 3x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2y - 3x - 4 = 0$$

Tilfælde 1: Indsættes $x = 0$ i ligning (2), fås $0 + 6y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}$.

$$\text{Stationært punkt: } \underline{\underline{(x, y) = \left(0, -\frac{4}{3}\right)}}$$

Tilfælde 2: Ligningen $2y - 3x - 4 = 0$ løses med hensyn til y og indsættes i ligning (2).

$$y = \frac{3x - 4}{2} \text{ indsættes:}$$

$$x^2 + 6\left(\frac{3x - 4}{2}\right) + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 9x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 20}}{2} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = -5$$

$$\text{Stationære punkter } \underline{\underline{(x, y) = (-4, -4) \vee (x, y) = \left(-5, -\frac{11}{2}\right)}}$$

TI89:

Funktionen defineres $x^2*y - x^3 - 2*x^2 + 3*y^2 + 8*y - 2$ STO $f(x,y)$ ENTER

F2: Algebra, solve($d(f(x,y),x)=0$ and $d(f(x,y),y)=0$, $\{x,y\}$)

Resultat: $x=-4$ and $y=-11/2$ or $x=-4$ and $y = -4$ or $x=0$ and $y=-4/3$

Bemærk: d findes over 8 tast og "and" ved Math, test

2. Optimering

Maple: $f := x^2*y - x^3 - 2*x^2 + 3*y^2 + 8*y - 2 :$

$> \text{solve}(\{ \text{diff}(f,x)=0, \text{diff}(f,y)=0 \}) ;$

Resultat: $\left\{ x = 0, y = \frac{-4}{3} \right\}, \left\{ x = -5, y = \frac{-11}{2} \right\}, \{ x = -4, y = -4 \}$



Følgende sætning som er umiddelbart indlysende, anføres uden bevis.

Sætning 2.1.(Eksistens af globalt ekstremum).

Hvis f være kontinuert i en begrænset lukket mængde har f både et globalt maksimum og et globalt minimum.

Forudsat der findes et globalt ekstremum, så angiver den følgende sætning hvor man skal lede efter det.

Sætning 2.2 (de mulige globale ekstrema). Lad f være kontinuert i S . Globale ekstremumspunkter for f skal søges blandt

- stationære punkter for f ,
- randpunkter for S og
- punkter, hvor ∇f ikke eksisterer.

Bevis: Lad \bar{x}_0 være et globalt ekstremumspunkt for f .

Hvis det globale ekstremumspunkt ikke findes på randen eller i et punkt hvor ∇f ikke eksisterer, så må det findes i et indre punkt \bar{x}_0 af S hvor ∇f eksisterer.

Lad os for simpelhedens skyld først antage, at f er en funktion af 2 variable, og lad $\bar{x}_0 = (x_0, y_0)$

Da f har et ekstremum i (x_0, y_0) vil funktionen $g(x) = f(x, y_0)$ have et ekstremum i x_0 . Da endvidere f er differentiabel i (x_0, y_0) må g være differentiabel i x_0 . For en funktion af 1 variabel ved vi, at i et indre

ekstremumspunkt vil $g'(x_0) = 0$. Heraf følger, at $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = 0$

Tilsvarende ses, at $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Vi har følgelig, at (x_0, y_0) er et stationært punkt.

Beviset kan let generaliseres til funktioner af mere end 2 variable.



2.3 Optimering for funktioner af 2 variable

2.3.1. Globale ekstrema i lukket begrænset mængde

Som angivet i sætning 2.1 vil en kontinuert funktion i en lukket begrænset mængde altid have globale ekstremumspunkter.

Af sætning 2.2 fremgår hvordan man i princippet skal finde disse.

I det følgende eksempel vises, hvorledes dette kan gøres hvis det er muligt at reducere problemet til en funktion af 2 variable

Eksempel 2.2. Optimering i lukket begrænset mængde.

En retvinklet kasse uden låg skal have et rumfang på 32m^3 . Kassen skal konstrueres således, at dens overflade bliver mindst (mindst materialeforbrug), idet dog ingen af kassens kanter må overstige 10m. Find kassens optimale dimensioner.

Løsning:**1) Optimeringsproblemet opstilles.**

Lad længde, bredde og højde af kassen være x, y og z . Vi har da

Find det globale minimum (mindsteværdi) for funktionen $g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy$

i mængden S givet ved begrænsningerne

$$xyz = 32, \quad x \leq 10, \quad y \leq 10, \quad z \leq 10, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

2) Problemet reduceres.

Begrænsningsligningen benyttes til at reducere antallet af variable.

$xyz = 32 \Leftrightarrow z = \frac{32}{xy}$. Ved indsættelse af $z = \frac{32}{xy}$ i g og de øvrige begrænsninger fås

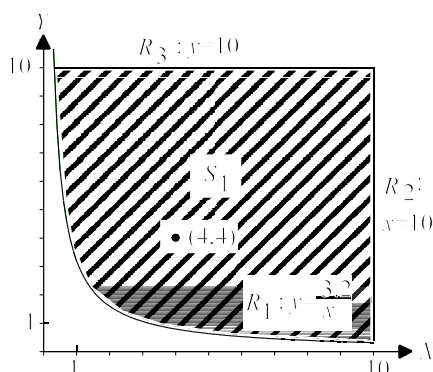
$$2x \frac{32}{xy} + 2y \frac{32}{xy} + xy = \frac{64}{y} + \frac{64}{x} + xy,$$

$$x \leq 10, \quad y \leq 10, \quad \frac{32}{xy} \leq 10 \Leftrightarrow y \geq \frac{3.2}{x}, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad \frac{32}{xy} > 0.$$

Problemet kan derfor nu reduceres til

Find det globale minimum (mindsteværdi) for funktionen $f(x, y) = \frac{64}{x} + \frac{64}{y} + xy$ i

mængden S_1 givet ved begrænsningerne $0 < x \leq 10, \frac{3.2}{x} \leq y \leq 10$ (se figuren)

**3) De mulige globale ekstremumpunkter bestemmes.**

Som det fremgår af ovenstående figur er mængden S_1 lukket og begrænset.

Ifølge sætning 2.2 er der nu 3 muligheder:

3a) Stationære punkter:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow -\frac{64}{x^2} + y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{64}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow -\frac{64}{y^2} + x = 0 \quad (1)$$

2. Optimering

Indsættes $y = \frac{64}{x^2}$ i ligning (1) fås

$$-\frac{64}{\left(\frac{64}{x^2}\right)^2} + x = 0 \Leftrightarrow -\frac{x^4}{64} + x = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 64x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

Da $x > 0$ er kun $x = 4$ en løsning. Ved indsættelse af $x = 4$ i $y = \frac{64}{x^2}$ fås $y = 4$

Af figuren ses, at det fundne punkt $(x,y) = (4,4)$ er et indre punkt i S_1

Samlet har vi altså fundet 1 stationært punkt $(4,4)$.

3b) **Randpunkter:** Randen af S_1 opdeles i 3 dele R_1 , R_2 , og R_3 (se figuren)

Randdel R_1 har ligningen $y = \frac{3.2}{x}$, R_2 har ligningen $x = 10$ og R_3 har ligningen $y = 10$

De 3 randele skærer hinanden i $A = (10,0.32)$, $B = (0.32,10)$ og $C = (10,10)$.

Disse 3 punkter kunne også være ekstremumspunkter.

Vi undersøger nu hver af de 3 rande for punkter med vandret tangent.

R_1 : Indsættes $y = \frac{3.2}{x}$ i $f(x,y)$ får vi en funktion $f_1(x)$ af 1 variabel:

$$f_1(x) = \frac{64}{\left(\frac{3.2}{x}\right)} + \frac{64}{x} + 3.2 = 20x + \frac{64}{x} + 3.2 \text{ hvor } x \in [0.32;10] \text{ (ses af figuren)}$$

$$f_1'(x) = 20 - \frac{64}{x^2}$$

$$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow 20 - \frac{64}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 20x^2 = 64 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{16}{5}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{4}{\sqrt{5}}$$

Punkter $(x,y) = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ kunne være et ekstremumspunkt.

Tilfældet $x = -\frac{4}{\sqrt{5}}$ falder udenfor intervallet $[0.32; 10]$

R_2 : Indsættes $x = 10$ i $f(x,y)$ får vi en funktion $f_2(y)$ af 1 variabel:

$$f_2(y) = \frac{64}{y} + \frac{64}{10} + 10y, \text{ hvor } y \in [3.2;10] \text{ (ses af figuren)}$$

$$f_2'(y) = -\frac{64}{y^2} + 10. f_2'(y) = 0 \Leftrightarrow -\frac{64}{y^2} + 10 = 0 \Leftrightarrow 10y^2 = 64 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{6.4}$$

Punktet $(x,y) = (10, \sqrt{6.4})$ kunne være et ekstremumspunkt.

Tilfældet $y = -\sqrt{6.4}$ falder udenfor intervallet $[0.32; 10]$

R_3 : Indsættes $y = 10$ i $f(x,y)$ får vi en funktion $f_3(x)$ af 1 variabel:

$$f_3(x) = \frac{64}{10} + \frac{64}{y} + 10x. \text{ Det ses, at det er den samme som } f_2(x), \text{ dvs vi får}$$

Punktet $(x,y) = (\sqrt{6.4}, 10)$ kunne være et ekstremumspunkt.

3c) **Punkter hvor ∇f ikke eksisterer:** ingen.

4) Vi sammenfatter nu de fundne punkter i følgende skema

(x,y)	-4,4	$\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$	$(10, \sqrt{6.4})$	$(10, \sqrt{6.4})$	$(10, 0.32)$	-32,1	-10,1
$f(x,y)$	48	748	570	570	2096	2096	112,8

Konklusion:

Da 48 er mindst, har $f(x,y)$ globalt minimum 48, som indtræffer i minimumspunktet (4,4).

Den optimale kasses overflade er altså 48 m^2 , som indtræffer for længden $x = 4 \text{ m}$, bredden

$y = 4 \text{ m}$ og højden $z = 2 \text{ m}$ (idet $z = \frac{32}{xy}$)



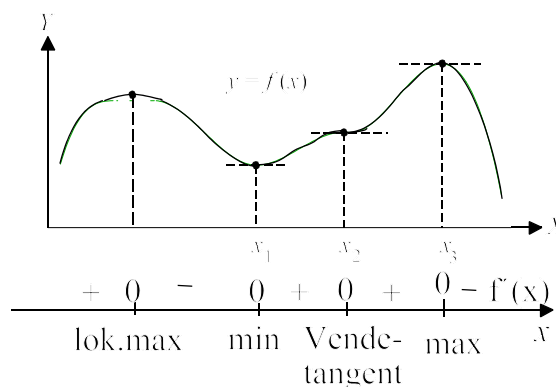
2.3.2. Lokale ekstrema

Skal man skaffe sig et overblik over en funktions "udseende", kan det være nødvendigt at kende arten af de stationære punkter, dvs. vide om de er lokale maksima, minima eller såkaldte saddelpunkter.

Sætning 2.3 (de mulige lokale ekstrema). Lokale ekstremumpunkter skal søges blandt de stationære punkter for f , samt punkter hvor ∇f ikke eksisterer.

Beviset for sætningen svarer ganske til beviset for sætning 2.2.

Fra funktioner af én variabel vides, at man kan bestemme arten af et stationært punkt ved at lave en fortegnsgang af $f'(x)$



Imidlertid kan man som regel også afgøre arten af et stationært punkt ved at betragte de afledede af 2. orden i punktet.

Der gælder nemlig følgende:

Lad x_0 være et stationært punkt for en funktion¹ f (dvs. $f'(x_0) = 0$).

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ er et lokalt minimumspunkt

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ er et lokalt maksimumspunkt

$f''(x_0) = 0$ nærmere undersøgelse må foretages

¹ vi antager her, at f er 2 gange differentiabel med en kontinuert 2. afledet f'' ,

2. Optimering

Da man jo ikke kan lave en fortegnsdiskussion på en funktion af 2 variable, må man i stedet betragte de partielt afledede af anden orden.

Der gælder følgende sætning:

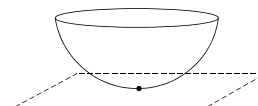
Sætning 2.4 (undersøgelse af arten af et stationært punkt).

Lad (x_0, y_0) være et stationært punkt for en funktion f , og sæt

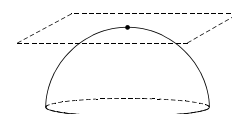
$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad \text{og} \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

Der gælder da

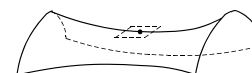
1a) $B^2 - 4AC < 0 \wedge A > 0 \Rightarrow f$ har lokalt minimum i (x_0, y_0)



1b) $B^2 - 4AC < 0 \wedge A < 0 \Rightarrow f$ har lokalt maksimum i (x_0, y_0)



2) $B^2 - 4AC > 0 \Rightarrow f$ har intet lokalt ekstremum i (x_0, y_0)



3) $B^2 - 4AC = 0$: Nærmere undersøgelse må foretages.

Beviskitse: For nemheds skyld antages, at f har det stationære punkt $(0,0)$ og at $f(0,0) = 0$. (Koordinatsystemet kan altid parallelforskydes, så begyndelsespunktet falder i $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$). Vi skal da blot undersøge fortegnet for $f(x, y)$

nær $(0,0)$. Vi tilnærmer $f(x, y)$ ved Taylorpolynomiet $\tilde{f}(x, y)$ af 2. grad med udviklingspunkt i $(0,0)$.

Idet vi ved, at $f(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ fås $\tilde{f}(x, y) = \frac{1}{2}(Ax^2 + Bxy + Cy^2)$

Det omskrives til
$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y^2 \left(A\left(\frac{x}{y}\right)^2 + B\left(\frac{x}{y}\right) + C \right) & \text{for } y \neq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 \left(A\left(\frac{y}{x}\right)^2 + B\left(\frac{y}{x}\right) + C \right) & \text{for } x \neq 0 \end{cases}$$

I begge tilfælde indeholder den kantede parentes et andengradspolynomium med diskriminanten $D = B^2 - 4AC$

1) Er $D < 0$ har andengradspolynomiet i den kantede parentes ingen rødder, dvs. $\tilde{f}(x, y)$ må have samme fortegn for alle $(x, y) \neq (0,0)$ nemlig

a) positivt for $A > 0$, så \tilde{f} har egentligt lokalt minimum i $(0,0)$.

b) negativt for $A < 0$ så \tilde{f} har egentligt lokalt maksimum i $(0,0)$

2) Er $D > 0$ har andengradspolynomiet i den kantede parentes 2 rødder, således at $\tilde{f}(x, y)$ vil antage såvel positive som negative værdier i en selv nok så lille "udprikket" omegn af $(0,0)$, dvs. \tilde{f} har ikke lokalt ekstremum i $(0,0)$.

3) Er $D = 0$, kan man ikke ud fra ovennævnte Taylorpolynomium af 2. orden vide noget, så her er en anden undersøgelse nødvendig.

Beviset er først fuldført, hvis resultaterne for \tilde{f} under punkt 1) og 2) kan overføres til at gælde for f .

Dette er muligt, men er forholdsvis kompliceret, og vil ikke blive gennemført her.

² vi antager her, at f har kontinuerte partielle afledede af 2. orden.

Eksempel 2.3. Lokale ekstrema

Find de stationære punkter for funktionen f givet ved $f(x, y) = (x^2 - y)^2 + 2x^2 - \frac{1}{5}y^2$ og afgør for hver af disse, om det er et lokalt maksimumspunkt, lokalt minimumspunkt eller saddepunkt.

Løsning:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - y)2x + 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - y + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = y - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - y)(-1) - \frac{2}{5}y = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + \frac{8}{5}y = 0 \quad (1)$$

$$x = 0 \text{ indsættes i ligning (1): } 2(-y)(-1) - \frac{2}{5}y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ Stationært punkt } (0,0)$$

$$x^2 = y - 1 \text{ indsættes i ligning (1): } 2(-1)(-1) - \frac{2}{5}y = 0 \Leftrightarrow y = 5 \text{ Stationære punkter } (2,5) \text{ og } (-2,5).$$

	0	-2,5	(-2,5
$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4(x^2 - y) + 8x^2 + 4$	4	32	32
$B = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2 \cdot (-4x) = -8x$	0	-16	16
$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{8}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{5}$
$B^2 - 4AC$	$-4 \cdot 4 \cdot \frac{8}{5} < 0$	$16^2 - 4 \cdot 32 \cdot \frac{8}{5} > 0$	$16^2 - 4 \cdot 32 \cdot \frac{8}{5} > 0$
Konklusion	lokalt minimum	saddepunkt	saddepunkt



2.4 Lineær programmering

2.4.1 Indledning

Hvis objektfunktionen f er en funktion af mange variable, og begrænsningerne består af mange ligninger og uligheder, bliver den i forrige afsnit angivne metode ikke anvendelig.

Er objektfunktion og begrænsninger "lineære" kan man altid enten finde en løsning eller konstatere, at problemet ingen løsning har. Man siger i sådanne tilfælde, at man har "lineært programmeringsproblem" (forkortes i det følgende til LP-problem)

2.4.2. Problemstilling

Ved et LP-problem forstås et optimeringsproblem, hvor objektfunktionen u er lineær dvs. af typen

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

og begrænsningerne ligeledes er lineære uligheder eller ligninger af typen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b,$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b.$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

2. Optimering

Skal man finde en produktionsplan for en fabrik, således at fortjenesten bliver størst mulig, samtidig med at en række begrænsninger i produktionsfaktorerne skal overholdes, vil dette typisk være et LP ("lineært")- problem, som kan involvere mange hundrede ubekendte og begrænsninger.

I den kemiske industri har LP-problemer tit karakter af blandingsproblemer. Et problem i et olieraffinaderi var således det første store LP - problem , der blev løst ved hjælp af et edb program (løst i 1950) .

Løsningsmetoden forstås bedst ved at betragte et par typiske LP- eksempler, hvor der kun forekommer 2 variable. Man kan så anskueliggøre metoden geometrisk og regnearbejdet er overkommeligt.

Med lidt flere variable kan man eventuelt benytte en lommeregner med matrixregning mens det for problemer med mange variable er nødvendigt at benytte et egentligt "LP-program" på en PC.

Eksempel 2.4. Produktionsplanlægning

En fabrik fremstiller i en afdeling to slutprodukter A og B, som kan sælges med nettofortjenester på henholdsvis 80 kr/ton og 180 hr/ton. Både A og B skal passere 3 maskiner.

Driftstimer og maksimal driftstid ses af skemaet.

	Driftstimer for 1 ton A	Driftstimer for 1 ton B	Største totale antal driftstimer pr. uge for hver maskine
Maskine 1	1	6	36
Maskine 2	1	1	11
Maskine 3	2	1	20

Man ønsker en plan, så produktionen giver størst overskud.

- 1) Opskriv objektfunktion og begrænsningerne og vis, at problemet er et LP - problem.
- 2) Løs problemet grafisk.

Løsning:

- 1) Lad x_1 og x_2 betegne det antal ton, der produceres pr. uge af henholdsvis produkt A og B.

Overskuddet u ved denne produktion kan da skrives

$$\underline{u = 80 \cdot x_1 + 180 \cdot x_2} \quad (\text{objektfunktion})$$

Koefficienterne til x_1 og x_2 (80 og 180) kaldes de (relative) omkostningskoefficienter

Den tid maskine 1 benyttes til produktionen i en uge (maskine l's "aktivitet") er $x_1 + 6 \cdot x_2$, og

da den højst må være 36 timer, haves begrænsningen $\underline{x_1 + 6 \cdot x_2 \leq 36}$

Analogt fås begrænsningene $\underline{x_1 + x_2 \leq 11}$ og $\underline{2 \cdot x_1 + x_2 \leq 20}$

Endelig gælder naturligvis, at $x_1 \geq 0$ og $x_2 \geq 0$ (ikke negativitetsbetingelserne)

Man skal finde maksimum af funktionen $u(x_1, x_2)$.

Ovenstående udgør et LP - problem, da såvel objektfunktionen som begrænsningerne er lineære.

2) Geometrisk løsning

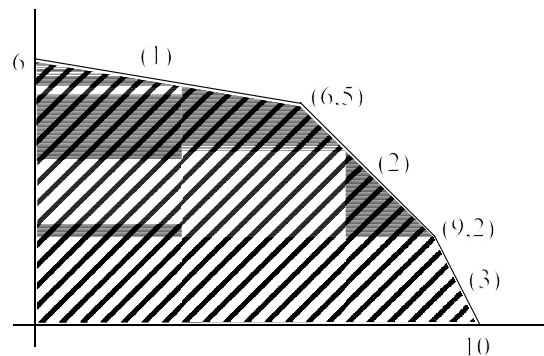
Mængden af punkter, der tilfredsstiller begrænsningerne er en polygon, begrænset af linierne

$$x_1 + 6 \cdot x_2 = 36 \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 = 11 \quad (2)$$

$$2 \cdot x_1 + x_2 = 20 \quad (3)$$

og koordinataksene (se figuren).



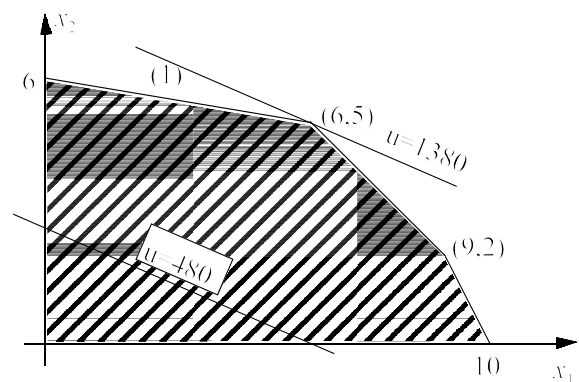
Objektfunktionen $u = 80 \cdot x_1 + 180 \cdot x_2$ har niveaukurver, der er parallelle linier.

På figuren er tegnet niveulinierne

$$80x_1 + 180x_2 = 480$$

$$\text{og } 80x_1 + 180x_2 = 1380$$

(for overskud på 480 og 1380).



Man ser let, at det største overskud fås i en af polygonens vinkelspidser, nemlig $(x_1, x_2) = (6,5)$.

Konklusion: Pr. uge skal produceres 6 ton A og 5 ton B, hvorved overskuddet bliver 1380 kr. ◆

Et karakteristisk træk ved løsningen er, at selvom omkostningskoefficienterne ændres lidt, skal produktionsplanen ikke ændres. Falder f.eks. nettofortjenesten på B betyder det, at niveauliniernes hældning numerisk bliver større, men det giver først en ændring i produktionsplanen, når nettofortjenesten falder under 80 kr./ton. I så fald sker der et "diskontinuert" spring fra punktet (6,5) til punktet (9,2). Er fortjenesten 80 kr./ton kan ethvert punkt på forbindelseslinien mellem de to punkter vælges. En optimal løsnings "følsomhed" overfor ændringer i de indgående konstanter, er derfor væsentlig at kende.

Optimal løsning

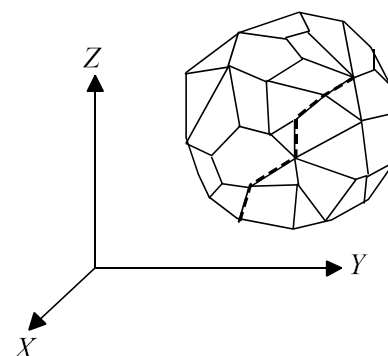
Er LP-problemet i 2 variable indså vi geometrisk, at en mulig optimal løsning må ligge i en af vinkelspidserne i den polygon, der bestemmes af begrænsningerne.

Er LP - problemet i 3 variable kan problemet illustreres geometrisk på følgende måde.

En ulighed $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \leq b$ fremstiller et "halvrum" begrænset af en plan. Fællesmængden af alle sådanne halvrum danner en punktmængde (på figuren et polyeder.) begrænset af planer. Da objektfunktionens niveauflader også er planer, virker det rimeligt, at en optimal løsning i hvert fald findes i en hjørnespids.

Generelt gælder det for et LP-problem i n variable, at har problemet en optimal løsning, så findes der en "hjørnespids", hvor den optimale løsning indtræffer.

Er antallet af variable stort, bliver antallet af mulige "hjørnespidser" så stort, at det ikke er overkommeligt at undersøge dem alle.



Simplexmetoden (udarbejdet af B.G. Dantzig i 1948)

angiver en fremgangsmåde, hvor man ud fra en tilfældig "hjørnespids" udvælger en der ligger nærmere den optimale, ud fra denne vælger man igen en bedre osv. (svarende til den stiplede linie på figuren)

2.4.3 Simplexmetoden

Metoden findes i adskillige varianter. Den mest kendte og for små (få variable, få begrænsninger) LP-problemer mest effektive, er den såkaldte **primale simplexmetode**.

For store LP-problemer er det mest effektivt at benytte en variant, der kaldes **den reviderede simplexmetode**. Den giver en række beregningsmæssige og lagermæssige besparelser, og benyttes i de fleste edb-standardprogrammer.

2.4.3.1 LP-problem på normalform

Det viser sig praktisk at omskrive LP-problemet på følgende måde.

1) Da et minimum for objektfunktionen u svarer til et maksimum for $-u$, vil vi principielt altid omskrive problemet til et maksimumsproblem.

2) Objektfunktionen

$$u = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \text{ omskrives til } u - c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n = 0$$

3) Begrænsningerne omskrives ved indførelse af nye variable x_i (kaldet "slack" variable) til ligninger.

Begrænsninger af typen:

$$3a) a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b \text{ omskrives til } a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + x_{n+1} = b, \quad x_{n+1} \geq 0$$

$$3b) a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b \text{ multipliceres med } -1 \quad -a_1x_1 - a_2x_2 - \dots - a_nx_n \leq -b$$

$$\text{og omskrives til } -a_1x_1 - a_2x_2 - \dots - a_nx_n + x_{n+2} = -b \quad x_{n+2} \geq 0$$

$$3c) a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \text{ omskrives til } a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + x_{n+3} = b \quad x_{n+3} = 0$$

Lad os antage, at vi har n variable og m begrænsninger.

Mulig løsning (feasible solution): Et talsæt $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$ som tilfredsstiller alle begrænsningerne.

Mulig basisløsning: En mulig løsning for hvilken mindst n variable er 0.

Det følgende eksempel vil illustrere hvad der ligger i disse begreber.

Eksempel 2.5. LP-problem på normalform

- 1) Skriv problemet i eksempel 2.4 på normalform.
- 2) Angiv en mulig løsning og en mulig basisløsning.

Løsning:

- 1) Find maksimum af u

$$u - 80x_1 - 180x_2 = 0$$

$$x_1 + 6x_2 + x_3 = 36$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 11$$

$$2x_1 + x_2 + x_5 = 20$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

- 2) Mulig løsning

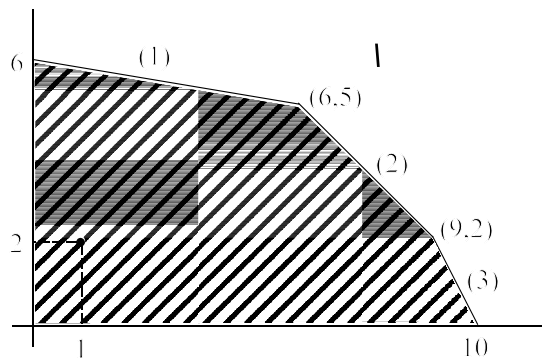
$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2, 23, 6, 16)$$

alle variable er større end nul (se figuren)

Mulig basisløsning

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (9, 2, 1, 5, 0, 0)$$

2 variable er 0 (svarende til en vinkelspids) ◆



2.4.3.2. Den primale simplexmetode

Metoden forstås lettest, hvis den gennemgås i tilknytning til et eksempel med få variable og begrænsninger.

Da de tilfælde hvor begrænsningerne er uligheder af typen \leq er de letteste tilfælde vil vi benytte eksempel 2.3 som eksempel, og med dette eksempel som udgangspunkt præcisere de anvendte regler og sætninger.

Eksempel 2.6. Den primale simplexmetode

Find ved den primale simplexmetode en optimal løsning til LP - problemet i eksempel 2.4 .

Løsning:

I eksempel 2.4 blev problemet opskrevet på følgende normalform

Find maksimum af u

$$u - 80x_1 - 180x_2 = 0$$

$$x_1 + 6x_2 + x_3 = 36$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 11$$

$$2x_1 + x_2 + x_5 = 20$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Problemet opskrives i en såkaldt simplextavle

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	H
u	-80	-180	0	0	0	0
x_3	1	6	1	0	0	36
x_4	1	1	0	1	0	11
x_5	2	1	0	0	1	20

Ved en basisvariabel forstås en variabel hvor den tilsvarende søjle er en "enhedssøjle".

2. Optimering

I simplextavlen er x_3, x_4 og x_5 basisvariable.

Sættes x_1 og x_2 til nul, bliver u, x_3, x_4 og x_5 lig med højresiden (H), og der fremkommer basisløsningen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 36, 11, 20)$. Da alle basisvariable er ≥ 0 er denne første basisvariable er mulig. (Et tilfælde, hvor den første basisløsning ikke er mulig vil blive behandlet i et senere eksempel)

1) Vurdering af objektfunktion.

Regel.

Lad der være givet en mulig basisløsning. Er koefficienterne i den tilsvarende simplextavles første række alle større end eller lig med nul, er basisløsningen optimal.

Begrundelse: Da koefficienten til mindst en ikke-basisvariabel er negativ (f.eks. har x_2 koefficienten -180), vil en forøgelse af den pågældende ikke-basisvariabel forøge objektfunktionen u . Den har følgelig ikke nået sit maksimum.

2) Basisskift:

Vi vil nu foretage et såkaldt basisskift, dvs. lade en af basisvariablene "gå ud af basis", og tilsvarende lade en ikke-basisvariabel "gå ind i basis".

Dette sker ved, at man ved rækkeoperationer i simplextavlen omdanner den indgående søjle til den "enheds søjle", der dannede den udgående søjle, hvorefter man - som før - umiddelbart kan aflæse den ønskede basisløsning.

Valg af indgående søjle

Regel.

Den ikke-basisvariable, som i objektfunktionen u 's række har den numerisk største negative koefficient, skal gå ind i basis. Er valget ikke entydigt vælges blot en af "kandidaterne".

Da $180 > 80$ skal x_2 ind i basis.

Begrundelse: En forøgelse af den ikke-basisvariable x_1 med 1 vil øge objektfunktionen u med 80. Da en tilsvarende forøgelse af x_2 vil øge u med 180 er det rimeligt at lade x_2 gå ind i basis

Valg af udgående søjle.

Regel.

For hver række (pånær u - rækken) beregnes forholdet mellem højre side (H) og koefficienten i den indgående søjle. Blandt de rækker for hvilke dette forhold er større end eller lig med nul, vælges den række, der har det mindste forhold. Den basisvariable, der har et 1-tal stående i denne række skal ud af basis. Er alle forhold negative vokser objektfunktionen u ubegrænset.

Vi danner forholdene $\frac{36}{6}, \frac{11}{1}, \frac{20}{1}$. Da $\frac{36}{6} = 6$ er det mindste tal, skal x_3 ud af basis

Begrundelse: Af første række $x_1 + 6x_2 + x_3 = 36$ ses, at hvis $x_1 = x_2 = 0$ er $x_3 = 36$. Øges x_2 med $\frac{36}{6} = 6$ (og x_1 holdes på 0), vil x_3 falde fra 36 til 0. På grund af ikke-negativitetsbetingelsen for x_3 kan x_2 derfor højst vokse til 6. Af 2. og 3. række ses analogt, at x_2 højst må være henholdsvis 11 og 20.

Basisskift foretages.

Det tal i den indgående søjle, som står ud for 1-tallet i den udgående søjle kaldes pivotelementet. (pivot betyder akse). I simplextavlerne nedenfor er pivotelementet skrevet med tyk skrift.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	H	Rækkeoperation	Kommentar
u	-80	-180	0	0	0	0	række ₁	Basisløsning ikke optimal
x_3	1	6	1	0	0	36	række ₂	$\max\{80,180\} = 180$. x_2 ind i basis $\min\left\{\frac{36}{6}, \frac{11}{1}, \frac{20}{1}\right\} = \frac{36}{6}$. u_1 ud af basis
x_4	1	1	0	1	0	11	række ₃	
x_5	2	1	0	0	1	20	række ₄	
u	-50	0	30	0	0	1080	række ₁ + 30 · række ₂	Basisløsning ikke optimal
x_2	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{6}$	0	0	36	$\frac{1}{6}$ · række ₂	$\max\{50\} = 50$. x_1 ind i basis $\min\left\{\frac{6}{\frac{1}{6}}, \frac{5}{\frac{5}{6}}, \frac{14}{\frac{11}{6}}\right\} = \frac{5}{6}$. u_2 ud af basis
x_4	$\frac{5}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	1	0	5	række ₃ - $\frac{1}{6}$ · række ₂	
x_5	$\frac{11}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	1	14	række ₄ - $\frac{1}{6}$ · række ₂	

Sættes de ikke-basisvariable til 0 fås den mulige basisløsning

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 6, 0, 5, 14)$$

Da $u = 50x_1 - 30x_3 + 1080$ er løsningen ikke optimal, og der foretages igen et basisskift.

Rækkenumre svarer til rækkerne i sidste simplextavle.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	H	Rækkeoperation	Kommentar
u	0	0	20	60	0	1080	række ₁ + $50 \cdot \frac{6}{5}$ række ₃	Basisløsning optimal (alle tal ≥ 0)
x_2	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	5	række ₂ - $\frac{1}{5}$ · række ₃	
x_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$	0	6	$\frac{6}{5}$ · række ₃	
x_5	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{11}{5}$	1	3	række ₄ - $\frac{11}{5}$ · række ₃	

Sættes de ikke-basisvariable til 0 fås den optimale basisløsning $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (6, 5, 0, 0, 3)$

Konklusion:

Det største overskud fås for $x_1 = 5$ og $x_2 = 6$. Overskudet er $u = 80 \cdot 5 + 180 \cdot 6 = 1380$

Da $x_3 = x_4 = 0$ og $x_5 = 3$ udnyttes de to første maskiners kapacitet fuldt ud, mens maskine 3 i løbet af en uge kun udnyttes i 17 timer, da den står ledig i 3 timer.



2.4.3.3. Den reviderede simplexmetode.

Har LP-problemet mange variable og begrænsninger, bliver det uoverkommeligt at foretage beregningerne "i hånden" ved at benytte den primale simplexmetode.

Den reviderede simplexmetode forudsætter kendskab til elementære matrixoperationer, men har den fordel, at man ved basisakift kun udskifter enkelte søjler i matricerne, og derved "genbruger" det meste af matricerne. Dette forminsker indtastningerne og regneoperationerne betydeligt (samt sparer lagerplads). En vanskelighed er dog, at skal holde nøje regnskab med hvilke variable der går ind og ud af basis

Er antal variable og begrænsninger forholdsvis begrænset er det overkommeligt at foretage beregningerne ved hjælp af en lommeregners matrixprogram. I det følgende tænkes TI89 benyttet. Er LP-problemet meget stort vil det dog være nødvendigt at benytte et egentligt LP-program.

I det følgende angives de anvendte matrixformler, som samtidig anskueliggøres ved LP-problemet fra eksempel 2.6

Simplextavlen fra eksempel 2.6 opskrives :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-80	-180	0	0	0	0
1	6	1	0	0	36
1	1	0	1	0	11
2	1	0	0	1	20

Vi indfører nu følgende betegnelser:

Den matrix der indeholder basisvektorerne kaldes B . Her er $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Den matrix der indeholder de resterende ikke-basisvariable kaldes D . Her er $D = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Den rækkematrix, som indeholder koefficienterne til de konstanter i objektfunktionen u som hører til de basisvariable kaldes C_B . Her er $C_B = (0,0,0)$.

Den rækkematrix, som indeholder koefficienterne til de konstanter i objektfunktionen u som hører til de ikke-basisvariable kaldes C_D . Her er $C_D = (-80,-180)$.

Den søjlematrix, som indeholder de basisvariable kaldes X_B . Her er $X_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$

Den søjlematrix, som indeholder de ikke-basisvariable kaldes X_D . Her er $X_D = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Den søjlematrix, som indeholder højre side af begrænsningerne kaldes H . Her er $H = \begin{pmatrix} 36 \\ 11 \\ 20 \end{pmatrix}$

Objektfunktionen kan nu skrives:

$$u + C_B \cdot X_B + C_D \cdot X_D = 0. \text{ Her er } u + (0,0,0) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + (-80, -180) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow u - 80x_1 - 80x_2 = 0$$

og begrænsningerne kan skrives

$$B \cdot X_B + D \cdot X_D = H \quad \text{Her er} \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 11 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{cases} x_1 + 6x_2 + x_3 = 36 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 11 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 20 \end{cases}$$

$$\text{Vi har nu } B \cdot X_B + D \cdot X_D = H \Leftrightarrow X_B = B^{-1} \cdot H - B^{-1} \cdot D \cdot X_D \quad (1)$$

For at finde en basisløsning X indsættes $X_D = 0$ i ligning (1)

$$\text{Herved fås } X_B = B^{-1} \cdot H \text{ og dermed basisløsningen } X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B^{-1} \cdot H \end{pmatrix}$$

$$\text{I eksemplet er } B^{-1} = B \text{ og dermed } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 36 \\ 11 \\ 20 \end{pmatrix}. \text{ Vi ser, at basisløsningen er mulig.}$$

Indsættes X_B fra ligning (1) i objektfunktionen $u + C_B \cdot X_B + C_D \cdot X_D = 0$ fås

$$u + C_B \cdot (B^{-1} \cdot H - B^{-1} \cdot D \cdot X_D) + C_D \cdot X_D = 0 \Leftrightarrow u + C_B \cdot B^{-1} \cdot H + (C_D - C_B \cdot B^{-1} \cdot D) \cdot X_D = 0$$

Koordinaterne til de ikke-basisvariable i objektfunktionen er elementerne i matricen

$$R = C_D - C_B \cdot B^{-1} \cdot D.$$

I eksemplet fås $R = (-80, -180)$

Da nogle af koefficienterne er negative har objektfunktionen ikke nået sit maksimum.

Valg af indgående søjle.

Den af R 's elementer der er negativ og numerisk størst vælges.

Den ikke-basisvariable x_j i objektfunktionen, der svarer hertil, skal gå ind i basis og den tilsvarende søjle A_j skal være indgående søjle.

$$\text{I eksemplet skal } x_2 \text{ ind i basis, da } -180 < -80 \text{ og indgående søjle er } A_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Valg af udgående søjle.

Lad Søjlematricen G_k være bestemt ved ligningen $B \cdot G_k = \bar{a}_j \Leftrightarrow G_k = B^{-1} \cdot A_j$.

Lad G_k have koordinaterne $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ og matricen $X_B = B^{-1} \cdot H$ koordinaterne $(x_{B1}, x_{B2}, \dots, x_{Bm})$.

Forholdene $\frac{x_{Bi}}{\beta_i}$ sammenlignes, og blandt de ikke negative forhold vælges det mindste. Er det

mindste forhold $\frac{x_{Bk}}{\beta_k}$ skal x_{Bk} ud af basis.

2. Optimering

$$\text{I eksemplet fås } G_2 = B^{-1} \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } X_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = B^{-1}H = \begin{pmatrix} 36 \\ 11 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Forholdene er $\frac{36}{6}, \frac{11}{1}, \frac{20}{1}$. Da $\frac{36}{6}$ er det mindste forhold, skal x_3 ud af basis.

Basisskift foretages

Den nye basis B_1 dannes ved, at den søjle i B der svarer til x_{Bk} forsvinder, og den til x_j svarende søjle indsættes.

Derefter fortsættes med at vurdere objektfunktion osv.

Metoden illustreres i detaljer i følgende eksempel, hvor også ordrer i TI89 er angivet.

Oprette en "Folder":

Det kan være praktisk at oprette én eller flere mapper til at have sine data gemt i.

VAR-Link, F1, 5: Create Folder, Skriv navn på folder.

Vælg denne mappe som den aktuelle mappe: MODE, Current Folder,

Eksempel 2.7 Den reviderede simplexmetode

Vi betragter igen LP-problemet, i eksempel 2.4 og 2.5.

med simplextavlen

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-80	-180	0	0	0	0
1	6	1	0	0	36
1	1	0	1	0	11
2	1	0	0	1	20

For overblikkets skyld skrives i det følgende foroven i matricerne variabelnavnene

$$\text{Basis } B = \begin{pmatrix} x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ indtastes i TI 89}$$

APPS, Data/Matrix editor, New, Udfyld Type = Matrix, Variable = B, antal rækker=3 og søjler = 3, ENTER, ENTER.

Udfyld skemaet med matricen B, Home

$$\text{De ikke-basisvariable } D = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 6 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ indtastes.}$$

Rækkematricen $C_B = (0,0,0)$ indtastes

Rækkematricen $C_D = (-80,-180)$ indtastes

$$\text{Højresiden } H = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 11 \\ 20 \end{pmatrix} \text{ indtastes}$$

Vurdering af objektfunktion

Det ses umiddelbart, at objektfunktionen ikke har nået sit maksimum, da mindst et af tallene i C_D er negative.

Basisskift foretages Valg af indgående søjle.

x_2 skal ind i basis, da $-180 < -80$ og indgående søjle er $A = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. A indtastes som søjlematrix.

Valg af udgående søjle.

$$G = B^{-1} \cdot A$$

Ti89: Tryk på VAR-Link for at finde matricerne (de er i TI89 skrevet med små bogstaver)

TI-89: $b^{-1} \cdot a$, STO $\rightarrow g$. Resultat: $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$X_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = B^{-1} H$. TI-89: $b^{-1} \cdot h$ STO $\rightarrow xb$. Resultat: $\begin{pmatrix} 36 \\ 11 \\ 20 \end{pmatrix}$

Vektorerne omdannes til lister og gemmes ved ordrene

MATH,LIST,F:mat \blacktriangleright list(g) $\rightarrow lg$

MATH,LIST,F:mat \blacktriangleright list(xb) $\rightarrow lxb$

lxb/lg

Resultat {6, 11, 20}

Heraf ses, at det mindste positive tal er 6 svarende til, at x_3 skal ud af basis.

(Ordren MATH, LIST, MIN(lxb/lg) giver den mindste værdi 6)

I B , D , C_B , og C_D udskiftes nu de pågældende søjler.

For at kunne holde rede på variabelbetegnelserne skrives disse i det følgende foroven:

$$B = \begin{pmatrix} x_2 & x_4 & x_5 \\ 6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, C_B = \begin{pmatrix} x_2 & x_4 & x_5 \\ -180 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ og } C_D = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ -80 & 0 \end{pmatrix}$$

APPS, Data/Matrix editor, Open osv.

Vi gentager nu beregningerne med disse matricer.

Vurdering af objektfunktion

$$R = C_D - C_B \cdot B^{-1} \cdot D$$

Ti89: $cd-cb \cdot b^{-1} \cdot d$ Resultat: $R = (x_1, x_3) = (-50, 30)$

Det ses umiddelbart, at objektfunktionen ikke har nået sit maksimum, da mindst et af tallene i R er negative.

Basisskift foretages Valg af indgående søjle.

Da $-50 < 0$ skal x_1 ind i basis og den indgående søjle er $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Rettes i TI 89

Valg af udgående søjle.

$$G = B^{-1} \cdot A \quad \text{TI-89: } b^{-1} \cdot a, \text{ STO} \rightarrow g \quad . \quad \text{Resultat: } \begin{pmatrix} 0.16667 \\ 0.83333 \\ 1.83333 \end{pmatrix}$$

$$X_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = B^{-1} H \quad \text{TI-89: } b^{-1} \cdot h \text{ STO} \rightarrow xb \quad . \quad \text{Resultat: } \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Vektorene omdannes til lister og gemmes lg og lxb. De divideres: lxb/lg

Resultat $\{36, 6, 7.63636\}$

Heraf ses, at det mindste positive tal er 6 svarende til, at x_4 skal ud af basis.

Basisskift:

I B , D , C_B , og C_D udskiftes nu de pågældende søjler.

$$B = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_5 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} x_4 & x_3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_B = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_5 \\ -180 & -80 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad C_D = \begin{pmatrix} x_4 & x_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vurdering af objektfunktion:

$$R = C_D - C_B \cdot B^{-1} \cdot D$$

TI89: $cd-cb \cdot b^{-1} \cdot d$

$$\text{Resultat: } R = (x_4, x_3) = (60, 20)$$

Da ingen koefficienter er negative har objektfunktionen nået sit maksimum

For at finde en basisløsning beregnes $X_B = B^{-1} \cdot H$

$$\text{Vi får } x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Konklusion:

Det største overskud fås for $x_1 = 5$ og $x_2 = 6$. Overskudet er $u = 80 \cdot 5 + 180 \cdot 6 = \underline{1380}$

Da $x_3 = x_4 = 0$ og $x_5 = 3$ udnyttes de to første maskiners kapacitet fuldt ud, mens maskine 3 i løbet af en uge kun udnyttes i 17 timer, da den står ledig i 3 timer.

**2.4.3.4. LP - problem, hvor første basisløsning ikke er mulig**

Det hidtidige eksempel byggede på begrænsninger af typen \leq . Dette sikrede, at begyndelsespunktet var en mulig basisløsning.

Indeholder begrænsningerne også uligheder af typen \geq eller ligninger, er dette ikke sikkert. Dette giver anledning til, at det er nødvendigt at supplere den tidligere beskrivne metode med en fremgangsmåde hvor man efter et endeligt antal går fra den første ikke-mulige basisløsning til en mulig basisløsning.

Eksempel 2.8. Et blandingsproblem

Et ernæringsprodukt skal fremstilles på grundlag af to forskellige råvarer R_1 og R_2 . Hver af disse indeholder 3 slags næringsstoffer A, B og C. Råvarerernes pris samt indhold af næringsstoffer er givet i det følgende skema:

	Råvare R_1	Råvare R_2
Pris kr/kg	200	450
Enheder af næringsstof A pr kg	16	24
Enheder af næringsstof B pr kg	4	2
Enheder af næringsstof C pr kg	2	9

Det færdige produkt skal indeholde mindst 80 enheder A, 12 enheder B og 16 enheder C.

Man ønsker at finde den blanding af råvarerne R_1 og R_2 der skal anvendes, for at det færdige produkt bliver billigst.

- Opskriv objektfunktion og begrænsningerne.
- Løs problemet grafisk.

Løsning:

- Lad x_1 og x_2 betegne antal kg af henholdsvis råvare R_1 og R_2 .

Prisen af det færdige produkt u kan da skrives $u = 200 \cdot x_1 + 450 \cdot x_2$ (objektfunktion)

Begrænsningerne er

$$16 \cdot x_1 + 24 \cdot x_2 \geq 80 \quad (1)$$

$$4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 12 \quad (2)$$

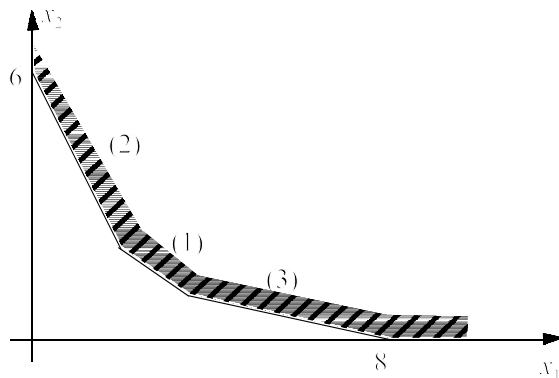
$$2 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 \geq 16 \quad (3)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

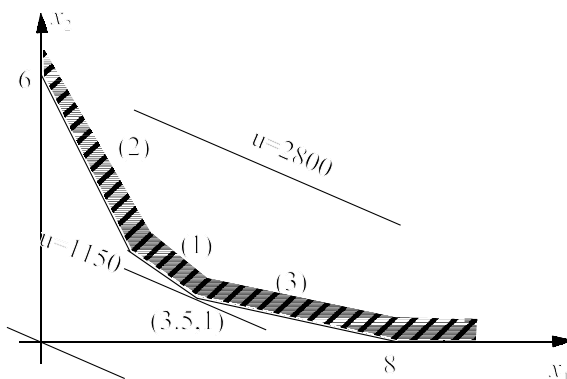
Man skal finde minimum af funktionen $u(x_1, x_2)$.

2) Geometrisk løsning

Punktmængden bestemt ved ulighederne er ubegrænset (se figuren).



Indtegner man som i eksempel 2.1 nogle niveaulinier ses, at det billigste produkt fås i vinkespidsen (3.5,1)

**Konklusion:**

Det billigste præparat fås, hvis man blander 3,5 kg råvare af typen R_1 med 1 kg råvare af typen R_2 , hvorved prisen bliver 1150 kr



2. Optimering

Som det ses af eksempel 2.8 er den første basisløsning ikke mulig, da punktet (0,0) ikke opfylder begrænsningerne.

Fremgangsmåder er i sådanne tilfælde at konstruere en "kunstig" objektfunktion, som giver et mål for basisløsningens "umulighed". Ved at benytte simplexmetoden på denne opnås en mindre "umulig" basisløsning, og efter et endeligt antal iterationer opnås enten en mulig basisløsning (som man så kan fortsætte med) eller man kan konkludere, at der ikke findes en mulig løsning.

Eksempel 2.9. Primal simplexløsning

Løs ved anvendelse af den primale simplexmetode problemet i eksempel 2.8.

Løsning

Formulering af matematisk model

Vi fandt i eksempel 2.7 følgende model:

Lad x_1 og x_2 betegne antal kg af henholdsvis råvare R_1 og R_2 .

Prisen af det færdige produkt z kan da skrives $z = 200 \cdot x_1 + 450 \cdot x_2$ (objektfunktion)

Begrænsningerne er

$$16 \cdot x_1 + 24 \cdot x_2 \geq 80, \quad 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 12, \quad 2 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 \geq 16, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Man skal finde minimum af funktionen $u(x_1, x_2)$.

LP-problemet skrives på normalform:

For at ændre problemet til et maksimumsproblem sætte $u = -z$

Find maksimum for u : $u + 200x_1 + 450x_2 = 0$

Begrænsningerne er

$$-16 \cdot x_1 - 24 \cdot x_2 + x_3 = -80$$

$$-4 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + x_4 = -12$$

$$-2 \cdot x_1 - 9 \cdot x_2 - x_5 = -16$$

Simplextavlen opskrives

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	H
u	200	450	0	0	0	0	0
x_3	-16	-24	1	0	0	0	-80
x_4	-4	-2	0	1	0	0	-12
x_5	-2	-9	0	0	1	0	-16

Første basisløsning $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, -80, -12, -16)$ er ikke mulig, da der forekommer negative tal.

Vi vil nu konstruere en kunstig objektfunktion w .

Regel: Lad S være en søjle i simplextavlen svarende til en ikke-basisvariabel. Det tal i S , der skal stå i w -rækken, dannes på følgende måde:

a) tal der står i samme række som en basisvariabel, der i basisløsningen er for lille adderes og derfra trækkes

b) tal, der står i samme række som en basisvariabel der i basisløsningen er for stor.

Begrundelse: Hvis den ikke-basisvariable x_1 forøges fra 0 til Δx_1 vil x_3 blive forøget fra -80 til $-80 + 16 \cdot \Delta x_1$ altså forbedret med $16 \cdot \Delta x_1$. Tilsvarende bliver x_4 forøget med $4 \cdot \Delta x_1$ og x_5 forøget med $2 \cdot \Delta x_1$. Den totale forbedring er følgelig $(16+4+2) \Delta x_1 = 22 \Delta x_1$

Tilsvarende regnes forbedringen ud for x_2 til $(24+2+9) \Delta x_2 = 35 \Delta x_2$

En "kunstig" objektfunktion, som gav et mål for forbedringen kunne derfor være $w = 22x_1 + 35x_2$ eller $w - 22x_1 - 35x_2 = 0$

Vi indføjes denne som en ekstra søjle i simplextavlen, og udfører nu pivoteringen som før, men det skal dog bemærkes, at den kunstige objektfunktion varierer fra tavle til tavle.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	H	Rækkeoperation	Kommentar
u	200	450	0	0	0	0	R_1	
x_3	-16	-24	1	0	0	-80	R_2	$\min\{-22, -35\} = -35$ x_2 ind i basis
x_4	-4	-2	0	1	0	-12	R_3	$\min\left\{\frac{80}{24}, \frac{12}{2}, \frac{16}{9}\right\} = \frac{16}{9}$ x_5 ud af basis
x_5	-2	-9	0	0	1	-16	R_4	
w	-22	-35						Basisløsning ikke mulig
u	100	0	0	0	$\frac{450}{9}$	-800	$R_1' = R_1 + \frac{450}{9} \cdot R_4$	
x_3	$-\frac{32}{3}$	0	1	0	$-\frac{24}{9}$	$-\frac{112}{3}$	$R_2' = R_2 - \frac{24}{9} \cdot R_4$	$\min\left\{-\frac{128}{9}, -3\right\} = -\frac{128}{9}$ x_1 ind i basis
x_4	$-\frac{32}{9}$	0	0	1	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{76}{9}$	$R_3' = R_3 - \frac{2}{9} \cdot R_4$	$\min\left\{\frac{112}{32}, \frac{76}{32}, \frac{16}{2}\right\} = \frac{76}{32}$ x_4 ud af basis
x_2	$\frac{2}{9}$	1	0	0	$-\frac{1}{9}$	$\frac{16}{9}$	$R_4' = -\frac{1}{9} \cdot R_4$	
w	$-\frac{128}{9}$				-3			Basisløsning ikke mulig
u	0	0	0	$\frac{900}{32}$	$\frac{175}{4}$	$-\frac{2075}{2}$	$R_1'' = R_1' + \frac{900}{32} \cdot R_3'$	
x_3	0	0	1	-3	-2	-12	$R_2'' = R_2' - 3 \cdot R_3'$	$\min\{-3\} = -3$ x_4 ind i basis
x_1	1	0	0	$-\frac{9}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{19}{8}$	$R_3'' = -\frac{9}{32} \cdot R_3'$	$\min\left\{\frac{12}{3}\right\} = \frac{12}{3}$ x_3 ud af basis
x_2	0	1	0	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{5}{4}$	$R_4'' = R_4' + \frac{1}{16} \cdot R_3'$	
w				-3	-2			Basisløsning ikke mulig
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	H	Rækkeoperation	Kommentar
u	0	0	$\frac{300}{32}$	0	25	-1150	$R_1''' = R_1'' + \frac{300}{32} \cdot R_2''$	
x_4	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	4	$R_2''' = -\frac{1}{3} R_2''$	Basisløsning (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) $= (\frac{7}{2}, 1, 0, 4, 0)$ er mulig
x_1	0	0	$-\frac{3}{32}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{2}$	$R_3''' = R_3'' - \frac{3}{32} \cdot R_2''$	
x_2	0	1	$\frac{1}{48}$	0	$-\frac{1}{6}$	1	$R_4''' = R_4'' + \frac{1}{48} R_2''$	
Basisløsning er optimal da alle koefficienter er positive. Minimum 1150 antages for $x_1=3.5$ og $x_2=1$.								

2. Optimering

Hidtil har vi ikke behandlet et problem der indeholder ligninger. Dette vil kort ske i følgende eksempel.

Eksempel 2.10. Blandingsproblem med ligning

Tre standardlegeringer L_1 , L_2 og L_3 ønskes blandet til en ny legering. Der ønskes fremstillet ialt 10 tons af denne nye legering, og den skal indeholde mindst 15% zink og højst 37% tin (vægtprocent). Sammensætning og priser er angivet i nedenstående tabel:

	L_1	L_2	L_3
Tin	40%	40%	30%
Zink	30%	20%	10%
Pris i 1000 kr /ton	30%	40%	60%
	11	2	1

Find den blanding af L_1 , L_2 og L_3 , der tilfredsstikker ovennævnte krav og er billigst.

Løsning:

Formulering af matematisk model

Lad x_1 , x_2 og x_3 betegne de antal tons, der skal anvendes af henholdsvis L_1 , L_2 og L_3 .

LP - problemet kan da skrives:

Find minimum for funktionen $z = 11x_1 + 2x_2 + x_3$

Begrænsningerne er $0.4x_1 + 0.4x_2 + 0.3x_3 \leq 3.7$

$$0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 \geq 1.5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

LP-problemet skrives på normalform:

For at ændre problemet til et maksimumsproblem sætte $u = -z$

Find maksimum for u : $u + 10x_1 + x_2 = -10$

Begrænsningerne er $4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 37$

$$-3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -15$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \quad x_6 = 0$$

Simplextavlen opskrives

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	H
u	11	2	1	0	0	0	0
x_4	4	4	3	1	0	0	37
x_5	-3	-2	-1	0	1	0	-15
x_6	1	1	1	0	0	1	10

Første basisløsning $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 37, 10, 0)$ er ikke mulig, da $x_5 = -15$ er for lille og $x_6 = 10$ er for stor.

Vi danner nu den kunstige objektfunktion

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	H
u	11	2	1	0	0	0	0
x_4	4	4	3	1	0	0	37
x_5	-3	-2	-1	0	1	0	-15
x_6	1	1	1	0	0	1	10
w	-4	-3	-2				

Metoden er nu helt den samme som vi så i eksempel 2.9. Eneste forskel er, at en slackvariabel, der hører til en ligning (her x_6), der først er ude af basis, **aldrig** derefter må komme ind i basis.

2.4.3.5. Anvendelse af LP - program.

Som nævnt, vil man ved større problemer benytte et professionelt LP - program.

Maple og Excel har nogle faciliteter i den retning, men et egentligt LP - program vil kunne give langt flere oplysninger bl.a. om løsningens "følsomhed"

Det følgende eksempel hentet fra et transportproblem er løst ved hjælp af Maple og Excel

Eksempel 2.10. Et transportproblem

På et tidspunkt skal 600 enheder af en vare, som er opbevaret i to havnebyer B_1 og B_2 sejles til 4 kunder K_1 , K_2 , K_3 og K_4 .

Af nedenstående skema kan f. eks. aflæses, at det tager 2 enheder brændstof, at transportere en vareenhed fra byen B_1 til kunde K_2 , og at B_1 har et lager på 200 vareenheder, og at K_2 har bestilt 100 vareenheder.

By \ Kunde	K_1	K_2	K_3	K_4	Lagre
B_1	3	2	1	4	200
B_2	2	4	6	3	400
Bestillinger	200	100	200	100	

Man ønsker at finde den fordeling af transportere, som minimerer det samlede brændstofforbrug fra havnebyer til kunder.

Opskriv objektfunktion og begrænsningerne og løs problemet ved hjælp af Maple og Excel

Løsning:

Lad x_{ij} angive antallet af enheder, der transporteres fra by B_i til kunde K_j .

Brændstofforbruget u er da $u = 3 \cdot x_{11} + 2 \cdot x_{12} + x_{13} + 4 \cdot x_{14} + 2 \cdot x_{21} + 4 \cdot x_{22} + 6 \cdot x_{23} + 3 \cdot x_{24}$

Begrænsningerne er

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 200$$

$$+ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 400$$

$$x_{11} + x_{21} = 200$$

$$x_{12} + x_{22} = 100$$

$$x_{13} + x_{23} = 200$$

$$x_{14} + x_{24} = 100$$

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{13} \geq 0, x_{14} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{23} \geq 0, x_{24} \geq 0$$

2. Optimering

Man skal finde minimum af funktionen $u(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24})$.

Maple:

with(simplex):

```
>cnsts := {x11+x12+x13+x14=200, x21+x22+x23+x24=400, x11+x21=200, x12+x22=100, x13+x23=200, x11+x24=100};
```

```
obj := 3*x11+2*x12+x13+4*x14+2*x21+4*x22+6*x23+3*x24;
```

```
>minimize(obj,cnsts,NONNEGATIVE);
```

```
{x23 = 0, x11 = 0, x14 = 0, x12 = 0, x22 = 100, x24 = 100, x13 = 200, x21 = 200};
```

Excel

Vælg “Funktioner”, “Tilføjelsesprogrammer”; og marker “Problemløser”

I cellerne a1 til h1 skrives startværdierne for x_{11} til x_{24}

I cellen a3 skrives $+a1+b1+c1+d1$ svarende til venstre side af begrænsning 1

I cellen a5 skrives $+e1+f1+g1+h1$ svarende til venstre side af begrænsning 2,

osv.

indtil a16 hvor der skrives h1.

I cellen j1 skrives objektfunktionen $3*a1+2*b1+c1+4*d1+2*e1+4*f1+6*g1+3*h1$

Man vælger nu under menuen “funktioner” problemløser” og

i “målcelle”: j1

ved redigering af celler : a1:h1

Tryk på tilføj. skriv a3 = 200

tryk på tilføj: skriv a4 = 400

osv

tryk på tilføj: skriv a16 \geq 0

Vælg “lineær”

Tryk på “løs”

Resultatet bliver

5E-07	2,5E-07	200	2,5E-07	200	100	1,42E-14	100	1300
200	400	200	100	200	100	5E-07	2,5E-07	200
2,5E-07	200	2,5E-07	200	100	1,42E-14	100		

Hvoraf man kan aflæse at minimumsværdien er 1300 som antages i $(0,0,200,0,200,100,0,100)$

2.5. Optimering af ikke-lineære funktioner.

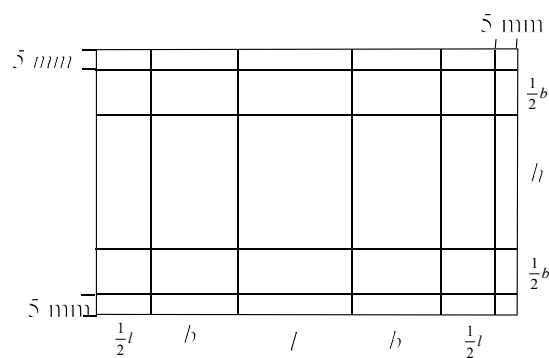
Er funktionen ikke lineær findes der visse metoder, bl.a. "Lagranges metode" som kan overføre problemet til at løse et (stort) antal ligninger med mange ubekendte. Ingen af disse metoder sikrer imidlertid, at det punkt man eventuelt finder virkelig er et globalt ekstremum. Som man bl.a. kan se i det ovennævnte excel-program "problemløser" kan man forbedre mulighederne hvis funktionen eksempelvis er kvadratisk. Man kan også anvende flere forskellige numeriske metoder og for hver metode anvende forskellige startpunkter. Hvis de så alle kommer frem til samme ekstremumspunkt så kan man da håbe, at dette ikke blot er et lokalt punkt.

Det følgende er et eksempel herpå, hvor vi anvender Excel til beregningerne.

Eksempel 2.11 (ikke lineær)

Lad os betragte en kasseformet mælkekarton, som indeholder 1 liter mælk.

Dimensionerne er angivet på tegningen, idet der regnes med 5 mm overlap til limningen af kartonnen



Beregn kartonnens dimensioner så overfladens areal bliver mindst mulig.

Løsning:

Lad alle dimensioner være beregnet i mm.

Arealet $A = (2b + 2l + 5)(h + b + 10)$

Rumfanget af beholderen er $V = b \cdot h \cdot l = 1000000$

Benyttes Excel til beregningen med startpunkt $(b, l, h) = (1, 1, 1)$ fås resultaterne

62,9343 119,3969 133,082 76156,51

1000000

dvs.

$b = 62.934\text{ mm}$, $l = 119.397\text{ mm}$ og $h = 133.082\text{ mm}$

Forsøges med andre startpunkter findes samme punkt, så dette må antages at være det ønskede minimum.



Opgaver

Opgave 2.1

Find de stationære punkter for funktionerne

- 1) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$
- 2) $f(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6$
- 3) $f(x, y) = x \cdot \cos(y) - x^2, \quad y \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$
- 4) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 5x + 2y - 8$

Opgave 2.2

Find (globalt) minimum og minimumspunkter for funktionen $f(x, y)$ i mængden S , hvor

- 1) $f(x, y) = x^2y + xy^2 - 3xy$ og S er givet ved begrænsningerne $x \leq 3, -x \leq y \leq 3$
- 2) $f(x, y) = 27x^3 - 16y^2$ og S er givet ved begrænsningerne $x \leq 1, x > y^2$
- 3) $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 3xy$ og S er givet ved begrænsningerne $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4, xy \leq 2$
- 4) $f(x, y) = x^2y(x + 3y - 5)$ og S er givet ved begrænsningerne $0 \leq y, y^2 \leq x \leq 4$
- 5) $f(x, y) = 3x^3 - xy^2 + 3y^2 - 12y$ og S er givet ved begrænsningerne $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 5$
- 6) $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 3xy$ og S er givet ved begrænsningerne $x > 0, xy \geq 1, x + y \leq 4$

Opgave 2.3

Find (globalt) maksimum og maksimumspunkter for funktionen $f(x, y)$ i mængden S , hvor

- 1) $f(x, y) = x^2y - 4x^2 - 2y^2 + 16y$ og S er givet ved begrænsningerne $0 \leq y \leq 10 - x^2$
- 2) $f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$ og S er givet ved begrænsningerne $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$
- 3) $f(x, y) = 5e^{-((x-5)^2 + 2(y-3)^2 + 2xy)}$ og S er givet ved begrænsningerne $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6$

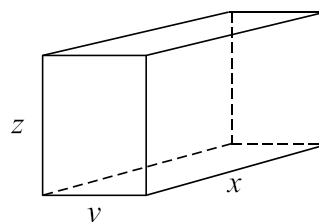
Opgave 2.4

Find værdimængden for funktionen $f(x, y)$ i mængden S , hvor

- 1) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - 4xy^2 - x^2y + 8xy$ og S er givet ved begrænsningerne $xy \geq 1, 0 \leq x \leq 8, 0 \leq y \leq 2$
- 2) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) - \frac{1}{2}x^2 + y$ og S er givet ved begrænsningerne $x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 0$
- 3) $f(x, y) = 2x^2 - \ln(xy) + y$ og S er givet ved begrænsningerne $xy \geq \frac{1}{8}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$
- 4) $f(x, y) = xy \cdot e^{y-x}$ og S er givet ved begrænsningerne $x \geq 0, x - 4 \leq y \leq 2$

Opgave 2.5

En kasseformet tank skal konstrueres, så den får et rumfang på 2000 m^3 . Bund, sider og låg koster henholdsvis 4000 kr./m^2 , 2000 kr./m^2 og 1000 kr./m^2 . Dimensionér tanken således, at prisen bliver mindst, idet dog ingen af kanterne må overstige 20 m.

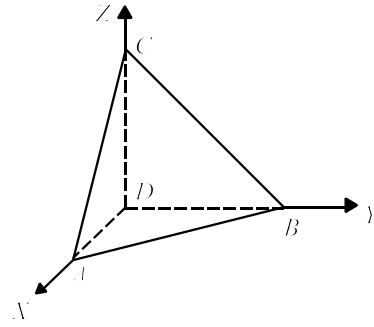


Opgave 2.6.

En plan har ligningen $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, hvor

$a > 2$, $b > 4$ og $c > 5$. Planen skærer koordinataksene i punkterne A, B og C (se figuren).

Koordinatsystemets begyndelsespunkt kaldes D. Værdierne af a, b og c ønskes bestemt, således at punktet $P = (2, 4, 5)$ ligger på planen gennem A, B og C, og tetraederet ABC's volumen $V\left(\frac{1}{6}abc\right)$ bliver mindst mulig. Det oplyses, at der eksisterer værdier af a, b og c med de ønskede egenskaber.

**Opgave 2.7.**

Find alle lokale maksimums- og minimumspunkter for følgende funktioner:

- 1) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$
- 2) $f(x, y) = x^2 + y^4 + 4xy$
- 3) $f(x, y) = xy + y^3$
- 4) $f(x, y) = x^2 + y^3 + 2x$
- 5) $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x$
- 6) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^3 + 5y^2$
- 7) $f(x, y) = x^4 - 8x^2 + 4xy^2 + 4y^2$
- 8) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$
- 9) $f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}$
- 10) $f(x, y) = 2x^2y + xy^2 - 6xy$

Opgave 2.8.

- 1) Vis, at funktionen f givet ved $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 4x^2 - 8y^2$ har 5 stationære punkter og afgør for hvert, om det er et lokalt maksimumspunkt, lokalt minimumspunkt eller saddepunkt.
- 2) Bestem derpå globalt maksimum og minimum for $f(x, y)$ i cirkelskiven $x^2 + y^2 \leq 4^2$.

Opgave 2.9.

- a) Find samtlige stationære punkter for funktionen $f(x, y) = x^2y - 2x^2 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2$
- b) Betragt de stationære punkter (x, y) for hvilke $y \leq 0$. Afgør for hvert af disse punkter, om punktet er et lokalt maksimumspunkt, et lokalt minimumspunkt eller et saddepunkt.

Opgave 2.10.

Find de stationære punkter for funktionen $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2 + 2x^2 - \frac{1}{5}y^2$ og afgør for hvert, om det er et lokalt maksimumspunkt, lokalt minimumspunkt eller saddepunkt.

2. Optimering

Opgave 2.11

Lad virkningsgraden for en motor være givet tilnærmet ved $f(x, y) = x^3 - y^3 - 3xy - 0.2$, hvor x og y er to variable.

- 1) Find de partielle afledede af 1. og 2. orden af f .
- 2) Find de partielle afledede af 1. og 2. orden af f i punktet $(-1, 1)$.
- 3) Er punktet $(-1, 1)$ et lokalt maksimumspunkt.

Opgave 2.12

Et ernæringsprodukt skal blandes af to råvarer R_1 og R_2 . Råvarenes pris samt indhold af 3 næringsstoffer A, B og C er:

	Råvare R_1	Råvare R_2
Pris kr./ton	2000	4500
Enheder af næringsstof A/ton	16	24
Enheder af næringsstof B/ton	4	2
Enheder af næringsstof C/ton	2	9

Den færdige blanding skal totalt indeholde mindst 80 enheder A, 12 enheder B og 16 enheder C. Find den billigste blanding ved anvendelse af simplexmetoden.

Opgave 2.13.

En virksomhed skal beplante nogle arealer og kan vælge mellem to typer beplantning A og B, eventuelt en kombination af disse. Type A og B giver et overskud pr. hektar på henholdsvis 2500 kr. og 6000 kr. Af nedenstående skema fremgår, hvad beplantning af 1 hektar kræver af maskiner og omkostninger.

	1 hektar beplantet med type A	1 hektar beplantet med type B
Antal maskindage	1	4
Omkostninger i kr.	1000	2000

I den for beplantning gunstige sæson er der højst 160 maskindage til rådighed, og virksomheden vil højst betale 110000 kr. for arbejdet. Antallet af hektar er så stort, at det kan betragtes som ubegrænset. Find ved anvendelse af simplexmetoden det maksimale overskud, samt det antal hektar der skal beplantes med henholdsvis A og B for at opnå dette overskud.

Opgave 2.14

I en fabrik forefindes 3 maskiner M_1 , M_2 og M_3 til fremstilling af to produkter A og B. En enhed af produkt A beslaglægger M_1 i 5 minutter, M_2 i 3 minutter og M_3 i 4 minutter, mens en enhed af produkt B beslaglægger M_1 i 1 minut, M_2 i 4 minutter og M_3 i 3 minutter. Nettofortjenesten pr. produceret enhed er 30 kr. for produkt A og 20 kr. for produkt B.

Produktionen ønskes planlagt således, at nettofortjenesten (pr 60 minutter) bliver størst mulig. Find - ved benyttelse af simplexmetoden- den optimale løsning.

Opgave 2.15

En fabrik fremstiller 3 slags plastikprodukter A, B og C. Der er tre trin i fremstillingen - støbning, maling og montering - som hver tager en vis tid. Nedenstående skema angiver den tid, hvert trin tager, den maksimale tid, der er til rådighed samt nettofortjenesten.

	Støbning	Maling	Montering	Nettofortjeneste
1 stk A	4 timer	2 timer	3 timer	40 kr
1 stk B	3 timer	2 timer	2 timer	40 kr
1 stk C	5 timer	2 timer	3 timer	50 kr
Maksimal tid der er til rådighed	400 timer	200 timer	300 timer	

Find ved hjælp af Simplexmetoden hvilken produktionsplan, der giver den største fortjeneste.

Opgave 2.16

En kemisk virksomhed planlægger at udvinde 2 stoffer A og B af et eller flere mineraler til brug ved en bestemt proces. Der skal udvindes mindst 100 kg af stoffet A og mindst 80 kg af stoffet B ved processen. Der findes 3 mineraltyper med varierende indhold af A og B til forskellige priser:

	Mineraltyper		
	1	2	3
Vægtprocent af A	20%	10%	20%
Vægtprocent af B	10%	30%	20%
Prisenheder pr. kg	3	4	5

Virksomheden ønsker at minimere udgifterne til indkøb af mineraler. Benyt Simplexmetoden til at finde den optimale løsning.

Opgave 2.17

Et valseværk fremstiller 3 produkter A, B og C. Før produkterne kommer ind i valseværket skal de opvarmes i en ovn. Nedenstående skema angiver "opholdstiden" i henholdsvis ovn og valseværk for hvert produkt.

	Ovn	Valseværk
1 ton A	24 sek.	48 sek.
1 ton B	48 sek.	38.4 sek.
1 ton C	72 sek.	28.8 sek.

Ovn og valse benyttes dagligt i maksimalt 8 timer hver (28800 sekunder). Den samlede mængde af A og B skal på 1 dag være mindst 500 tons. Nettoudbyttet pr. ton af A, B og C forholder sig som 1:3:4.

Formuler problemet som inddata til et passende LP-program (elsempelvis Maple eller Excel) Kør programmet og giv en tolkning af udskriften.

Opgave 2.18

En teknisk kemisk virksomhed har i sit spildevand fra produktionen et indhold af 4 skadelige kemiske forbindelser A, B, C og D.

Virksomheden kan afsætte et beløb på 40 kr. pr. m^3 spildevand til fjernelse af de skadelige stoffer, hvilket imidlertid ikke er tilstrækkeligt.

For hvert af stofferne A, B, C og D er der fastsat en skadelighedsfaktor, som angivet i nedenstående tabel. For B og D er der en maksimal tilladelig værdi af skadeligheden pr. m^3 spildevand defineret som produktet af skadelighedsfaktoren og koncentrationen (g/m^3) af de pågældende stoffer.

Produktionen af stofferne samt omkostninger til evt. rensning af spildevand er ligeledes angivet ved nedenstående. Virksomheden ønsker at minimere spildevandets skadelighed.

	A	B	C	D
Produktion g/m^3	5	1	2	1
Omkostninger kr/gram	10	5	1	1
Skadelighedsfaktor	5	100	5	20
Maksimal skadelighed		10		10

1) Opstil LP-problemet på normalform.

2) Find ved benyttelse af Simplexmetoden den optimale løsning.

Opgave 2.19

En virksomhed har formuleret et blandingsproblem på følgende måde:

Der søges minimum for funktionen

$$z = x_1 + 6x_2 + 2x_3 \quad (\text{min.-pris})$$

under opfyldelse af begrænsningerne

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2, \quad 2x_1 + x_2 \leq 4, \quad 3x_1 + 4x_3 \leq 3$$

og ikke - negativitetsbetingelserne $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Anvend Simplexmetoden til at løse ovennævnte blandingsproblem.

Opgave 2.20

En virksomhed har formuleret et LP - problem på følgende måde:

Der søges minimum for funktionen $z = x_1 + 3x_2 + 4x_3$

med begrænsningerne

$$2x_1 + 9x_2 + 4x_3 \geq 15, \quad x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 6, \quad x_2 + x_3 \leq 4,$$

og ikke - negativitetsbetingelserne $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

1) Omskriv problemet til normalform.

2) Formuler problemet som inddata til et passende LP-program (elsempelvis Maple eller Excel), kør programmet og giv en tolkning af udskriften.

Opgave 2.21

Benyt et passende edb - program til at finde de globale ekstremumpunkter for funktionen

$f(x, y, z) = xy + 2z$ i mængden S bestemt ved de to begrænsninger $x^2 + y^2 + z^2 = 24$ og

$$x + y + z = 0$$

STIKORD

A

B

basisløsning 40

basisskift 41

C

D

differential 10, 11, 20

differentiation

af sammensat funktion 13, 14

E

ekstremum

globalt 32

lokalt 35

F

fejlvurdering 12

G

gradient 15, 21

grafisk fremstilling 1, 3

grænseværdi 7

H

I

indgående søjle 42, 45

K

kontinuitet 8

kæderegel 13,14, 20

L

lineær programmering

Excel løsning 54

første basisløsning

ikke mulig 48

mulig 41

geometrisk løsning 38

Maple - løsning 54

normalform 40

problemstilling 37

simplexmetoden 40

M

maksimum

globalt 30

lokalt 30, 36

Maple

beregning af partielle afledede 7

beregning af stationært punkt 32

tegning af flade 2,3

tegning af niveaukurve 2,3

minimum

globalt 30

lokalt 30, 36

mulig løsning 40

mulig basisløsning 40

N

normalform 40

O

objektfunktion 30

kunstig 50

Opgaver

kapitel 1 23

kapitel 2 56

Optimering 30

i lukket begrænset mængde 32

P

partielle afledede 4, 6, 20

geometrisk tolkning 5

beregning ved Maple og TI 89 7

primale simplexmetode 40, 41

pivotelement 43

R

retningsafledede 15, 21

S

simplexmetoden

primale 40, 41

reviderede 44

simplextavle 41

slack variable 40

stationært punkt 31

T

tangentplan 9

Taylorpolynomium 17, 21

Stikord

TI 89

beregning af partielle afledede 7

beregning af stationært punkt 31

U

udgående søjle 42, 45

V