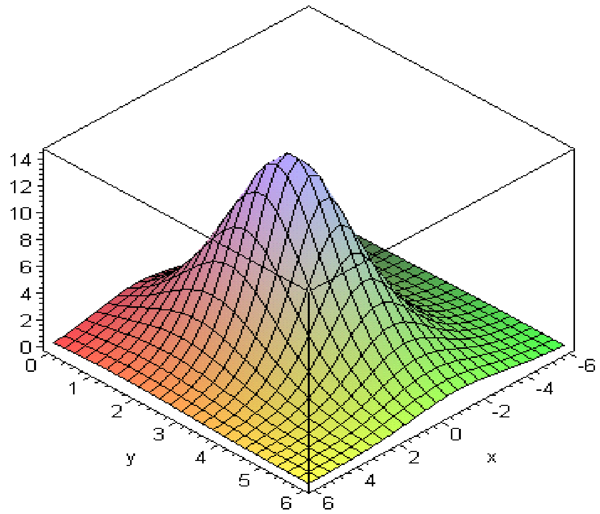
MOGENS ODDERSHEDE LARSEN

Kort indføring i

Funktioner af to og tre variable



2. udgave 2010

FORORD

Dette notat giver en kort indføring i, hvorledes man ved anvendelse af passende regnemidler og benyttelse af partielle afledede kan tegne grafer for funktioner af to variable, beregne lokale og globale ekstrema og ved hjælp af differentialer foretage fejlvurderinger
Der gives også en kort orientering om hvorledes de tilsvarende begreber kan beregnes for funktioner af tre variable

Forudsætninger: Der forudsættes et kendskab til differentialregning svarende til pensum i matematik på A- niveau
(se evt. notatet "Matematik fra C til A - niveau" der i pdf-format kan findes på adressen www.larsen-net.dk)

Endvidere kendskab til beregning af determinanter af 3. orden i en udstrækning svarende til emnet i notatet **"Matricer og lineære ligninger"** (kan også findes på ovennævnte adresse)

Regnemidler: Der bliver i eksemplerne vist, hvorledes man kan foretage beregningerne med "matematiklommeregneren" Ti 89 og edb-programmet "Mathcad"

For en mere omfattende gennemgang henvises til lærebogen "Bjarne Hellesen, Mogens Oddershede Larsen: Matematik for Ingeniører bind 2. Enkelte eksempler er også hentet herfra.
(Bøgerne kan findes på ovennævnte adresse)

januar 2012 Mogens Oddershede Larsen

INDHOLD

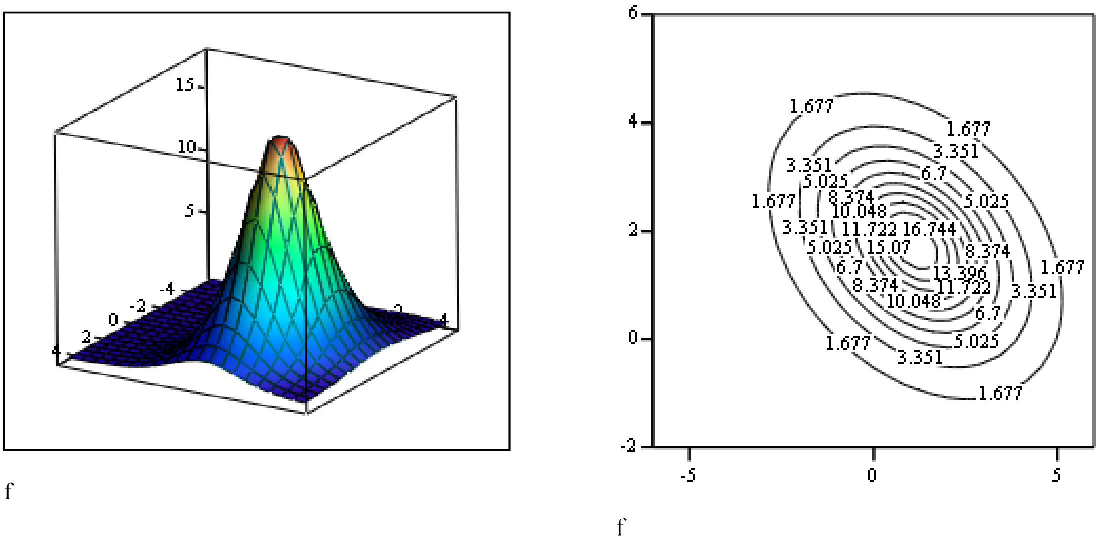
1 Funktion af 2 variable

1.1 Indledning

Funktioner af 1 variabel $y = f(x)$, deres graf i et retvinklet koordinatsystem, differentiation, bestemmelse af lokale ekstrema osv. osv. er velkendt.
Vi vil i dette kapitel se på funktioner af 2 variable $z = f(x, y)$, deres graf i et tredimensionalt koordinatsystem, differentiation og bestemmelse af lokale ekstrema.

1.2. Grafisk fremstilling.

En funktion af 2 variable $z = f(x, y)$ vil grafisk sædvanligvis kunne fremstilles i et rumligt koordinatsystem som en flade med "bakker" og "dale".
En sådan rumlig tegning kan være vanskelig at forestille sig. Man vil derfor ofte i stedet tegne "niveaukurver", som svarer til højdekurver på et geodætisk kort. Ligesom en dygtig orienterings-løber kan se landskabet for sig ved at betragte højdekurverne på et kort, kan man ved at studere niveaukurverne få et godt indtryk af fladen.
En **niveaukurve** er en punktmængde $\{(x, y | f(x, y) = k\}$ hvor $f(x, y)$ har en konstant værdi k. På figur 1.1 er der vist niveaukurver for en funktion med et lokalt maksimum samt den samme funktions 3-dimensionale udseende. På figur 1.2 er de tilsvarende figurer tegnet for et lokalt minimum, og på figur 1.3 er der tegnet en funktion med et saddelpunkt (disse begreber defineres mere præcist i et senere kapitel).



Figur 1.1 *Graf og niveaukurvediagram for funktionen* $f(x, y) = 100 \cdot e^{-\sqrt{(x-2)^2+2(y-2)^2+xy}}$

Funktioner af to eller flere variable

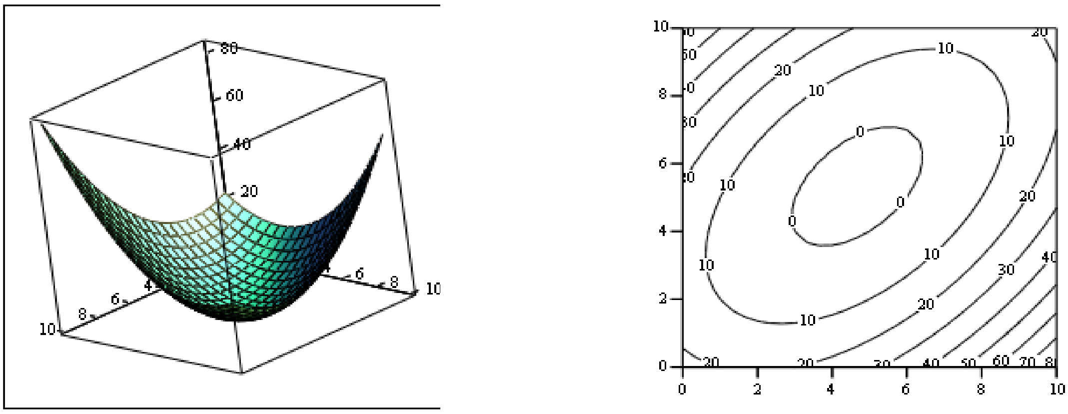
Matcad: Skriv funktionen f(x,y):= osv.

1) <u>Tredimensional graf:</u> Vælg Paletten: "Surface Plot"
   Skriv i nederste venstre hjørne f. En tredimensional graf viser sig.
   Man kan nu ændre grafens udseende på forskellig måde.
   Cursor på grafen.
   a) Højre musetast. Vælg Box og man får en "kasse" som på figuren.
   b) Tryk to gange . Der viser sig en menu, hvor man kan skifte farver osv.
      Vælges "Quick Plot Data" kan man skifte grænserne for x og y.
   c) Med venstre musetast nede kan man trække figuren rundt så man ser figuren fra en bedre retning.
2) <u>Niveaukurver:</u> Vælg paletten "Contour Plot"
   Skriv i nederste venstre hjørne f. Der tegnes nogle niveaukurver.
   Man kan nu på samme måde som under punkt 1 ændre grænser , farver osv,

Ti 89: Mode: Graph = 3D, Y= (indtast funktion), gul rude │,vælg akser m.m., F2, Vælg ZoomStd,

Se på figuren, og eventuelt: i Windows ændre xmax osv, ved piletaster ændre hvorledes grafen ses, tryk på X,Y og Z for at se i akseretninger.

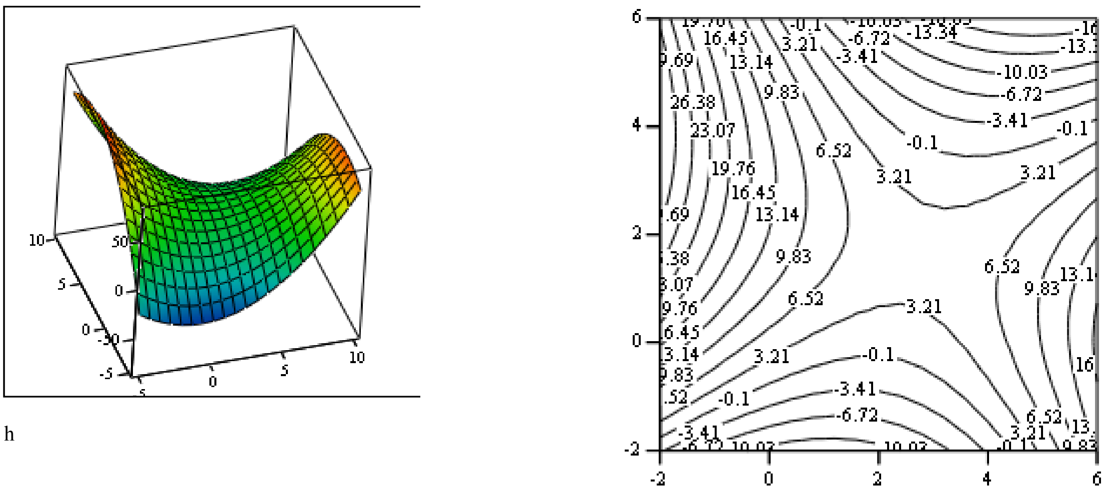
Niveaukurver : Tryk på │. Jo større Grid vælges jo mere detaljeret bliver tegningen, og jo længere tid tager det et tegne den



g g

Fig. 1.2. *Niveaukurvediagram og tredimensional graf for en funktion*

$g(x,y) = (x-2)^2 + (y-3)^2 - x \cdot y + 10$ *med minimum.*



h h

Fig. 1.3. *Niveaukurvediagram og tredimensional graf for en funktion*

$h(x,y) = (x-2)^2 - (y-3)^2 - xy + 10$ *med saddelpunkt.*

Sædvanligvis er det alt for besværligt selv at tegne en rumlig flade og dens niveaukurver. Kun hvis niveaukurverne er velkendte kurver som linier, cirkler hyperbler og parabler kan det være hensigtsmæssigt selv at skitsere fladerne. Det følgende er et eksempel herpå.

Eksempel 1.2. Grafisk fremstilling af enkle funktioner af to variable.

Der ønskes en grafisk fremstilling af funktionen $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

Løsning:

Lad $z=\sqrt{x^2+y^2}$

Først tegnes nogle niveaukurver.
Lad $a>0$ være en given konstant.

Vi har da: $z=a \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=a \Leftrightarrow x^2+y^2=a^2$

Niveaukurverne er følgelig cirkler med centrum i (0,0) se fig. 1.4.
Heraf kan sluttes, at fladen må være af form som en "rund skål" med minimum 0 i punktet (0.0).

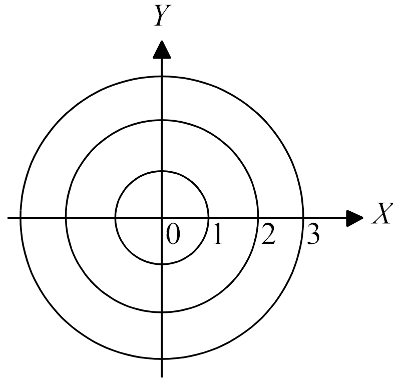


Fig. 1.4.

For at få et "tværsnit" af "skålen" skæres fladen med *xz*-planen ved at indsætte $y=0$ i ligningen $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Vi får da: $z=\sqrt{x^2} \Leftrightarrow z=|x|$ (se fig. 1.5).

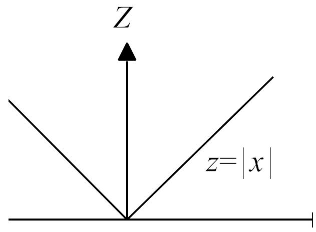


Fig. 1.5.

Vi kan nu se, at "skålen" er en kegle med spidsen nedad.

(se fig. 1.6).

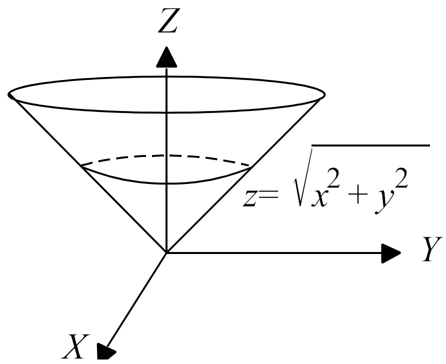


Fig. 1.6.

1.3 Partiel differentiation

Hvis man for funktionen $z = f(x, y)$ holder y konstant på værdien y_0, så vil $f(x, y_0)$ være en funktion af én variabel x.
Er denne funktion differentiabel, så kan man på sædvanlig måde finde dens aflede funktion. Denne kaldes ***f*'s partielle afledede** med hensyn til x og skrives $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$ eller $f_x(x, y_0)$.

Tilsvarende defineres ***f*'s partielle afledede** $\frac{\partial f}{\partial y}$ med hensyn til y .

Tegnet ∂ læses "blødt d" og markerer, at funktionen har flere variable. Dette indebærer nemlig, at $\frac{\partial f}{\partial x}$ (i modsætning til $\frac{d f}{d x}$) ikke uden videre kan opfattes som en brøk i beregninger.

Eksempel 1.3. Partiel differentiation

Lad funktionen f være givet ved $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 \cdot y^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x$

a) Find de to partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$

b) Find $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$.

Løsning:

a) Idet vi opfatter f som en funktion af x alene, dvs. opfatter y som en konstant, fås umiddelbart

$$\underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2}x \cdot y^2 + 0 + \frac{1}{2}}}$$

Tilsvarende fås $\underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}x^2 \cdot y + y}}$

Ti89: "differentialet *d*" står over 8-tallet :

a) $\frac{\partial f}{\partial x}$: *d*(x^2*y^2/4+y^2/2+x/2,x), $\frac{\partial f}{\partial y}$: *d*(x^2*y^2/4+y^2/2+x/2,y)

Matcad: $\frac{\partial f}{\partial x}: \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 \cdot y^2}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{x}{2}\right)\right] \rightarrow \frac{x \cdot y^2}{2} + \frac{1}{2}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}: \frac{d}{dy}\left(\frac{x^2 \cdot y^2}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{x}{2}\right) \rightarrow \frac{x^2 \cdot y}{2} + y$$

b) Ved indsættelse af $(x,y) = (0.1)$ fås $\underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \frac{1}{2}}}$ og $\underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 1}}$

Ti89: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$: *d*(x^2*y^2/4+y 2/2+x/2,x) | x=0 and y=1

Den lodrette streg findes i venstre række (betyder forudsat) og and i CATALOG

Matcad: skriv x:=0 y:=2 og derefter som under punkt a)

Såfremt det af sammenhængen klart fremgår, hvilket punkt (x,y) der er tale om, udelades det ofte af betegnelserne, således at man kun skriver $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$

Andre skrivemåder.

I stedet for $\frac{\partial f}{\partial x}$ skrives ofte f'_x eller $\frac{\partial z}{\partial x}$ når $z = f(x, y)$.

Undertiden skrives $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ hvor der forneden er angivet, hvad de andre variable er. Eksempelvis kan energien E af en gas enten opfattes som en funktion af tryk og rumfang eller som en funktion af tryk og temperatur. Derfor ville $\frac{\partial E}{\partial P}$ være et tvetydigt symbol, mens $\left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_V$ og $\left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_T$ er entydige.

1.4. Geometrisk tolkning af partielle afledede, tangentplan

De partielle afledede kan som anskueliggøres i eksempel 1.4 geometrisk tolkes som hældnings-koefficienter til tangenter.

Eksempel 1.4. Geometrisk betydning af partielle afledede.

På fig. 1.7 er tegnet grafen for $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 \cdot y^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x$ for $0 \le x \le 1$ og $1 \le y \le 2$

På figuren er k_1 skæringskurven mellem planen $y = 1$ og grafen for f mens k_2 er skæringskurven mellem planen $x = 0$ og grafen for f.

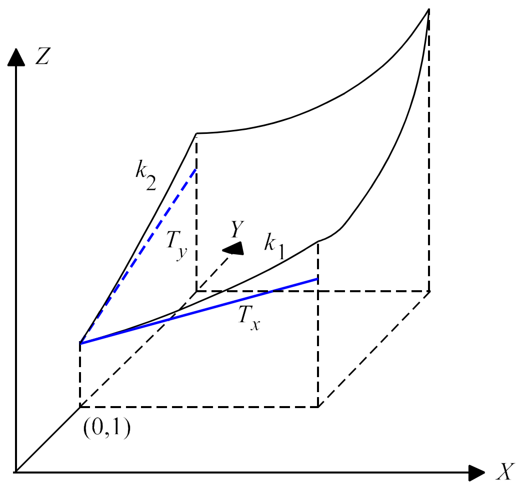


Fig. 1.7. *De to partielle differentialkvotienter i* (0,1) *er hældningskoefficienterne for tangenterne* T_x *og* T_y

.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ er hældningskoefficienten af tangenten T_x til kurven k_1 for (x,y) = (0,1)

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$ er hældningskoefficienten af tangenten T_y til kurven k_2 for (x,y) = (0,1).

Den plan, som er bestemt ved tangenterne T_x og T_y kaldes **tangentplanen** for grafen for f i punktet (0,1).

Tangentplan

Lad funktionen *f* være differentiabel i et punkt (x_0, y_0) og lad $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Lad k_1 være skæringskurven mellem planen $y = y_0$ og grafen for f, og T_x være tangenten til k_1 med røringspunkt i (x_0, y_0).
Tilsvarende er k_2 er skæringskurven mellem planen $x = x_0$ og grafen for *f* og T_y er tangenten til k_2.

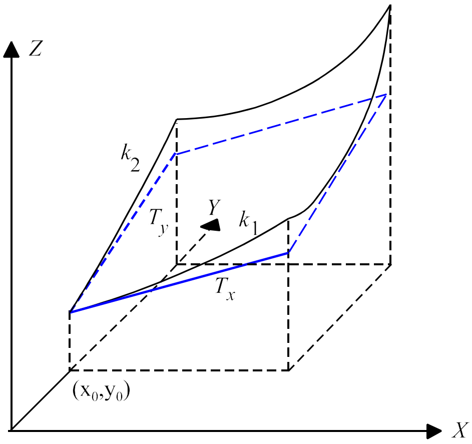


Fig. 1.8. *Tangentplan i* (x_0, y_0)

Den plan, som er bestemt ved tangenterne T_x og T_y kaldes **tangentplanen** for grafen for *f* i punktet (x_0, y_0).

Ligningen for tangentplan $\boxed{z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)}$

Bevis:

Lad for kortheds skyld $f_x' = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ og $f_y' = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

Da f_x' er hældningskoefficienten for tangenten T_x til kurven k_1 har en retningsvektor for T_x koordinaterne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x' \end{pmatrix}$

Tilsvarende er $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y' \end{pmatrix}$ retningsvektor for T_y. En normalvektor til tangentplanen er følgelig $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_x' \\ -f_y' \\ 1 \end{pmatrix}$

Planens ligning bliver derfor $-f_x' \cdot (x - x_0) - f_y' \cdot (y - y_0) + 1 \cdot (z - z_0) = 0$

Eksempel 1.5. Tangentplan

Lad der være givet funktionen $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 \cdot y^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x$.

Find ligningen for tangentplanen til funktionen *f* i punktet (0,1).

Løsning:

I eksempel 1.3 fandt man for funktionen $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 \cdot y^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x$ at $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \frac{1}{2}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 1$. Idet $f(0,1) = \frac{1}{2}$ fås ligningen: $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x - 0) + 1 \cdot (y - 1) \Leftrightarrow \underline{\underline{z = \frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}}}$

1.5. Partielle afledede af højere orden.

Har *f* partielle afledede af første orden i definitionsmængden *D*, kan $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ igen opfattes som funktioner af to variable i *D*. Hvis disse nye funktioner selv har partielle afledede, siges *f* at have **partielle afledede af anden orden** i *D*. Disse skrives

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ og } \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

For de to sidste "blandede" afledede gælder, at de "sædvanligvis"[1] er ens, dvs. $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$

Eksempel 1.6. Partielle afledede af anden orden

I eksempel 1.3 fandt man for funktionen $f(x,y)=\frac{1}{4}x^2\cdot y^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x$ de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{2}x\cdot y^2+\frac{1}{2} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{2}x^2\cdot y+y$$

a) Find de partielle afledede af anden orden for funktionen *f*.
b) Find værdierne af ovennævnte partielle afledede i punktet $(x,y) = (0.1)$.

Løsning:

a) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}x^2y+y\right)=x\cdot y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x^2y+y\right)=\frac{1}{2}x^2+1$$

Da de blandede anden aflede er ens, er det unødvendigt at beregne den anden kombination

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

TI89; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$: *d*(*d*(x^2*y^2/4+y 2/2+x/2,x,x), $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$: *d*(*d*(x^2*y^2/4+y 2/2+x/2,x,y),

Matcad: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$: $\left[\frac{d^2x}{dx^2}\left(\frac{x^2\cdot y^2}{4}+\frac{y^2}{2}+\frac{x}{2}\right)\right]$

b) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1)=\frac{1}{2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1)=1,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,1)=1,$$

Ti89: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (0,1): *d*(*d*(x*e^(2*y)+cos(x/(y^2+1)),x,x) | x=0 and y=1

Matcad: skriv x:=0 y:=1 og derefter som under punkt a)

◆

[1] Dette gælder for alle funktioner som er dannet af de sædvanlige stamfunktioner

Analogt defineres partielle afledede af højere end anden orden, og også for disse kan differentiationernes rækkefølge normalt vælges vilkårligt, f.eks.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x^2}$$

1.6. Lokalt ekstremum

Lad P_0 være et indre punkt i definitionsmængden D for en funktion f og $M \subset D$ være en omegn af P_0. Hvis $f(P_0) \le f(P)$ for alle punkter P i M, så kaldes denne værdi for f's **lokale minimum**, og P_0 for et lokalt minimumspunkt.
Hvis $f(P_0) \ge f(P)$ for alle punkter P i M, så kaldes denne værdi for f's **lokale maksimum**,
Ved et **lokalt ekstremum** forstås enten et lokalt maksimum eller et lokalt minimum.

Er $f(P_0) \le f(P)$ for alle punkter P i definitionsmængden D, så kaldes denne værdi for f's globale minimum eller **mindsteværdi**, og er $f(P_0) \ge f(P)$ for alle punkter P i definitionsmængden D, så kaldes denne værdi for f's globale maksimum eller **størsteværdi**.

Nedenstående figurer leder os ind på, at det som et led i ekstremumsbestemmelser kan være nyttigt at se på punkter, hvor grafen har "vandret tangent(plan)" - såkaldte stationære (eller kritiske) punkter.

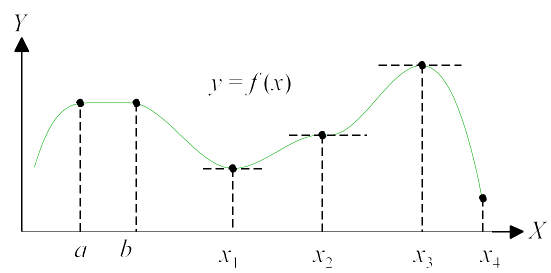


Fig. 1.9. *Stationære punkter*

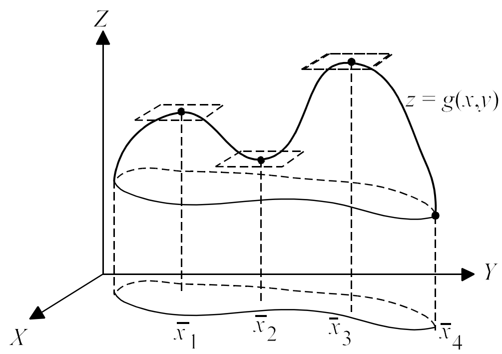


Fig 1.10. *Stationære punkter*

På figurerne har f (og g) vandret tangent (tangentplan) i x_1 $(\bar{x}_1)$, x_2 $(\bar{x}_2)$ og x_3 $(\bar{x}_3)$, globalt maksimum i x_3 $(\bar{x}_3)$ og globalt minimum i x_4 $(\bar{x}_4)$
Endvidere er grafen for f vandret mellem a og b .

Fra differentiable funktioner af én variabel vides, at man finder de stationære punkter for en funktion f ved at finde de værdier for hvilke $f'(x) = 0$
Man kan endvidere bestemme om et stationært punkt er lokalt maksimumspunkt eller minimumspunkt ved at lave en fortegnsdiskussion af $f'(x)$ (se figur 1.11)

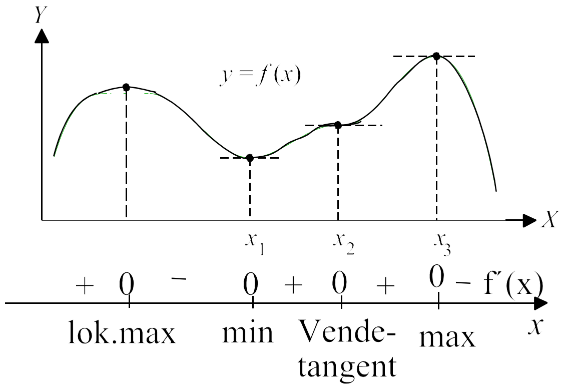


Fig 1.11 *Fortegnsdiskussion for* $f(x)$

Imidlertid kan man som regel også afgøre arten af et stationært punkt ved at betragte de afledede af 2. orden i punktet.
Der gælder nemlig følgende:
Lad x_0 være et stationært punkt for en funktion f (dvs. $f'(x_0) = 0$).

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ er et lokalt minimumspunkt

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ er et lokalt maksimumspunkt

$f''(x_0) = 0$ nærmere undersøgelse må foretages

For differentiable funktioner af 2 variable vil man tilsvarende se på de punkter hvor funktionen *f* har vandret tangentplan, dvs. hvor de partielle afledede er 0.

Definition af stationært punkt.
Lad *f* være en differentiabel funktion af 2 variable med definitionsmængde *D*.
Et indre punkt (x_0, y_0) i S kaldes et stationært punkt for *f*, hvis

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Eksempel 1.7 Stationære punkter.
En funktion f er givet ved $f(x, y) = x^2 y - x^3 - 2x^2 + 3y^2 + 8y - 2$
Find de stationære punkter for *f*.
Løsning:
De stationære punkter for f findes af ligningssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - 3x^2 - 4x = 0 & (1) \\ x^2 + 6y + 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

I ligning (1) kan *x* sættes udenfor en parentes.
Vi får: $x \cdot (2y - 3x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2y - 3x - 4 = 0$

Tilfælde 1: Indsættes $x = 0$ i ligning (2), fås $0 + 6y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}$.

Stationært punkt: $\underline{\underline{(x, y) = \left(0, -\frac{4}{3}\right)}}$

Tilfælde 2: Ligningen $2y - 3x - 4 = 0$ løses med hensyn til y og indsættes i ligning (2).

$y = \frac{3x-4}{2}$ indsættes:

$$x^2 + 6\left(\frac{3x-4}{2}\right) + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 9x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 20}}{2} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = -5$$

Stationære punkter ($(x, y) = \underline{\underline{(-4, -4)}} \vee (x, y) = \underline{\underline{\left(-5, -\frac{11}{2}\right)}}$

TI89:

Funktionen defineres x^2*y - x^3 - 2*x^2 + 3*y^2 + 8*y - 2 STO f(x,y) ENTER
F2: solve(*d* (f(x,y),x)=0 and *d* (f(x,y),y)=0,{x,y})
Resultat: x=-4 and y=_11/2 or x=-4 and y = -4 or x=0 and y=-4/3
Bemærk: *d* findes over 8 tast og “and” i CATALOG

Matcad: f(x,y) := $x^2 y - x^3 - 2x^2 + 3y^2 + 8y - 2$

x:=1 y:=1 (startværdier)
Given

$\frac{d}{dx} f(x, y) = 0$ boolsk lighedstegn

$\frac{d}{dy} f(x, y) = 0$

Find(x,y) $\rightarrow$

◆

Skal man skaffe sig et overblik over en funktions "udseende", kan det være nødvendigt at se på kende arten af de stationære punkter, dvs. vide om de er lokale maksima, minima eller såkaldte saddelpunkter.

Da man jo ikke kan lave en fortegnsdiskussion på en funktion af 2 variable, må man i stedet betragte de partielt afledede af anden orden.
Der gælder følgende sætning som anføres uden bevis:

Sætning 1.1 (undersøgelse af arten af et stationært punkt).

Lad (x_0, y_0) være et stationært punkt for en differentiabel funktion *f*, og sæt

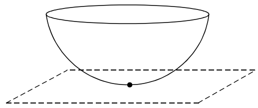
$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad \text{og} \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

Lad determinantligningen $\begin{vmatrix} A - z & B \\ B & C - z \end{vmatrix} = 0$

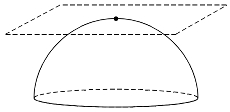
have rødderne z_1 og z_2

Der gælder da

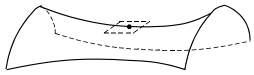
1a) z_1 og z_2 positive: f har lokalt minimum i (x_0, y_0)



1b) z_1 og z_2 negative: f har lokalt maksimum i (x_0, y_0)



2) z_1 og z_2 forskelligt fortegn: f har intet lokalt ekstremum i (x_0, y_0)



3) $z_1 = 0$ og/eller $z_2 = 0$: Nærmere undersøgelse må foretages.

Eksempel 1.8. Lokale ekstrema

a) Find de stationære punkter for funktionen f givet ved $f(x, y) = x^4 + 2x^2 - 2x^2 y + \frac{4}{5}y^2$

b) Afgør for hver af ovennævnte stationære punkter, om det er et lokalt maksimumspunkt, lokalt minimumspunkt eller saddelpunkt.

Løsning:

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 4x - 4xy$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2 + \frac{8}{5}y$

$$\begin{cases} 4x^3 + 4x - 4xy = 0 \\ -2x^2 + \frac{8}{5}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\underline{(x, y) = (0,0) \vee (x, y) = (2,5) \vee (x, y) = (-2,5)}}$$

(Ti 89 eller Matcad benyttet)

b)

	(0, 0)	(2, 5)	(-2, 5)
$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4y + 4$	4	32	32
$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4x$	0	-8	8
$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{8}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{5}$

(0,0): $\begin{vmatrix} 4-z & 0 \\ 0 & \frac{8}{5}-z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z = 4 \vee z = \frac{8}{5}$ Lokalt minimum

(2, 5): $\begin{vmatrix} 32-z & -8 \\ -8 & \frac{8}{5}-z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (32-z)\left(\frac{8}{5}-z\right) - 64 = 0 \Leftrightarrow z = -0.38 \vee z = 33.9$ Saddelpunkt

(-2, 5): $\begin{vmatrix} 32-z & 8 \\ 8 & \frac{8}{5}-z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (32-z)\left(\frac{8}{5}-z\right) - 64 = 0 \Leftrightarrow z = -0.38 \vee z = 33.9$ Saddelpunkt

◆

1.7 Globalt ekstrema

Ved optimeringsproblemer er man interesseret i at finde et globalt ekstremum for et konkret problem.
Følgende eksempel illustrerer fremgangsmåden, som jo er nært beslægtet med de tilsvarende problemer for funktion af 1. variabel.

Eksempel 1.9. Optimering

En retvinklet kasse uden låg skal have et rumfang på 32m^3. Kassen skal konstrueres således, at dens overflade bliver mindst (mindst materialeforbrug).
Find kassens optimale dimensioner.

Løsning:

1) **Optimeringsproblemet opstilles.**

Lad længde, bredde og højde af kassen være x, y og z. Vi har da
Find det globale minimum (mindsteværdi) for funktionen $g(x,y,z) = 2xz + 2yz + xy$ i mængden S givet ved begrænsningen

$$xyz = 32, \quad , \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

2) **Problemet reduceres.**

Begrænsningsligningen benyttes til at reducere antallet af variable.

$xyz = 32 \Leftrightarrow z = \frac{32}{xy}$. Ved indsættelse af $z = \frac{32}{xy}$ i g og de øvrige begrænsninger fås

$$2x\frac{32}{xy} + 2y\frac{32}{xy} + xy = \frac{64}{y} + \frac{64}{x} + xy,$$

$$x > 0, \quad y > 0, \quad \frac{32}{xy} > 0.$$

Problemet kan derfor nu reduceres til

Find det globale minimum (mindsteværdi) for funktionen $f(x,y) = \frac{64}{x} + \frac{64}{y} + xy$ i mængden S_1 givet ved begrænsningerne $0 < x, \ 0 \le y$ (1. kvadrant)

3) De mulige ekstremumspunkter bestemmes.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow -\frac{64}{x^2} + y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{64}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow -\frac{64}{y^2} + x = 0 \quad (1)$$

Indsættes $y = \frac{64}{x^2}$ i ligning (1) fås

$$-\frac{64}{\left(\frac{64}{x^2}\right)^2} + x = 0 \Leftrightarrow -\frac{x^4}{64} + x = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 64x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

Da x > 0 er kun $x = 4$ en løsning. Ved indsættelse af $x = 4$ i $y = \frac{64}{x^2}$ fås $y = 4$

Samlet har vi altså fundet 1 stationært punkt (4,4).

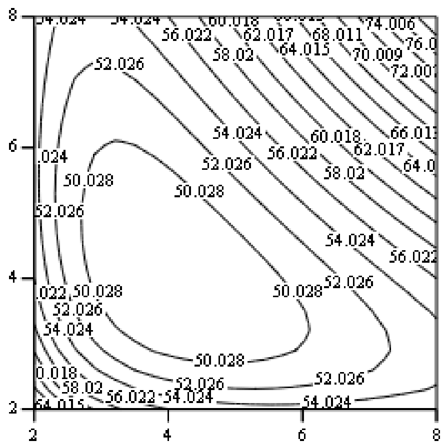
4) Vurdering af, at det stationære punkt er et globalt minimumspunkt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2 \cdot 64}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2 \cdot 64}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

Indsættes (4,4) fås A = 2, B = 1 , C = 2

$$\begin{vmatrix} 2-z & 1 \\ 1 & 2-z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-z)^2 = 1 \Leftrightarrow 2 - z = \pm 1 \Leftrightarrow z = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$$

Heraf ses, at funktionen har et lokalt minimum i punktet (4,4)
At det også er et globalt minimumspunkt synes rimeligt, da det er det eneste stationære punkt i definitionsmængden. Endvidere ses at $x \to 0 \vee y \to 0 \vee x \to \infty \vee y \to \infty$ så går $f(x,y) \to \infty$
Anvendes Matcad til at tegne niveaulinierne for funktionen fås følgende tegning:



For at få tal frem, så
Sæt cursor på figur, Tryk to gange, Vælg Special, number, og slet markering ved Autocontour

f

Heraf ses, at funktionen har globalt minimum i (4,4) .
<u>Dimensionerne er x = 4 m, y = 4 m og z = 2 m</u>

1.8 Grænseværdi, kontinuitet, differentiabilitet

De følgende definitioner på grænseværdi, kontinuitet og differentiabilitet er generaliseringer af tilsvarende begreber for funktion af 1 variabel.

Lad $f(x,y)$ have definitionsmængden D. Lad endvidere a være et reelt tal i D

Grænseværdi: Hvis $f(x,y)$ er vilkårlig tæt på a, blot (x, y) er tilstrækkelig tæt på (x_0,y_0) (og $(x,y) \in D$), siger vi, at $f(x, y)$ har grænseværdien a for (x, y) gående mod (x_0,y_0) .

Skrives: $f(x,y) \to a$ for $(x,y) \to (x_0,y_0)$

For en præcis definition se :Matematik for ingeniører bind2 side 10.

Kontinuitet: f er kontinuert i (x_0,y_0) , hvis $f(x,y) \to f(x_0,y_0)$ for $(x,y) \to (x_0,y_0)$

Intuitivt kan man forestille sig kontinuerte funktioner som funktioner, hvis graf er "ubrudt". På figur 1.8 er vist nogle ikke-kontinuerte funktioners grafer.

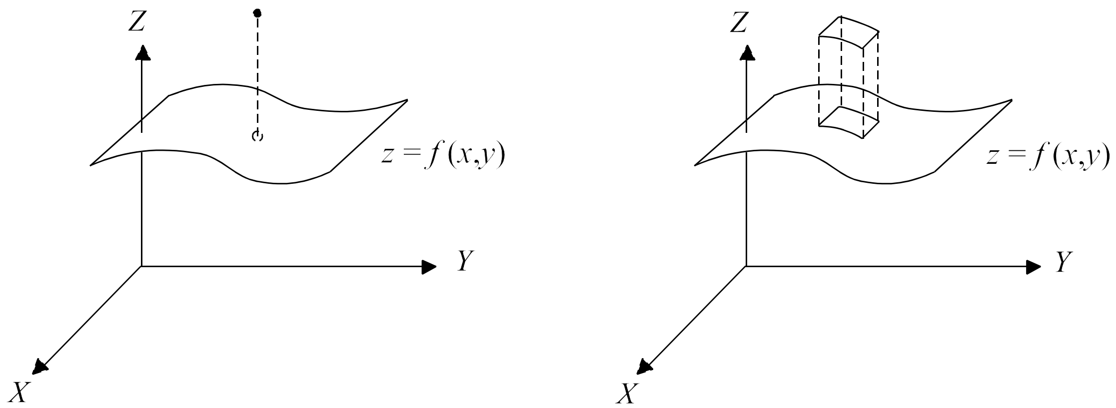


Fig. 1.12. *Nogle ikke-kontinuerte funktioners grafer.*

På basis af disse definitioner, kan man vise følgende sætninger, som gør, at det er nemt at afgøre om en funktion af flere variable er differentiabel.

Sætning 1.2

Har en funktion f kontinuerte partielle afledede i en åben mængde D, da er f differentiabel i D (og dermed også kontinuert).

Til at afgøre om en funktion er kontinuert gælder følgende:

Sætning 1.3.

Enhver funktion, der ved "sædvanlig regning" $(f+g, f-g, f\cdot g, \frac{f}{g}, f\circ g)$ kan dannes ud fra standardfunktionerne (exp, ln, potens, sin, cos, osv.), blive kontinuert i sin definitionsmængde.

1.9. Differential

Differential for funktion af 1 variabel

Følger vi grafen for en differentiabel funktion $y = f(x)$ fra et punkt med abscissen x_0 til et punkt med abscissen $x_0 + \Delta x$ bliver funktionstilvæksten $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ jævnfør figur figur 1.11.

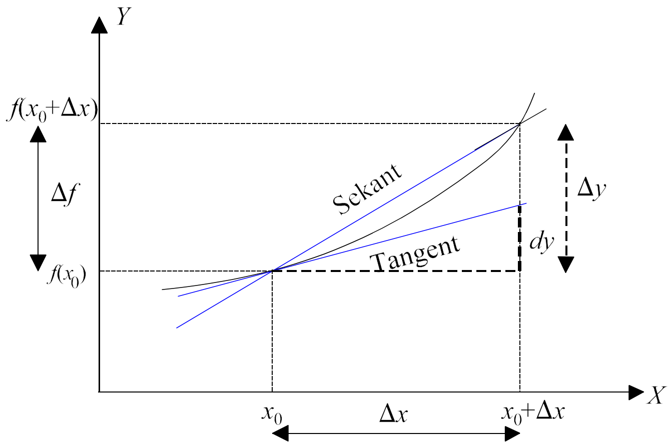


Fig. 1.13. *Tilvækst i tangents retning*

I stedet for at følge grafen fra x_0 til $x_0 + \Delta x$ kunne vi som en tilnærmelse følge tangenten i x_0.
I så fald bliver y - tilvæksten $f'(x_0) \cdot \Delta x$ som kaldes differentialet *dy* eller *df*.
For den afhængige variabel *x*, gælder $\Delta x = dx$
(betragtes den identiske funktion $f(x) = x$ får vi nemlig $df = dx = 1 \cdot \Delta x$, dvs. $dx = \Delta x$)
Vi har derfor $df = f'(x_0)dx$.

Divideres med *dx*, fås den kendte sammenhæng $\frac{df}{dx} = f'$.

Bemærk, at man altid gerne må dividere med *dx*, når blot $dx \neq 0$.
Navnet differentialkvotient betyder netop en kvotient mellem differentialer.

Eksempel 1.10. Differential

Find differentialet af funktionen $f(x) = 5x^4$

Løsning:

Differentialet $df = f'(x)dx = \underline{\underline{20x^3 dx}}$

◆

Differential for funktion af 2 variable

Lad funktionen *f* være differentiabel i et punkt (x_0, y_0) og lad $z_0 = f(x_0, y_0)$.
Går vi fra punktet (x_0, y_0) til punktet $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ bliver funktionstilvæksten $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ jævnfør figur 1.9.
I stedet for af følge grafen for *f*, kunne vi som en tilnærmelse følge tangentplanen i (x_0, y_0) d.v.s. den plan der udspændes af tangenterne AB og AD på figur 1.12.

Da tangentplanen har ligningen $z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$

bliver z-tilvæksten $z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y$

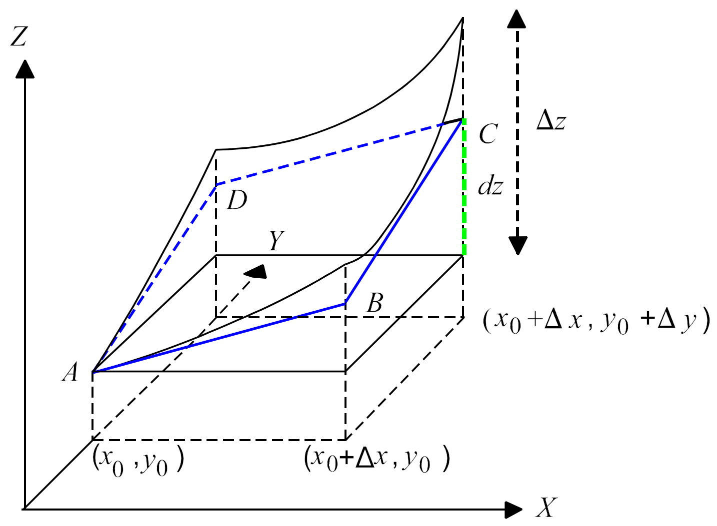


Fig. 1.14. *Differential dz*

Denne z-tilvækst, som fås ved at følge tangentplanen, kaldes differentialet df eller dz.

Ligesom for funktioner af 1 variabel gælder, at man kan erstatte Δx med dx og Δy med dy,

hvorved differentialet kan skrives $\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}$

Ved visse anvendelser kaldes differentialet for det "totale differential" af f.

Eksempel 1.11. Differential

Lad funktionen f være givet ved $z = f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 \cdot y^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x$

1) Beregn Δz når punktet (x,y) ændrer sig fra (2,1) til (2.03, 0.98)
2) Beregn dz når punktet (x,y) ændrer sig fra (2,1) til (2.03, 0.98)

Løsning:

1) $\Delta z = f(2.03, 0.98) - f(2,1) = 2.48463 - 2.5 = \underline{\underline{-0.0153}}$

2) $dz = \left(\frac{1}{2}x_0 \cdot y_0^2 + \frac{1}{2}\right)dx + \left(\frac{1}{2}x_0^2 y_0 + y_0\right)dy$ hvor $x_0 = 2, y_0 = 1$, $dx = 0.03$ og $dy = -0.02$

$dz = 1.5 \cdot 0.03 + 3 \cdot (-0.02) = \underline{\underline{-0.0150}}$

Fejlvurdering.

Ved enhver måling kan den fysiske størrelse aldrig måles eksakt. Målingen behæftes altid med en vis usikkerhed. Det kan skyldes usikkerhed på objektet, måleinstrumentet, brugeren af instrumentet osv.
Systematiske fejl er fejl, hvor man eksempelvis har glemt at korrigere for temperaturens indflydelse på måling af et stofs hårhed.
Er målingen befriet for systematiske fejl, er der kun tilbage "tilfældige fejl".
Eksempelvis vil der ofte på et instrument være anført en "instrumentusikkerhed", som viser hvor nøjagtigt instrumentet kan måle.
En sådan usikkerhed kan eksempelvis findes ved at man foretager en måling flere gange eventuelt af forskellige personer.

Maksimal fejl eller usikkerhed

Den maksimale usikkerhed Δx er så defineret som den numerisk største afvigelse mellem en målt værdi og gennemsnittet.
Er eksempelvis en temperatur angivet som $30.45^0 \pm 0.05$ menes hermed, at i værst tænkelige tilfælde kunne målingen være 30.40^0 eller 30.50^0 .

Relativ fejl eller relativ usikkerhed

Ved den relative fejl (usikkerhed) på en størrelse x forstås størrelsen $\dfrac{\Delta x}{x}$

Eksempel 1.12. Maksimal og relativ fejl

Lad $x = 153 \pm 1\text{m}$ og $y = 25 \pm 2$ m
a) Find den maksimale fejl Δz på $z = x - y$
b) Find den relative fejl på z.
Løsning:
Det ses umiddelbart, at z = 153 -25 = 128 og
a) $\Delta z = 1+2 = \underline{\underline{3}}$ m dvs. $z = 128 \pm 3$ m
b) $\text{rel}(z) = \dfrac{3}{128} = 0.0254 = \underline{\underline{2.34\%}}$ ◆

Den maksimale fejl (eller usikkerheden) på to størrelser kan jo godt være den samme , f.eks. 1 cm, men hvis den ene størrelse er usikkerheden på diameteren af et rør på 10 cm og den anden er højden på et hus, så er det klart, at det er den relative usikkerhed, der siger mest.

Fejlberegning ved anvendelse af differentialer.

Ved mere komplicerede udtryk er det ikke som i eksempel 1.12 muligt direkte at beregne den maksimale usikkerhed. Man må så i stedet erstatte benytte differentialet ved beregningen. Det svarer jo til, at man erstatter funktionen med dens tangentplan. Dette er tilladeligt når blot usikkerhederne Δx og Δy er små.
Der gælder følgende:

Fejlberegning

Den maksimale absolutte fejl Δ z for funktionen $z = f(x, y)$ i punktet ((x_0, y_0) er

$$\Delta z \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right|\Delta y$$ forudsat fejlene Δ x og Δ er små

Koefficienterne $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ kaldes så f's følsomhed overfor fejl på henholdsvis x og y.

Eksempel 1.13. Fejlvurdering.
Et cylindrisk hul med radius r og højde h bores i en metalblok.
Man ved, at r = 3 $\pm$ 0.1 cm og h = 20 $\pm$ 0.2 cm
1) Find den maksimale absolutte fejl på hullets volumen V
2) Find den maksimale relative fejl på V
3) Har V størst følsomhed overfor r eller overfor h?

Løsning.
$V = \pi \cdot r^2 h$. Differentialet på V er $dV = \pi \cdot r^2 dh + 2\pi \cdot r \cdot hdr$
1) Den maksimale absolutte fejl på hullets volumen V:

$$|\Delta V| = |\pi \cdot 3^2|\Delta h + |2\pi \cdot 3 \cdot 20|\Delta r = 9\pi \cdot 0.2 + 120\pi \cdot 0.1 = 43.35 \approx \underline{\underline{43.4}}$$

2) V = 565.487.

Den maksimale relative fejl er $\left|\frac{dV}{V}\right| = \underline{\underline{7.7\%}}$

3) V har størst følsomhed over for fejl på r, da $\frac{dV}{dr} = \pi \cdot 120 > \frac{dV}{dh} = \pi \cdot 3^2$

Formlen er ikke mere kompliceret end man kan regne den maksimale fejl direkte
$\Delta V = \pi \cdot 3.1^2 \cdot 20.2 - \pi \cdot 3^2 \cdot 20 = 44.37 \approx 44.4$

2. Funktion af mere end 2 variable

De definitioner og begreber som er gælder for funktioner af 2 variable kan umiddelbart generaliseres til funktioner af 3 og flere variable.

Grafisk fremstilling

Grafen for en funktion af 3 variable $f(x,y,z)$ kan naturligvis ikke tegnes i et 4-dimensionalt rum. Derimod er det muligt at tegne en niveauflade hvor $f(x,y,z)$ har en konstant værdi k. Eksempelvis er en såkaldt orbital eller bølgefunktion $\Psi(x,y,z)$ for et atom anskueliggjort ved en niveauflade for $|\Psi|$ på figur 2.1. (Orbitaler spiller en stor rolle for forståelsen af atomers og molekylers egenskaber).

Et andet eksempel er nogle kugleformede niveauflader for tyngdepotentialet $\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ omkring jorden vist på figur 2.2.

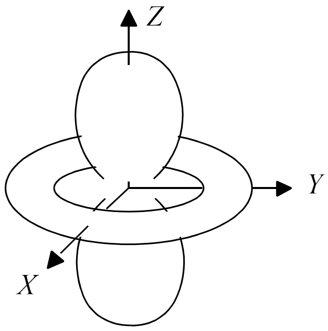


Fig. 2.1. *Niveauflade for en atomorbital* $\Psi(x,y,z)$

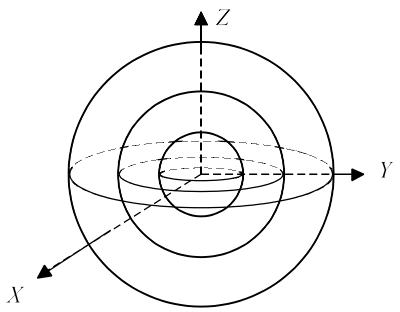


Fig. 2.2. *Niveauflader for tyngdepotentialet omkring jorden*

Begreberne fra kapitel 2 kan umiddelbart kan generaliseres fra 2 til flere variable.
Eksempelvis gælder for en funktion af 3 variable analogt med funktion af 2 variable:

Sætning 2.1 Art af lokalt ekstremum for funktion af 3 variable

Lad $\bar{a}=(x_0,y_0,z_0)$ være et stationært punkt for en differentiabel funktion f af 3 variable.

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0),\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0)\quad \text{og}\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

Lad determinantligningen
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{a})-u & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(\bar{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{a})-u & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(\bar{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\bar{a})-u \end{vmatrix}=0$$

have rødderne u_1, u_2 og u_3.

Der gælder da

1) z_1, z_2 og z_3 alle positive: f har lokalt minimum i $\bar{a}=(x_0,y_0,z_0)$
2) z_1, z_2 og z_3 alle negative: f har lokalt maksimum i (x_0,y_0)

3) z_1, z_2 og z_3 har ikke samme fortegn: f har intet lokalt ekstremum i (x_0, y_0)

4) Hvis én eller flere af rødderne z_1, z_2 og z_3 er 0 og de øvrige har samme fortegn, : Nærmere undersøgelse må foretages.

Eksempel 2.1. Funktion af 3 variable

Lad funktionen f være bestemt ved $f(x,y,z) = e^{x^2+2y^2+z^2-4x-12y-2z+23}$

a) Find de partielle afledede for funktionen f

b) Find de stationære punkter for f

c) Undersøg arten af de stationære punkter fundet i spørgsmål b)

Løsning:

I det følgende skrives for kortheds skyld $e^{x^2+2y^2+z^2-4x-12y-2z+23} = e^a$

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (2x-4)e^a$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = (4y-12)e^a$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = (2z-2)e^a$

b) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$ Stationært punkt (x, y, z)=(2, 3,1)

c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(2 + (2x-4)^2\right)e^a$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(4 + (4y-12)^2\right)e^a$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left(2 + (2z-2)^2\right)e^a$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (2x-4)(4y-12)e^a$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = (2x-4)(2z-2)e^a$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = (4y-12)(2z-2)e^a$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,3,1) = 2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,3,1) = 4$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(2,3,1) = 2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,3,1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(2,3,1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(2,3,1) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-u & 0 & 0 \\ 0 & 4-u & 0 \\ 0 & 0 & 2-u \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow u = 2 \vee u = 4 \vee u = 2$$

Heraf ses, at f har et lokalt minimum i punktet (x, y, z)=(2, 3,1)

Opgaver

Opgave 1.1

Lad *f* være en funktion givet ved $f(x,y)=x^2y$

a) Tegn i et rumligt koordinatsystem grafen for funktionen *f* ved anvendelse af et matamatikprogram
b) Tegn niveaukurverne for funktionen *f* og afgør herudfra om funktionen har noget lokalt minimum? - lokalt maksimum? - saddelpunkt?

Opgave 1.2

Man er interesseret i grafisk fremstilling af funktionen $f(x,y)=x^2+y^2-1$. Der ønskes hovedsageligt betragtet punkter, hvor $f(x,y)\le 3$ og der lægges ikke vægt på nøjagtighed, men på principielle træk. Såvel positive som negative *x*- og *y*-værdier betragtes.

a) Tegn i et rumligt koordinatsystem grafen for funktionen *f* ved anvendelse af et matamatikprogram
b) Tegn niveaukurverne for funktionen f og afgør herudfra om funktionen har noget lokalt minimum? - lokalt maksimum? - saddelpunkt?

Opgave 1.3

Lad *f* være en reel funktion af to variable givet ved $f(x,y)=\frac{4}{3}\sqrt{9-x^2-y^2}$.

1) Angiv f 's definitionsmængde (skitsér den i *xy* - planen).
2) Skitsér i et *xy* - koordinatsystem *f* 's niveaukurver svarende til niveauerne 0, 1, 2, 3 og 4.
3) Skitsér i et *xz* - koordinatsystem skæringskurven mellem *f* 's graf og planen y = 0.
4) Skitsér grafen for *f* i et *xyz* - koordinatsystem, således at man får et indtryk af grafens 3-dimensionale udseende.

Opgave 1.4

Man er interesseret i grafisk fremstilling af funktionen $f(x,y)=y^2-x^2$.

Der ønskes hovedsageligt betragtet punkter, hvor $-2\le x\le 2\wedge -2\le y\le 2\wedge -2\le f(x,y)\le 2$, og der lægges ikke vægt på nøjagtighed, men på principielle træk.

a) Tegn i et rumligt koordinatsystem grafen for funktionen *f* ved anvendelse af et matamatikprogram
b) Tegn niveaukurverne for funktionen f og afgør herudfra om funktionen har noget lokalt minimum? - lokalt maksimum? - saddelpunkt?

Opgave 1.5

Find de partielle afledede af første og anden orden for følgende funktioner

1) $f(x,y)=x^3y^2+2x^2y+4$ 2) $f(x,y)=\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$ $(x>y)$

3) $f(x,y)=\sqrt{e^{3x-y}}$ 4) $f(x,y)=\ln\left(\sqrt{1+x^2y^4}\right)$

Opgave 1.6
Find ligningen for tangentplanen for
1) $f(x,y) = x^2 y - xy^2$ i punktet (x,y) = (-2,3)
2) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ i punktet (x,y) = (2, -1)

Opgave 1.7
Find de stationære punkter for funktionerne
1) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$
2) $f(x,y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6$
3) $f(x,y) = x \cdot \cos(y) - x^2, \quad y \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right[$
4) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 5x + 2y - 8$

Opgave 1.8
Lad virkningsgraden for en motor være givet tilnærmet ved $f(x,y) = x^3 - y^3 - 3xy - 0.2$,hvor x og y er to variable.
1) Find de partielle afledede af 1. og 2. orden af f.
2) Find de partielle afledede af 1. og 2. orden af f i punktet (-1,1).
3) Er punktet (-1,1) et lokalt maksimumspunkt.

Opgave 1.9.
Find alle lokale maksimums- og minimumspunkter for følgende funktioner:
1) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$
2) $f(x,y) = x^2 + y^4 + 4xy$
3) $f(x,y) = xy + y^3$
4) $f(x,y) = x^2 + y^3 + 2x$
5) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 3x$
6) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^3 + 5y^2$
7) $f(x,y) = x^4 - 8x^2 + 4xy^2 + 4y^2$
8) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$
9) $f(x,y) = \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2}$
10) $f(x,y) = 2x^2 y + xy^2 - 6xy$

Opgave 1.10.
Vis, at funktionen f givet ved $f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 4x^2 - 8y^2$ har 5 stationære punkter og afgør for hvert, om det er et lokalt maksimumspunkt, lokalt minimumspunkt eller saddelpunkt.

Opgave 1.11.

a) Find samtlige stationære punkter for funktionen $f(x,y) = x^2y - 2x^2 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2$

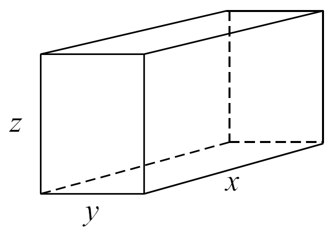
b) Betragt de stationære punkter (x,y) for hvilke $y \le 0$. Afgør for hvert af disse punkter, om punktet er et lokalt maksimumspunkt, et lokalt minimumspunkt eller et saddelpunkt.

Opgave 1.12.

Find de stationære punkter for funktionen $f(x,y) = \left(x^2 - y^2\right)^2 + 2x^2 - \frac{1}{5}y^2$ og afgør for hvert, om det er et lokalt maksimumspunkt, lokalt minimumspunkt eller saddelpunkt.

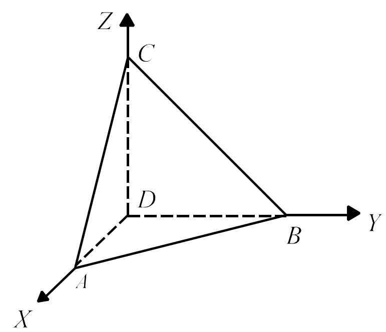
Opgave 1.13

En kasseformet tank skal konstrueres, så den får et rumfang på 2000 m^3. Bund, sider og låg koster henholdsvis 4000 kr./m^2, 2000 kr./m^2 og 1000 kr./m^2. Dimensionér tanken således, at prisen bliver mindst, idet dog ingen af kanterne må overstige 20 m.



Opgave 1.14.

En plan har ligningen $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, hvor $a > 2,\ b > 4$ og $c > 5$. Planen skærer koordinatakserne i punkterne A, B og C (se figuren). Koordinatsystemets begyndelsespunkt kaldes D. Værdierne af a, b og c ønskes bestemt, således at punktet P = (2,4,5) ligger på planen gennem A, B og C, og tetraederet ABC's volumen $V\left(\frac{1}{6}abc\right)$ bliver mindst mulig. Det oplyses, at der eksisterer værdier af a, b og c med de ønskede egenskaber.



Opgave 1.15

Find differentialet af funktionen

1) $f(x,y) = 4x^4y + y^2$

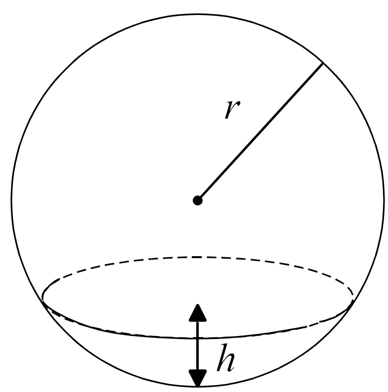
2) $f(x,y) = 2^{x+y} + 4$ i punktet $(1,0)$

Opgave 1.16

En kugleformet tank har radius r. Med en pejlestok måler man væskehøjden h for at kunne beregne væskerumfanget $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$

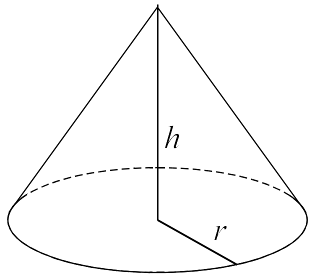
a) Angiv et den maksimale fejl på V, når r = 1 ± 0.1 m og h = 0.1 ± 0.01 m

b) Angiv den maksimale relative fejl på V.



Opgave 1.17

En bunke har form som en kegle med højde h og grundfladeradius r. Man måler h og r, for at kunne beregne rumfanget $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 h$



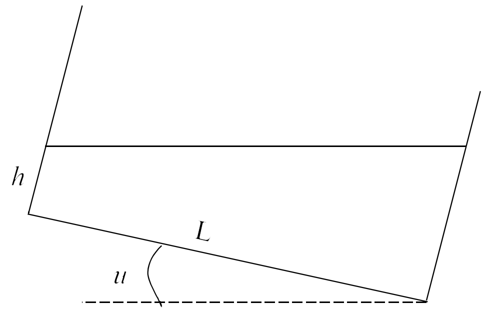
a) Angiv den maksimale fejl på V, når r = 10 ± 0.2 m og h = 10 ± 0.1 m

b) Angiv den maksimale relative fejl på V.

Opgave 1.18

En olietank er kasseformet med længden L = 3 m , bredden B = 1 m og højden H = 1 m. Tanken er nedgravet vandret, men ejeren får mistanke om, at den hælder en vinkel u .

For at finde u, hælder ejeren V = 1 m^3 olie i den tomme tank, og måler oliestandens højde h i den højeste side til 0.20 m.(se figuren)



Vinklen u kan findes af formlen

$$u = \text{Arctan}\left(\frac{2V}{B \cdot L^2} - \frac{2h}{L}\right)$$

1) Find vinklen u.

2) Det anslås, at $V = 1 \pm 0.02$ og $h = 0.2 \pm 0.01$.
Find den maksimale absolutte fejl på u (alle resultater med 3 betydende cifre)

3) Angiv den maksimale relative fejl på u

.

Opgave 2.1

Find de partielle afledede af første orden for følgende funktioner

1) $f(x,y,z) = x^3y^2z^2 + xyz^3$

2) $f(x,y,z) = y \cdot \sin(xz) + 2^{xyz}$

Opgave 2.2

Find alle lokale ekstremumspunkter for de følgende funktioner

1) $f(x,y,z) = -2x^2 - 2y^2 - z^2 + 2xy + 2yz + 8x - 4y + 2z - 3, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

2) $f(x,y,z) = x^3 + 3x^2 + 2y^2 + z^2 - yz, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

3) $f(x,y,z) = x^3 + 21x + y^3 + z^3 - 6xyz, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Facitliste

1.1 a) - b) - ,ingen af delene

1.2 a) - b) - , lokalt minimum

1.3 1) $x^2 + y^2 \le 9$ 2) - 3) - 4) -

1.4 a) - b) - , saddelpunkt

1.5 1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + 4xy,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + 2x^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2 + 4y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2y + 4x$

2) $\frac{\partial f}{\partial x} = y\cdot(x-y)^{-\frac{1}{2}}(x+y)^{-\frac{3}{2}},\ \frac{\partial f}{\partial y} = -x\cdot(x-y)^{-\frac{1}{2}}(x+y)^{-\frac{3}{2}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y\cdot(-2x+y)(x-y)^{-\frac{3}{2}}(x+y)^{-\frac{5}{2}},$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x\cdot(x-2y)(x-y)^{-\frac{3}{2}}(x+y)^{-\frac{5}{2}},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (x^2+y^2-xy)(x-y)^{-\frac{3}{2}}(x+y)^{-\frac{5}{2}},$

3) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3}{2}\sqrt{e^{3x-y}},\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}\sqrt{e^{3x-y}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{9}{4}\sqrt{e^{3x-y}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{4}\sqrt{e^{3x-y}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{3}{4}\sqrt{e^{3x-y}},$

4) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{xy^4}{1+x^2y^4},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^2y^3}{1+x^2y^4},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^4(1-x^2y^4)}{\left(1+x^2y^4\right)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2y^2(3-x^2y^4)}{\left(1+x^2y^4\right)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{4xy^3}{\left(1+x^2y^4\right)^2},$

1.6 1) $z = 30 - 21(x+2) + 16(y-3)$ 2) $z = -4 - 4(x-2) - 4(y+1)$

1.7 1) (0, 0) (3, 3) (2) (15, -8) 3) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\left(\frac{1}{2},0\right)$ $\left(-\frac{1}{2},\pi\right)$ 4) (-4, -3)

1.8 1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y,\ \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 - 3x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3,$ 2) 0, 0, -6, -3, -6 3) ja

1.9 1) lok.min.pkt. (0, 0) 2) lok.min.pkt. $\left(\pm 2\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ 3) ingen 4) ingen 5)lok.min.pkt. (1, 0)

6) lok.min.pkt. (0, 0) 7) lok.min.pkt. (2, 0) 8) lok.min.pkt. $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

9) 1) lok.max.pkt. $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ 10) ingen

1.10 lok.max.pkt. (0, 0) lok.min.pkt. (0, 2) lok.min.pkt. (0, -2) saddelpunkt $\left(\sqrt{2},0\right)$ og $\left(-\sqrt{2},0\right)$

1.11 a) (0, 0), (0, 1), (0, -1), $\left(\sqrt{6},2\right)$, $\left(-\sqrt{6},2\right)$ b) saddelpunkt (0,0) lok. max. pkt (0,-1)

1.12 lok.min.pkt. (0, 0) saddelpunkt $\left(0,\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ saddelpunkt $\left(0,-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

1.13 $x = 4\sqrt[3]{25},\quad y = 4\sqrt[3]{25},\quad z = 5\sqrt[3]{25},$

1.14 6, 12, 15

1.15 1) $16x^3y\,dx + \left(4x^4 + 2y\right)dy$ 2) $2\cdot\ln 2\,dx + 2\cdot\ln 2\,dy$

1.16 (a) 0.00911 m^3 (b) 10%

1.17 1) 52.359 2) 5%

1.18 1) $\approx 5.08^0$ eller 0.0886 radianer 2) 0.632^0 eller 0.110 radianer 3) 12.4%

2.1 1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2z^2 + yz^3,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3yz^2 + xz^3,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2x^3y^2z + 3xyz^2$

2) $\frac{\partial f}{\partial x} = y\cdot\cos(xz)\cdot z + 2^{xyz}\cdot yz\cdot\ln 2,\ \frac{\partial f}{\partial y} = \sin(xz) + 2^{xyz}\cdot xz\cdot\ln 2,\ \frac{\partial f}{\partial z} = y\cdot\cos(xz)\cdot x + 2^{xyz}\cdot xy\cdot\ln 2$

2.2 1) lok. max.pkt. (3, 2, 3) 2) lok. min.pkt. (0.0.0) 3) ingen

STIKORD