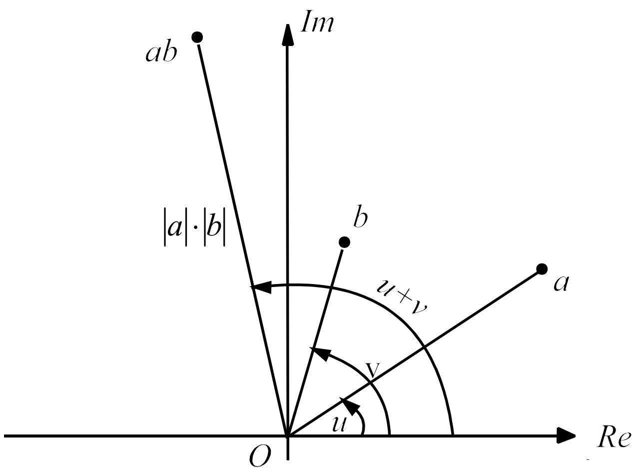
MOGENS ODDERSHEDE LARSEN

Komplekse tal



1. udgave 2004

FORORD

Dette notat giver en kort indføring i teorien for komplekse tal, regneregler, rødderne i polynomier bl.a. med henblik på anvendelser ved løsning af lineære differentialligninger, og i svingningsteorien.
Avancerede lommeregnere som Ti89 og matematkprogrammer som Maple kan let foretage beregninger med komplekse tal, finde rødder i polynomier osv. Der vil derfor blive givet eksempler på hvorledes man kan foretage beregningerne med netop disse to regnemidler, men det må dog betones, at hvis man ikke er i stand til at manipulere med simpe udtryk, bliver det næsten umuligt at læse en teknisk tekst eller forstå et foredrag, hvori der indgår nogen matematik. Det er derfor vigtigt. at man manuelt foretager beregningerne af enkle problemer samtidig med, at man er i stand til at kunne få en avanceret lommeregner til at foretager mere komplicerede beregninger, og naturligvis også kan fortolke disse.
Det forudsættes derfor, at man har rådighed over en "matematiklommeregner" som eksempelvis Ti 89.
Som eksempel på hvorledes man kan anvende et egentligt matematikprogram, angives også nogle af ordrerne i programmet "Maple"

Andre noter i samme "serie" er
"Matematiske grundbegreber"
Giver en kort gennemgang af definitioner og regneregler for de mest almindelige reelle funktioner af 1. variabel, disses differentiation og integration,
"Vektorer"
Indhold: **1)** Vektorer i plan og rum, **2)** Rumgeometri (relationer mellem punkt, linie og plan) **3)** Kurver i plan givet ved en parameterfremstilling
"Matricer og lineære ligninger"
Indhold: **1)** Regneregler for matricer,
2) Lineære ligningssystemer, herunder løsning af overbestemt ligningssystem
"Differentialligninger"
Indhold: **1)** 1. orden (seperable, lineære, numerisk løsning) ,
2) 2. og højere orden med konstante koefficienter,
3) Laplacetransformetion til løsning af differentialligningssystemer og differentialligninger med forsinkelse
"Fourieranalyse"
Indhold: **1)** Reelle Fourierrækker, **2)** Fourierrækker på kompleks form, **3)** Fouriertransformation **4)** Diskret Fouriertransformation
Alle de nævnte notater kan i pdf-format findes på adressen www.larsen-net.dk

december 2004 Mogens Oddershede Larsen

INDHOLD

1. Talmængder

Gennem sin tilværelse har man ofte måttet udvide sit talbegreb.
Man starter før skolealderen med med de naturlige tal
N: 1, 2, 3, ...
Hurtigt derefter udvider man med tallet 0.
På et tidspunkt møder man problemer, hvor det er nødvendigt, at udvide talbegrebet til de hele tal **Z** : . . . . , -3, -2, -1, 0 1, 2, 3, ... Mmatematisk skyldes det, at man ønsker, at ligninger som $x+4=1$ skal have en løsning.
Det bliver også nødvendigt at indføre brøker, dvs. de rationale tal
Q: $. \; . \; . \; . \; -\frac{3}{2}, -1, \; -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \; 1, \; \frac{3}{2}, \; . \; . \; .$ matematisk fordi man ønsker, at ligninger som $3x = 5$ skal have en løsning.
De rationale tal udgør et såkaldt tallegeme, hvor de 4 regningsarter addition, subtraktion, multiplikation og division af rationale tal igen giver rationale tal. Det er derfor ikke mærkeligt, at man i sin dagligdag ikke føler noget behov for et mere omfattende talbegreb.
Matematisk betyder det, at Q er et tallegeme, dvs opgylder følgende regler:

1) $a+b=b+a$	,	$a \cdot b = b \cdot a$	kommutative love
2) $(a+b)+c = a+(b+c)$	,	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	associative love
3) $0+a=a+0=a$	,	$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$	0 og 1 er neutrale elementer
4) $a+(-a)=(-a)+a=0$	,	$a \cdot a^{-1} = a^{-1}a = 1(a \neq 0)$	modsat og inverst element eksisterer
5) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$			distributive lov

De reelle tal **R**.
Allerede oldtidens grækere opdagede dog, at længden af hypotenusen i en retvinklet ligebenet trekant hvor katederne havde længden 1, ikke kan udtrykkes ved rationalt tal, eller med andre ord så kan $\sqrt{2}$ ikke skrives som en brøk.

Bevis: Lad os antage, at $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, hvor p og q er hele tal og $\frac{p}{q}$ er uforkortelig. Vi har da $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 2 \cdot q^2$.
Heraf følger, at p^2 er et lige tal. Nu gælder det jo, at produktet af 2 ulige tal igen er ulige, så p kan ikke være ulige. p må følgelig være lige, dvs. kunne skrives $p = 2n$, hvor n er et helt tal.Vi har nu $p^2 = 2 \cdot q^2 \Leftrightarrow (2n)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2n^2 = q^2$. Heraf følger igen at q er et lige tal. At både p og q er lige tal strider imidlertid mod at brøken $\frac{p}{q}$ er uforkortelig. $\sqrt{2}$ kan følgelig ikke skrives siom en brøk.

For at kunne løse ligninger som $x^2 = 2$ må vi derfor udvide vort talbegreb til de relle tal **R**.
Man kan vise, at der til ethvert punkt på en tallinie svarer et reelt tal, og omvendt.
De reelle tal udgår også et tallegeme, og langt de fleste matematiske problemer, løses indenfor de reelle tal

Komplekse tal **C:** Imidlertid fandt man allerede ca. år 1550, at for at beregne sædvanlige reelle løsninger til trediegradsligninger ville det være praktisk at indføre nogle nye tal, svarende til, at ligningen $x^2 = -1$ har en løsning. Som vi vil se, vil disse tal med fordel kunne anskueliggøres som punkter i en talplan. Mængden af komplekse tal **C** vil også udgøre et tallegeme.
I dag betyder de komplekse tal en begrebsmæssig og arbejdsmæssig forenkling af mange problemstillinger og løsningsmetoder, især når der indgår svingninger.

2 Definition af komplekse tal

På samme måde som vi knytter de reelle tal til en tallinie “de reelle tals akse”, knyttes de “komplekse tal” til punkterne i en plan. Den kaldes den "komplekse talplan".

Rektangulære koordinater. I den *komplekse talplan* indlægges et retvinklet koordinatsystem, hvor førsteaksen er de *reelle tals akse*, og andenaksen kaldes de *imaginære tals akse*. Lad et punkt P have koordinaterne (a_1, a_2). Man siger da, at det der til punktet svarer et komplekst tal a, som har *realdelen* a_1 og *imaginærdelen* a_2. Man skriver kort Re(a) $= a_1$ og Im(a)$= a_2$ (se figur 2.1).

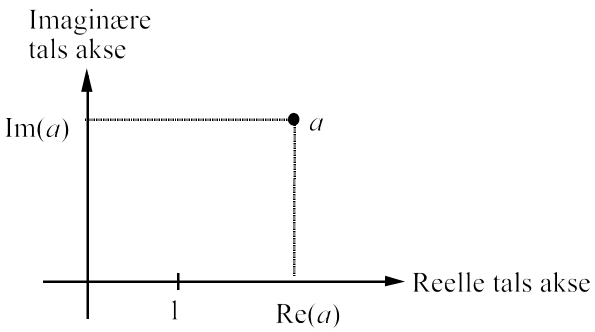


Fig. 2.1. *Rektangulære koordinater*

Polære koordinater. Et punkt $P's$ placering i et koordinatsystem kan angives i såkaldte polære koordinater (r,v) (se figur 2.3), hvor r = længden $|\overline{OP}|$ af stedvektoren til P og v = vinklen fra førsteaksen til stedvektoren $\overline{OP}$ .Vinklen måles i planens positive omløbsretning (mod uret) og er naturligvis kun bestemt på nær et multiplum af 2π. Hvis $P = O$ er vinklen uden betydning og kan gives en vilkårlig værdi.

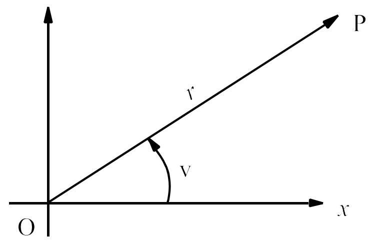


Fig 2.2 *De polære koordinater r*,v .

Lad det til punktet P svarende komplekse tal være a. De polære koordinater til a betegnes $|a|$ og arg(a) (se figur 2.4), hvor $|a|$ kaldes *modulus* af a eller den numeriske værdi af a, mens arg(a) kaldes *argumentet* af a. Den værdi for arg(a), som tilhører intervallet $]-\pi;\pi[$ kaldes *hovedværdien* af arg(a).

En kort skrivemåde er $a = (r)_v$, eksempelvis $-3 = (3)_\pi$. Som det vil blive vist i et senere afsnit, er en anden skrivemåde mere hensigtsmæssig.

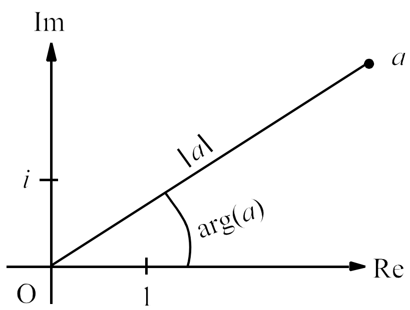


Fig. 2.3. *Et komplekst tals polære koordinater*

Det komplekse tal med realdel 0 og imaginærdel 1 kaldes den "imaginære enhed" og betegnes med bogstavet i (eller med bogstavet j). Vi har altså $i = (1)_{\frac{\pi}{2}}$ (se figur 2.3)

Man kan naturligvis ikke tale om tal, uden at definere addition og multiplikation, og de "omvendte" regningsarter subtraktion og divison, samt indse at de sædvanlige regneregler gælder

2.1 Addition og subtraktion

Definition af addition. To komplekse tal a og b adderes ved at addere deres stedvektorer $(\mathrm{Re}(a), \mathrm{Im}(a))$ og $(\mathrm{Re}(b), \mathrm{Im}(b))$, dvs. summen a+b har realdelen $\mathrm{Re}(a)+\mathrm{Re}(b)$ og imaginærdelen $\mathrm{Im}(a)+\mathrm{Im}(b)$, (se figur 2.4).

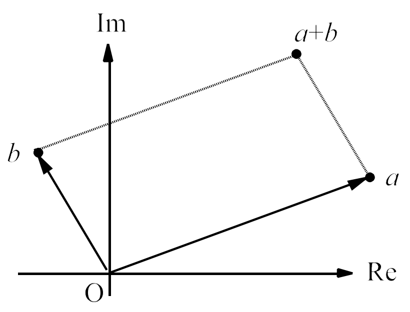


Fig 2.4. *Addition a + b*

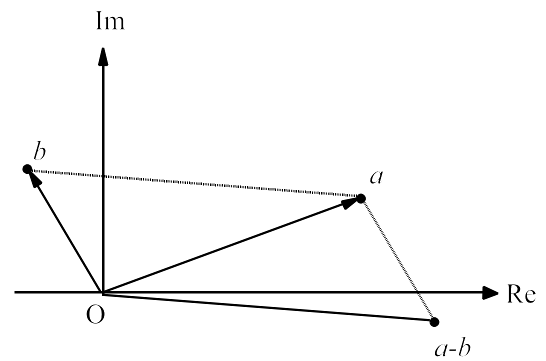


Fig. 2.5. *Subtraktion a - b*

Subtraktion af to komplekse tal $a-b$ udføres som vektorsubtraktion (figur 2.5), dvs. $a-b$ får realdel $\mathrm{Re}(a) - \mathrm{Re}(b)$ og imaginærdel $\mathrm{Im}(a) - \mathrm{Im}(b)$.

Subtraktionen $a - b$ plejer man at definere ved additionen $a+(- b)$, hvor det "modsatte tal" - b er givet ved, at der skal gælde $b+(- b) = 0$, dvs. - b må have realdel $- \mathrm{Re}(b)$ og imaginærdel $- \mathrm{Im}(b)$ og altså stedvektor modsat b's.

Additionen og subtraktion af to reelle tal efter denne regel giver åbenbart samme resultat som sædvanlig, f.eks. $2+3 = 5$, $2+(- 3) = - 1$ og $(- 2)+(- 3) = - 5$. Tallet 0 er neutralt element ved addition, da $a + 0 = 0 + a = a$.

2.2 Multiplikation og division

Definition af multiplikation. To komplekse tal a og b multipliceres ved at multiplicere deres modulus'er og addere deres argumenter, dvs. stedvektoren til produktet $a \cdot b$ fås, ved at stedvektoren til a drejes en vinkel på $\arg(b)$ og derpå multipliceres med $|b|$ (se figur 2.6).

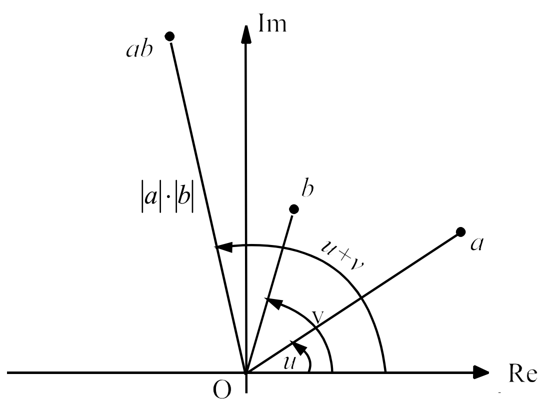


Fig 2.6. *Multiplikation ab*

Division $\frac{a}{b}\ (b \neq 0)$ udføres grafisk ved at stedvektoren til a drejes - arg(b) og multipliceres med $\frac{1}{|b|}$

Divisionen $\frac{a}{b}$ plejer man at definere ved multiplikationen $a \cdot b^{-1}$ hvor det "reciprokke tal" b^{-1} er givet ved, at der skal gælde $b \cdot b^{-1} = 1$ dvs. b^{-1} må have modulus $\frac{1}{|b|}$ og argument - arg(b).

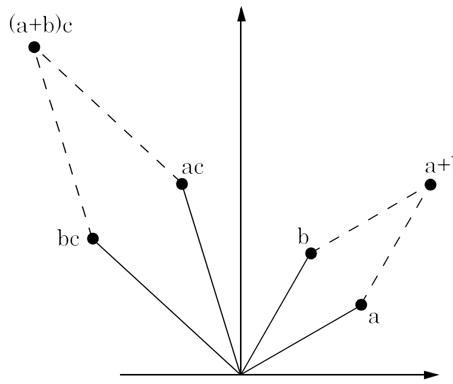
Ligesom de rationale tal **Q** og de reelle tal **R** udgør de komplekse tal **C** et tallegeme

Bevis: Vi skal vise, at der gælder følgende regler:

1) $a + b = b + a$	, $a \cdot b = b \cdot a$	kommutative love
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$	, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	associative love
3) $0 + a = a + 0 = a$	, $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$	0 og 1 er neutrale elementer
4) $a + (-a) = (-a) + a = 0$	, $a \cdot a^{-1} = a^{-1}a = 1 (a \neq 0)$	modsat og inverst element eksisterer
5) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$		distributive lov

Af afsnittene om addition og multiplikation følger umiddelbart, at punkterne 1-4 er opfyldt.

Den distributive lov $(a+b)c = ac + bc$ bevises lettest grafisk.



Multipliceres a, b og $a + b$ med c, betyder det grafisk, at stedvektorerne til a, b og $a + b$ først drejes vinklen arg(c) og derefter multipliceres deres længder med $|c|$ Da et parallelogram ved en sådan drejning efterfulgt af en multiplikation igen afbildes i et parallelogram, er loven bevist. ◆

Multiplikation af to reelle tal efter denne regel giver åbenbart samme resultat som sædvanlig, f.eks. fås $3 \cdot 4 = 12$ idet $|3| \cdot |4| = |12|$ og arg(2)+arg(3) = 0+0 = 0 = arg (6) . Analogt fås $(-3) \cdot (-4) = 12$, idet $|-3| \cdot |-4| = 12$ og arg(- 3) + arg(- 4) = $\pi + \pi = 2\pi$ = arg(12) .

Det ses, at $a \cdot i$ fås ved at tallet a drejes 90^0, dvs. $a \cdot i$ er bestemt ved tværvektoren af stedvektoren til a.

Specielt gælder, at $i \cdot i = i^2 = -1$ da $|i| \cdot |i| = 1 \cdot 1 = 1$ og arg(i^2) = $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

Ved regning med komplekse tal vil vi meget ofte skulle benytte at $\underline{\underline{\boldsymbol{i^2 = -1}}}$.

3 Rektangulær form

Lad et vilkårligt komplekst tal have realdelen a_1 og imaginærdelen a_2.

Sætning 3.1. (Tal på rektangulær form)
Lad et vilkårligt komplekst tal have realdelen a_1 og imaginærdelen a_2.
Der gælder da $a = a_1 + a_2 \cdot i$.

<u>Bevis</u>. Tallet $a_2 \cdot i$ findes, ved at stedvektoren til det reelle tal a_2 drejes $\frac{\pi}{2}$ (så vi får tværvektoren).
Addition med stedvektoren for a_1 giver derfor stedvektoren til tallet med x - værdien a_1 og y - værdien a_2 dvs. a.
(se figur 3.1) ◆

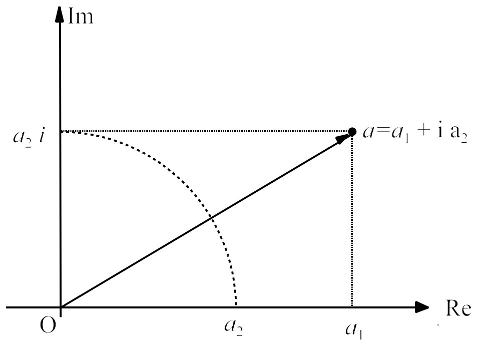


Fig 3.1. *Rektangulær form*

Den rektangulære forms store fordel ligger i, at regneoperationerne $+ - \cdot /$ kan udføres efter de samme vaner (algebraiske love) som for reelle tal, med den tilføjelse, at tallet i har egenskaben $i^2 = -1$.

Eksempel 3.1. Regning med komplekse tal.
Skriv følgende udtryk på rektangulær form.

1) $(2+3i)\cdot(4+2i)+6-2i$ 2) $\dfrac{5+12i}{-3+4i}$

Løsning:

1) $(2+3i)\cdot(4-2i)+6-2i = 8+12i-4i-6i^2+6-2i = \underline{\underline{20+6i}}$ (idet $i^2 = -1$.)

2) $$\frac{5+12i}{-3+4i} = \frac{(5+12i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)} = \frac{-15-20i-36i-48i^2}{(-3)^2-(4i)^2} = \frac{35-56i}{9+16} = \underline{\underline{\frac{35}{25}-\frac{56}{25}i}}$$

Bemærk, at man ved division forlænger med $-3-4i$ i brøkens tæller og nævner, således at nævneren bliver et reelt tal.
$a - ib$ kaldes det konjugerede af $a + ib$

Ti 89: Indtast udtrykket som det står (benyt *2nd i,* tast ligger over “Catalog”)
Maple: (5+12*I)*(-3+4*I) ◆

4. Polær form

Ved tallet $e^{i\theta}$ forstås et komplekst tal med modulus 1 og argument θ (se figur 4.1).

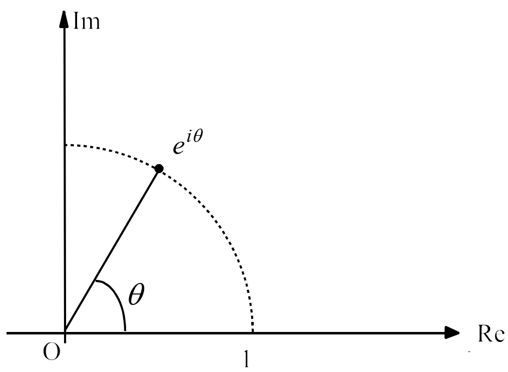


Fig 4.1. Eksponentialfunktionen

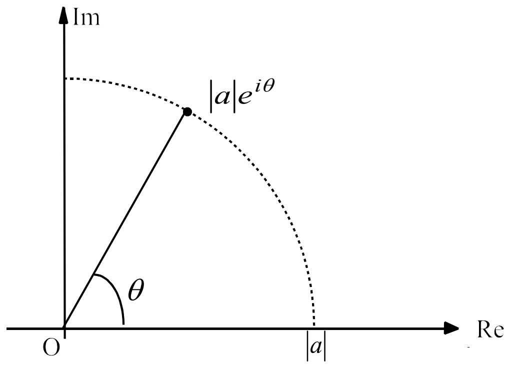


Fig 4.2. *Tal på polær form*

Sætning 4.1. (komplekst tal på polær form).

Det komplekse tal a med modulus $|a|$ og argumentet θ kan skrives $a = |a|e^{i\theta}$.

Bevis. Ved multiplikation af $|a|$ med $e^{i\alpha}$ bliver stedvektoren til det reelle tal $|a|$ multipliceret med 1 og drejet vinklen α , så vi netop får a (figur 4.2).

Omregning mellem polære og rektangulære koordinater.

Af definitionen på cos og sin fås følgende formler til omregningen fra polær form $a = |a|e^{i\theta}$ til rektangulær form $a = a_1 + ia_2$ (se figur 4.3):

$$a_1 = |a|\cos\theta, \qquad a_2 = |a|\sin\theta \quad \text{og omvendt} \quad |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \qquad \tan\theta = \frac{a_2}{a_1} \quad (a_1 \neq 0)\,.$$

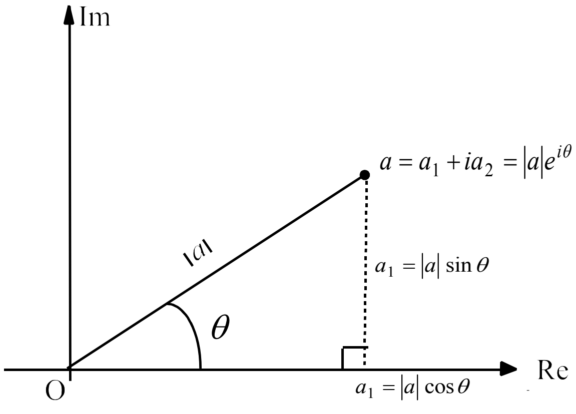


Fig 4.3. *Omregning mellem polær og rektangulær form*

Bemærk: Ved bestemmelsen af θ tilrådes det nøje at bemærke, i hvilken kvadrant a ligger.

Eksempel 4.1. Omregning mellem rektangulær og polær form.

1) Omskriv tallet $a = -\sqrt{3} + i$ til polær form.

2) Omskriv tallet $b = 4 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$ til rektangulær form.

Løsning.

1) $|a| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$

$\tan\theta = \dfrac{1}{-\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{6} + p\pi$

Da punktet ligger i 2 kvadrant må $\theta = -\dfrac{\pi}{6} + \pi = \dfrac{5\pi}{6}$ $\underline{\underline{a = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}}}$

2) $b = 4 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) - 4i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{\underline{2 + 2i\sqrt{3}}}$

Ti89: 1) Indtast udtrykket som det står (benyt *2nd i,* tast ligger over "Catalog")
Da resultatet ønskes i polære koordinater skal vælges
MODE, COMPLEX FORMAT= Polar
Normalt vises beregningerne i radianer.
Vælges MODE, ANGLE, Degree fås resultatet i grader: 2 ∠ 150
2) Vælg MODE, ANGLE = Radian, COMPLEX FORMAT=Rektangulær
Indtast 4*e^(-*i** π /3)

Maple: 1) convert(-sqrt(3)+I,polar); Resultat: $\operatorname{polar}\left(2, \frac{5\pi}{6}\right)$

2) convert(4*exp(-I*Pi/3),exp); Resultat: $2 - 2I\sqrt{3}$

◆

5. Eksponentialfunktionen.

Definition af kompleks eksponentialfunktion .Lad x og y være reelle tal.
Ved e^{x+iy} forstås $e^x \cdot e^{iy}$, dvs e^{x+iy} er det komplekse tal, der fås ved, at stedvektoren til det reelle tal e^x drejes vinklen *y*.

◆

Tallet e^{x+iy} har åbenbart den rektangulære form $e^x \cos y + ie^x \sin y$

At den eksponentielle skriveform e^{x+iy} er rimelig, fremgår af den følgende sætning, der siger, at de sædvanlige regneregler for reelle eksponentialfunktioner også gælder for komplekse eksponentialfunktioner.

Sætning 5.1. Regler for eksponentialfunktionen.

Lad z, z_1, z_2, a være komplekse tal, lad t være et reelt tal og lad n være et helt tal.
Der gælder da følgende regler

1) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, 2) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$ 3) $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$ 4) $\left(e^z\right)^n = e^{n\cdot z}$

5) $\dfrac{d(e^{at})}{dt} = ae^{at}$ 5) $\displaystyle\int e^{at}\,dt = \frac{1}{a}e^{at} \quad (a \neq 0)$

Bevis:

1) Når e^{z_1} = [stedvektoren til e^{x_1} drejet y_1] multipliceres med e^{z_2} = [stedvektoren til e^{x_2} drejet y_2] fås e^{z_1} = [stedvektoren til $e^{x_1+x_2}$ drejet $y_1 + y_2$] $= e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$
2) Fremkommer af 1) ved at erstatte z_1 med $z_1 - z_2$ og dividere igennem med e^{z_2}
3) Fremkommer af 2) for $z_1 = 0$ og $z_2 = z$.
4) Fremkommer ved gentagen anvendelse af 1) for $z_1 = z_2 = z$ og suppleret med 3) for $n < 0$
5) Lad $a = a_1 + ia_2$

   Vi får da

$$\frac{d\,e^{at}}{dt} = \frac{d}{dt}e^{a_1t+ia_2t} = \frac{d}{dt}\left(e^{a_1t}\cos(a_2t) + ie^{a_1t}\sin(a_2t)\right)$$
$$= a_1e^{a_1t}\cos(a_2t) - a_2e^{a_1t}\sin(a_2t) + ia_1e^{a_1t}\sin(a_2t) + ia_2e^{a_1t}\cos(a_2t)$$
$$= a_1\left(e^{a_1t}\cos(a_2t) + ie^{a_1t}\sin(a_2t)\right) + ia_2\left(e^{a_1t}\cos(a_2t) + ie^{a_1t}\sin(a_2t)\right) = (a_1 + ia_2)\left(e^{a_1t+ia_2t}\right) = ae^{at}$$

6) Ved differentiation af $\dfrac{1}{a}e^{at}$ fås netop e^{at}

◆

Eulers formler. $\cos u = \dfrac{e^{iu} + e^{-iu}}{2}$ og $\sin u = \dfrac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}$

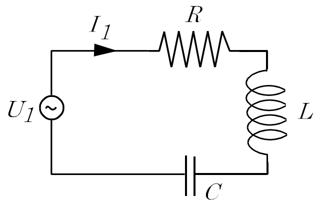
Bevis: Af $e^{iu} = \cos u + i \cdot \sin u$ *og* $e^{-iu} = \cos u - i \cdot \sin u$
fås ved at lægge ligningerne sammen og trække dem fra hinanden.

$e^{iu} + e^{-iu} = 2 \cdot \cos u$ og $e^{iu} - e^{-iu} = 2i \cdot \sin u$ og dermed $\cos u = \dfrac{e^{iu} + e^{-iu}}{2}$ og $\sin u = \dfrac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}$

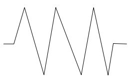
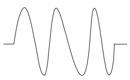
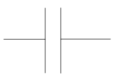
◆

Eulers formler benyttes til eksempelvis i integraler at erstatte de trigonometriske funktioner med eksponentialfunktioner, som er nemmere at integrere.

Eksempel 5.1. Anvendelse på vekselstrøm.
Lad en elektromotorisk kraft $U_1 = U_0 \cos(\omega t)$ være serieforbundet med en modstand på R, en spole med en selvinduktion på L og en kondensator med kapaciteten C.



Der gælder da følgende skema:

Navn	Symbol	Notation	Enhed	Spændingsforskel	Kompleks Imperdans
Ohms modstand		R	Ohm	Ri	R
Induktor, spole		L	H (henry)	$L\dfrac{di}{dt}$	$i\omega L$
Kondensator, Kapacitor		C	F (Farad)	$\dfrac{Q}{C} = \dfrac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt$	$\dfrac{1}{2\omega C}$

Idet (spændingsforskellen over R) +(spændingsforskellen over L) + (spændingsforskellen over C) = $U_1 = U_0 \cos(\omega t)$

fås fra elektricitetslæren $$RI_1 + L\frac{dI_1}{dt} + \frac{\int I_1 dt}{C} = U_0 \cos(\omega t)$$

2) <u>Kompleks impedans Z</u>. Der gælder "ohms lov" $U = Z\,I$, hvor $Z = R + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}$

3) <u>Seriekobling</u>. To serieforbundne komplekse impedanser Z_1 og Z_2 kan erstattes med en enkelt $Z_{serie} = Z_1 + Z_2$

4) <u>Parallelkobling</u>. To parallelforbundne komplekse impedanser Z_1 og Z_2 kan erstattes med en enkelt $Z_{parallel} = \dfrac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$

$$\left(\text{dvs.} \frac{1}{Z_{parallel}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right)$$

6. Polynomier.

Ved et polynomium af n'te grad (n helt positivt tal) forstås funktionen

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0$$

Ved polynomiets **rødder** forstås løsningerne til ligningen $P_n(x) = 0$.

I afsnit 3.4 i "Matematiske grundbegreber" forudsatte vi at såvel koefficienter som rødder var reelle tal, og da indså vi, at et sådant polynomium af n'te grad højst har n rødder.
Tillader vi nu både koefficienter og rødder at være komplekse tal gælder følgende sætning:

Sætning 6.1 Algebraens fundamentalsætning,

Polynomiet $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ hvor n er et helt positivt tal $a_n \neq 0$ har **netop** n rødder $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (hvoraf nogel kan være ens).
Polynomiet derfor på kun én måde kan opløses i førstegradsfaktorer

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = a_n(z-\alpha_1)\cdot(z-\alpha_2)\cdot \;,\;,\;, \cdot(z-\alpha_n)$$

Et generelt bevis for sætningen kan findes i "matematik for Ingeniører " Bind 1 supplement 5A.

Vi vil i det følgende betragte nogle af de polynomier, som er af særlig interesse, og her indse, at sætningen er korrekt.

6.1 Den binome ligning $z^n = a$

Lad n være er et helt positivt tal, og a er et vilkårligt komplekst tal forskelligt fra 0.

For at finde en rod z til den binome ligning $z^n = a$ omskrives såvel a som z på polær form, dvs. $a = |a|e^{i\theta}$ og $z = |z|e^{iu}$. Vi har da $z^n = a \Leftrightarrow |z|^n e^{inu} = |a|e^{i\theta}$

At de to komplekse tal er ens betyder, at

$$|z|^n = |a| \wedge nu = \theta + 2p\pi \Leftrightarrow |z| = \sqrt[n]{|a|} \wedge u = \frac{\theta}{n} + p\frac{2\pi}{n},$$ p er et helt tal.

Geometrisk ligger rødderne altså på en cirkel med radius $\sqrt[n]{|a|}$ og vinklen mellem stedvektorerne til to på hinanden følgende rødder er $\frac{2\pi}{n}$. Rødderne er derfor vinkelspidser i en regulær n - kant.

Eksempelvis vil ligningen $z^4 = a$ ligge som vinkelspidser i et kvadrat (se figur i eksempel 6.1)

Vi har følgelig, at den binome ligning $z^n = |a|e^{i\theta}$ $(a \neq 0)$ har netop n forskellige rødder.

$$z = \sqrt[n]{|a|}\; e^{i\left(\frac{\theta}{n} + p\frac{2\pi}{n}\right)}$$, hvor $p = 0, 1, 2, 3, \ldots, n - 1$

Eksempel 6.1 Binom ligning.

Løs ligningen $z^4 = -1 + i\sqrt{3}$.
Rødderne ønskes angivet på såvel polær som rektangulær form.
Endvidere ønskes de afsat i en kompleks talplan.
Anvendelse. Fire ens systemer, hver med kompleks forstærkning z, serieforbindes, og man måler, at den samlede komplekse forstærkning z^4 er $-1+i\sqrt{3}$ Hvilke værdier kan z have?

Løsning:

$a=-1+i\sqrt{3}$ $\quad |a|=\sqrt{1+3}=2$, $\quad \tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{-1}\Rightarrow\theta=\dfrac{2\pi}{3}$ (da a ligger i 2. kvadrant)

$$z^4=-1+i\sqrt{3}\Leftrightarrow z^4=2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+2p\pi\right)}\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+p\frac{\pi}{2}\right)},\ p=0,1,2,3$$

$$\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\vee z=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\vee z=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}\vee z=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

Ved omskrivning fra polær form til rektangulær form fås:

$$z=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{8}}(\sqrt{3}+i)$$

Da vinklerne ligger i et kvadrat fås de øvrige rødder lettest ved at tage "tværvektoren"

$$z=\frac{1}{\sqrt[4]{8}}(\sqrt{3}+i)\vee z=z=\frac{1}{\sqrt[4]{8}}(-1+i\sqrt{3})\vee z=-\frac{1}{\sqrt[4]{8}}(\sqrt{3}+i)\vee z=z=\frac{1}{\sqrt[4]{8}}(1-i\sqrt{3})$$

Ti89:MATH, ALGEBRA, csolve(z^4=-1+i $\sqrt{\ }$ (3),z)

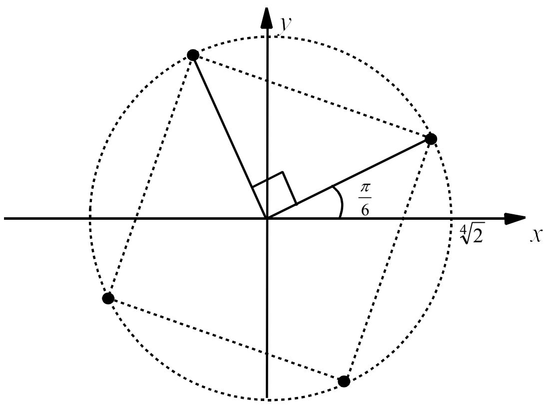
Hvis man har sat MODE til polær fås resultaterne ovenfor (dog med visse negative vinkler)
Tilsvarende hvis man har sat MODE til Rektangular

Maple: > solve(z^4=-1+sqt(3)*I);

$(-1+\text{sqt}(3)\,I)^{(1/4)}, (-I+sqt(3)\,I)^{(1/4)}\,I, -(-I+sqt(3)\,I)^{(1/4)},$

Resultat: $-I\,(-I+sqt(3)\,I)^{(1/4)}$

På figuren er afsat de fire rødder)vinkelspidser i kvadrat)



6.2 Andengradsligningen $Az^2 + Bz + C = 0$, $A \neq 0$

Sætning 6.2. Andengradsligning

Andengradsligningen $Az^2 + Bz + C = 0$, *med komplekse koefficienter* $A \neq 0$, B *og* C *og diskriminanten* $D = B^2 - 4AC$ *har rødderne* $z = \dfrac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}$, *hvor* $\alpha = \sqrt{D}$ *bestemmes som en rod i den binome ligning* $\alpha^2 = D$.

Bevis: Vi foretager omskrivningen

$$Az^2 + Bz + C = 0 \Leftrightarrow z^2 + \frac{B}{A}z + \frac{C}{A} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{B}{2A}\right)^2 - \left(\frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{C}{A} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A}$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 - 4AC}{4A^2} \Leftrightarrow \left(z + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{D}{4A^2}$$

Idet α er en rod i den binome ligning $\alpha^2 = D$ fås

$$\left(z + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4A^2} \Leftrightarrow \left(z + \frac{B}{2A}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2A}\right)^2 \Leftrightarrow z + \frac{B}{2A} = \pm\frac{\alpha}{2A} \Leftrightarrow z = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}$$

◆

Problemet er derfor nu reduceret til at løse den binome ligning $\alpha^2 = D$.

Tilfælde I: ***A, B* og *C* reelle tal:**

Diskriminanten er da et reelt tal, så for $D \geq 0$ er løsningen den kendte fra reelle tal. Er D < 0 benyttes blot, at $i^2 = -1$, idet f.eks $\pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{i^2 9} = \pm 3i$ (jævnfør eksempel 6.2)

Eksempel 6.2. Andengradsligning med reelle koefficienter

Løs ligningen $4z^2 - 8z + 13 = 0$

Løsning:

$$4z^2 - 8z + 13 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4\cdot 4\cdot 13}}{2\cdot 4} \Leftrightarrow z = \frac{8 \pm \sqrt{-144}}{8} \Leftrightarrow z = \frac{8 \pm \sqrt{i^2 \cdot 12^2}}{8} \Leftrightarrow z = \frac{8 \pm 12i}{8}$$

$$\underline{\underline{z = 1 \pm \frac{3}{2}i}}$$

◆

Tilfælde II: A, B. C er komplekse tal.

I dette tilfælde kan formlen omskrives til

$$z = \frac{-B \pm \alpha}{2A}, \text{ hvor } \alpha = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{|D| + \mathrm{Re}(D)}{2}} + i\sqrt{\dfrac{|D| - \mathrm{Re}(D)}{2}} & \text{for } \mathrm{Im}(D) \geq 0 \\ \sqrt{\dfrac{|D| + \mathrm{Re}(D)}{2}} - i\sqrt{\dfrac{|D| - \mathrm{Re}(D)}{2}} & \text{for } \mathrm{Im}(D) < 0 \end{cases}$$

Eksempel 6.3. Andengradsligning med komplekse koefficienter.

Løs ligningen $z^2 + 2iz - 4 + 4i = 0$

Løsning:

$$z^2 + 2iz - 4 + 4i = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-2i \pm \alpha}{2}$$

Diskriminanten er $D = (2i)^2 - 4\cdot(-4+4i) = -4 + 16 - 16i = 12 - 16i$

Da Im(D)=-16 < 0 og $|D| = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20$ fås $\alpha = \sqrt{\frac{20+12}{2}} - i\sqrt{\frac{20-12}{2}} = 4 - 2i$

Vi har derfor $z^2 + 2iz - 4 + 4i = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-2i \pm (4-2i)}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{z = -2 \vee z = 2 - 2i}}$

◆

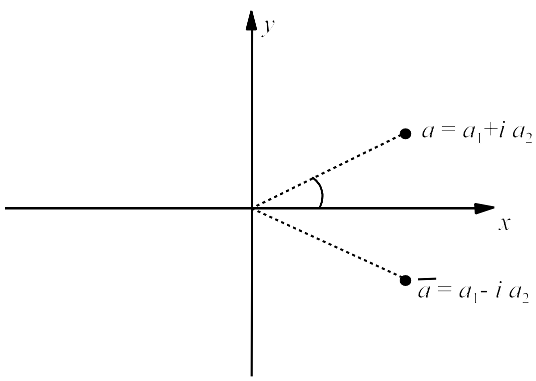
6.3 Polynomier af højere grad end 2

I forbindelse med eksempelvis løsning af visse typer differentialligninger, kan man få brug for at studere polynomer af højere grad end 2.

Langt de fleste anvendelser vil dog være polynomier med reelle koefficienter, så vi vil i det følgende begrænse os til sådanne.

For andengradspolynomier med reelle koefficienter fandt vi, at hvis $a = a_1 + ia_2$ var en rod, så var også $\bar{a} = a_1 - ia_2$ en rod.

Man kalder $\bar{a} = a_1 - ia_2$ for det **konjugerede** tal til $a = a_1 + ia_2$ (se figuren)



Generelt gælder det for alle polynomier med reelle koeficienter, at er a en rod vil også $\bar{a}$ være en rod.

Sætning 6.3, Rødder i polynomier med reelle koefficienter

Lad $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, hvor n er et positivt helt tal, koefficienterne $a_n, a_{n-1},, \ldots, a_1, a_0$ er reelle tal og $a_n \neq 0$.

Hvis α er en kompleks (ikke-reel) rod i $P(z)$, så vil det konjugerede tal $\bar{\alpha}$ også være en rod.

Bevis:

Af definitionen på konjugeret følger

$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ (da $\bar{a} + \bar{b} = (a_1 - ia_2) + (b_1 - ib_2 = a_1 + b_2 - i(a_2 + b_2) = \overline{a+b}$)

$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$ (da $\bar{a} \cdot \bar{b} = (a_1 - ia_2)\cdot(b_1 - ib_2 = a_1 \cdot b_1 - a_2 b_2 - i(a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) = \overline{a \cdot b}$)

Hvis $\alpha = a_1 + ia_2$ er en "kompleks rod" er $P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0 = 0$

Ved konjugering fås under brug af de ovennævnte regler for konjugering

$$\overline{P(\alpha)} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a}_n \bar{\alpha}^n + \bar{a}_{n-1}\bar{\alpha}^{n-1} + \ldots + \bar{a}_1 \bar{\alpha} + \bar{a}_0 = 0$$

Da koefficienterne er reelle tal og dermed $\bar{a}_n = a_n$ osv.fås

$a_n \bar{\alpha}^n + a_{n-1}\bar{\alpha}^{n-1} + \ldots + a_1 \bar{\alpha} + a_0 = 0$. Heraf ses, at $\bar{\alpha}$ er en rod i $P(z)$

◆

Sætning 6.4. Opløsning af polynomium i faktorer.

Lad $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, hvor n er et positivt helt tal, koefficienterne $a_n, a_{n-1},, \ldots, a_1, a_0$ er reelle tal og $a_n \neq 0$.

$P_n(z)$ kan opløses i et produkt af førstegradsfaktorer med reelle koefficienter og andengradsfaktorer med reelle koefficienter.

Bevis:

Ifølge sætning 6.1 (algebraens fundamentalsætning har et n'te grads polynomium $P_n(z)$ n rødder. Det betyder, at $P_n(z)$ kan opløses i et produkt af n førstegradsfaktorer

$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = a_n (z - \alpha_1) \cdot (z - \alpha_2) \cdot \ldots (z - \alpha_n)$

Nogle af disse er førstegradsfaktorer med reelle koefficienter.

Er en rod α ikke reel ved vi fra sætning 6.3 at så er den konjugerede $\overline{\alpha}$ også rod.

$(z - \alpha)(z - \overline{\alpha}) = z^2 - (\alpha + \overline{\alpha})z + \alpha \cdot \overline{\alpha}$.

Da $\alpha + \overline{\alpha} = (\alpha_1 + i\alpha_2) + (\alpha_1 - i\alpha_2) = 2\alpha_1$ er et reelt tal og $a \cdot \overline{a} = (a_1 + ia_2) \cdot (a_1 - ia_2) = a_1^2 + a_2^2$ også er et reelt tal, ses, at andengradspolynomiet $z^2 - (\alpha + \overline{\alpha})z + \alpha \cdot \overline{\alpha}$ er et polynomium med reelle koefficienter.

Hermed er sætningen bevist.

◆

Er specielt α p gange rod, vil $P_n(z)$ indeholder andengradsfaktoren p gange.

Eksempel 6.4. Opløsning af polynomium i faktorer

Opløs polynomiet $P(z) = 2z^5 - 10z^4 + 30z^3 - 50z^2 + 48z - 20$ iet produkt af førstegradsfaktorer med reellle koefficienter og andengradsfaktorer med reellle koefficienter.

Løsning:

Ti89: MATH, ALGEBRA, FACTOR(2z^5-10z^4+30z^3-50z^2+48z-20,x)

Resultat: $\underline{\underline{2(z-1)(z^2 - 2z + 2)(z^2 - 2z + 5)}}$

Maple: factor(2*z^5-10*z^4+30*z^3-50*z^2+48*z-20);

Resultat: $2\,(z-1)\,(z^2 - 2\,z + 2)\,(z^2 - 2\,z + 5)$

◆

6.4 Dekomponering af polynomiums brøker

Vi betragter i dette afsnit brøker $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ hvor tæller og nævner er polynomier med reelle koefficienter.Et eksempel herpå er brøken $\dfrac{x^3 + 7}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$

Ved nogle anvendelser, bl.a, når man skal løse visse typer differentialligninger, får man brug for at opløse sådanne brøker i en sum af simple "stambrøker"

Skal man eksempelvis integrere $f(x) = \dfrac{x^3 + 7}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$ vil dette være nødvendigt, da man så kan integrere hver af disse simplere stambrøker hver for sig.

Ver dekomponeringen faktoriserer man nævneren som beskrevet i sætning 6.4, og derefter spaltes op i en sum af brøker med disse faktorer som nævnere .Stambrøkerne er brøker, hvor tællerens grad er minder end nævnerens, og hvor nævneren enten er $(x - \alpha)^n$, eller $(ax^2 + bx + c)^n$, hvor α, a, b, c er reelle tal og n er et helt positivt tal.

En sådan "dekomponering" af en brøk og kan opfattes som det modsatte af at sætte på fælles brøkstreg.

Beregningerne kan hurtig blive omfattende, så man vil sædvanligvis vælge at lade eksempelvis Ti89 eller Maple foretage beregningerne:

Eksempel 6.5. Dekomponering.

Dekomponer 1) $f(x)=\dfrac{x^3+7}{x^3-3x^2-x+3}$ 2) $g(x)=\dfrac{2x^8-4x^4+x^3+9}{x^7-x^6+x^5-x^4-x^3+x^2-x+1}$

Løsning:

1) **Ti 89:** MATH ALGEBRA expand((x^3+7)/(x^3-3x^2-x+3),x)

Resultat: $f(x)=1+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{17}{4(x-3)}$

Maple: convert((x^3+7)/(x^3-3*x^2-x+3), parfrac, x);

Resultat: $1+\dfrac{17}{4\,(x-3)}+\dfrac{3}{4\,(x+1)}-\dfrac{2}{x-1}$

2) **Ti 89:** MATH ALGEBRA expand(udtryk),x)

Resultat: $g(x)=2x+2+\dfrac{7x}{4(x^2+1)}+\dfrac{3}{2(x^2+1)}+\dfrac{\frac{3x}{2}+2}{(x^2+1)^2}+\dfrac{3}{8(x+1)}-\dfrac{17}{8(x-1)}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$

Maple: Giver samme resultat. ◆

Opgaver

3.1. Reducér $(2-i)^3-(6+5i)(3+2i)^2+(-4+7i)(-1-i)$

3.2. Skriv følgende brøker på rektangulær form

1) $\dfrac{3+4i}{3-2i}$, 2) $\dfrac{4i+1}{4i-1}$ 3) $\dfrac{3-5i}{i}$ 4) $\dfrac{2-3i}{1+2i}-\dfrac{5-i}{2-i}+\dfrac{3-4i}{1+3i}$

3.3. Beregn $(5-3i)^2-(3-5i)^2+(2-3i)\cdot(2+3i)$

4.1. Omskriv følgende tal til polær form

1) -5 2) $4i$ 3) $1+i$ 4) $1-i$ 5) $2\sqrt{3}-2i$

4.2. Omskriv følgende tal til rektangulær form

1) $3e^{i\pi}$ 2) $e^{i\frac{3\pi}{2}}$ 3) $2e^{i\frac{\pi}{4}}$ 4) $5e^{i\frac{5\pi}{3}}$

5.1. Omskriv følgende tal til rektangulær form

1) $\dfrac{6\ e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}$ 2) $\dfrac{3e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\pi}}$ 3) $\dfrac{4e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{\pi}{2}}}$ 4) $\dfrac{6e^{i\frac{3\pi}{4}}}{3^{i\frac{3\pi}{2}}}$

5.2. 1) Omskriv 3+2i til polær form og beregn $(3+2i)^4$. Facit skal skrives på rektangulær form

2) Skriv $(-1-2i)^7$ på rektangulær form.

3) Skriv $\dfrac{\left(-i\sqrt{2}\right)^6}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{16}}$ på rektangulær form.

6.1. Løs ligningerne

1) $z^3=-1$ 2) $z^3=-i$ 3) $z^4=i$ 4) $z^6=-i$ 5) $z^6=64$

6.3. Find alle rødderne i ligningen $z^5=7-11i$

6.4. Løs ligningerne 1) $z^4-z^2+1=0$. 2) $z^2-4z+13=0$

6.5. Løs ligningerne 1) $z^2-(13+i)z+(44+5i)=0$ 2) $z^2-(1+3i)z+(-2+i)=0$

6.6. 1) Opløs polynomiet $P(z)=z^4+3z^3+7z^2+6$ i faktorer af første og anden grad.

2) Løs ligningen $P(z)=0$

6.7. 1) Opløs polynomiet $P(z)=2z^3+14z^2+62z+50$ i faktorer af første og anden grad.

2) Løs ligningen $P(z)=0$

6.8. 1) Opløs polynomiet $P(z)=z^4+3z^3+7z^2+6$ i faktorer af første og anden grad.

2) Løs ligningen $P(z)=0$

6.9. 1) Opløs polynomiet $P(z)=z^{10}+z^6+z^4-1$ i faktorer af første og anden grad.

2) Løs ligningen $P(z)=0$

6.10. Dekomponer funktionen $f(x)=\dfrac{2x^4-x^3-x+1}{x^5-2x^4+x^3}$

6.11. Dekomponer funktionen $f(x)=\dfrac{2x^5+x^4+9x^3-4x^2-16x-22}{x^4+3x^2-4}$

6.12. Dekomponer funktionen $f(x)=\dfrac{3x^5+2x^4-22x^3+x^2+35x-11}{x^3-7x+6}$

STIKORD