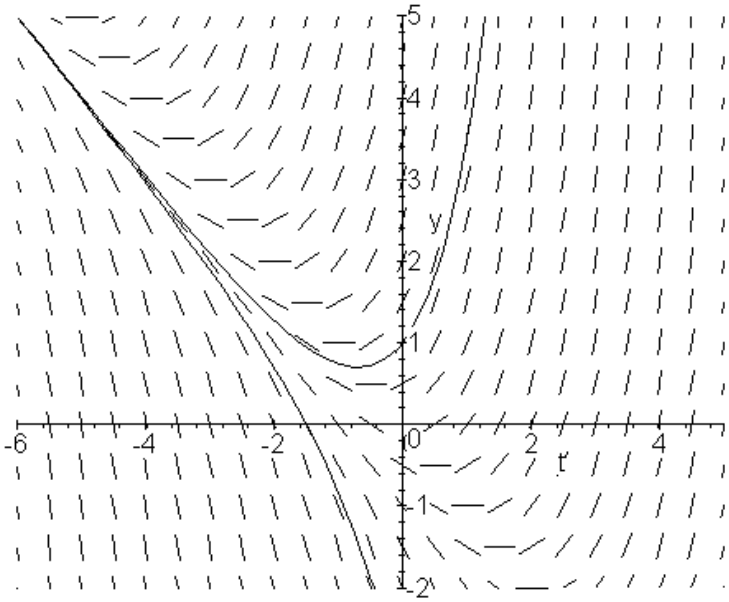
BJARNE HELLESEN og
MOGENS ODDERSHEDE LARSEN

MATEMATIK FOR INGENIØRER

BIND 1

6. UDGAVE



DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
INSTITUT FOR ANVENDT KEMI
2000

FORORD

Formål. Det er hensigten, at lærebogssystemet (i alt 3 bind) skal give en overskuelig og letlæst fremstilling af den matematik, som er nyttig på ingeniørens arbejdsplads eller kræves for, at man kan forstå kurser og litteratur om mange teknisk-videnskabelige emner. Bøgerne skal også kunne være opslagsværk og inspirationskilde for praktiserende ingeniører og andre med et behov for anvendelses-orienteret matematik. I første række er bøgerne skrevet som grundlag for den matematikundervisning som finder sted på diplomuddannelsen på "Institut for Anvendt Kemi", DTU.

Læserens forudsætninger. Der forudsættes et kendskab til matematik svarende til A-niveau. De vigtigste forudsætninger repeteres dog kort, så bøgerne skulle også være tilgængelige for læsere med forudsætninger, der svarer til B-niveau i matematik.

Indhold. Bind 1 omhandler funktioner af 1 variabel.
Hovedemnerne er:

- Grundlæggende begreber for funktion af 1 variabel (for en stor del kendt fra A-niveauet)
- Differentialligninger
- Komplekse tal
- Approksimation.

I tilknytning til de fleste emner angives numeriske metoder (og algoritmer), som ud over at være nyttige for en ingeniør også kan støtte den matematiske forståelse ved at give "jordforbindelse".
Endvidere vises, hvorledes man kan benytte matematik-programmer til løsning af problemerne. Som eksempel er valgt matematik-programmet Maple.

Struktur. Hvert kapitel starter med nogle afsnit, hvor "kernestoffet" behandles, derefter kommer nogle supplementsafsnit og til sidst et afsnit med opgaver:

- Kernestoffet i kapitlet forklarer de matematiske emner intuitivt og praktisk ved hjælp af figurer og gennemregnede eksempler. Definitioner og sætninger formuleres præcist, og de fleste sætninger bevises.

- Supplementsafsnittene i kapitlet indeholder behandlingen af mere perifere emner, uddybende forklaringer og lange, komplicerede beviser.

- Opgaverne sidst i kapitlet indeholder blandt andet nogle opgaver, der er mærket med "T", fordi de er særligt velegnede i forbindelse med en gennemgang på tavlen. Bag i bogen findes en facitliste til alle opgaverne.

I appendix findes algoritmer til de numeriske metoder samt oversigter med nyttige formler.

Læsning. Ønsker man på ret kort tid at få et overblik og en "praktisk forståelse" af mange områder af matematikken, kan man overspringe supplementafsnittene, og alt der er trykt med småt. Har et bestemt emne særlig interesse, så kan en større viden herom som regel opnås ved, at man læser de relevante supplementsafsnit, det som er trykt med småt, og desuden konsulterer appendix og litteraturlisten bag i bogen.
Når man i bind 1 har læst kapitlerne 1 og 2 kan man læse de øvrige kapitler uafhængigt af hinanden, bortset fra, at kapitel 6 forudsætter kapitel 5.
På baggrund af kapitlerne 1 og 2 i bind 1 kan bind 2 læses, mens læsning af bind 3 yderligere kræver kendskab til kapitel 4 og 6 om differentialligninger.
Sammen med bind 1, 2 og 3 vil det være nyttigt at have en formelsamling ved hånden. Schaum-seriens: "Mathematical Handbook" er velegnet, og den vil der blive henvist til i alle tre bind med den korte betegnelse "Schaums håndbog".

Undervisning. I en årrække har de 3 bind været benyttet på Danmarks Ingeniørakademis kemiafdeling (nu diplomstudiet på DTU i kemi). Hvert bind gennemgås i løbet af 1 modulkursus, dvs. ca. 45 undervisningstimer suppleret med regning af opgaver. Med hensyn til prioriteringen af emnerne og eksemplerne på anvendelser bærer bøgerne et naturligt præg af oprindelsesstedet. De skulle imidlertid uden vanskelighed kunne indgå alle steder, hvor der skal undervises i anvendelses-orienteret matematik, især hvis der suppleres med noter om specielle emner.

Yderligere bemærkninger. Vi vil være taknemmelige for alle forslag til forbedringer, det gælder også forslag til rettelse af småfejl. Foreløbig siger vi tak til kolleger og studerende for inspirerende kritik gennem årene. En særlig tak rettes til lektor Preben Alsholm, som har givet inspiration til mange forbedringer. Endvidere bringer vi en tak til fru Annette Karlsson for den omhu og tålmodighed hun gennem årene har udvist ved skrivningen af de mange forskellige udgaver, ligesom vi takker teknisk tegner Pernille Zeiler Nielsen for med stor dygtighed at have tegnet bogens figurer. Endelig takker vi Den Private Ingeniørfond for stor imødekommenhed ved udgivelsen.

Lyngby
Juni 1996

Bjarne Hellesen
Mogens Oddershede Larsen

5. og 6. udgave. Der er kun foretaget mindre ændringer samt tilføjet eksempler og opgaver. I den forbindelse takkes kolleger og studerende ved DTU's diplomuddannelser og levnedsmiddeluddannelse varmt. Den 6. udgave kan bruges sammen med 5. udgave.

Lyngby, juni 1998 og november 1999

Bjarne Hellesen
Mogens Oddershede Larsen

INDHOLD

1 FUNKTION AF ÉN VARIABEL

1.1 FUNKTIONSBEGREBET 1
1.2 GRÆNSEVÆRDI 5
1.3 KONTINUITET 7
1.4 DIFFERENTIATION 9
1.5 INTEGRATION 18
1.6 NUMERISK INTEGRATION 24
1A PRÆCIS DEFINITION AF "GRÆNSEVÆRDI" 26
1B UNIFORM KONTINUITET 28
OPGAVER 29

2 STANDARDFUNKTIONER

2.1 LOGARITMEFUNKTIONER 39
2.2 EKSPONENTIALFUNKTIONER 42
2.3 POTENSFUNKTIONER 46
2.4 LOGARITMISKE KOORDINATSYSTEMER 49
2.5 TRIGONOMETRISKE FUNKTIONER 51
2.6 ARCUSFUNKTIONER 53
2.7 DE HYPERBOLSKE FUNKTIONER 57
2.8 AREAFUNKTIONERNE 59
2A DETALJERET DEFINITION AF POTENSFUNKTIONER 61
2B BEVIS FOR TRIGONOMETRISKE FORMLER 62
OPGAVER 64

3 GRÆNSEUNDERSØGELSER OG INTEGRATION

3.1 INDLEDNING 78
3.2 L'HOSPITALS REGEL 79
3.3 STØRRELSESFORHOLD 84
3.4 UEGENTLIGE INTEGRALER 85
3.5 DEKOMPOSITION 88
3A BEVIS FOR L'HOSPITALS REGEL 92
3B CAUCHY'S HOVEDVÆRDI 93
OPGAVER 94

4 DIFFERENTIALLIGNINGER AF 1. ORDEN

4.1 INDLEDNING 103
4.2 NUMERISK LØSNING AF 1. ORDENS DIFFERENTIALLIGNING 105
4.3 DIFFERENTIALLIGNINGER, HVOR DE VARIABLE KAN SEPARERES 110
4.4 DEN LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNING AF FØRSTE ORDEN 116
4A SEPARERE VARIABLE 122
4B ANDRE TYPER AF DIFFERENTIALLIGNINGER AF 1. ORDEN 124
OPGAVER 126

5 KOMPLEKSE TAL

5.1 INDLEDNING 135
5.2 MÆNGDEN AF KOMPLEKSE TAL 136
5.3 ADDITION OG SUBTRAKTION 139
5.4 MULTIPLIKATION OG DIVISION 140
5.5 REKTANGULÆR FORM 141
5.6 POLÆR FORM. EKSPONENTIALFUNKTIONEN 143
5.7 DEN BINOME LIGNING 152
5.8 ANDENGRADSLIGNINGEN 154
5.9 POLYNOMIER 156
5A ALGEBRAENS FUNDAMENTALSÆTNING 161
5B DEKOMPOSITION I DET GENERELLE TILFÆLDE 163
OPGAVER 168

6 DIFFERENTIALLIGNINGSPROBLEM AF VILKÅRLIG ORDEN

6.1 INDLEDNING 175
6.2 DEN HOMOGENE LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNING AF 2. ORDEN MED KONSTANTE KOEFFICIENTER 177
6.3 DEN HOMOGENE LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNING AF N'TE ORDEN MED KONSTANTE KOEFFICIENTER 184
6.4 DEN INHOMOGENE DIFFERENTIALLIGNING MED KONSTANTE KOEFFICIENTER 187
6.5 DEN LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNING AF 2. ORDEN 201
6.6 SYSTEM AF 1. ORDENS DIFFERENTIALLIGNINGER. NUMERISK LØSNING 204
6.7 OMFORMNING AF DIFFERENTIALLIGNINGER AF N'TE ORDEN 210
6A BEVIS VEDR. LINEÆR DIFFERENTIALLIGNING AF 2. ORDEN 213
OPGAVER 217

7 APPROKSIMERENDE FUNKTION

7.1 ANVENDELSER 228
7.2 TAYLOR-APPROKSIMATION FOR FUNKTION AF 1 VARIABEL 228
7.3 POLYNOMIE-KOLLOKATION 232
7.4 SPLINE-KOLLOKATION 235
7A MERE OM TAYLORPOLYNOMIUM 239
7B RATIONAL KOLLOKATION 244
OPGAVER 246

APPENDIX

1.1. NUMERISK DIFFERENTIATION 250
1.2. NUMERISK INTEGRATION 252
2.1 STANDARDFUNKTIONER 254
4.1. NUMERISK LØSNING AF 1. ORDENS DIFFERENTIALLIGNING 259
4.2. OVERSIGT OVER DIFFERENTIALLIGNINGER AF 1. ORDEN 260
5.1. KOMPLEKSE STANDARDFUNKTIONER 262
5.2. LØSNING AF ANDEN- OG TREDIEGRADSLIGNING 264
5.3. LØSNING AF N'TE GRADSLIGNING 266
6.1. NUMERISK LØSNING AF 2. ORDENS DIFFERENTIALLIGNING 268
6.2. OMREGNING AF SVINGNINGER 269
6.3. GÆTTEMETODE. PARTIKULÆR LØSNING TIL LINEÆR DIFFERENTIALLIGNING 270
6.4. TABELMETODE. PARTIKULÆR LØSNING TIL LINEÆR DIFFERENTIALLIGNING 271
6.5. INTEGRALMETODE. PARTIKULÆR LØSNING TIL LINEÆR DIFFERENTIALLIGNING 276
6.6. NUMERISK LØSNING AF SYSTEM AF DIFFERENTIALLIGNINGER 277
6.7. OVERSIGT OVER DIFFERENTIALLIGNINGER AF 2. ORDEN 279
7.1. APPROKSIMATION AF $f(x)$ 281

LITTERATUR 284

FACITLISTE 287

SYMBOLLISTE 313

STIKORD 317

1 FUNKTION AF ÉN VARIABEL

I dette kapitel repeteres basale beregningsmetoder samt grundlæggende begreber såsom grænseværdi, kontinuitet, differentiation og integration for funktioner af én variabel.

1.1 FUNKTIONSBEGREBET

Man siger, at der foreligger en funktion f, hvis der til ethvert element x i en **definitionsmængde** D er tilordnet netop ét element $f(x)$ i en mængde M. Man kalder $f(x)$ for funktionsværdien. Mængden af alle funktionsværdier kaldes **værdimængden** (V på figur 1.1). Vi vil ofte blot skrive "funktionen x^2", $f(x) = x^2$ eller angive funktionen ved en ligning af formen $y = x^2$. I det sidste tilfælde kaldes x for den **uafhængige** variabel og y for den **afhængige** variabel. En anden skrivemåde er $f\colon x \to x^2$, og ved de praktiske anvendelser ser man ofte skrivemåden $y = y(x)$.

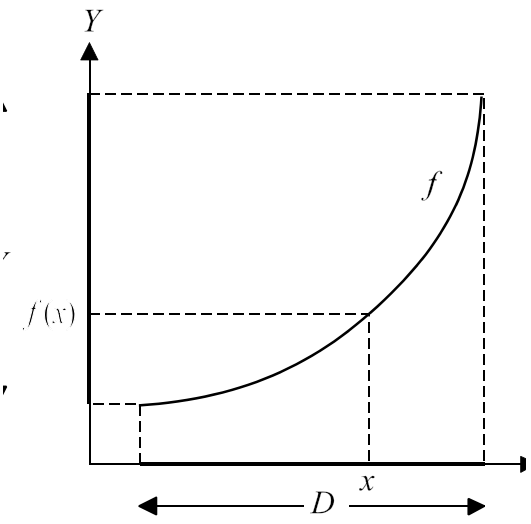


Fig. 1.1. *Graf for en funktion f.*

Forklaring af skrivemåden $y = y(x)$. Er f.eks. massen m af en stang en funktion af stangens længde l, vil man nødigt skrive $m = f(l)$, da man så dels benytter symbolet m for massen betragtet som en variabel, dels benytter symbolet f for massens afhængighed af l. I stedet skrives tit $m = m(l)$, så der kun knyttes ét symbol m til den fysiske størrelse.

Eksempel 1.1. Reducér funktionsudtryk.

Reducér om muligt de følgende udtryk uden hjælpemidler:

1) $\dfrac{20/3}{4/9}x$, $\quad x+\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{10}$, $\quad \dfrac{13}{2}x-5x$, $\quad \dfrac{x}{x^2-9}+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x+3}$,

2) $x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x$, $\quad x^2x^4$, $\quad \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{4x}$, $\quad (x^2)^3$, $\quad 2^x3^x$, $\quad \dfrac{x^6}{x^2}$, $\quad \dfrac{\mathrm{e}^{6x}}{\mathrm{e}^{2x}}$, $\quad \dfrac{6^x}{2^x}$,

3) $(\sqrt{x})^8$, $\quad \sqrt{36x^{36}}$, $\quad \sqrt{e^2+2^2}-2+x$, $\quad \dfrac{12x^5}{4x^3}$, $\quad 2x^9-(x^5-3x^2)(2x^4-x)$.

LØSNING:

1) $\dfrac{20/3}{4/9}x = \dfrac{20}{3}\cdot\dfrac{9}{4}$ (dividér med brøk 4/9 ved at gange med inverse brøk 9/4)

$$= \frac{20\cdot 9}{3\cdot 4}x = \frac{5\cdot 3}{1\cdot 1}x = \underline{\underline{15x}},$$

$$x+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}-\frac{3}{10} = x+\frac{1\cdot 5}{6\cdot 5}+\frac{2\cdot 10}{3\cdot 10}-\frac{3\cdot 3}{10\cdot 3}$$ (skaf fælles nævner 30)

$$= x+\frac{5}{30}+\frac{20}{30}-\frac{9}{30} = x+\frac{5+20-9}{30} = x+\frac{16}{30} = \underline{\underline{x+\frac{8}{15}}},$$

$$\frac{13}{2}x-5x = \frac{13}{2}x-\frac{10}{2}x = \frac{13-10}{2}x = \underline{\underline{\frac{3}{2}x}},$$

$$\frac{x}{x^2-9}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3} = \frac{x}{x^2-9}+\frac{1\cdot(x+3)}{(x-3)\cdot(x+3)}+\frac{1\cdot(x-3)}{(x+3)\cdot(x-3)}$$

$$= \frac{x}{x^2-9}+\frac{x+3}{x^2-9}+\frac{x-3}{x^2-9} = \frac{x+x+3+x-3}{x^2-9} = \underline{\underline{\frac{3x}{x^2-9}}},$$

2) $x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x = \underline{\underline{x^6}}$, $\quad x^2x^4 = x^{2+4} = \underline{\underline{x^6}} = (x\cdot x)\cdot(x\cdot x\cdot x\cdot x)$,

$\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{4x} = \mathrm{e}^{2x+4x} = \underline{\underline{\mathrm{e}^{6x}}}$, $\quad (x^2)^3 = x^{2\cdot 3} = \underline{\underline{x^6}} = (x\cdot x)\cdot(x\cdot x)\cdot(x\cdot x)$,

$2^x3^x = (2\cdot 3)^x = \underline{\underline{6^x}}$, $\quad \dfrac{x^6}{x^2} = x^{6-2} = \underline{\underline{x^4}}$,

$\dfrac{\mathrm{e}^{6x}}{\mathrm{e}^{2x}} = \mathrm{e}^{6x-2x} = \underline{\underline{\mathrm{e}^{4x}}}$, $\quad \dfrac{6^x}{2^x} = \left(\dfrac{6}{2}\right)^x = \underline{\underline{3^x}}$,

3) $\sqrt{\mathrm{e}^2+2^2}-2+x$ $\underline{\underline{\text{kan ikke reduceres}}}$, $\quad (\sqrt{x})^8 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^8 = x^{\frac{1}{2}\cdot 8} = \underline{\underline{x^4}}$,

$\sqrt{36x^{36}} = \sqrt{36}\cdot\sqrt{x^{36}} = 6\cdot x^{36\cdot\frac{1}{2}} = \underline{\underline{6x^{18}}}$, $\quad \dfrac{12x^5}{4x^3} = 3x^{5-3} = \underline{\underline{3x^2}}$,

$$2x^9-(x^5-3x^2)(2x^4-x) = 2x^9-(x^52x^4-x^5x-3x^22x^4+3x^2x)$$

$$= 2x^9-(2x^9-x^6-6x^6+3x^3) = 2x^9-2x^9+x^6+6x^6-3x^3 = \underline{\underline{7x^6-3x^3}}.$$

Monoton funktion

En funktion f siges at være **voksende** i et interval I, hvis det for vilkårlige x_1 og x_2 i I gælder, at

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \ ,$$

se figur 1.2.

Analogt siges en funktion at være **aftagende** i et interval I, hvis det for vilkårlige x_1 og x_2 i I gælder, at

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2) \ .$$

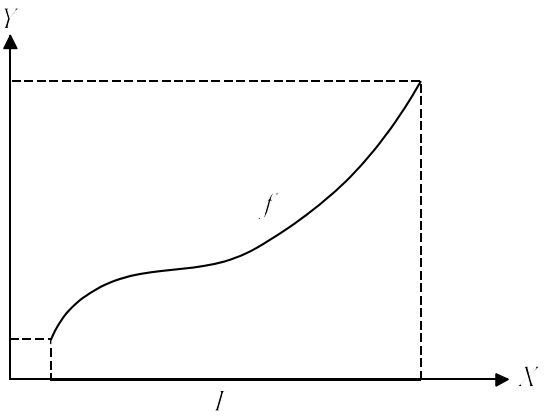


Fig. 1.2. *Voksende funktion.*

En funktion f siges at være **monoton** i et interval I, hvis den enten er en voksende funktion i I eller en aftagende funktion i I.

Eksempel 1.2. Monoton funktion.

Hvert af de følgende udtryk $f(x)$ angiver en funktion f, der har et interval som definitionsmængde. Afgør, om funktionen er voksende, aftagende, eller ikke-monoton i intervallet.

$$2x+1, \quad -x, \quad x^5, \quad |x|, \quad \frac{1}{1+\sqrt{x}} .$$

LØSNING:

$2x+1$: $\quad x_1<x_2 \ \Rightarrow \ 2x_1<2x_2 \ \Rightarrow \ 2x_1+1<2x_2+1$, $\quad$ voksende

$-x$: $\quad x_1<x_2 \ \Rightarrow \ -x_1>-x_2$, $\quad$ aftagende

x^5: $\quad x_1<x_2 \ \Rightarrow \ x_1^5<x_2^5$, $\quad$ voksende

$|x|$: $\quad 0<1$ og $|0|<|1|$, men $-1<0$ og $|-1|>|0|$, $\quad$ ikke-monoton

$\frac{1}{1+\sqrt{x}}$: $\quad 0 \le x_1<x_2 \ \Rightarrow \ \sqrt{x_1}<\sqrt{x_2} \ \Rightarrow \ 1+\sqrt{x_1}<1+\sqrt{x_2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1+\sqrt{x_1}} > \frac{1}{1+\sqrt{x_2}} \ , \quad \text{aftagende} \ .$$

Omvendt funktion

Lad f være en funktion med definitionsmængden D og værdimængden V. Hvis der til ethvert $y \in V$ findes netop ét $x \in D$, så $f(x) = y$, siges f at have en omvendt funktion f^{-1} givet ved

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y).$$

Eksempelvis har enhver monoton funktion en omvendt funktion.

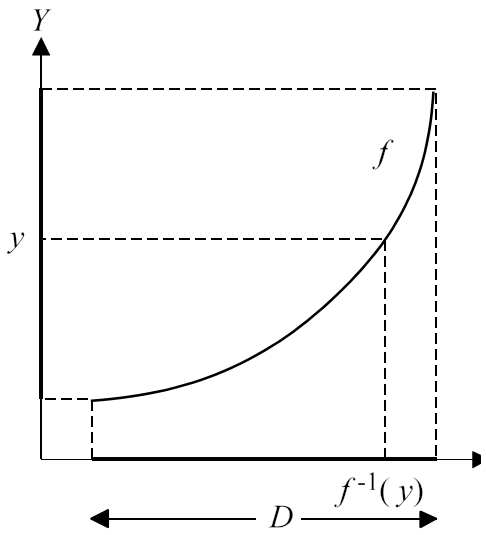


Fig. 1.3. *Omvendt funktion.*

Således er $f(x) = x^2$ en voksende funktion for $x \geq 0$, og f har derfor her en omvendt funktion f^{-1}. For $x \geq 0$ fås af $y = x^2$, at $x = \sqrt{y}$, dvs. den omvendte funktion er givet ved $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, hvor $y \geq 0$. Hvis vi som sædvanlig afbilder den uafhængige variabel ud ad den vandrette akse, fås grafen for f^{-1} af grafen for f ved spejling i linien $y = x$, se figur 1.4.

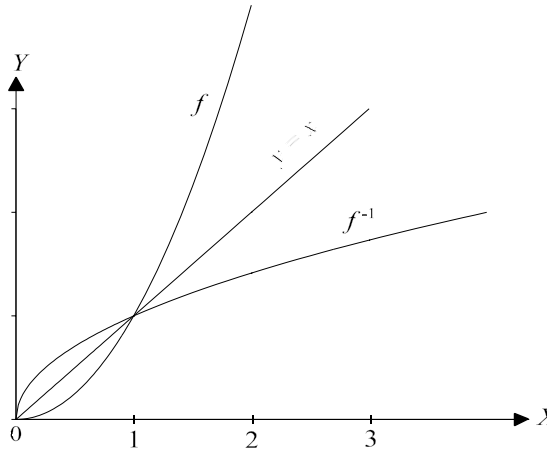


Fig. 1.4. *Graf for omvendt funktion fås ved spejling i* $y = x$.

Eksempel 1.3. Omvendt funktion.

Hvert af de følgende udtryk $f(x)$ angiver en funktion f, der har et interval som definitionsmængde, og er monoton i dette interval. Find den omvendte funktion.

$$2x+1, \quad -x, \quad x^5, \quad e^x, \quad \frac{1}{1+\sqrt{x}}.$$

LØSNING:

$\square = 2x+1$, $y-1 = 2x$, $x = f^{-1}(y) = \underline{\underline{\dfrac{y-1}{2}}}$, $y \in \mathbb{R}$

$\square = -x$, $x = f^{-1}(y) = \underline{\underline{-y}}$, $y \in \mathbb{R}$

$\square = x^5$, $x = f^{-1}(y) = \underline{\underline{\sqrt[5]{y}}}$, $y \in \mathbb{R}$

$\square = e^x$, $x = f^{-1}(y) = \underline{\underline{\ln y}}$, $y > 0$

$y = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$, $1+\sqrt{x} = \dfrac{1}{y}$, $\sqrt{x} = \dfrac{1}{y} - 1$, $x = f^{-1}(y) = \underline{\underline{\left(\dfrac{1}{y} - 1\right)^2}}$, $0 < y \le 1$.

1.2 GRÆNSEVÆRDI

Lad f være en funktion, som er defineret i en udprikket omegn [1] af et reelt tal x_0, og lad a være et reelt tal. Hvis $f(x)$ er vilkårligt tæt på a, blot x er tilstrækkeligt tæt på x_0, siger vi, at $f(x)$ har grænseværdien a for x gående mod x_0. [2]
Vi skriver da

$$f(x) \to a \quad \text{for} \quad x \to x_0 \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = a \qquad \text{eller} \qquad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} a \ .$$

Eksempelvis skriver vi, at $x^2 \to 4$ for $x \to 2$.

Grænseovergang mod ∞ og $-\infty$ anvendes også, f.eks.

$$e^x \to 0 \quad \text{for} \quad x \to -\infty$$

og $\dfrac{1}{x^2} \to \infty$ for $x \to 0$ (dvs. $\dfrac{1}{x^2}$ har ingen grænseværdi for $x \to 0$, idet ∞ ikke er et reelt tal) .

Endvidere forekommer ensidige grænseovergange, f.eks.

$$\ln x \to -\infty \quad \text{for} \quad x \to 0+ \qquad (x \text{ går mod 0 fra højre})$$

og $\sqrt{1-x^2} \to 0$ for $x \to 1-$ (x går mod 1 fra venstre) .

---

[1] Ved en udprikket omegn af x_0 forstås en mængde $\{x \mid 0 < |x-x_0| < \epsilon\}$, hvor ε er et positivt tal.

[2] For bedre at kunne undersøge vanskeligere tilfælde eller bevise sætninger om grænseværdi, må man erstatte ordene "vilkårligt tæt" og "tilstrækkeligt tæt" med noget mere præcist. Dette er gjort i supplement 1A, hvor også grænseovergange mod ∞ er defineret.

Regneregler for grænseværdier

På grundlag af definitionen kan en række velkendte regneregler for grænseværdi udledes. Disse er angivet i nedenstående skema.

Givet	Konklusion
$f(x) \to a \quad \text{for} \quad x \to x_0$ $g(x) \to b \quad \text{for} \quad x \to x_0$	$f(x) + g(x) \to a + b \quad \text{for} \quad x \to x_0$
	$f(x) - g(x) \to a - b \quad \text{for} \quad x \to x_0$
	$f(x) \cdot g(x) \to a \cdot b \quad \text{for} \quad x \to x_0$
	$\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{a}{b} \quad \text{for} \quad x \to x_0, \quad \text{hvis } b \neq 0$
$f(x) \to a \quad \text{for} \quad x \to x_0$ $g(y) \to b \quad \text{for} \quad y \to a$	$g(f(x)) \to b \quad \text{for} \quad x \to x_0$ $(\text{forudsat, at } x \neq x_0 \implies f(x) \neq a)$
$\lvert f(x)\rvert \to a \ (\text{eller } \infty) \ \text{for} \ x \to x_0, \quad a \neq 0$ $g(x) \to 0 \quad \text{for} \quad x \to x_0$	$\left\lvert \dfrac{f(x)}{g(x)} \right\rvert \to \infty \quad \text{for} \quad x \to x_0$
$f(x) \to a \quad \text{for} \quad x \to x_0$ $\lvert g(x)\rvert \to \infty \quad \text{for} \quad x \to x_0$	$\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 0 \quad \text{for} \quad x \to x_0$
$f(x) \to a \quad \text{for} \quad x \to x_0, \quad a \neq 0$ $\lvert g(x)\rvert \to \infty \quad \text{for} \quad x \to x_0$	$\lvert f(x) \cdot g(x)\rvert \to \infty \quad \text{for} \quad x \to x_0$

$(a, b, x_0 \in \mathbb{R})$

Eksempel 1.4. Grænseværdi.

Undersøg de følgende udtryk for $x \to 0+$ og for $x \to \infty$:

$$\frac{1}{x}, \quad \sqrt{x}, \quad e^x, \quad e^{\sqrt{x}}, \quad \frac{2x^2 + 4x + 1}{3x^2 + 5}.$$

LØSNING:

$$\frac{1}{x} \to \infty \quad \text{for} \quad x \to 0+, \qquad \frac{1}{x} \to 0 \quad \text{for} \quad x \to \infty,$$

$$\sqrt{x} \to 0 \quad \text{for} \quad x \to 0+, \qquad \sqrt{x} \to \infty \quad \text{for} \quad x \to \infty,$$

$$e^x \to 1 \quad \text{for} \quad x \to 0+, \qquad e^x \to \infty \quad \text{for} \quad x \to \infty,$$

$$e^{\sqrt{x}} \to 1 \quad \text{for} \quad x \to 0+, \qquad e^{\sqrt{x}} \to \infty \quad \text{for} \quad x \to \infty,$$

$$\frac{2x^2+4x+1}{3x^2+5} \to \frac{2\cdot 0^2+4\cdot 0+1}{3\cdot 0^2+5} = \frac{1}{5} \quad \text{for} \quad x \to 0+,$$

$$\frac{2x^2+4x+1}{3x^2+5} = \frac{2+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{5}{x^2}} \to \frac{2+0+0}{3+0} = \frac{2}{3} \quad \text{for} \quad x \to \infty.$$

Maple:
I "Math mode" : Vælg i menu Expression" $\lim_{x \to a} f$ Udfyld felter ved benyttelse af tabulatortast.

Eksempel: $\lim_{x \to 0+} 1/x$

1.3 KONTINUITET

DEFINITION af kontinuitet. *Lad f være en funktion, der i hvert fald er defineret i et åbent interval indeholdende x_0. Vi siger da, at f er kontinuert i x_0, hvis*

$$f(x) \to f(x_0) \quad \textit{for} \quad x \to x_0 \ .$$

Hvis definitionsmængden for f er et lukket interval $[a;b]$, siger vi, at f er kontinuert i endepunktet a, blot der gælder

$$f(x) \to f(a) \quad \text{for} \quad x \to a+ \ .$$

Tilsvarende defineres kontinuitet i intervalendepunktet b. Hvis f er kontinuert i hele sin definitionsmængde, siger vi kort, at f er kontinuert.

Geometrisk betydning af kontinuitet. Intuitivt kan man ofte forestille sig kontinuerte funktioner som funktioner, hvis graf er "ubrudt". På figur 1.5 er vist nogle ikke-kontinuerte funktioners grafer.

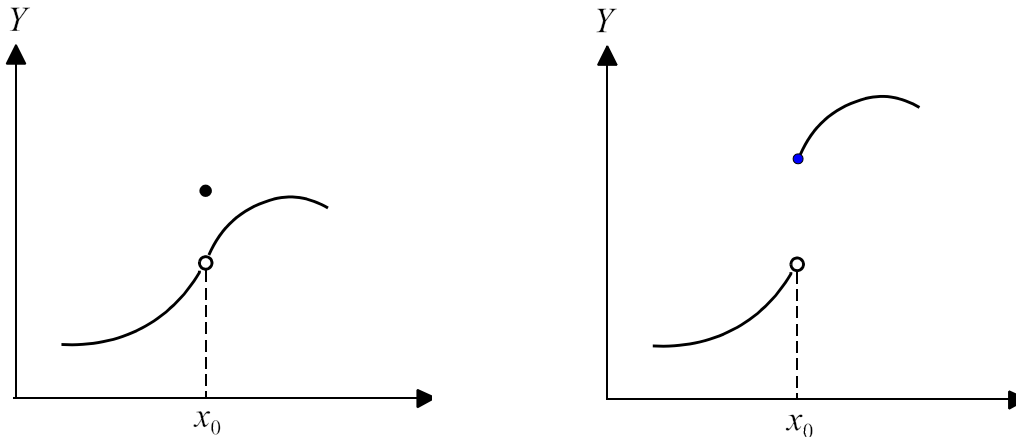


Fig. 1.5. *Nogle ikke-kontinuerte funktioners grafer.*

Regning med kontinuerte funktioner

Ved "sædvanlig regning" ($f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$, $f\circ g$, f^{-1}, se evt. sætning 1.1) med kontinuerte funktioner fås atter kontinuerte funktioner, og da alle "standardfunktioner" (exp, ln, potens, sin, cos osv.) er kontinuerte i deres definitionsmængde, vil også enhver funktion, der ved "sædvanlig regning" kan dannes ud fra standardfunktionerne, blive kontinuert i sin definitionsmængde. Eksempelvis vil funktionen

$$f(x) = \sin(x+1) + \frac{e^x - \ln x}{x+1}$$

være kontinuert i mængden $\mathbb{R}_+ =]0;\infty[$.

SÆTNING 1.1 *(regning med kontinuerte funktioner).*

a) Hvis f og g er to funktioner, der er kontinuerte i x_0, så er funktionerne $f+g$, $f-g$ og $f\cdot g$ også kontinuerte i x_0. Hvis $g(x_0)\neq 0$, så er også $\frac{f}{g}$ kontinuert i x_0.

b) Hvis g er kontinuert i x_0, og f er kontinuert i $y_0 = g(x_0)$, så er $f\circ g$ (dvs. $f(g(x))$) kontinuert i x_0.

c) Hvis f er monoton og kontinuert i et interval I, så er den omvendte funktion f^{-1} kontinuert i $f(I)$.

Beviset for sætningen findes i lærebøger for gymnasiet og vil ikke blive gennemført her.

SÆTNING 1.2 *(kontinuitetssætning). Lad en funktion f være kontinuert, og lad definitionsmængden være et interval I. Så er værdimængden også et interval. Er I et lukket begrænset interval, så har f både et globalt maksimum M og et globalt minimum m, således at værdimængden for f er intervallet* $[m; M]$.

Et bevis for sætningen kræver en detaljeret analyse af begrebet "reelle tal" og vil ikke blive gennemført her. Sætningen er imidlertid intuitivt let at forstå, idet en funktion, hvis definitionsmængde er sammenhængende, og hvis graf også er sammenhængende, må antage enhver værdi mellem $f(x_1)$ og $f(x_2)$, hvor x_1 og x_2 er to vilkårlige punkter i definitionsmængden.
Specielt vil det gælde, at hvis $f(x_1)$ og $f(x_2)$ har forskelligt fortegn (se figur 1.6), så vil f antage værdien 0 for mindst én mellemliggende værdi af x - en sætning man anvender (som regel uden at nævne det) ved numerisk løsning af en ligning $f(x) = 0$.

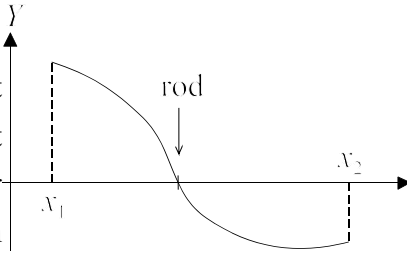


Fig. 1.6. *Der må være en rod.*

1.4 DIFFERENTIATION

Som eksempler på anvendelser af differentialkvotienter kan nævnes

$\frac{dx}{dt}$ = hastigheden $\left[\frac{m}{s}\right]$ af en væske, der strømmer i et rør,

$\frac{dc}{dt}$ = ændringen pr. tidsenhed $\left[\frac{kg}{m^3 h}\right]$ af et stofs koncentration c,

$\frac{dw}{dt}$ = pumpearbejde pr. tidsenhed $[kW]$.

Lad f være en funktion defineret i et interval I, lad $x_0 \in I$, og lad α være et reelt tal.

DEFINITION af differentialkvotient og tangent. *Funktionen f siges at være differentiabel i* x_0 *med differentialkvotienten* α*, hvis*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to \alpha \quad for \quad \Delta x \to 0 .$$

Differentialkvotienten betegnes $\frac{df}{dx}(x_0)$ *eller* $f'(x_0)$.
Linien gennem $(x_0, f(x_0))$ *med hældningskoefficienten* $f'(x_0)$ *kaldes en tangent til grafen for f. Tangenten har da ligningen* $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Grænseovergangen er illustreret på figur 1.7.

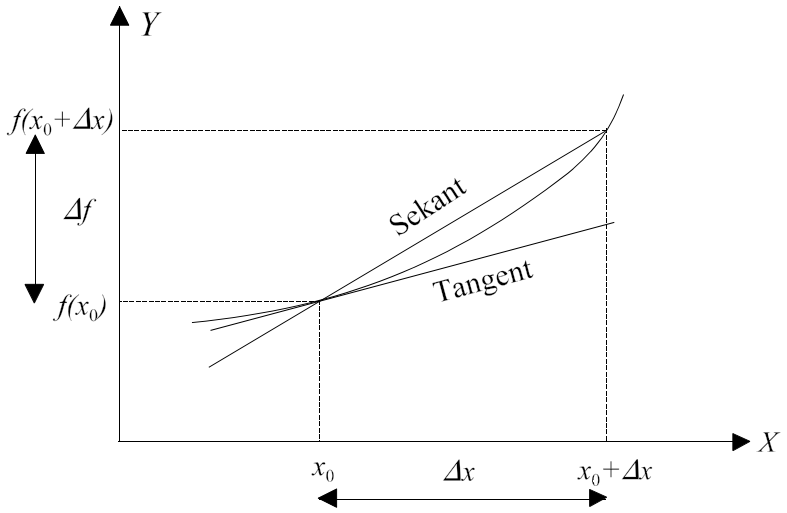


Fig. 1.7. *Sekanten har hældningen* $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. *Grænseværdien* $\frac{df}{dx}$ *er hældningen for tangenten.*

Er x_0 et endepunkt af intervallet *I,* foretages kun en ensidig grænseovergang. Funktionen f siges at være differentiabel i intervallet *I*, hvis den er differentiabel i ethvert punkt af *I*.

Skrivemåder

Differentialkvotienten i punktet x_0 kan skrives på flere måder

$$\frac{df}{dx}(x_0) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} \qquad f'(x_0) \qquad Df(x_0) \ .$$

Ofte udelades x_0 af betegnelserne, og man skriver blot

$$\frac{df}{dx} \qquad \frac{dy}{dx} \qquad f' \qquad \square\ \square \ .$$

Skrivemåden $\frac{dy}{dx}$ blev indført af Leibniz (ca. 1675), der benyttede *dy* og *dx* som betegnelser for "uendelig små ændringer".
Undertiden skrives blot således: $\frac{d}{dx}(x^3+5x) = 3x^2+5$.

Ved differentiation af den afledede f' fås den afledede af 2. orden, som kan skrives

$$\frac{d^2f}{dx^2} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} \qquad f'' \ .$$

Analogt fås de højere afledede, f.eks. $\frac{d^7f}{dx^7} = \frac{d^7y}{dx^7} = f^{(7)}$.

Partielle differentialkvotienter $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$. En funktion af én variabel x kan fremkomme ved at man i en funktion af flere variable opfatter alle andre variable end x som konstanter. Eksempelvis kan vi i funktionen $f(x,y,z) = x^2y^2z^3 + 2y + 3x^2 + z + 4$ opfatte y og z som konstanter, dvs. betragte f som en funktion af x alene. Dens differentialkvotient kaldes den **partielle differentialkvotient med hensyn til** x, og den skrives

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2z^3 + 0 + 6x + 0 + 0 = 2xy^2z^3 + 6x \qquad \text{(skrives også } f_x' \text{ eller } f_x\text{)} .$$

Tilsvarende kan man finde den partielle differentialkvotient med hensyn til y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2yz^3 + 2 \qquad \text{(skrives også } f_y' \text{ eller } f_y\text{)} .$$

og den partielle differentialkvotient med hensyn til z:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2y^2z^2 + 1 \qquad \text{(skrives også } f_z' \text{ eller } f_z\text{)} .$$

Tegnet ∂ læses "blødt d" og markerer, at funktionen f har flere variable.

Analogt fås partielle afledede af højere orden, f.eks

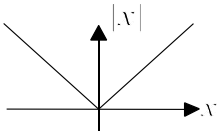
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2z^3 + 6 \qquad \text{(skrives også } f_{xx}'' \text{ eller } f_{xx}\text{)} .$$

Regning med differentiable funktioner

Ved "sædvanlig regning" ($f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$, $f\circ g$, f^{-1} se evt. sætning 1.3) med differentiable funktioner fås atter differentiable funktioner. Da alle standardfunktionerne (exp, ln, potens, cos, sin, $\sqrt{x}$, osv.) er differentiable i deres definitionsmængde (dog for nogle funktioner med undtagelse af enkelte punkter), vil også enhver funktion, der ved "sædvanlig regning" kan dannes ud fra standardfunktionerne, blive differentiabel i sin definitionsmængde (dog for nogle funktioner med undtagelse af enkelte punkter). Eksempelvis vil funktionen

$$f(x) = \sin(x+1) + \frac{e^x - \ln x}{x+1}$$

være differentiabel i sin definitionsmængde $\mathbb{R}_+ =]0;\infty[$. Et andet eksempel er funktionen $g(x) = \sqrt{x^2}$, som er defineret for ethvert reelt tal x, men som kun er differentiabel for $x \neq 0$, idet funktionen $\sqrt{x^2} = |x|$ har et såkaldt "knæk" i $x = 0$:



SÆTNING 1.3 *(regneregler for differentiable funktioner).*

a) Lad f *og* g *være to funktioner, der er differentiable i* x_0, *og lad* k *være en konstant. Så er* $f+g$, $f-g$, $k\cdot f$ *og* $f\cdot g$ *differentiable i* x_0, *og*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$$
$$(f-g)'(x_0) = f'(x_0)-g'(x_0)$$
$$(k\cdot f)'(x_0) = k\cdot f'(x_0)$$
$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0) .$$

Hvis $g(x_0)\neq 0$, *så er* $\frac{f}{g}$ *differentiabel i* x_0, *og*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2} .$$

b) Lad $y=f(u)$ og $u=g(x)$, *hvor funktionen* g *er differentiabel i* x_0, *og funktionen* f *er differentiabel i* $u_0=g(x_0)$. *Så er den sammensatte funktion* $f\circ g$ *differentiabel i* x_0, *og*

$$(f\circ g)'(x_0) = (f(g(x)))'\Big|_{x=x_0} = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0) .$$

Reglen kan også skrives på følgende form, der er lettere at huske:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} .$$

c) Lad $y=f(x)$, *hvor funktionen* f *er monoton og differentiabel i et interval I. Hvis* $x_0\in I$ *og* $f(x_0)\neq 0$, *så er den omvendte funktion* f^{-1} *differentiabel i* $y_0=f(x_0)$, *og der gælder*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

Reglen kan også skrives på følgende form, der er lettere at huske:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} .$$

Beviset for sætning 1.3 vil ikke blive gennemført her.

Eksempel 1.5. Differentiation.

Find den afledede af hvert af de følgende udtryk:

1) $x^3,\quad x^4-x^5,\quad \frac{1}{x},\quad \frac{1}{x^2},\quad \sqrt{x},\quad \frac{1}{\sqrt{x}},\quad \frac{x}{x+1},\quad e^x,\quad e^{\sqrt{x}},$

2) $\ln x,\quad \sin x,\quad \cos x,\quad x\cdot\sin x,\quad \sin(x^2)+3\cos(4x),\quad \sin(\ln x).$

LØSNING:

1) $(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2,$

$(x^4-x^5)' = (x^4)' - (x^5)' = 4x^{4-1} - 5x^{5-1} = 4x^3 - 5x^4,$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)\cdot x^{-1-1} = \frac{-1}{x^2},$

$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = (-2)\cdot x^{-2-1} = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3},$

$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$

$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}},$

$\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{x'\cdot(x+1) - x\cdot(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{1\cdot(x+1) - x\cdot 1'}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2},$

$(e^x)' = e^x,$

$\left(e^{\sqrt{x}}\right)' = e^{\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt{x}\right)' = e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}},$

2) $(\ln x)' = \frac{1}{x},\qquad (\sin x)' = \cos x,\qquad (\cos x)' = -\sin x,$

$(x\cdot\sin x)' = x'\cdot\sin x + x\cdot(\sin x)' = 1\cdot\sin x + x\cdot\cos x = \sin x + x\cdot\cos x,$

$\left(\sin(x^2)+3\cos(4x)\right)' = \left(\sin(x^2)\right)' + \left(3\cos(4x)\right)'$

$= \cos(x^2)\cdot(x^2)' + 3\cdot(-\sin(4x))\cdot(4x)' = \cos(x^2)\cdot 2x + 3\cdot(-\sin(4x))\cdot 4$

$= 2x\cos(x^2) - 12\sin(4x),$

$(\sin(\ln x))' = (\cos(\ln x))\cdot(\ln x)' = (\cos(\ln x))\cdot\frac{1}{x} = \frac{\cos(\ln x)}{x}.$

Eksempel 1.6. Differentiationsregler.

Find differentialkvotienten af e^{x^2+3x} .

LØSNING:

Idet vi sætter $y = e^{x^2+3x}$ og $u = x^2+3x$, fås

$$\frac{de^{x^2+3x}}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{de^u}{du}\cdot\frac{d(x^2+3x)}{dx} = e^u\cdot(2x+3) = \underline{\underline{e^{x^2+3x}(2x+3)}}\ .$$

Maple:

I "Math mode" : Vælg i menu Expression" $\frac{d}{dx}f$ Udfyld felter ved benyttelse af tabulatortast.

Eksempel: $\frac{d}{dx}e^{x^2+2x}$ (vælg under expression e^a)

SÆTNING 1.4 *(middelværdisætning). Lad f være en funktion, der opfylder*

1) f er kontinuert i $[a;b]$,

2) f er differentiabel i $]a;b[$.

Der findes da mindst ét tal c i $]a;b[$, sådan at

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ .$$

Beviset føres ikke her.

SÆTNING 1.5 *(monotonisætning). Lad f være en funktion, der er kontinuert i et interval I og differentiabel i det tilsvarende åbne interval I_0. Der gælder da*

$f'(x) \geq 0$ *overalt i* I_0 *(men ikke konstant lig med 0 i noget delinterval)* $\Longrightarrow$ *f er voksende i I,*

$f'(x) \leq 0$ *overalt i* I_0 *(men ikke konstant lig med 0 i noget delinterval)* $\Longrightarrow$ *f er aftagende i I,*

$f'(x) = 0$ *overalt i* I_0 $\Longrightarrow$ *f er konstant i I.*

Beviset føres ikke her, men sætningen er vigtig i forbindelse med funktionsundersøgelser, se det følgende eksempel.

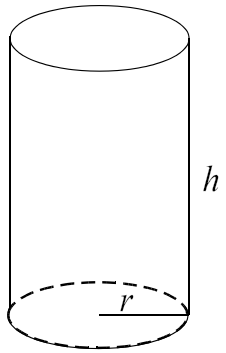
Eksempel 1.7. Optimering.

En cylindrisk beholder, der skal indeholde ætsende kemikalier, ønskes udformet, så overfladen bliver så lille som muligt, da overfladebehandlingen er dyr. Beholderen, som ikke behøver noget låg, skal have rumfanget $V\ \mathrm{m}^3$.

LØSNING:

Lad cylinderen have højden h og radius r. Arealet af cylinderens overflade (bund + side) er $A = \pi r^2 + 2\pi r h$. Da cylinderens rumfang er $V = \pi r^2 h$, fås

$$h = \frac{V}{\pi r^2}\ .$$



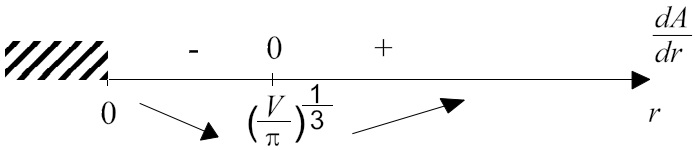
Ved indsættelse i udtrykket for A fås

$$A = A(r) = \pi r^2 + \frac{2V}{r}, \quad \text{hvor} \quad r > 0\ .$$

Ved differentiation fås nu $\frac{dA}{dr} = 2\pi r - \frac{2V}{r^2}$.

Idet $\frac{dA}{dr} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^3 = \frac{V}{\pi} \quad \Leftrightarrow \quad r = \left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$,

kan monotoniforholdene for $A(r)$ anskueliggøres ved følgende tegning:



Heraf ses, at overfladearealet $A(r)$ aftager i intervallet $0 < r < \left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ og vokser i intervallet $\left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} < r < \infty$ (jævnfør monotonisætningen 1.5).

Overfladen er derfor mindst for $\underline{\underline{r = \left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}}}$.

Den tilsvarende h-værdi bliver nu $h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi\left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Maple:

I "Math mode" : Skriv $\pi \cdot r^2 + 2 \cdot V / r$ Vælg i menu "Common Symbols" tallet π

Sæt cursor på udtrykket og tryk på højre musetast.

Vælg i menu "Differentiate" og dernæst r

Tryk på højre musetast på det fremkomne udtryk og vælg "solve" , "Solve for variable" og dermæst "r"

Resultat:

$$\left(\frac{v}{\pi}\right)^{1/3}, -\frac{1}{2}\left(\frac{v}{\pi}\right)^{1/3} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}\left(\frac{v}{\pi}\right)^{1/3}, -\frac{1}{2}\left(\frac{v}{\pi}\right)^{1/3} - \frac{1}{2}I\sqrt{3}\left(\frac{v}{\pi}\right)^{1/3}$$

Vi er kun interesseret i den første rod, da de to øvrige løsninger til ligningen ikke er reelle.

Numerisk differentiation

Ofte kendes funktionsforskriften ikke, men der foreligger blot en række sammenhørende værdier af x og y. Som eksempel 1.3 viser, er der dog også her mulighed for at beregne et skøn for differentialkvotienten i et givet punkt. Formler for sådanne skøn findes i appendix.

Eksempel 1.8. Numerisk differentiation.

Ved et forsøg har man målt følgende sammenhørende værdier af x og $y = f(x)$:

x	2.8	2.9	3.0	3.1	3.2
y	8.368	8.668	8.946	9.201	9.437

Ud fra tabellen ønskes differentialkvotienten $\frac{dy}{dx}$ fundet i punktet $x = 3$ med så mange betydende cifre som muligt.

LØSNING:

Ud fra definitionen af $f'(x_0)$ følger, at for "små" værdier af Δx gælder

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} .$$

Man plejer imidlertid at benytte en forbedret tilnærmelse. Fra oversigten i appendix 1.2 fås f.eks.

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0-\Delta x)}{2\cdot\Delta x}$$

som er hældningskoefficienten af sekanten på figur 1.9.

For $x_0 = 3$ og $\Delta x = 0.2$ fås

$$\frac{f(3+0.2) - f(3-0.2)}{2 \cdot 0.2} = 2.6725 .$$

For at få indsigt i fejlens størrelse gentages beregningen med en halvt så stor værdi af Δx. For $x_0 = 3$ og $\Delta x = 0.1$ fås

$$\frac{f(3+0.1) - f(3-0.1)}{2 \cdot 0.1} = 2.6650 .$$

De to resultater stemmer omtrent overens på de 3 første cifre, så det kan antages, at $f'(3) \approx 2.67$.

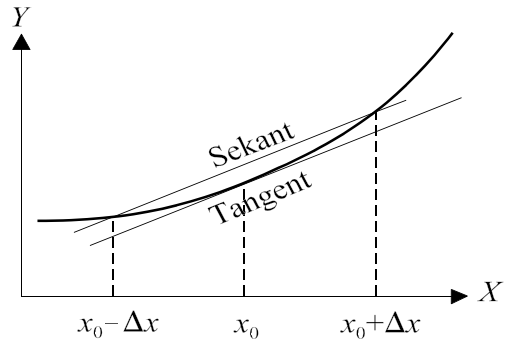


Fig 1.9. *Tangenten og sekanten har meget nær samme hældnings-koefficient.*

Grafisk Fremstilling

Grafiske fremstillinger er velegnet til at skabe overblik og forståelse. De kan også indgå som led i numeriske beregninger. For en funktion f af 1 variabel nævnes i det følgende nogle muligheder for at skaffe sig en tegning af **grafen** $\{(x,y) \mid y = f(x)\}$.

Metode 1 (benyttelse af differentialregning m.m.). Denne metode er velegnet for forholdsvis enkle funktioner. Man bestemmer funktionens nulpunkter, monotoniintervaller, ekstrema og asymptoter, og på det grundlag tegnes grafen. Metoden er velkendt fra gymnasiet, og repeteres i kapitel 2, idet vi tegner grafen for funktionen cosh .

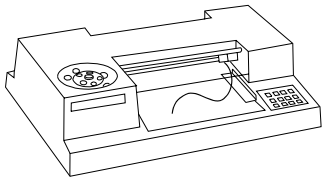
Metode 2 (tabellering). Ved brug af programmerbar lommeregner og computer er det praktisk at tabellere de mere komplicerede funktioner, man kan møde i ingeniørmæssige sammenhænge. Skal man f.eks tegne grafen for funktionen

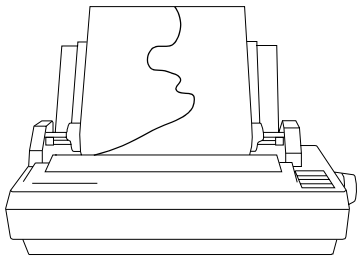
$$f(x) = \frac{3.24x + 0.73\sqrt{x}}{1 + 1.15x \cdot \ln(6.39 + 0.64x + \sin(\sqrt{x} + 2.38))} \quad \text{for} \quad 0 \le x \le 10 \ ,$$

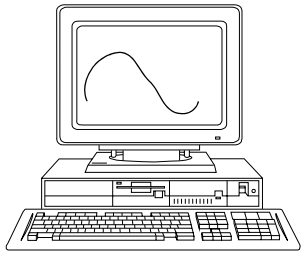
indtastes funktionen i lommeregneren, og man kan nu nemt beregne så mange støttepunkter, at grafen kan tegnes i det ønskede interval, se figur 1.10.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	...
y	0	0.4541	0.6759	0.8259	0.9349	...

Metode 3 (grafisk udstyr). Man kan få grafer ved hjælp af plotter (edb-styrede penne), printer, dataskærm, grafisk lommeregner, oscilloskop eller fra visse registrerende måleapparater.







Man kan også nemt få tegnet en funktion ved hjælp af programmer, f.eks Maple. Nedenfor er angivet de nødvendige ordrer for at få tegnet figur 1.11.

Skriv (3.24*x+0.73*sqrt(x)) / (1 + 1.15*x*ln(6.39 + 0.64*x + sin(sqrt(x)+2.38)))

Tryk på højre musetast, vælg "Plots", Plotbuilder" og vælg interval fra 0 til 10

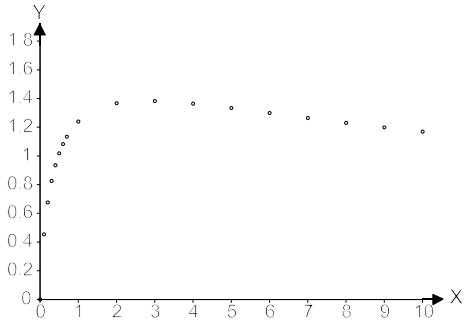


Fig. 1.10. *Støttepunkter tegnet med tegneprogram..*

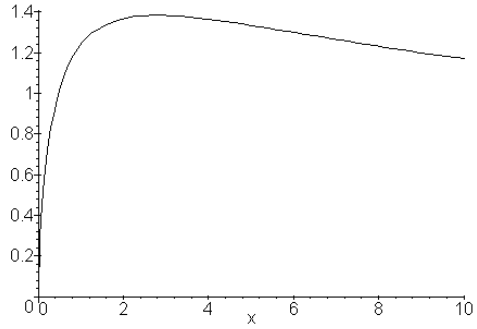


Fig. 1.11. *Graf tegnet af Maple*.

1.5 INTEGRATION

Stamfunktion

DEFINITION af stamfunktion. *Lad f være en funktion, der er defineret i et interval I. Ved en* ***stamfunktion*** *F til f i intervallet I, forstås en differentiabel funktion, som i I opfylder betingelsen* $F'(x) = f(x)$.

Eksempelvis er $\frac{x^3}{3}$ **en stamfunktion til** x^2, **da** $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ **(integrationsprøven)**.

Om eksistensen af stamfunktioner gælder følgende (anføres uden bevis):

1) Enhver funktion, der er kontinuert i et interval I, har en stamfunktion i dette.
2) Lad f have en stamfunktion F i intervallet I. Da er samtlige stamfunktioner i dette interval givet ved $F(x)+k$, hvor k er en vilkårlig (arbitrær) konstant.

Bestemt integral.

Middelsum. Lad der være givet en reel funktion f, der er defineret i et interval $[a;b]$, eventuelt på nær et endeligt antal punktet af intervallet. Der vælges nu en inddeling af intervallet $[a;b]$ i n delintervaller med længder $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. I hvert delinterval vælges endvidere et punkt, hvori f er defineret. Punkterne betegnes $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$. Herefter er vi i stand til at danne størrelsen

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)\cdot\Delta x_j = f(x_1^*)\cdot\Delta x_1 + f(x_2^*)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(x_n^*)\cdot\Delta x_n ,$$

som kaldes en **middelsum** for f i $[a;b]$.

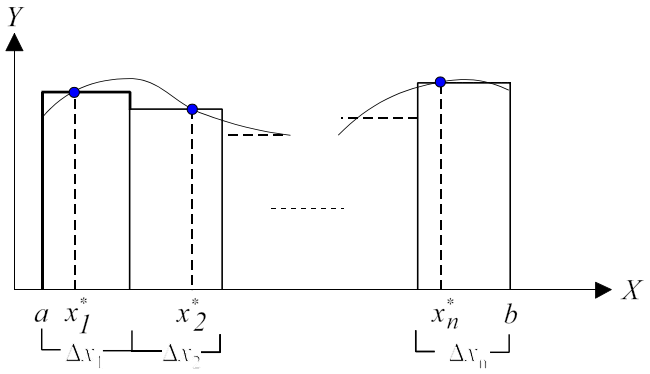


Fig. 1.12. *Summen af rektanglernes arealer (regnet med fortegn) er en middelsum for f i $[a;b]$.*

DEFINITION af bestemt integral. *Hvis middelsummen* $\sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)\cdot\Delta x_j$ *har en grænseværdi* [3]*, når inddelingen gøres finere og finere, sådan at længden af det største delinterval går mod 0, så kaldes denne grænseværdi for det* ***bestemte integral*** $\int_a^b f(x)\,dx$**,** *og f siges at være* ***integrabel*** *i* $[a;b]$.

Funktionen f efter integraltegnet kaldes **integranden.**

Fra gymnasiet vides, at en funktion, der er kontinuert i $[a;b]$, også er integrabel i $[a;b]$. Det samme gælder imidlertid for stykkevis kontinuerte funktioner [4], jævnfør den følgende sætning, som nævnes uden bevis.

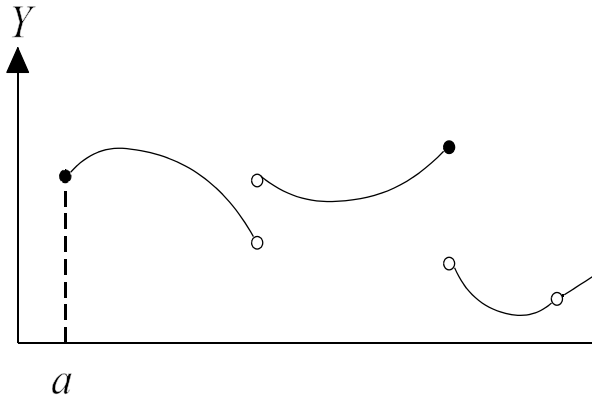


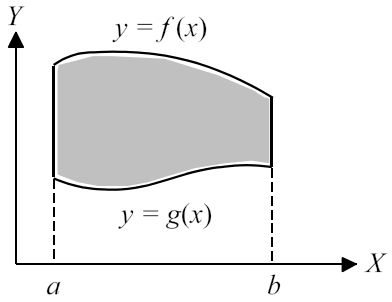
Fig. 1.13. *Stykkevis kontinuert funktion.*

[3] At middelsummen har en grænseværdi G (hvor G er et tal) skal betyde, at for ethvert reelt tal $\varepsilon > 0$ findes et reelt tal $\delta(\varepsilon) > 0$, sådan at $|\text{G} - \text{middelsum}| < \varepsilon$ for enhver middelsum, hvor længden af det største delinterval er mindre end $\delta(\varepsilon)$.

[4] At f er stykkevis kontinuert i intervallet $[a;b]$ skal betyde, at f er kontinuert i hele intervallet med undtagelse af (højst) et endeligt antal punkter, hvori funktionen dog har såvel en grænseværdi fra venstre som en grænseværdi fra højre (for endepunkterne a og b dog blot fra den indre side).

SÆTNING 1.6 *(stykkevis kontinuert funktion). Er en funktion stykkevis kontinuert i et interval* $[a;b]$*, så er funktionen integrabel i intervallet.*

Areal. Er f og g stykkevis kontinuerte funktioner og $f(x) \geq g(x)$ overalt i $[a;b]$, så er $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$ lig med arealet af mængden mellem graferne for f og g (grå på figuren).



Sammenhæng mellem integral og stamfunktion

SÆTNING 1.7 *(bestemt integral udtrykt ved stamfunktion). Lad* F *være en stamfunktion til en kontinuert funktion* f *i intervallet* $[a;b]$*. Så gælder*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)\ .$$

Bevis. Lad $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ være en inddeling af $[a;b]$.

Vi har da $F(b)-F(a) = F(x_1)-F(x_0)+F(x_2)-F(x_1)+\ldots+F(x_n)-F(x_{n-1})$. Af differentialregningens middelværdisætning fås nu, at der eksisterer tal $t_1, t_2, \ldots, t_n$ $(t_1 \in]x_0;x_1[,\ t_2 \in]x_1;x_2[, \ldots,\ t_n \in]x_{n-1};x_n[\ )$, så

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= F'(t_1)\cdot(x_1-x_0) + F'(t_2)\cdot(x_2-x_1) + \ldots. + F'(t_n)\cdot(x_n-x_{n-1}) \\ &= f(t_1)\cdot(x_1-x_0) + f(t_2)\cdot(x_2-x_1) + \ldots. + f(t_n)\cdot(x_n-x_{n-1})\ . \end{aligned}$$

Vi ser altså, at $F(b)-F(a)$ kan skrives som en middelsum svarende til en vilkårlig inddeling af $[a;b]$.

Gøres inddelingen finere og finere, sådan at længden af det største delinterval går mod 0, vil middelsummen konvergere mod $\int_a^b f(x)\,dx$ og samtidig være lig med $F(b)-F(a)$. Dermed er sætningen bevist.

Af sætning 1.7 fås, at $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)-F(a)$.

Heraf følger, at $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ er den stamfunktion til f, som har værdien 0 for $x = a$.

Ubestemt integral

For en vilkårlig stamfunktion F til f benytter man det kortere symbol $\int f(x)\,dx$, som kaldes det **ubestemte** integral af f. Eksempelvis er $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3$ eller $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + 117$.

Integrationsregler og Maple

De følgende integrationsregler er alle kendte fra gymnasiet og bliver derfor blot kort resumeret. Er integranden kompliceret er det dog nødvendigt at benytte et matematikprogram, som eksempelvis Maple.

$$\int (a \cdot f(x) + b \cdot g(x))\, dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx \qquad \text{(linearitet)}$$

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx \qquad \text{(partiel integration)}$$

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du \,, \quad \text{hvor} \quad u = g(x) \qquad \text{(substitution)}$$

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du \,, \quad \text{hvor} \quad u = g(x)$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \qquad \text{(indskudsregel)}$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0 \,.$$

Flere integrationsregler

$\int f(x)\, dx = \int f(h(u))\, h'(u)\, du$, hvor $x = h(u)$, og h er en monoton funktion. (substitution)

$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx$. (ulighedsregel)

Er f kontinuert i $[a;b]$, eksisterer der et (ukendt) tal ξ i intervallet $]a;b[$, sådan at der gælder

$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a) f(\xi)$, (integralregningens middelværdisætning)

Eksempel 1.9. Integration.

Find:

1) $\int_0^1 x^4\,dx, \quad \int x^{-\frac{3}{5}}\,dx, \quad \int \frac{1}{x}\,dx, \quad \int e^x\,dx,$

2) $\int \cos x\,dx, \quad \int \cos(2x)\,dx, \quad \int_0^{\pi} \sin x\,dx, \quad \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \sin(x^3)\cdot 3x^2\,dx.$

LØSNING:

1) $\int_0^1 x^4\,dx = \left[\frac{1}{4+1}x^{4+1}\right]_0^1 = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}1^5 - \frac{1}{5}0^5 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5},$

$\int x^{-\frac{3}{5}}\,dx = \frac{1}{-\frac{3}{5}+1}\cdot x^{-\frac{3}{5}+1} = \frac{1}{\frac{2}{5}}\cdot x^{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}},$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|,$

$\int e^x\,dx = e^x,$

2) $\int \cos x\,dx = \sin x,$

$\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,d(2x) = \frac{1}{2}\sin(2x), \qquad \text{substitution } u = 2x$

$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = (-(-1)) - (-1) = 1+1 = 2,$

$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \sin(x^3)\cdot 3x^2\,dx = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \sin(x^3)\,d(x^3) \qquad \text{substitution } u = x^3$

$= \left[-\cos(x^3)\right]_0^{\sqrt[3]{\pi}} = \left(-\cos\left(\left(\sqrt[3]{\pi}\right)^3\right)\right) - \left(-\cos(0^3)\right)$

$= (-\cos\pi) - (-\cos 0) = (-(-1)) - (-1) = 1+1 = 2.$

Eksempel 1.10. Integrationsregler og Maple.

Find

1) $\int_0^1 x^2\sqrt{4x^3+1}\,dx$

2) $\int_0^3 f(x)\,dx$, hvor $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+11}{x^2+x-6} & \text{for } 0<x<1 \\ \dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3} & \text{for } 1<x<3 \end{cases}$.

LØSNING:

1) Integralet kan ikke umiddelbart findes i en integraltabel. For at få en simplere integrand, er det naturligt at foretage substitutionen

$u = 4x^3+1$, $du = 12x^2\,dx$.

Herved ændres grænserne $x=0$ og $x=1$ til $u=1$ og $u=5$.

Vi finder da

$$\int_0^1 x^2\sqrt{4x^3+1}\,dx = \int_1^5 \sqrt{u}\cdot\frac{1}{12}\,du = \frac{1}{12}\left[\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_1^5 = \frac{1}{18}\left[u^{3/2}\right]_1^5$$

$$= \frac{(5\sqrt{5}-1)}{18} \approx 0.5656 .$$

2) Da $f(x)$ er stykkevis kontinuert, fås ved benyttelse af indskudssætningen

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 \frac{2x+11}{x^2+x-6}dx + \int_1^3 \left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)dx$$

Mens det sidste integral er let at beregne, er det første så teknisk vanskeligt, at vi vælger at benytte Maple til beregningen

Maple:

I "Math mode" : Vælg i menu Expression" $\int_a^b f dx$

Udfyld felter ved benyttelse af tabulatortast.

$\int_0^1 (2x-11)/\left(x^2+x-6\right)dx + \int_1^3 (1/3\cdot x-1/3)dx$ Resultat: ln(3) - 5 ln(2) + $\frac{2}{3}$

1.6 NUMERISK INTEGRATION

Det bestemte integral $\int_a^b f(x)\,dx$ kan findes tilnærmet ved numeriske metoder, når andre fremgangsmåder svigter eller bliver for besværlige.

Simpsons formel

Lad n være et lige tal. Intervallet $[a;b]$ opdeles nu i n delintervaller med samme længde $h = \frac{b-a}{n}$. Delintervallernes endepunkter bliver

$$x_0 = a,\quad x_1 = a+h,\quad x_2 = a+2h,\quad \ldots,\quad x_i = a+ih,\quad \ldots,\quad x_n = b$$

Simpsons formel er baseret på, at grafen for f erstattes med parabler, der hver spænder over to delintervaller. Der gælder $\int_a^b f(x)\,dx = S_n + O(h^4)$ [5], hvor

$$S_n = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right),$$

$y_i = f(x_i) = f(a+ih)$ og $O(h) \approx \text{konstant}\cdot h^4$ (for små værdier af h).

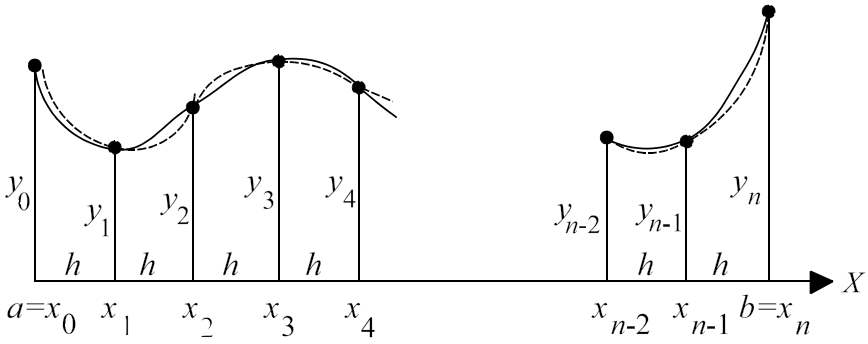


Fig. 1.14. *Kurven tilnærmes ved parabler (stiplede).*

[5] Det forudsættes, at f har en kontinuert 4. afledet $f^{(4)}$ i $[a;b]$. Symbolet $O(h^n)$ betegner en funktion med den egenskab, at $\left|\frac{O(h^n)}{h^n}\right|$ forbliver begrænset for $h \to 0$. For vore anvendelser gælder sædvanligvis $O(h^n) \approx \text{konstant}\cdot h^n$ for små værdier af h.

Nærmere forklaring af Simpsons formel. Den del af grafen for f, der hører til delintervallerne $[x_{i-1}; x_i]$ og $[x_i; x_{i+1}]$, $i \in \{1, 3, 5, \ldots, n-1\}$, erstattes med parablen gennem punkterne (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i) og (x_{i+1}, y_{i+1}). De to delintervallers bidrag til integralet bliver da $\frac{h}{3}\left(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}\right)$ [6]

Adderes alle sådanne bidrag, fås netop

$$S_n = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + \ldots + y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)$$
$$= \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right).$$

Metodens fejl kan vises at være $-\frac{b-a}{180} f^{(4)}(\xi) \cdot h^4$ **(dvs.** $O(h^4)$**),** hvor ξ er et ukendt tal i intervallet $]a; b[$.

I appendix findes andre numeriske metoder til integration.

Eksempel 1.11. Numerisk integration.

Find $A = \int_0^2 e^{-x^2} dx$ med tre betydende cifre.

LØSNING:

Funktionen $f(x) = e^{-x^2}$ programmeres først på lommeregner eller computer.

Simpsons formel $S_n = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right]$

benyttes for n = 2,4,8,16,... , indtil et tilstrækkelig stabilt resultat skønnes at være nået.

Idet $h = \frac{b-a}{n}$ og $y_j = f(a + j \cdot h)$, fås

$$S_2 = \frac{1}{3}\left[f(0) + 4f(1) + f(2)\right] = \frac{1 + 4 \cdot 0.36788 + 0.01832}{3} = 0.82994$$

$$S_4 = \frac{0.5}{3}\left[f(0) + 4f(0.5) + 2f(1) + 4f(1.5) + f(2)\right]$$

$$= \frac{1 + 4 \cdot 0.778801 + 2 \cdot 0.367884 + 4 \cdot 0.105399 + 0.01832}{6} = 0.88181$$

S_8 = ... 0.88208

S_{16} = ... 0.88208

Med tre betydende cifre er resultatet altså $\underline{\underline{A \approx 0.882}}$.

I programmet Maple udføres den tilvarende numeriske integration:

Skriv $= \int_0^2 e^{-x^2} dx$; Resultat: $\frac{1}{2} erf(2) \sqrt{\pi}$ Højre musetast , Approximate, 5 resultat 0.88210

---

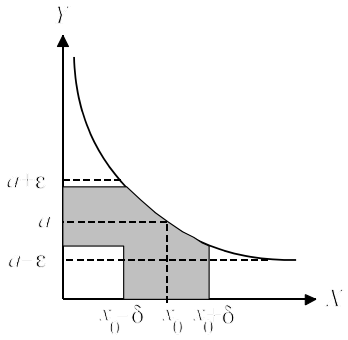
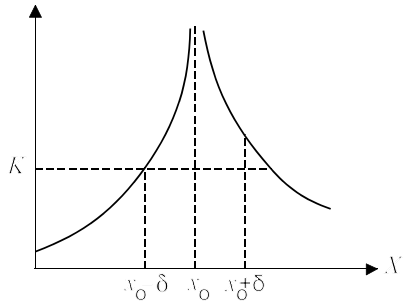
[6] Koordinatsystemet parallelforskydes, så det får begyndelsespunkt i punktet $(x_i, 0)$. Har parablen gennem $(-h, y_{i-1})$, $(0, y_i)$ og (h, y_{i+1}) ligningen $y = Ax^2 + Bx + C$, gælder

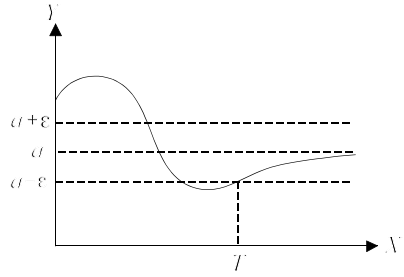
$$\begin{bmatrix} y_{i-1} = Ah^2 - Bh + C \\ y_i = C \\ y_{i+1} = Ah^2 + Bh + C \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} C = y_i \\ y_{i+1} + y_{i-1} = 2Ah^2 + 2C \end{bmatrix} \Rightarrow 2Ah^2 = y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i$$

og dermed $\int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\, dx = \frac{2Ah^3}{3} + 2Ch = \frac{h}{3}\left(y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i + 6y_i\right) = \frac{h}{3}\left(y_{i+1} + 4y_i + y_{i-1}\right)$.

SUPPLEMENT: 1A PRÆCIS DEFINITION AF "GRÆNSEVÆRDI"

For bedre at kunne undersøge vanskeligere tilfælde eller bevise sætninger om grænseværdi, kan man erstatte ord som "vilkårlig tæt" og "tilstrækkelig tæt" med noget mere præcist. Dette er gjort i de følgende skemaer, hvor også grænseovergange mod ∞ er defineret. Endvidere er den geometriske betydning af definitionerne illustreret i skemaerne.

Skrivemåde	Definition	Geometrisk betydning	Forudsætning
$f(x) \to a$ for $x \to x_0$ eller $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ eller $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} a$	For ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $\delta > 0$ således at det for alle $x \in D$ gælder, at $0 < \lvert x - x_0 < \delta \Rightarrow \rvert$ $\lvert f(x) - a \rvert < \varepsilon$.	Hvor nær ved hinanden linierne $y = a - \varepsilon$ og $y = a + \varepsilon$ end vælges, vil der dog findes en omegn af x_0, hvor grafen for f forløber helt mellem linierne. 	f's definitionsmængde D indeholder en omegn af x_0, men ikke nødvendigvis x_0 .
$f(x) \to \infty$ for $x \to x_0$ eller $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \infty$	For ethvert $K > 0$ eksisterer et $\delta > 0$, således at det for alle $x \in D$ gælder, at $0 < \lvert x - x_0 < \delta \Rightarrow \rvert$ $f(x) > K.$	Hvor stort tallet K end vælges, vil der dog findes en omegn af x_0, hvor grafen for f forløber helt over linien $y=K$. 	f's definitionsmængde D indeholder en omegn af x_0, men ikke nødvendigvis x_0 .

Skrivemåde	Definition	Geometrisk betydning	Forudsætning
$f(x) \to a$ for $x \to \infty$ eller $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ eller $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} a$	For ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $T > 0$, således at det for alle $x \in D$ gælder, at $x > T \implies$ $\lvert f(x) - a \rvert < \varepsilon$	Hvor nær ved hinanden linierne $y = a - \varepsilon$ og $y = a + \varepsilon$ end vælges, vil der dog findes et tal T, således at for alle $x>T$ vil grafen for f forløbe helt mellem linierne. 	f's definitionsmængde D indeholder et interval af typen $]b;\infty[$.

Analogt defineres grænseovergange mod $-\infty$ og ensidige grænseovergange,

f.eks. $f(x) \to a$ for $x \to x_0+$ (x går mod x_0 fra højre).

Eksempel 1A.1. Grænseovergang fundet ud fra $\varepsilon\delta$-definitionen.

Vis, at $f(x) = x \sin\frac{1}{x} \to 0$ for $x \to 0$.

LØSNING:

Da $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$ for alle $x \neq 0$, fås $\left|x \cdot \sin\frac{1}{x}\right| \le |x|$, når $x \neq 0$.

For et givet $\varepsilon > 0$ gælder derfor, at for $x \neq 0$, vil $|x| < \varepsilon \implies \left|x \cdot \sin\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$.

Sættes $\delta = \varepsilon$, fås, at for $x \neq 0$, vil $0 < |x - 0| < \delta \implies \left|x \cdot \sin\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$.

Hermed har vi vist det ønskede.

SUPPLEMENT: 1B UNIFORM KONTINUITET

Uniform kontinuitet.
Først ser vi på en problemstilling, som fører til begrebet uniform kontinuitet (også kaldet ligelig kontinuitet).

Eksempel 1B.1. Måleproblem.
En ingeniør ønsker at kunne beregne en størrelse $f(x)$ for alle $x \in I$, idet værdierne af x skal skaffes ved målinger. På grund af måleusikkerhederne fås et afvigende resultat $x \in I$. Fabrikanten af måleudstyr oplyser, at brug af x-måleudstyr af "kvaliteten δ i måleområdet I" kun sikrer, at der overalt i I gælder $\left|x - x^*\right| < \delta$, men oplyser samtidig, at enhver kvalitet $\delta > 0$ kan leveres. Ingeniørens krav er, at intet sted i måleområdet I må forskellen $\left|f(x) - f(x^*)\right|$ kunne overskride en "tolerance" ε. Det har praktisk interesse at spørge, om et sådant krav overhovedet kan opfyldes blot ved køb af passende måleudstyr. Det er ikke nok, at f er kontinuert i I, jævnfør figur 1B.1.
Hvis f derimod er uniformt kontinuert i I, så kan kravet altid opfyldes, jævnfør den følgende definition.

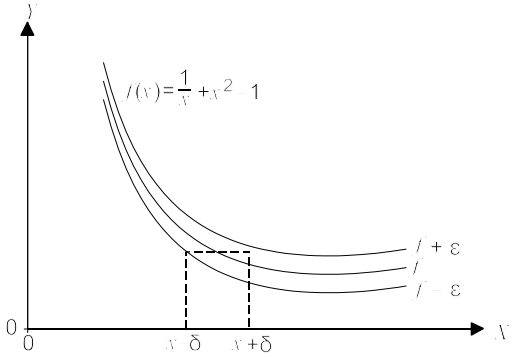


Fig. 1B.1. *Måleproblem: Tolerancen ε kan ikke overholdes med noget bestemt δ i hele måleområdet R_+.*

DEFINITION af uniform kontinuitet. Funktionen f kaldes uniformt kontinuert i et interval I, hvis der for ethvert givet positivt tal ε findes et positivt tal δ, således at det for vilkårlige værdier $x, x^* \in I$, gælder

$$\left|x - x^*\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(x^*)\right| < \varepsilon$$

Det følger af definitionen, at en funktion, som er uniformt kontinuert i I, også vil være
1) kontinuert i I og
2) uniformt kontinuert i enhver delmængde af I.

Den følgende sætning, som anføres uden bevis, hjælper til at afgøre, om der foreligger uniform kontinuitet.

SÆTNING 1B.1 (betingelse for uniform kontinuitet**).** *Lad f være kontinuert i et lukket og begrænset interval $I \subset \mathbb{R}$. Da er f uniformt kontinuert i I.*

OPGAVER

Opgave 1.1a *(reducér funktionsudtryk)*

Reducér om muligt de følgende udtryk uden hjælpemidler:

1) $\frac{6/7}{3/14}x,\quad x+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4},\quad \frac{8}{3}x-2x,\quad \frac{x+1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3},$

2) $x^2\cdot x^2\cdot x^2\cdot x^2\cdot x^2,\quad (x^2)^5,\quad x^4x^6,\quad e^4e^6,\quad e^{4x}e^{6x},\quad 4^x6^x,\quad \frac{x^{10}}{x^4},\quad \frac{e^{10x}}{e^{4x}},\quad \frac{12^x}{4^x},$

3) $(\sqrt{e})^6x,\quad \sqrt{16x^{16}},\quad \frac{15x^{15}}{5x^5},\quad \frac{x^2+2}{x+3}-\frac{2}{3},\quad 2x^5-(x^7-2x^3)(3x^3-x^2),$

4) $\frac{x}{5}+\frac{x}{3},\quad \frac{15/8}{5/4}x,\quad 5^x3^x,\quad \frac{x}{2}+\frac{3x}{4}+\frac{x}{6},\quad (x+2)(x-2),\quad \frac{x^2-1}{x+1},\quad \frac{x^2}{x+1}\cdot\frac{(x+1)^3}{x},$

5) $\frac{x}{12}+\frac{x}{6},\quad \frac{2/3}{6/5}x,\quad \frac{x}{6}+\frac{11x}{21},\quad \frac{x}{2}+\frac{x}{6},\quad \frac{3x^2}{5}-\frac{x^2}{2},\quad \frac{x+1}{x^2}+\frac{2}{x},\quad \frac{x^2-1}{x-1},$

6) $\frac{2x+4+3x}{(10x+8)x},\quad \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x+2}{x^2}},\quad \frac{x^2+2x+1}{x+1},\quad \frac{x}{10}-\frac{x}{14},\quad \frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x-1}{x(x+1)}},\quad 9^x3^x,\quad \frac{\sqrt{x^{12}}}{(\sqrt{x})^8},$

7) $\frac{12x^4}{3x},\quad (x^4)^7,\quad 2^x2^x,\quad \frac{\ln x}{4}+\frac{2\ln x}{7},\quad \frac{e^{2x}}{e^{-x}},\quad \frac{(\sqrt{x})^{20}}{\sqrt{x^4}},\quad \frac{20^x}{5^x}.$

Opgave 1.1b *(monotone funktioner)*

Hvert af de følgende udtryk f(x) angiver en funktion f, der har et interval som definitionsmængde. Afgør, om funktionen er voksende (v), aftagende (a), eller ikke-monoton (i).

1) $-3x+1,\quad x^6,\quad 1,\quad \sin x,\quad \sqrt{x},\quad e^x,\quad \ln x,\quad e^{-x},$

2) $\ln(2x),\quad -x^3,\quad -\ln x,\quad -e^x,\quad \sqrt[3]{x},\quad \cos x,\quad -|x|,\quad x^4.$

Opgave 1.1c *(omvendt funktion)*

Hvert af de følgende udtryk f(x) angiver en funktion f, der har et interval som definitionsmængde, og er monoton i dette interval. Find den omvendte funktion.

1) $-3x+1$, $\sqrt{x}$, $\ln x$, $-\ln x$, e^{-x}, $1+\sqrt{x}$,

2) $\ln(2x)$, $-x^3$, $-\ln\sqrt{x}$, $-e^x$, $\sqrt[3]{x}$, $\dfrac{1}{1+e^x}$.

Opgave 1.1 *(omvendt funktion)*

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 2^x - 2^{-x} \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Vis, at funktionen f har en omvendt funktion f^{-1}.

2) Beregn $f^{-1}\left(\dfrac{3}{2}\right)$ *og* $(f^{-1})'\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

3) Skitsér grafen for f og for f^{-1} i samme koordinatsystem.

4) Bestem en forskrift for f^{-1} .

Opgave 1.2 *(omvendt funktion)*

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{2x-3}{x-2} \quad , \quad x \neq 2 \ .$$

1) Vis, at funktionen f har en omvendt funktion f^{-1}.

2) Beregn $f^{-1}(3)$ og $f^{-1}(4)$.

3) Bestem en forskrift for f^{-1} .

4) Skitsér grafen for f og f^{-1} i samme koordinatsystem.

Opgave 1.3 *(omvendt funktion)*

En funktion f er givet ved

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 \quad , \quad x \in [-2;1] \ .$$

1) Vis, at funktionen f har en omvendt funktion f^{-1} .

2) Beregn $f^{-1}(3)$ og $\left(f^{-1}\right)'(3)$.

3) Skitsér grafen for f og f^{-1} i samme koordinatsystem.

4) Bestem en forskrift for f^{-1} .

Opgave 1.4a *(grænseværdi)*

Undersøg de følgende udtryk for $x \to 0+$ *og for* $x \to \infty$ *:*

1) $-3x+1$, $\dfrac{1}{1+x^2}$, $\dfrac{2x+3}{4x+5}$, $\ln x$, $1+\sqrt{x}$, $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$, $\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$,

2) $\dfrac{x+3}{x^2+2}$, e^{-x}, $-x^3$, $\sqrt[3]{x}$, $\dfrac{1}{1+e^x}$, $\dfrac{6x^2-2x+3}{2x^2+3x-5}$.

Opgave 1.4 *(grænseværdi)*
Undersøg

1) $f(x) = 2^{x+\frac{1}{x}}$ *for* $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to 0+$ *og* $x \to 0-$,

2) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ *for* $x \to \infty$ *og* $x \to 1$,

3) $f(x) = e^{\frac{x}{1+x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$ *for* $x \to \infty$.

Opgave 1.5 *(grænseværdi)*
En stang med "hvilelængden" ℓ_0 *bevæges i sin længderetning med hastighed* v. Længden er da givet ved

$$\ell(v) = \ell_0 \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2},$$

hvor $c = 300000$ *km/sec er lysets hastighed.*

1) Angiv definitionsmængden for $\ell(v)$.

2) Find grænseværdien for $\ell v)$ *for* $v \to c-$.

Opgave 1.6 *(asymptoter)*
En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 3x+2+\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right).$$

1) Angiv definitionsmængden for f.

2) Angiv ligningerne for f 's asymptoter (ialt 3).

Opgave 1.7 *(kontinuitet)*

Undersøg, om følgende funktioner er kontinuerte

1) $$f(x) = \begin{cases} 3e^{x} & for \quad x<0 \\ 3 & for \quad x=0 \\ 2e^{-\frac{1}{x}}+3 & for \quad 0<x\le 4 \end{cases}.$$

2) $$f(x) = \begin{cases} \sin(x^2-1) & for \quad x\le -1 \\ x^2-1 & for \quad -1<x<2 \\ \sqrt{x^3+1} & for \quad x\ge 2 \end{cases}.$$

3) $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{(x-3)^2+4} & for \quad x<3 \\ 2 & for \quad x=3 \\ \ln\left(e^{-\frac{1}{(x-3)^2}}+2\right) & for \quad x>3 \end{cases}.$$

Opgave 1.8^{T} *(differentiabilitet)*

En funktion f(x) er givet ved

$$f(x) = \sqrt{x}\cdot\cos x\ .$$

1) Find definitionsmængden D for f.

2) Find mængden D' af tal x for hvilke f er differentiabel.

3) Find f '(x) .

Opgave 1.9a *(differentiation)*

Find den afledede af hvert af de følgende udtryk:

1) $$x^7,\quad \sqrt[7]{x},\quad e^{2x},\quad x\cdot e^{2x},\quad \frac{\sin x}{x},\quad \frac{1}{1+x^2},\quad \frac{2x+3}{4x+5},$$

2) $$\ln(1+x^2),\quad \sqrt{3x},\quad \frac{e^x}{x},\quad \frac{x}{e^x},\quad \frac{1}{1+\sqrt{x}},\quad \ln\left(1+\sqrt{x}\right),$$

3) $$\frac{x+3}{x^2+2},\quad e^{-x},\quad x^3,\quad \sqrt[3]{x},\quad \frac{1}{1+e^x},\quad \frac{x}{\cos x}.$$

Opgave 1.9 *(differentiationsregler)*

Find differentialkvotienten af følgende funktioner

1) $f(x) = x\sqrt{x}$

2) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x+1}$

3) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

4) $f(x) = (x^2+x+1)^3$

5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

6) $f(x) = \cos(2x+1)$

7) $f(x) = (\ln x)^2$

8) $f(x) = e^{\sin x}$.

Opgave 1.10 *(differentiabilitet)*

Bestem monotoniforholdene for følgende funktioner

1) $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - x^3 + \dfrac{3}{4}$, $x \in [-1;4]$

2) $g(x) = xe^x$, $x \in [-2;1]$

3) $h(x) = x - x\sqrt{x}$, $x \in [0;1]$

4) $k(x) = x^4 e^{-x}$, $x > 0$.

Opgave 1.11 *(numerisk differentiation)*

Svarende til hver af de følgende tre tabeller ønskes $\dfrac{dy}{dx}$ *fundet i punktet x=40 med så mange betydende cifre som muligt*

1)

x	y
20	1.682
30	1.882
40	2.102
50	2.344
60	2.607

2)

x	y
30	9.98
35	15.94
40	21.37
45	26.24
50	30.55

3)

x	y
0	12.34
20	13.94
40	15.85
60	18.04
80	20.52

4)

x	y
36	63.02
38	64.01
39	64.71
40	65.54
42	67.61
43	68.83
44	70.19

Opgave 1.12 *(numerisk differentiation)*

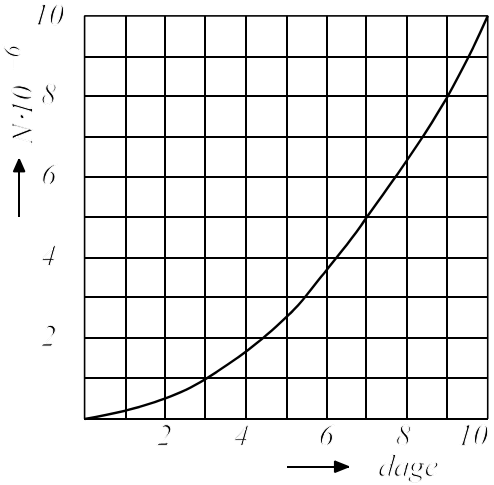
Find ved numerisk differentiation $f'(2)$ *for hver af de følgende* 3 *funktioner. (Vink: vælg* Δx *i intervallet* $[10^{-5}; 10^{-2}]$ *.)*

1) $f(x) = \dfrac{\pi^x + x^{\ln x}}{x^{-x} + \ln(x + \sqrt{x})}$, *2)* $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{\ln x}\, e^{\sqrt{x}} - \sqrt{e^x + \ln x}}{x^{\pi} + \ln(x^2 + 3)}$,

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\sin x} + x^{\cos x}}{\sqrt{\operatorname{Arctan} x} + x}$.

Opgave 1.13 *(grafisk differentiation)*

For en vare har man målt antallet N af mikroorganismer som funktion af tiden t. De fundne data er afbildet på figuren.



1) Find væksthastigheden $\dfrac{dN}{dt}$ *for t=5 dage ved at aflæse hældningskoefficienten af en passende sekant.*

2) Find også $\dfrac{dN}{dt}$ *for t=1 dag, t=3 dage, t=7 dage og t=9 dage.*
Tegn på dette grundlag $\dfrac{dN}{dt}$ *som funktion af t.*

Opgave 1.14a *(integration)*

Find:

1) $\int_1^2 4x^3\,dx$, $\int \sqrt{x}\,dx$, $\int (2x + 5x^4)\,dx$, $\int x^{\frac{5}{7}}\,dx$, $\int \dfrac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\,dx$,

2) $\int_0^1 (7x^6 + 2x)\,dx$, $\int_1^0 x^2\,dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx$, $\int_0^1 (8x^3 + 1)\,dx$,

3) $\int (8\sin(2x) + 6\cos(3x))\,dx$, $\int \sin^7 x \cdot \cos x\,dx$, $\int \dfrac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$,

4) $\int_2^2 \ln(1 + \sqrt{x})\,dx$, $\int_1^0 (6x^2 + 4x)\,dx$, $\int \dfrac{(\ln x)^2}{x}\,dx$,

5) $\int e^{2x}\,dx$, $\int 7^x\,dx$, $\int e^{(x^2)} \cdot 2x\,dx$, $\int (e^{2x} + 3^{2x})\,dx$.

Opgave 1.14 [T] *(integration)*

Find (uden brug af numerisk integration, men gerne med brug af integraltabel)

$$\int_0^4 f(x)\,dx, \quad hvor \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}} & for \quad 0<x<1 \\ \cos\sqrt{x} & for \quad 1<x\le 4 \end{cases} .$$

Opgave 1.15 *(integration)*

Find (uden brug af numerisk integration, men gerne med brug af integraltabel)

1) $\int_1^2 x\cdot\ln(x^2+1)\,dx$.

2) $\int_1^3 f(x)\,dx, \quad hvor \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{(9-x^2)^3}} & for \quad 1<x<2 \\ \dfrac{1}{x\sqrt{4-x}} & for \quad 2<x<3 \end{cases} .$

Opgave 1.16 *(integration)*

Find (uden brug af numerisk integration, men gerne med brug af integraltabel)

1) $\int_0^2 x\sqrt[3]{|2x^2-4|}\,dx$.

2) $\int_0^3 f(x)\,dx, \quad hvor \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{(\cos x)^2} & for \quad 0<x<1 \\ \dfrac{x}{\sqrt{4-x}} & for \quad 1<x<3 \end{cases} .$

Opgave 1.17 *(integraltabel)*

Angiv numrene i en integraltabel for hvert af de følgende 10 integraler

1) $\int \dfrac{x\,dx}{(2+3x)^3}$ *2)* $\int \dfrac{(2-3x)^3}{(x-1)^2}dx$ *3[T])* $\int \dfrac{\ln x}{x^2}\,dx$

4) $\int \dfrac{1}{(x^2-4)^3}\,dx$ *5)* $\int \dfrac{x^2}{2x^2+4x-5}\,dx$ *6)* $\int \sqrt{2+3x}\sqrt{3-x}\,dx$

7) $\int \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ *8)* $\int \dfrac{e^{2x}}{x^3}\,dx$ *9)* $\int \dfrac{dx}{\sqrt{2x^2-3x+4}}$

10) $\int \sin(2x)\cos(3x)\,dx$.

Opgave 1.18 *(integraltabel)*

Angiv numrene i en integraltabel for hvert af de følgende integraler

1) $\int e^{2x}\cos(3x)\,dx$ *2)* $\int \frac{x^2}{(2x^2+3x+4)\sqrt{2x^2+3x+4}}$ *3)* $\int \frac{1}{\cos x}\,dx$

4) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}\,\sqrt{3x+2}}\,dx$ *5)* $\int \sin(5x)\cos(6x)\,dx$ *6)* $\int \frac{dx}{x^3(2+3x)}$

7) $\int \frac{dx}{(2x^2-1)^2}$.

Opgave 1.19 *(integraltabel)*

Find (uden brug af numerisk integration, men gerne med brug af integraltabel)

1) $\int_1^7 \frac{\sqrt{x^2+15}}{x}\,dx$ *2)* $\int_1^5 \frac{dx}{(-35+3x)\sqrt{1+3x}}$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$ *4)* $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx$

Opgave 1.20 *(integration)*

Find (uden brug af numerisk integration, men gerne med brug af integraltabel)

1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin x}\cos x\,dx$ *2)* $\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$ 3) $\int_2^e \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$

4) $\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$ *5)* $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$.

Opgave 1.21 *(integration)*

Find (uden brug af numerisk integration, men gerne med brug af integraltabel)

$\int_3^{17} \frac{x-2}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}\,dx$ *(Vink: substituér $u = x+1$).*

Opgave 1.Eksam69 *(integration, 10 point)*

1) Find $\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$.

2) Find $\int_1^2 \frac{1}{x+x^{\frac{7}{10}}}\,dx$ *(en af substitutionerne* $x = u^{\frac{10}{7}}$, $x = u^{10}$, $x = u^{\frac{1}{7}}$ *er anvendelig).*

Opgave 1.22 *(numerisk integration)*

Find de følgende bestemte integraler med mindst 2 betydende cifre ved numerisk integration (husk at anføre mellemregninger):

1 ^{T}) $\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx$ 2) $\int_1^9 e^{\frac{1}{x}}\,dx$

3) $\int_2^6 \frac{2^x}{x}\,dx$ 4) $\int_2^4 \frac{1}{\ln x}\,dx$.

Opgave 1.Eksam51b *(numerisk integration, 5 point)*

Find en tilnærmet værdi for $\int_0^8 f(x)\,dx$, *idet der er opgivet følgende værdier på tabelform:*

x	0	2	4	6	8
f(x)	3	5	5	4	1

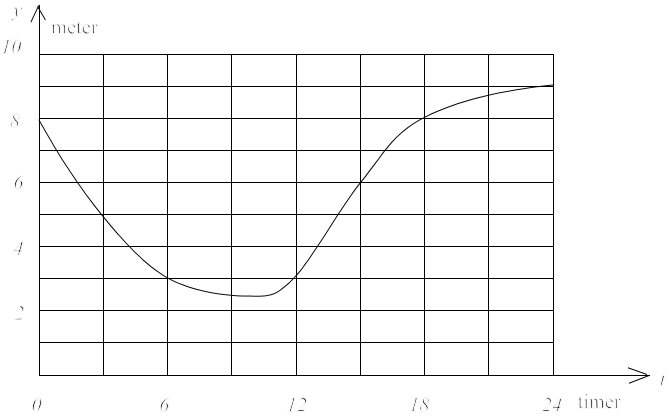
Opgave 1.Eksam63b *(numerisk integration, 10 point)*

Døgnkurven for væskestanden $y = y(t)$ *i en beholder er registreret af en TY-skriver (se figuren).*

Find døgn-middelværdien

$y_{middel} = \frac{1}{24}\int_0^{24} y(t)\,dt$.

(Husk at anføre mellemregninger).



Opgave 1.Eksam78 *(numerisk integration, 15 point)*

En pumpestation yder en varierende effekt på $\frac{2^t}{t^3+8}$ *[megawatt], hvor* t *er tiden målt i timer,* $t \in [0;8]$.

Find dagsarbejdet $\int_0^8 \frac{2^t}{t^3+8}\,dt$ *[megawatttimer] med to betydende cifre ved hjælp af en numerisk metode (husk at anføre mellemregninger).*

2 STANDARDFUNKTIONER

I appendix er standardfunktionerne samlet i en oversigt. I det følgende omtales nogle af dem nærmere.

2.1 LOGARITMEFUNKTIONER

DEFINITION af naturlig logaritme. *Funktionen* $\ln x$ *defineres som et bestemt integral:*

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt\,, \qquad x > 0\,.$$

Af definitionen følger, at

$$\ln 1 = 0\,,$$

og at $\ln x$ i hele sin definitionsmængde er differentiabel med differentialkvotienten

$$\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}\,.$$

Da $\frac{1}{x} > 0\,,$ følger heraf, at $\ln x$ er voksende i hele sin definitionsmængde. Grafen ses på figur 2.1.

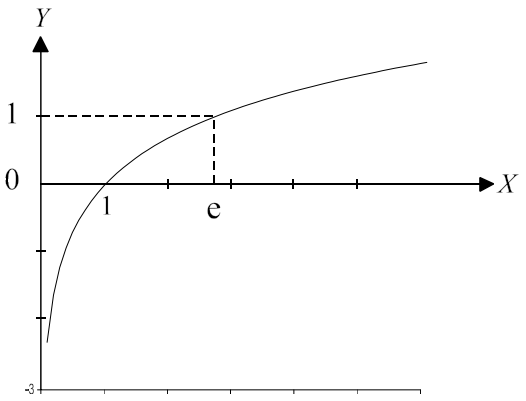


Fig. 2.1. *Grafen for den naturlige logaritme.*

Det kan vises, at

$$\ln x \to \infty \quad \text{for} \quad x \to \infty$$
$$\ln x \to -\infty \quad \text{for} \quad x \to 0+\,,$$

dvs. grafen er ikke begrænset opadtil, og y-aksen er en lodret asymptote. Den naturlige logaritme har altså værdimængden $\mathbb{R}$. Det tal e, for hvilket der gælder $\ln e = 1\,,$ kaldes grundtallet for den naturlige logaritme (e ≈ 2.718) [1].

[1] Ved visse beregninger kan det være en fordel at kende en meget nøjagtig værdi af e:
e = 2.71828182845904523536 ... .

Det kan vises, at der gælder følgende logaritmeregler: [1]

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y\,, \qquad x>0\,,\ y>0$$

$$\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y\,, \qquad x>0\,,\ y>0$$

$$\ln\left(x^{y}\right) = y\cdot\ln x\,, \qquad x>0\,,\ y\in\mathbb{R}\,.$$

Eksempel 2.1. Reducér udtryk indeholdende ln.

Reducér de følgende udtryk uden hjælpemidler, idet $x>0$ og $y>0$:

$$\ln(e^3)\,,\quad 2\ln\sqrt{xy}+\ln\left(\frac{1}{x}\right),\quad 2\ln\frac{x}{y^2}+\ln\frac{y^5}{x^2}\,,\quad 8\ln\sqrt{\sqrt{x}}\,.$$

LØSNING:

$$\ln(e^3) = 3\cdot\ln e = 3\cdot 1 = \underline{\underline{3}}\,,$$

$$2\ln\sqrt{xy}+\ln\left(\frac{1}{x}\right) = 2\ln\left((xy)^{\frac{1}{2}}\right)+\ln\left(x^{-1}\right) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln(xy)-\ln x$$

$$= \ln(xy)-\ln x = \ln x+\ln y-\ln x = \underline{\underline{\ln y}}\,,$$

$$2\ln\frac{x}{y^2}+\ln\frac{y^5}{x^2} = 2\ln x-2\ln(y^2)+\ln(y^5)-\ln(x^2)$$

$$= 2\ln x-2\cdot 2\ln y+5\ln y-2\cdot\ln x = \underline{\underline{\ln y}}\,,$$

$$8\ln\sqrt{\sqrt{x}} = 8\ln\left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = 8\ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = 8\cdot\frac{1}{4}\ln x = \underline{\underline{2\ln x}}\,.$$

---

[1] Funktionen x^y defineres i det følgende afsnit om eksponentialfunktioner.

Logaritmefunktioner med vilkårlige grundtal

Logaritmefunktionen $\log_a x$ med grundtal a kan nu defineres ved

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \qquad a > 0, \ a \neq 1, \ x > 0 .$$

Specielt fås $\log_e x = \ln x$ (da $\ln e = 1$) og $\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

Advarsel: Undertiden skrives blot $\log x$ i stedet for $\log_a x$, uden at det af sammenhængen fremgår, hvad grundtallet a er (f.eks. 10, 2, e). Ofte ser man således $\log$ brugt, hvor der menes $\ln$.

Formler. Eftersom $\log_a x$ blot afviger fra $\ln x$, ved at der er ganget med konstanten $\frac{1}{\ln a}$ må funktionen ligne $\ln x$ meget. Ved hjælp af definitionen og egenskaberne for $\ln x$ fås således

$$\log_a 1 = 0 \qquad \text{(samme nulpunkt)}$$

$$\frac{d \log_a x}{dx} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$\log_a a = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a x - \log_a y \\ \log_a(x^y) &= y \cdot \log_a x \end{aligned}\right\} \text{(samme log. regler)}$$

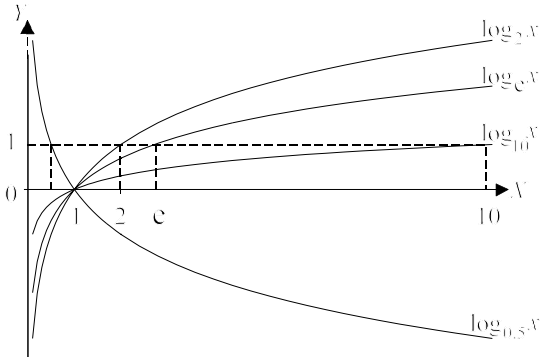


Fig. 2.2. *Grafer for logaritmefunktioner.*

På figur 2.2 ses graferne for nogle logaritmefunktioner.

Eksempel 2.2. Reducér udtryk indeholdende $\log_a$.

Reducér de følgende udtryk uden hjælpemidler:

$$\log_{10}(10^3), \quad \ln 10 \cdot \log_{10} x, \quad \log_2(xyz) + \log_2 \frac{1}{xz}, \quad 8 \log_{10} \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} .$$

LØSNING:

$$\log_{10}(10^3) = 3 \cdot \log_{10} 10 = 3 \cdot \frac{\ln 10}{\ln 10} = \underline{\underline{3}},$$

$$\ln 10 \cdot \log_{10} x = \ln 10 \cdot \frac{\ln x}{\ln 10} = \underline{\underline{\ln x}},$$

$$\log_2(xyz) + \log_2\frac{1}{xz} = \log_2(xyz) + \log_2 1 - \log_2(xz)$$

$$= \log_2 x + \log_2 y + \log_2 z + 0 - \log_2 x - \log_2 z = \underline{\underline{\log_2 y}},$$

$$8\log_{10}\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} = 8\log_{10}\left(\left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = 8\log_{10}\left(x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 8\log_{10}\left(x^{\frac{1}{8}}\right) = 8\cdot\frac{1}{8}\log_{10} x = \underline{\underline{\log_{10} x}}.$$

2.2 EKSPONENTIALFUNKTIONER

Eksponentialfunktionen e^x, der også skrives $\exp(x)$, kan defineres som den omvendte funktion til den monotone funktion $\ln x$:

$$\mathrm{e}^x = \ln^{-1} x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Grafen for e^x fremkommer derfor ved, at grafen for $\ln x$ spejles i linien $y = x$:

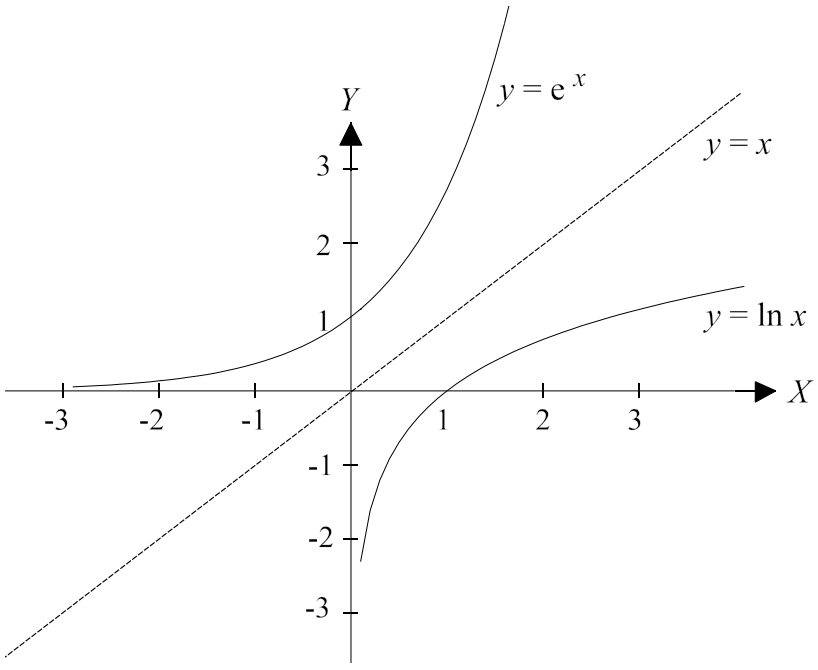


Fig. 2.3. *Funktionerne* e^x *og* $\ln x$ *er omvendte funktioner til hinanden.*

Af grafen ses, at $e^0=1$ og $e^1=e$. Funktionen e^x er voksende, fordi den omvendte funktion $\ln x$ er voksende. Funktionen e^x har definitionsmængden $\mathbb{R}$ og værdimængden $]0;\infty[$ fordi den omvendte funktion $\ln x$ har værdimængden $\mathbb{R}$ og definitionsmængden $]0;\infty[$. Bemærk, at e^x aldrig er 0. Af grænsekendskabet for $\ln x$ fås

$$e^x \to \infty \quad \text{for} \quad x \to \infty$$
$$e^x \to 0 \quad \text{for} \quad x \to -\infty ,$$

dvs. x-aksen er en vandret asymptote til grafen for e^x. Da $\ln x$ er monoton og differentiabel i hele sin definitionsmængde $]0;\infty[$, og dens afledede $\frac{1}{x}$ aldrig er 0, må ifølge sætning 1.3c den omvendte funktion e^x også være differentiabel i hele sin definitionsmængde $\mathbb{R}$.

Funktionen e^x er den afledede af sig selv: $\frac{de^x}{dx} = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$

og dermed også en stamfunktion til sig selv: $\int e^x dx = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$.

Bevis. At $\frac{de^x}{dx} = e^x$, følger af differentiationsreglen for omvendt funktion:

$$\frac{de^x}{dx} = \frac{d\ln^{-1} x}{dx} = \frac{1}{\ln'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Eksempel 2.3. Reducér udtryk indeholdende e^x.

Reducér de følgende udtryk uden hjælpemidler:

$$\ln(e^3), \quad e^{-2\ln 5}, \quad \frac{(e^{2x})^4 \cdot \sqrt{e^{2x}}}{(e^x)^3}, \quad \left(\sqrt{e^{12x}}\right)', \quad \int e^{2x+3} dx .$$

LØSNING:

$$\ln(e^3) = 3 \cdot \ln e = 3 \cdot 1 = \underline{\underline{3}},$$

$$e^{-2\ln 5} = e^{\ln(5^{-2})} = 5^{-2} = \underline{\underline{\frac{1}{25}}},$$

$$\frac{(e^{2x})^4 \cdot \sqrt{e^{2x}}}{(e^x)^3} = \frac{e^{2x\cdot 4} \cdot e^{2x\cdot\frac{1}{2}}}{e^{x\cdot 3}} = \frac{e^{8x} \cdot e^x}{e^{3x}} = e^{8x+x-3x} = \underline{\underline{e^{6x}}},$$

$$\left(\sqrt{e^{12x}}\right)' = \left((e^{12x})^{\frac{1}{2}} \right)' = \left(e^{12x\cdot\frac{1}{2}} \right)' = \left(e^{6x}\right)' = \underline{\underline{6e^{6x}}},$$

$$\int e^{2x+3} dx = \frac{1}{2}\int e^{2x+3} d(2x+3) = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{2x+3}}}, \quad \text{substituér } u = 2x+3 .$$

Eksponentialfunktioner med vilkårlige grundtal

Eksponentialfunktionen a^x med grundtal a kan i det væsentlige defineres som den omvendte funktion til $\log_a x$:

$$a^x = \begin{cases} \log_a^{-1} x & \text{for} \quad a>0,\ a\neq 1,\ x\in\mathbb{R} \\ 1 & \text{for} \quad a=1,\ \quad x\in\mathbb{R}\ . \end{cases}$$

Heraf følger formlen:

$$a^x = \mathrm{e}^{x\cdot\ln a}\ , \qquad a>0\ ,\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Bevis for formel. For $a>0,\ a\neq 1,\ x\in\mathbb{R}$ har vi

$$=a^x \iff \log_a y = x \iff \frac{\ln y}{\ln a} = x \iff \ln y = x\cdot\ln a \iff \mathrm{e}^{\ln y} = \mathrm{e}^{x\cdot\ln a} \iff y = \mathrm{e}^{x\cdot\ln a} \iff a^x = \mathrm{e}^{x\cdot\ln a}$$

For $a=1,\ x\in\mathbb{R}$ har vi $\quad 1^x = 1 \iff 1^x = \mathrm{e}^0 \iff 1^x = \mathrm{e}^{x\cdot\ln 1}$.

Af formlen $a^x = \mathrm{e}^{x\cdot\ln a}$ fås

$$a^0 = 1 \ , \qquad a>0$$

$$a^1 = a \ , \qquad a>0$$

$$\frac{da^x}{dx} = a^x\cdot\ln a\ , \qquad a>0\ ,\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Bevis. Den sidste formel følger af, at $\frac{da^x}{dx} = \frac{d}{dx}\mathrm{e}^{x\cdot\ln a} = \mathrm{e}^{x\cdot\ln a}\cdot\ln a = a^x\cdot\ln a$.

På figur 2.4 ses graferne for nogle eksponentialfunktioner.

For eksponentialfunktioner gælder følgende "potensregler":

$$\left.\begin{array}{ll} a^x\cdot a^y = a^{x+y} & \\ \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y} & \\ \dfrac{1}{a^y} = a^{-y} & a,b>0 \\ (a^x)^y = a^{xy} & \\ a^x b^x = (ab)^x & \\ \dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x & \end{array}\right\} \quad x,y\in\mathbb{R}\ .$$

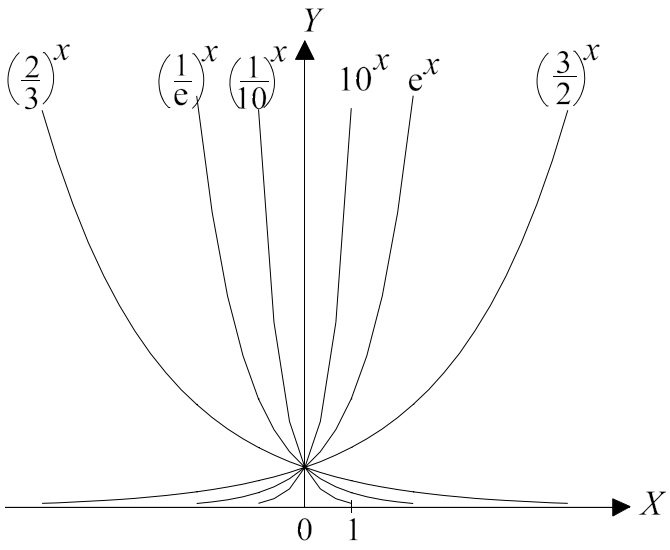


Fig. 2.4. *Grafer for eksponentialfunktioner.*

Bevis. Potensreglerne kan eftervises ved at tage $\ln$ af udtrykkene på hver side af lighedstegnene og benytte logaritmeregler.

Eksempel 2.4. Reducér udtryk indeholdende a^x.

Reducér de følgende udtryk uden hjælpemidler:

$$2^{\log_2(2^3)}, \quad 10^{-2\log_{10}3}, \quad \frac{(3^{4x})^2\cdot\sqrt{3^{6x}}}{(3^x)^4}, \quad (3^{2x}\cdot 5^x)', \quad \int 2^{4x+2}dx.$$

LØSNING:

$$2^{\log_2(2^3)} = (2^3) = \underline{\underline{8}},$$

$$10^{-2\log_{10}3} = 10^{\log_{10}(3^{-2})} = (3^{-2}) = \underline{\underline{\frac{1}{9}}},$$

$$\frac{(3^{4x})^2\cdot\sqrt{3^{6x}}}{(3^x)^4} = \frac{3^{4x\cdot 2}\cdot 3^{6x\cdot\frac{1}{2}}}{3^{x\cdot 4}} = \frac{3^{8x}\cdot 3^{3x}}{3^{4x}} = 3^{8x+3x-4x} = \underline{\underline{3^{7x}}},$$

$$(3^{2x}\cdot 5^x)' = ((3^2)^x\cdot 5^x)' = (9^x\cdot 5^x)' = ((9\cdot 5)^x)' = (45^x)' = \underline{\underline{45^x\cdot\ln 45}},$$

$$\int 2^{4x+2}dx = \frac{1}{4}\int 2^{4x+2}d(4x+2) = \frac{1}{4}\cdot 2^{4x+2}\cdot\frac{1}{\ln 2}$$

$$= 2^{-2}\cdot 2^{4x+2}\cdot\frac{1}{\ln 2} = 2^{-2+4x+2}\cdot\frac{1}{\ln 2} = \underline{\underline{\frac{2^{4x}}{\ln 2}}}.$$

I praksis er det ofte bedst at omskrive en funktion af typen $f(x)^{g(x)}$ til formen $e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$, f.eks. for at finde den afledede, finde en grænseværdi eller indføre funktionen i et edb-program.

Eksempel 2.5. Differentiation af $f(x)^{g(x)}$.

Find $\frac{d}{dx}[(\sin x)^{\cos x}]$, $x \in]0;\pi[$.

LØSNING:
Gennem en omskrivning af typen $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$ finder vi:

$$\frac{d}{dx}[(\sin x)^{\cos x}] = \frac{d}{dx}e^{\cos x\cdot\ln(\sin x)}$$

$$= e^{\cos x\cdot\ln(\sin x)}\cdot\frac{d}{dx}[\cos x\cdot\ln(\sin x)]$$

$$= (\sin x)^{\cos x}\cdot\left[-\sin x\cdot\ln(\sin x) + \cos x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x\right]$$

$$= (\sin x)^{\cos x}\cdot\left[-\sin x\cdot\ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right].$$

2.3 POTENSFUNKTIONER

Funktioner af typen x^a kaldes potensfunktioner.

DEFINITION *(potensfunktioner). Som bekendt sættes for* $n \in \{1,2,3,\ldots\}$:

$$x^n = x \cdot x \ldots x \quad (\textit{ialt } n \textit{ faktorer}) \qquad \textit{for} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad \textit{for} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \qquad \textit{for} \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R}, & n \textit{ ulige} \\ x \in [0;\infty[, & n \textit{ lige}. \end{cases}$$

For x>0 er **alle** disse definitioner indeholdt i den generelle definitionsligning

$x^a = e^{a \cdot \ln x}$, $a \in \mathbb{R}$.

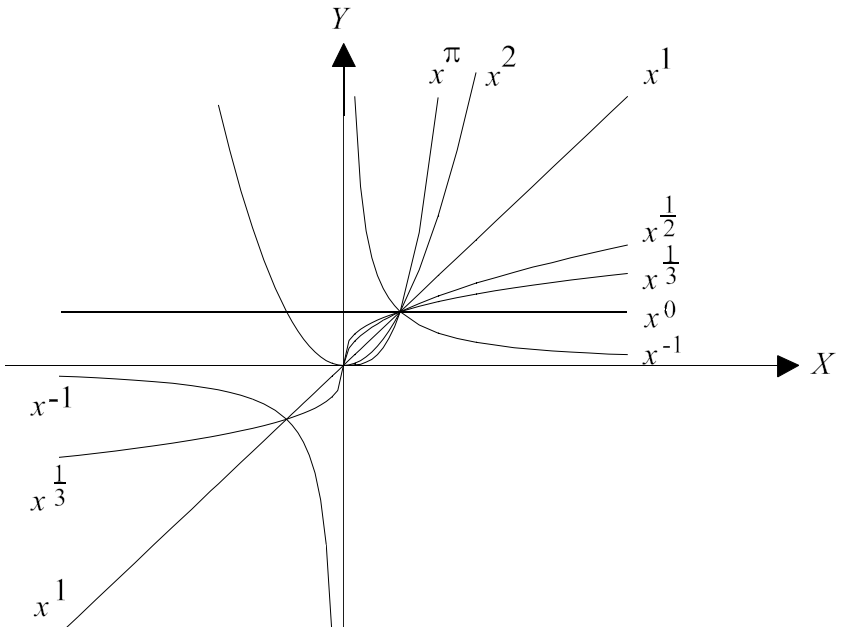


Fig. 2.5. *Nogle potensfunktioner. Bemærk, at de har forskellige definitionsmængder.*

En mere detaljeret definition af potensfunktioner findes i supplement 2A.

Differentialkvotient

Det kan vises, at potensfunktionen x^a er differentiabel i et punkt x af definitionsmængden, hvis og kun hvis x^{a-1} er defineret (her må underforstås $0^0 = 1$); i så fald er differentialkvotienten givet ved

$$\frac{d}{dx}(x^a) = a \cdot x^{a-1} .$$

Bevis. For $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$ ses dette af, at

$$\frac{d}{dx}(x^a) = \frac{d}{dx} e^{a \cdot \ln x} = e^{a \cdot \ln x} \cdot \frac{d}{dx}[a \cdot \ln x] = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = a \cdot x^{a-1} .$$

Stamfunktion

I et interval, hvor potensfunktionen x^a er defineret, har den en stamfunktion givet ved

$$\int x^a \, dx = \begin{cases} \frac{1}{a+1} x^{a+1} & \text{for } a \neq -1 \\ \ln|x| & \text{for } a = -1 \end{cases}$$

Bevis. Ved differentiation af funktionen på højre side af lighedstegnet fås netop x^a.

Regneregler

Det kan vises, at de sædvanlige "potensregler" (se afsnittet om eksponentialfunktioner) også gælder for potensfunktioner (for de værdier af *x, y, a, b* hvor alle de optrædende udtryk i en regel er definerede):

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$\frac{1}{x^b} = x^{-b}$$

$$(x^a)^b = x^{ab} \quad (\text{også } (x^b)^a \text{ skal være defineret})$$

$$x^a y^a = (xy)^a$$

$$\frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a .$$

Eksempel, hvor $(x^a)^b \neq x^{ab}$. Man har

$$\left((-2)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(((-2)^2)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left((4)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{og ikke}$$

$$\left((-2)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = (-2)^{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}} = (-2)^1 = -2, \text{ da } (-2)^{\frac{3}{2}} \text{ og dermed } \left((-2)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ ikke er defineret.}$$

Eksempel 2.6. Reducér udtryk indeholdende x^a.

Reducér de følgende udtryk uden hjælpemidler:

$$\sqrt[3]{x^6},\quad \sqrt[4]{x^{\frac{8}{3}}},\quad \frac{(x^4)^2\cdot\sqrt{x^6}}{(x^2)^3},\quad \left(\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x}\right)',\quad \int (3x)^2\,dx.$$

LØSNING:

$$\sqrt[3]{x^6} = \left(x^6\right)^{\frac{1}{3}} = x^{6\cdot\frac{1}{3}} = \underline{\underline{x^2}},$$

$$\sqrt[4]{x^{\frac{8}{3}}} = \left(x^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}} = \underline{\underline{x^{\frac{2}{3}}}},$$

$$\frac{(x^4)^2\cdot\sqrt{x^6}}{(x^2)^3} = \frac{x^{4\cdot2}\cdot x^{6\cdot\frac{1}{2}}}{x^{2\cdot3}} = \frac{x^8\cdot x^3}{x^6} = \frac{x^8\cdot x^3}{x^6} = x^{8+3-6} = \underline{\underline{x^5}},$$

$$\left(\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{2\cdot\frac{1}{5}}\cdot x^{\frac{1}{3}}\right)' = \left(x^{\frac{2}{5}+\frac{1}{3}}\right)' = \left(x^{\frac{2\cdot3}{5\cdot3}+\frac{5}{5\cdot3}}\right)$$

$$= \left(x^{\frac{6}{15}+\frac{5}{15}}\right)' = \left(x^{\frac{11}{15}}\right)' = \underline{\underline{\frac{11}{15}x^{\frac{11}{15}}}}$$

$$\int (3x)^2\,dx = \int 3^2x^2\,dx = 9\int x^2\,dx = 9\cdot\frac{1}{2+1}x^{2+1} = \underline{\underline{3x^3}}.$$

Eksempel 2.7. Potensregler.

Reducér udtrykket $\sqrt[14]{\dfrac{4^{\frac{3}{2}}}{(-2)^{\frac{2}{3}}}}$.

LØSNING:

$$\sqrt[14]{\frac{4^{\frac{3}{2}}}{(-2)^{\frac{2}{3}}}} = \left(\frac{4^{\frac{3}{2}}}{(-2)^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{14}} = \left(\frac{\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3}{\left((-2)^2\right)^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{14}} = \left(\frac{2^3}{\left(2^2\right)^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{14}} = \left(\frac{2^3}{2^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{14}}$$

$$= \left(2^{3-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{14}} = \left(2^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{1}{14}} = 2^{\frac{7}{3\cdot14}} = 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}.$$

Maple:

I "Math mode" : Vælg i menu Expression" $\sqrt[n]{a}$ Udfyld felter ved benyttelse af tabulatortast.

Herunder også anvend i "Ekspression" a^b

$\sqrt[4]{\dfrac{4^{3/2}}{\left((-2)^2\right)^{1/3}}}$ Bemærk, man er nødt til at angive rækkefølgen for potensopløftningen i nævneren.

Resultat: $4^{1/12}$ Sæt cursor på udskrift og tryk på højre musetast, vælg simplify Resultat $2^{1/6}$

2.4 LOGARITMISKE KOORDINATSYSTEMER

Hvis nogle målte datapunkter (x_0,y_0), (x_1,y_1), ..., (x_n,y_n) med tilnærmelse ligger på en ret linie, så kan vi tegne linien og bestemme konstanterne a og b i liniens ligning $y = ax + b$. Ligger datapunkterne ikke på en ret linie, er det undertiden muligt at indføre en ny skala på x-aksen og/eller y-aksen, således at punkterne med tilnærmelse kommer til at ligge på en ret linie. Derefter kan linien tegnes, og vi kan bestemme konstanter i en ligning mellem x og y.

1) Enkelt-logaritmisk koordinatsystem.

Den ene koordinatakse er forsynet med en logaritmisk skala. På figur 2.6 er y-aksen således en logaritmisk skala. I et sådant tilfælde kan vi da vise, at en ret linie (der ikke er lodret) vil være graf for en funktion af typen $y = q \cdot a^x$, dvs. en konstant multipliceret med en **eksponentialfunktion**.

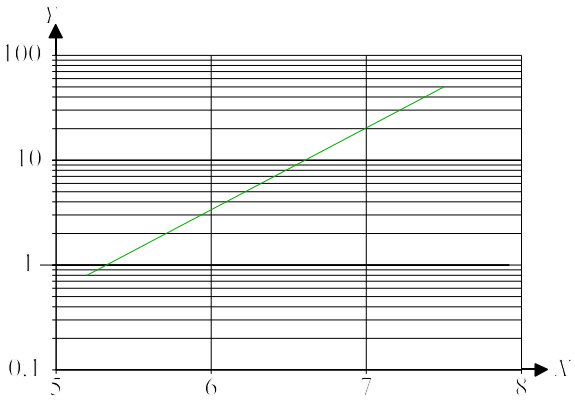


Fig. 2.6. *Log-system.*

Bevis. Vi har

$$y = qa^x$$
$$\Leftrightarrow \quad \log y = \log q + \log(a^x)$$
$$\Leftrightarrow \quad \log y = x \cdot \log a + \log q\,.$$

Den sidste ligning er ligningen for en ret linie, hvis man afsætter $\log y$ i stedet for y op ad andenaksen.

2) Dobbelt-logaritmisk koordinatsystem.

Begge koordinatakser er forsynet med logaritmeskala, se figur 2.7. En ret linie (der ikke er lodret) vil da være graf for en funktion af typen $y = q \cdot x^a$, dvs. en konstant multipliceret med en **potensfunktion**.

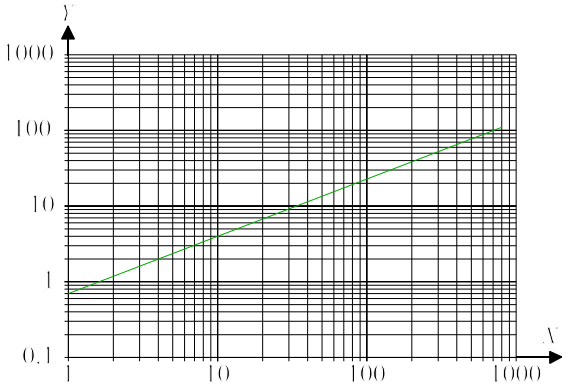


Fig. 2.7. *Log-log-system.*

Bevis. Vi har

$$y = qx^a$$
$$\Leftrightarrow \quad \log y = \log q + \log(x^a)$$
$$\Leftrightarrow \quad \log y = a \cdot \log x + \log q\,.$$

Den sidste ligning er ligningen for en ret linie, hvis man afsætter $\log x$ og $\log y$ i stedet for x og y ud ad akserne.

Eksempel 2.8. Logaritmisk koordinatsystem.

Ved et forsøg i en virksomheds laboratorium har man fundet følgende sammenhørende værdier af en størrelse x og en størrelse y

x	10	20	30	40	50	60	80
y	0.15	0.32	0.80	1.6	4.0	10.0	50

Man har en formodning om, at y er en eksponentielt voksende funktion af x.

1) Vis, ved anvendelse af et logaritmisk koordinatsystem, at denne formodning er rigtig $(y = q \cdot a^x)$.
2) Beregn a og q med 3 betydende cifre.[1]

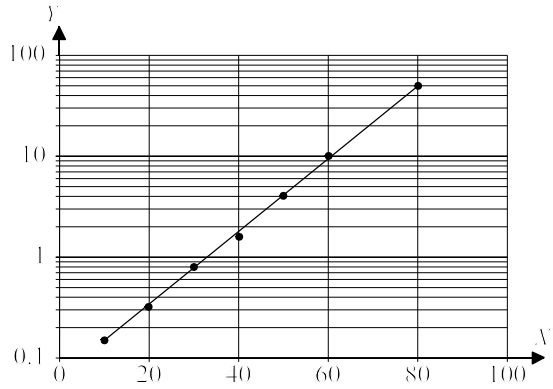


Fig. 2.8. *Exp-funktion i log-system.*

LØSNING:

1) På figur 2.8 er punkterne afsat i et enkelt-logaritmisk koordinatsystem. Derefter indtegnes en ret linie, f.eks. sådan at der opnås den **mindst** mulige værdi for den **største** afstand mellem punkt og linie ("minimax princippet"). Da punkterne tilnærmelsesvis ligger på en ret linie, foreligger der et eksperimentelt bevis for, at y er en eksponentielt voksende funktion af x.

2) På **linien** aflæses punkterne (10,0.15) og (80,50). (Af hensyn til nøjagtigheden vælges de to punkter langt fra hinanden). Indsættes disse koordinater i ligningen $y = q \cdot a^x$, fås ligningssystemet

(1) $0.15 = q \cdot a^{10}$

(2) $50 = q \cdot a^{80}$

Ved division fås $\frac{0.15}{50} = a^{-70} \quad \Leftrightarrow \quad -70 \cdot \log a = \log 0.15 - \log 50$

$\Leftrightarrow \quad \log a = 0.03604 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1.0865 \approx 1.09,$

som indsat i (1) giver $0.15 = q \cdot 1.0865^{10} \quad \Leftrightarrow \quad q = 0.0654.$

[1] Eksempelvis har følgende tal 3 betydende cifre $0.423,\ 0.00423,\ 0.403$ og $4350 = 4.35 \cdot 10^3$, dvs. netop 3 cifre, når der ses bort fra de nuller, som kun tjener til at vise placeringen af decimalpunktum.

2.5 TRIGONOMETRISKE FUNKTIONER

Sinus og cosinus

Figur 2.9 viser "enhedscirklen", der har centrum i $O=(0,0)$ og radius 1. Lad P være et punkt på enhedscirklen, og lad $v \in \mathbb{R}$ betegne en vinkel i radianer [1] fra x-aksen til $\overline{OP}$, hvor v regnes med fortegn (positiv mod uret). Funktionerne $\cos v$ og $\sin v$ defineres da ved, at punktet P skal have koordinaterne

$$P = (\cos v, \sin v), \qquad v \in \mathbb{R}.$$

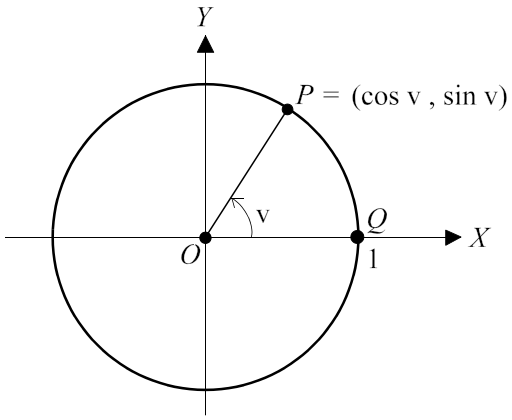


Fig. 2.9. *Definition af* cos *og* sin.

Af definitionen følger, at cos og sin begge har definitionsmængden $\mathbb{R}$ og værdimængden [-1;1]. Af definitionen følger også, at

$$\left.\begin{aligned} \cos(-v) &= \cos v \\ \sin(-v) &= -\sin v \\ \cos^2 v + \sin^2 v &= 1 \end{aligned}\right\}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Endvidere gælder følgende formler:

$$\left.\begin{aligned} &(1) && \sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) \\ &(2) && \sin v = \cos\left(v - \frac{\pi}{2}\right) \\ &(3) && \cos v = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) \end{aligned}\right\}, \quad v \in \mathbb{R},$$

---

[1] Et vinkelmål på v radianer defineres som $v = \dfrac{\text{længde af cirkelbue}}{\text{radius}} = \dfrac{\text{længde af } \overline{QP}}{1}$.

Omregning til grader sker med faktoren $\dfrac{180^o}{\pi}$, f.eks. $\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} \cdot \dfrac{180^o}{\pi} = 60^o$.

samt de såkaldte **additionsformler**:

$$\left.\begin{array}{ll} (4) & \cos(u+v) = \cos u\cdot\cos v - \sin u\cdot\sin v \\ (5) & \cos(u-v) = \cos u\cdot\cos v + \sin u\cdot\sin v \\ (6) & \sin(u+v) = \sin u\cdot\cos v + \cos u\cdot\sin v \\ (7) & \sin(u-v) = \sin u\cdot\cos v - \cos u\cdot\sin v \end{array}\right\}, \quad u, v \in \mathbb{R}\ .$$

og formlerne for dobbelt vinkel:

$$\left.\begin{array}{ll} (8) & \cos(2v) = \cos^2 v - \sin^2 v \\ (9) & \sin(2v) = 2\cos v\cdot\sin v \end{array}\right\}, \quad v \in \mathbb{R}\ .$$

Bevis for formlerne findes i supplement 2B.

Graferne for $\cos x$ og $\sin x$ ses på figur 2.10.

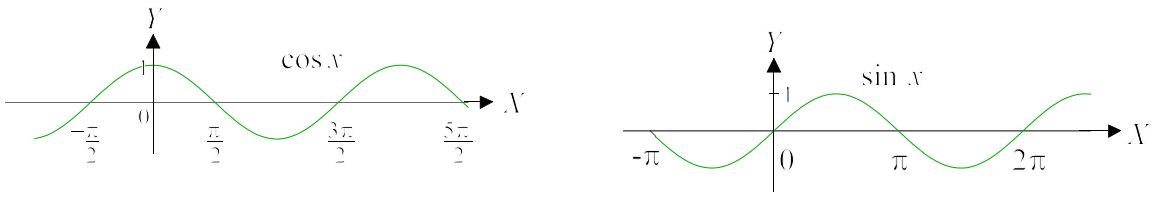


Fig. 2.10. *Grafer for* cos *og* sin.

Det kan vises, at $\cos x$ og $\sin x$ er differentiable i $\mathbb{R}$ med differentialkvotienterne

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{d\cos x}{dx} = -\sin x \\ \dfrac{d\sin x}{dx} = \cos x \end{array}\right\}, \quad x \in \mathbb{R}\ .$$

Tangens

Funktionen $\tan x$ defineres ved

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + p \cdot \pi \mid p \text{ hel} \right\}$$

Den får værdimængden $\mathbb{R}$. Grafen for tan ses på figur 2.11.

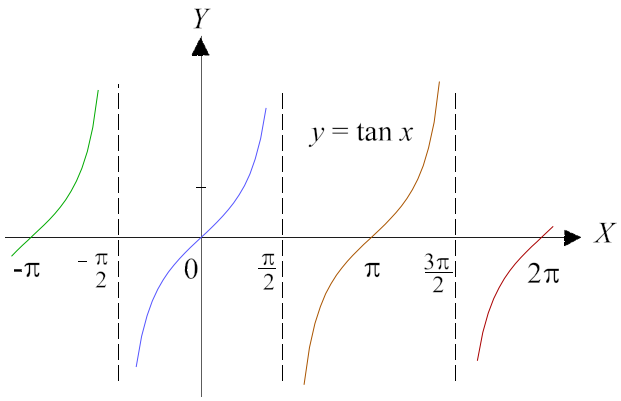


Fig. 2.11. *Graf for* tan.

Den er differentiabel i sin definitionsmængde, og differentialkvotienten er:

$$\frac{d\tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + p \cdot \pi, \; p \text{ hel}$$

Cosecant, secant og cotangens.

I udenlandsk litteratur defineres også nogle trigonometriske funktioner:

"cosecant" ved $\csc(x) = \frac{1}{\sin x}$, "secant" ved $\sec(x) = \frac{1}{\cos x}$ og cotangens ved $\cot(x)) = \frac{1}{\tan(x)}$

2.6 OMVENDTE TRIGONOMETRISKE FUNKTIONER

Egentlig har ingen af funktionerne sin, cos, tan og cot en omvendt funktion. Vi kan imidlertid udvælge et monotoniinterval (hovedintervallet) for hver af dem og i dette betragte den omvendte funktion (se figur 2.12). Hovedintervallet er det største monotoniinterval, der indeholder $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

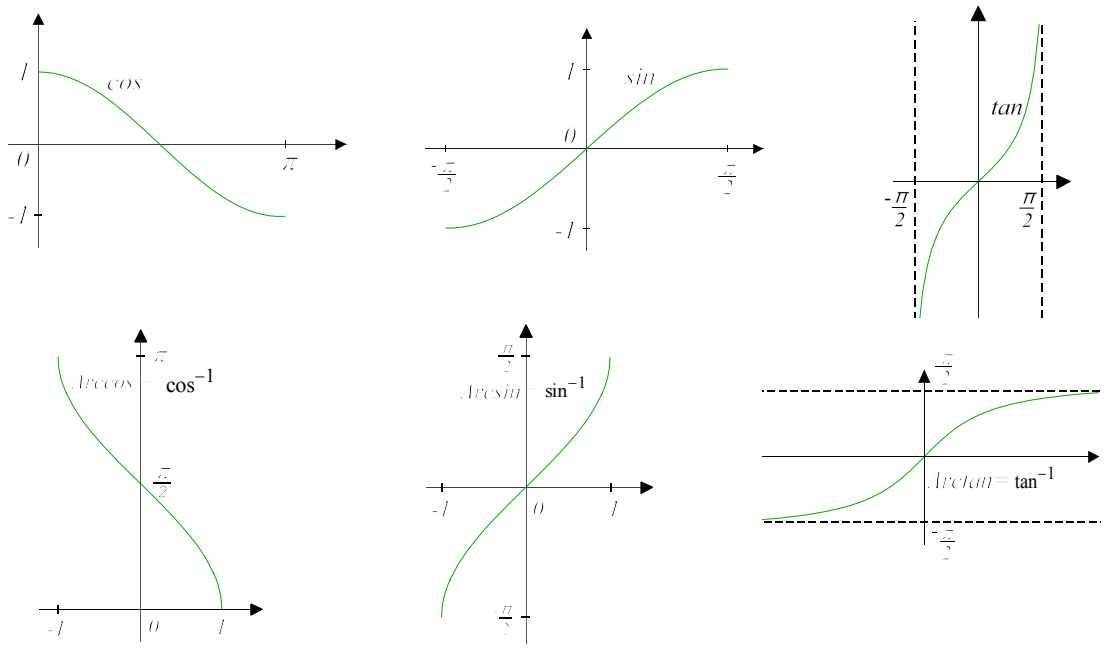


Fig. 2.12. *De trigonometriske funktioner (øverst). De omvendte funktioner (nedenunder) fremkommer ved spejling i linien y=x.*

Definition

Man definerer følgende funktioner:

Arcsin eller $\sin^{-1}$ defineres som den omvendte funktion til sin ved sammenhængen:

$$y = \operatorname{Arcsin} x \iff x = \sin y\,, \qquad \text{hvor} \quad x \in [-1;1] \quad \text{og} \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

Eksempelvis er $\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, da $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Arccos eller $\cos^{-1}$ defineres som den omvendte funktion til cos ved sammenhængen:

$$y = \operatorname{Arccos} x \iff x = \cos y\,, \qquad \text{hvor} \quad x \in [-1;1] \quad \text{og} \quad y \in [0;\pi]\,.$$

Eksempelvis er $\operatorname{Arccos}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, da $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Arctan eller $\tan^{-1}$ defineres som den omvendte funktion til tan ved sammenhængen:

$$y = \operatorname{Arctan} x \iff x = \tan y\,, \qquad \text{hvor} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{og} \quad y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[.$$

Eksempelvis er $\operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$, da $\tan\frac{\pi}{4} = 1$.

Navnene. Der anvendes, som det ses forskellige navne til de omvendte trigonometriske funktioner. På tastaturet på lommeregnere og i mange amerikanske lærebøger anvendes udelukkende $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ og $\tan^{-1}$. (bemærk, at f.eks. $\sin^{-1} x$ **ikke** betyder $\frac{1}{\sin x}$).

Andre lærebøger anvender kun arcus-betegnelserne (som udtales arcus-sinus, arcus-cosinus osv.) sandsynligvis netop for at undgå ovennævnte forveksling.
Forstavelsen "arcus" (bue, vinkel) kommer af, at f.eks. $\mathbf{Arcsin}\frac{1}{2}$ er den vinkel, hvis sinus er $\frac{1}{2}$.
I Maple kan man anvende begge betegnelser f.eks. $\sin^{-1}(0.5)$ eller arcsin(0.5).

Differentialkvotienter

Arcsin og Arccos er ikke differentiable i endepunkterne af definitionsintervallet, hvor der er lodret tangent, fordi graferne for sin og cos har vandret tangent. Lad $y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Der gælder da $y = \mathbf{Arcsin}\, x \iff x = \sin y$, og man finder differentialkvotienten af Arcsin x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} \qquad \left(\cos y > 0, \text{ da } y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \qquad (\text{da } \cos^2 y + \sin^2 y = 1 \text{ og } \cos y > 0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} ,$$

dvs. $\frac{d}{dx}\mathbf{Arcsin}\, x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in]-1;1[$.

Differentialkvotienterne for de andre arcus-funktioner findes på analog måde. Der gælder:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{Arccos}\, x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in]-1;1[\qquad \text{og} \qquad \frac{d}{dx}\mathbf{Arctan}\, x = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} .$$

De er også nævnt i oversigten i appendix 2.1.

Eksempel 2.9. Monoton substitution.

Find $F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}\left(1+\sqrt{4-x^2}\right)}$, hvor $x \in]-2;2[$.

LØSNING:

For at få $\sqrt{4-x^2}$ reduceret, indføres den **monotone** substitution [1]

$x = 2\sin u,\ u \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, hvorved $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 u} = 2|\cos u| = 2\cos u$.

Idet $dx = 2\cos u\, du$, fås

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}\left(1+\sqrt{4-x^2}\right)} = \int \frac{2\cos u\, du}{2\cos u(1+2\cos u)}$$

$$= \int \frac{du}{1+2\cos u} \underset{[\text{Schaum } 14.390]}{=} \frac{1}{\sqrt{2^2-1^2}} \ln\left|\frac{\tan\left(\frac{u}{2}\right)+\sqrt{\frac{3}{1}}}{\tan\left(\frac{u}{2}\right)-\sqrt{\frac{3}{1}}}\right| .$$

I det sidste udtryk mangler vi at genindføre variablen x. Netop fordi substitutionen $x = 2\sin u$ er givet ved en monoton funktion $2\sin u$, er der en omvendt funktion, $u = \operatorname{Arcsin}\frac{x}{2}$. Ved indsættelse fås

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\tan\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{x}{2}\right)+\sqrt{3}}{\tan\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{x}{2}\right)-\sqrt{3}}\right| .$$

Eksempel 2.10. Relation mellem arcusfunktioner.

Vis formlen $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$.

LØSNING:

Lad $v \in [0;\pi]$ og lad $x = \cos v$, således at $x \in [-1;1]$. Idet vi benytter formel (3),

$\cos v = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$, har vi nu $x = \cos v$ og $x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$,

der også kan skrives $\operatorname{Arccos} x = v$ og $\operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2} - v$.

Ved addition fås da den ønskede formel:

(8) $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$.

---

[1] I eksempel 1.5 foretog vi en substitution baseret på en ligning af typen $u=g(x)$. Vi kunne derfor umiddelbart udtrykke stamfunktionen $\frac{1}{18}u^{3/2}$ ved x (den bliver $\frac{1}{18}g(x)^{3/2}$). I eksempel 2.4 foretager vi derimod en substitution baseret på en ligning af typen $x=h(u)$. For også i dette tilfælde at kunne udtrykke stamfunktionen ved x, er det nødvendigt, at u kan udtrykkes ved x, dvs. $u = h^{-1}(x)$. Ved at kræve at h er en **monoton** funktion, sikrer vi os, at h har en omvendt funktion h^{-1}.

2.7 DE HYPERBOLSKE FUNKTIONER

Definition

Man definerer "cosinus-hyperbolsk", "sinus-hyperbolsk" osv. på følgende måde:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Differentiation

Funktionerne $\cosh x$ og $\sinh x$ er differentiable for alle $x \in \mathbb{R}$ med differentialkvotienterne:

$$\frac{d\cosh x}{dx} = \sinh x, \qquad \frac{d\sinh x}{dx} = \cosh x,$$

idet

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Funktionerne cosh og sinh differentieres altså analogt til cos og sin, bortset fra fortegn.

Graf for cosh

Grafen for cosh kan tegnes som vist på figur 2.13 ud fra følgende funktionsundersøgelse:

Nulpunkter. Vi opstiller ligningen $\cosh x = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0$, men da e^x og e^{-x} altid er positive, har cosh ingen nulpunkter.

Monotoniforhold. Vi har

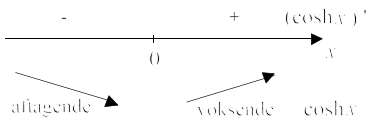
$$(\cosh x)' = 0 \Leftrightarrow \sinh x = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

For $x > 0$ fås $\frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0$, da $e^x > e^{-x}$.

For $x < 0$ fås $\frac{e^x - e^{-x}}{2} < 0$, da $e^x < e^{-x}$.

Monotoniforholdene kan derfor anskueliggøres på en tallinie:



Funktionen $\cosh x$ har altså globalt minimum i punktet $x = 0$.

Minimumsværdien er $\cosh 0 = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$.

Symmetri. Da $\cosh(-x) = \frac{e^{(-x)} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x$, er grafen symmetrisk om y-aksen.

Asymptoter. Grafen har ingen asymptoter, men for $x >> 1$ (tegnet ">>" læses "meget større end") gælder $\cosh x \approx \frac{1}{2}e^{x}$, da $\cosh x - \frac{1}{2}e^{x} = \frac{1}{2}e^{-x} \to 0$ for $x \to \infty$.

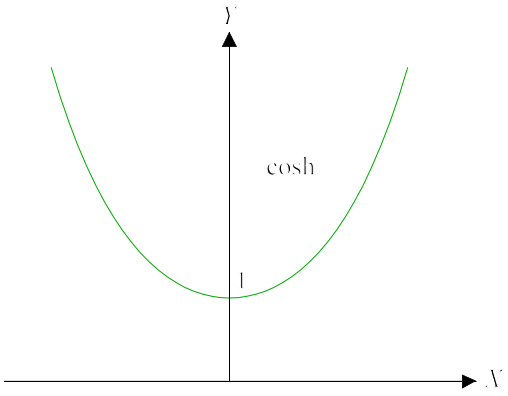


Fig. 2.13. *Grafen for* cosh.

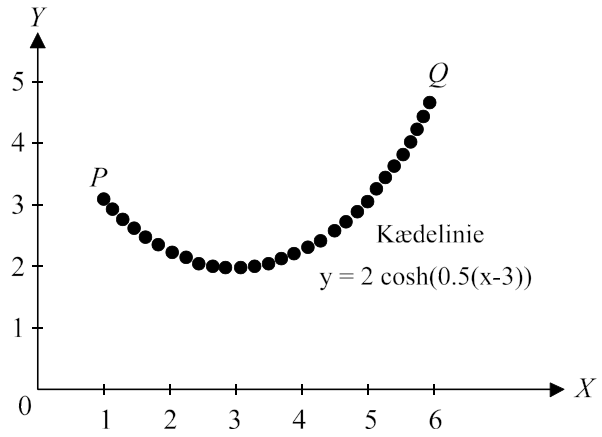


Fig. 2.14. *En kæde ophængt i to punkter P og Q vil følge en* cosh-*kurve*.

Kædelinie. Man kan vise, at en kæde, der ophænges i 2 punkter, vil følge en kurve givet ved

$$y = a \cdot \cosh(b(x-c)) + d,$$

se figur 2.14. Grafen for cosh kaldes derfor **"kædelinien"**.

Grafer for sinh og tanh

Disse grafer kan tegnes på samme måde som grafen for cosh, se figur 2.15.

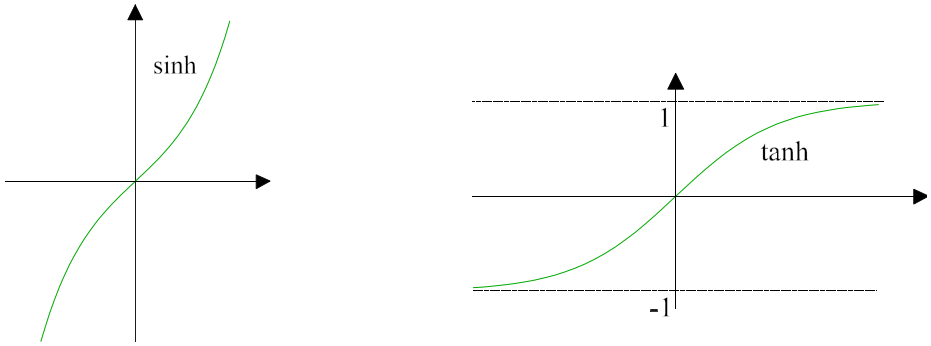


Fig. 2.15. *Grafer for* sinh og tanh.

Formler

For de hyperbolske funktioner har man ganske analoge formler til de, der kendes mellem de tilsvarende trigonometriske funktioner, **bortset** fra fortegnene, jævnfør. Det er derfor forståeligt, at betegnelserne cosh, sinh, tanh er valgt, så de ligner betegnelserne cos, sin, tan.

Udledning af formler. Som et eksempel bevises formlen $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Bevis: Ifølge definitionen af cosh og sinh fås

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = 1 .$$

Forklaring af glosen "hyperbolsk".

Glosen "hyperbolsk" kommer af, at

$$(x, y) = (\cosh t,\ \sinh t) , \qquad t \in \mathbb{R}$$

er en parameterfremstilling for en gren af hyperblen med ligningen

$$x^2 - y^2 = 1 ,$$

nemlig den gren, der ligger i 1. og 4. kvadrant.

Bevis. Indsættes parameterfremstillingen i ligningen, fås

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 ,$$

hvilket er en sand relation. (Da $\cosh t > 0$, bliver der kun tale om den højre gren af hyperblen, se figur 2.16).

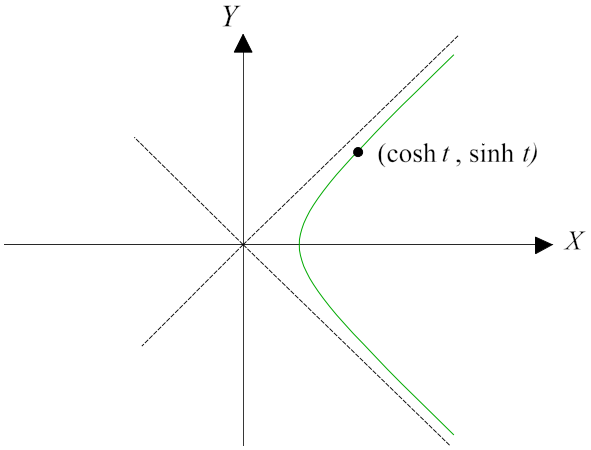


Fig. 2.16. *Hyperbelgren.*

2.8 AREAFUNKTIONERNE

Areafunktionerne defineres som de omvendte funktioner til de hyperbolske funktioner. Dog må vi indskrænke definitionsintervallet for cosh til at være $[0; \infty[$ for at opnå en entydig omvendt funktion . De omvendte funktioner benævnes Arsinh, Arcosh og Artanh (eller $\sinh^{-1}$, $\cosh^{-1}$ osv.). Deres grafer er vist på figur 2.17.

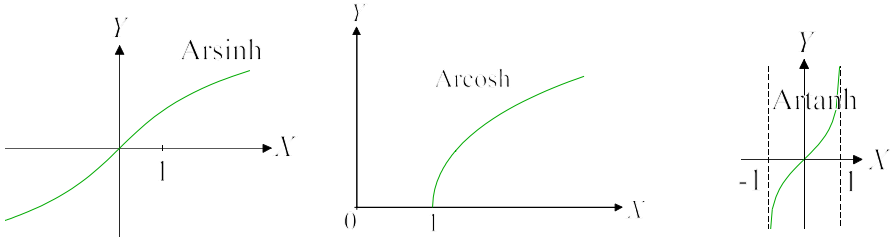


Fig. 2.17. *Grafer for areafunktionerne.*

Eksplicitte udtryk for Areafunktionerne

Alle 4 areafunktioner kan direkte udtrykkes ved elementære funktioner:

$$\operatorname{Arsinh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Arcosh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), \quad x \in [1;\infty[$$

$$\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad x \in]-1;1[\ .$$

Bevis. Lad os f.eks. bestemme $\operatorname{Arsinh} x$. Vi har

$$x = \sinh y \iff x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \iff x = \frac{e^{2y}-1}{2e^y} \iff (e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0 \ .$$

Den sidste ligning kan opfattes som en andengradsligning med e^y som den ubekendte. Vi finder heraf

$$e^y = x+\sqrt{x^2+1} \iff y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) .$$

Differentialkvotienter

Alle areafunktionerne er differentiable (Arcosh dog kun i det åbne interval $]1;\infty[$). Deres differentialkvotienter er nævnt i oversigten i appendix (de bestemmes lettest ud fra de ovennævnte eksplicitte udtryk).

Forklaring af glosen "area".

På hyperblen med ligningen $x^2-y^2=1$ betragtes to punkter A og B med koordinaterne (x,y) og $(x,-y)$. Det kan da vises, at $\operatorname{Arcosh} x = \operatorname{Arsinh} y$ er arealet af den mængde (skraveret på figur 2.18), der afgrænses af liniestykkerne OA, OB og hyperbelbuen AB.

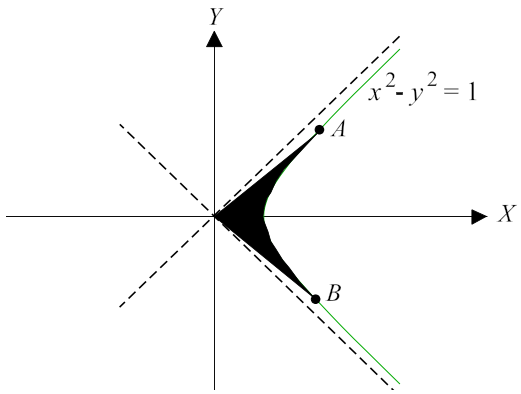


Fig. 2.18. Arcosh x *er arealet af det skraverede område.*

SUPPLEMENT: 2A DETALJERET DEFINITION AF POTENSFUNKTIONER

Detaljeret definition

For $x<0$ har x^a kun mening (som reel funktion), hvis $a = \frac{p}{q}$, hvor p og q er hele tal, $\frac{p}{q}$ er uforkortelig og q er **ulige**. Den komplette definition af x^a fremgår af nedenstående skema. (Se også figur 2A.1).

Opdeling af definitionsmængden	Definition	Krav til eksponenten
$x > 0$	$x^a = e^{a \cdot \ln x}$	$a \in \mathbb{R}$
$x = 0$	$0^a = 0$	$a > 0$
$x < 0$	$x^{\frac{p}{q}} = \begin{cases} -e^{\frac{p}{q}\ln\lvert x\rvert} & \text{for } p \text{ ulige} \\ e^{\frac{p}{q}\ln\lvert x\rvert} & \text{for } p \text{ lige} \end{cases}$	p, q er hele tal, q **ulige** og $\frac{p}{q}$ uforkortelig

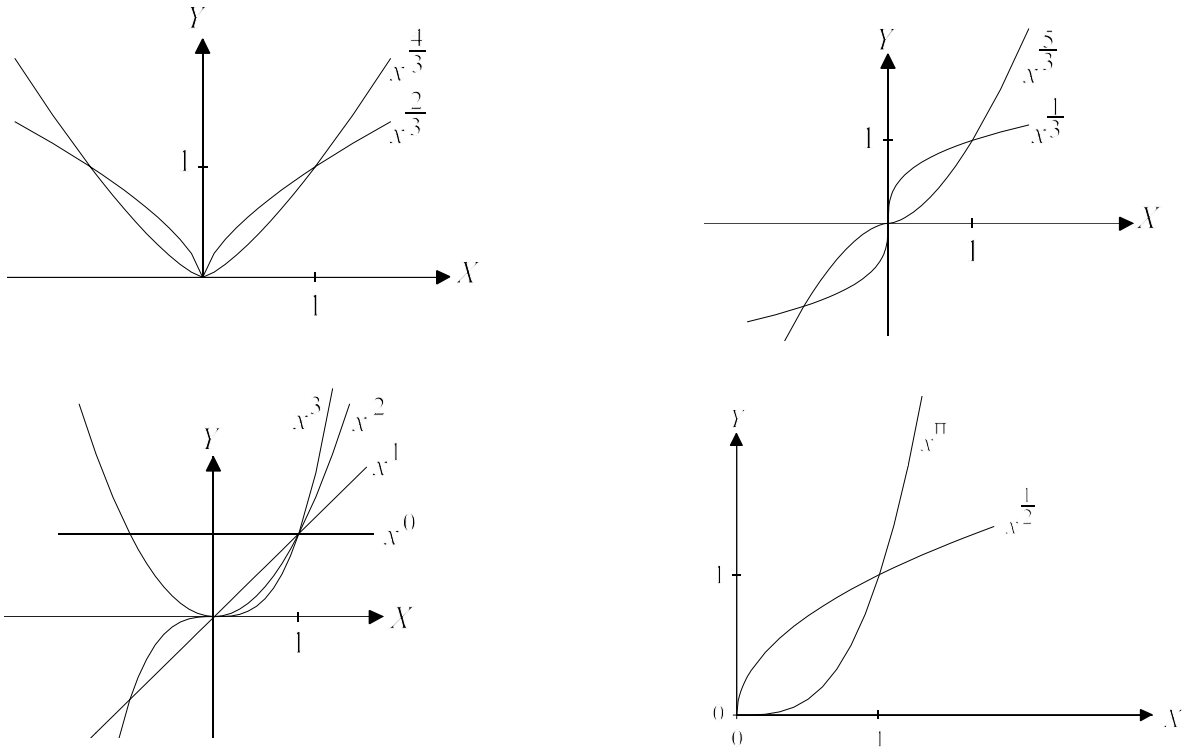


Fig. 2A.1. *Nogle potensfunktioner.*

SUPPLEMENT: 2B BEVIS FOR TRIGONOMETRISKE FORMLER

Vi vil bevise følgende formler:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) \\ (2) & \sin v = \cos\left(v - \frac{\pi}{2}\right) \\ (3) & \cos v = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) \end{array}\right\}, \quad v \in \mathbb{R},$$

samt de såkaldte **additionsformler**:

$$\left.\begin{array}{ll} (4) & \cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v \\ (5) & \cos(u-v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v \\ (6) & \sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v \\ (7) & \sin(u-v) = \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v \end{array}\right\}, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

og formlerne for dobbelt vinkel:

$$\left.\begin{array}{ll} (8) & \cos(2v) = \cos^2 v - \sin^2 v \\ (9) & \sin(2v) = 2\cos v \cdot \sin v \end{array}\right\}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

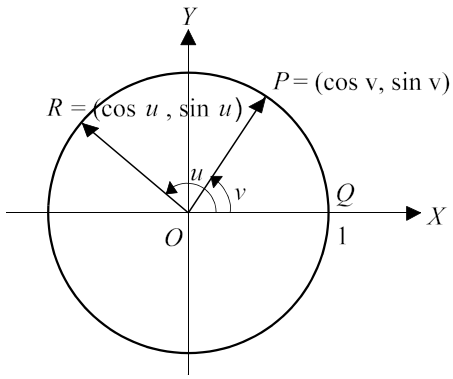


Fig. 2B.1. *Enhedscirkel med to punkter P og R.*

Først bevises formel (5). Figur 2B.1 viser det samme som figur 2.9, blot ses også en vinkel u fra x-aksen til $\overline{OR}$.

Af formlen for skalarprodukt

$$\overline{OP} \cdot \overline{OR} = |\overline{OP}| \cdot |\overline{OR}| \cos(u - v)$$

fås cosinus til vinklen mellem $\overline{OP}$ og $\overline{OR}$:

$$\cos(u - v) = \frac{\overline{OR} \cdot \overline{OP}}{|\overline{OR}| \; |\overline{OP}|} = \frac{(\cos u, \sin u) \cdot (\cos v, \sin v)}{1 \cdot 1},$$

hvoraf vi får formel (5):

$$(5) \qquad \cos(u - v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v .$$

Ud fra formel (5) kan vi nu bevise de øvrige formler.

Erstattes v med -v, og benyttes cos(-v) = cos v, sin(-v) = -sin v, fås formel (4):

$$(4) \qquad \cos(u + v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v .$$

Sættes $u = \frac{\pi}{2}$ i formel (5), fås $\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos v + \sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin v,$

og idet $\cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1,$ finder vi formel (1):

(1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin v\ .$

Idet $\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos\left(v - \frac{\pi}{2}\right),$ finder vi også formel (2):

(2) $\cos\left(v - \frac{\pi}{2}\right) = \sin v\ .$

Erstattes v med $\frac{\pi}{2} - v$ i (2), fås $\cos\left(\frac{\pi}{2} - v - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$

og idet cos(-v) = cos v, finder vi formel (3):

(3) $\cos v = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)\ .$

Erstattes *u* med $\frac{\pi}{2} - u$ i (5), fås $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u - v\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\cdot\cos v + \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\cdot\sin v,$

og idet $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u - v\right) = \sin(u + v),\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u,\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u,$ finder vi formel (6):

(6) $\sin(u + v) = \sin u\cdot\cos v + \cos u\cdot\sin v.$

Erstattes heri v med -v, og benyttes cos(-v) = cos v, sin(-v) = -sin v, fås formel (7):

(7) $\sin(u - v) = \sin u\cdot\cos v - \cos u\cdot\sin v.$

Sættes u = v i formlerne (4) og (6), fås formlerne (8) og (9):

$$\left.\begin{array}{ll} (8) & \cos(2v) = \cos^2 v - \sin^2 v \\ (9) & \sin(2v) = 2\sin v\cdot\cos v \end{array}\right\}, \quad v \in \mathbb{R}\ .$$

Hermed er alle formlerne (1)-(7) bevist.

OPGAVER

Opgave 2.1a *(reducér udtryk indeholdende naturlige logaritmer)*
Reducér de følgende udtryk uden hjælpemidler, idet $x > 0$, $y > 0$ *og* $z > 0$, *og undersøg i hver linie det sidste udtryk for* $x \to \infty$ *og for* $x \to 0_+$ *:*

1) $\ln 1$, $\ln \mathrm{e}$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln y$, $\ln\sqrt{x} + \ln\sqrt{x}$, $\ln(xy) - \ln y$,

2) $\ln(\mathrm{e}^2)$, $\ln\sqrt{\sqrt{\mathrm{e}}}$, $2\ln\frac{x^3}{y^4} + 3\ln\frac{y^3}{x^2}$, $\frac{6\ln(x^2) + 2\ln\frac{1}{x^5}}{4\ln(x^2) - \ln(x^7)}$, $4\ln\sqrt{x}$,

3) $\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$, $\ln x + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$, $\ln\sqrt{x} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $8\ln\sqrt{x} + \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + \ln(x^{-1})$,

4) $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$, $\ln\sqrt[3]{x} + \ln\sqrt[3]{x} + \ln\sqrt[3]{x}$, $\ln\sqrt{\mathrm{e}^x}$, $\frac{\ln(x^4) + \ln(x^5)}{\ln\ln(\mathrm{e}^x)}$, $\frac{\ln(2x)}{\ln x}$,

5) $4\ln\sqrt{xyz} + \ln(x^{-2}) - \ln(y^2)$, $2\ln\frac{x}{y^2} + 3\ln\frac{y}{x^2}$, $\ln\ln\sqrt{\sqrt{\mathrm{e}^x}}$,

6) $\ln\sqrt{\mathrm{e}}$, $\frac{\ln\sqrt{x}}{\ln(x^2)}$, $\ln\sqrt{\sqrt{\sqrt{\mathrm{e}^{16x}}}}$, $\frac{\ln(2^x)}{\ln(2^y)}$, $\ln\frac{y^4}{x} + 2\ln\frac{x^4}{y^2}$,

7) $\ln\frac{\ln(3^x)}{\ln(3^y)} + \ln\ln(\mathrm{e}^y)$, $\ln(x^{\frac{5}{3}}) - \ln x + \ln(x^{-\frac{1}{3}})$, $2\ln\sqrt{x} - \ln\ln\sqrt{\mathrm{e}^x}$,

8) $\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$, $\frac{\ln(4x^2y^2) - \ln(2xy)}{\ln x + \ln(2y)}$, $\frac{\ln(9x^3) + 3\ln y + \ln\frac{1}{3x} + \ln\frac{1}{3y}}{\ln(xy)}$.

Opgave 2.1b *(reducér udtryk indeholdende logaritmer med diverse grundtal)*
Reducér de følgende udtryk uden hjælpemidler, og undersøg i hver linie det sidste udtryk for $x \to \infty$ *og for* $x \to 0_+$

1) $\log_2 1$, $\log_2 2$, $\log_2(3xy) - \log_2(3y)$, $\log_{10}\dfrac{x}{y^2} + 2\log_{10} y$,

2) $\log_{10} 1$, $3\log_{10}(x^3) - 4\log_{10}(x^2)$, $\ln\log_a a$, $\log_{10} 100$, $4\log_{10}\sqrt{\sqrt{x}}$,

3) $\log_2 4$, $\log_2 8$, $\log_2\sqrt{2}$, $\log_2(4^x)$, $\log_a(a^a)$, $\log_{10}(100^x)$, $2\log_{0.5}(x^3)$,

4) $\log_{10}(1000^x)$, $\dfrac{\ln x}{\log_2 x}$, $\dfrac{\log_2 x}{\log_{16} x}$, $\ln\sqrt{2}\cdot\log_2(x^2)$, $\ln 100\cdot\log_{10}\sqrt{x}$,

5) $\log_{10} 10000$, $\log_2(2^x)$, $-\log_{10}(10^{-x})$, $\log_{10} x + \log_{10}\dfrac{1}{x}$, $\log_{10}\sqrt{x} + \log_{10}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

6) $\ln 100\cdot\log_{10} x$, $4\log_2\sqrt{\sqrt{2^x}}$, $\dfrac{2\log_2(x^4) + \log_2\dfrac{1}{x^2}}{\log_4 x}$, $\dfrac{\ln(x^4)}{\ln 10} - 3\log_{10} x$,

7) $\log_{10}\sqrt{10}$, $\log_2(x^3) - 4\log_{16}(x^3)$, $\log_a b\cdot\log_b a$, $\dfrac{3\log_{10}(x^2) - 5\log_{10} x}{1 + \log_{10} x}$,

8) $7\log_{10}\sqrt{x} + 2\log_{10}\dfrac{1}{x} - 3\log_{10}(x^{\frac{2}{3}})$, $\log_{10}(x^2 y) + \log_{10}\dfrac{1}{x} + \log_{10}\dfrac{1}{y}$,

9) $\log_2(x^2 y) + \log_2\dfrac{1}{x} + \log_2\dfrac{1}{y}$, $\log_2\dfrac{1}{x} + \log_2\dfrac{1}{y} + 4\log_2\sqrt{xy}$, $\dfrac{\log_2(3x)}{\log_2(5x)}$,

10) $\log_{10} 10$, $6\log_{10}\sqrt{x} + 4\log_{10}\sqrt{y} + 8\log_{10}\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$, $\log_{10}\left(\dfrac{x^3}{2}\right) + \log_{10}\left(\dfrac{4}{x^2}\right)$.

Opgave 2.1 *(logaritmefunktion)*
En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{x}{1 - \ln x}.$$

1) Undersøg f med hensyn til definitionsmængde, fortegn, asymptoter (det oplyses, at $f(x) \to -\infty$ *for* $x \to \infty$*, og at* $f(x)$ *ikke har en asymptote for* x *gående mod uendelig) og monotoniforhold.*

2) Undersøg $f'(x)$ *og for* $x \to 0_+$

3) Tegn grafen for f, og bestem værdimængden.

Opgave 2.2 *(logaritmefunktion)*
Bestem integralerne

1) $\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$ 2) $\int_1^2 x^2 \ln(x^3) dx$

3) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx$ 4) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$.

Opgave 2.3a *(reducér udtryk indeholdende e^x)*
Reducér de følgende udtryk uden hjælpemidler:

1) e^0, $e^{\ln 2}$, $\ln(e^2) + \ln\frac{1}{e}$, $\sqrt{e^{-2\ln 3}}$, $\frac{(e^{2x+1})^3 e^x}{e^3}$, $(e^{2x})'$, $\int e^{2x} dx$,

2) $e^{-\ln 1}$, $\frac{e^{4\ln 5 - \ln 25}}{5}$, $\sqrt{e^{-\ln(e^2)}}$, $\frac{e^{5x} e^{3x} e^{-4x}}{e^{-2x}}$, $\left((e^{2x})^3 \cdot e^{-4x}\right)'$, $\int e^{-2x} dx$,

3) $\ln(e^2)$, $\ln(e^4) + \ln(e^5)$, $\log_{10}\sqrt{\ln(e^{10})}$, $\frac{(e^{5x})^6 e^{2x}}{(e^{3x})^3}$, $\left(\sqrt{e^{9x}}\right)'$, $\int (e^{x+1})^3 dx$,

4) $e^{3\ln 2}$, $\ln\frac{1}{e^2} + \ln\frac{1}{e}$ $\log_{10}(e^{\ln 100})$, $\frac{e^{20x} e^x}{(e^{2x})^3}$, $\sqrt{e^{-2\ln 7}}$, $\left(\frac{e^{5x}}{e^{-3x}}\right)'$, $\int \frac{3}{\sqrt{e^{6x}}} dx$,

5) $\ln\frac{1}{e^3}$ $\frac{e^{2\ln 3 + 3\ln 27}}{e^{\ln 9}}$ $e^{\log_2 2 \cdot \ln 2}$, $\sqrt{e^{-25x}}$, $\frac{e^x e^{3x} e^{-x}}{e^{2x}}$, $\left(\frac{(e^{4x})^2}{e^{-x}}\right)'$, $\int (e^{2x})^3 dx$,

6) $\left(\ln(e^{\sqrt{5}})\right)^4$, $\ln\left(e^{\ln(e^3)}\right)$, $\ln\sqrt{e^x} + \ln\sqrt{e^x}$, $\frac{e^{18x} e^x}{e^{3x}}$, $e^{-2x} \cdot e^{e^{\ln(3x)}}$, $\left(\frac{e^{5x}}{e^{2x}}\right)'$,

7) $e^{\ln 5 + \ln 25}$, $e^{-\log_{10} 3 \cdot \ln 10}$, $\frac{e^{6x} e^{-2x} e^x}{e^{3x}}$, $\sqrt{e^{2x}} \cdot (e^{3x})^2 \cdot \sqrt{e^{-4x}}$, $\int \sqrt{e^{25x}} dx$,

8) $e^{4\ln 3 - \ln 9}$, $e^{\ln 5 \cdot \log_5 7}$, $\log_2(e^{\ln 2})$ $\sqrt{e^{x^2}}$, $\frac{e^x (e^{-2x})^2}{e^{4x}}$, $\left(\sqrt{e^x}\right)'$, $\int ((e^{2x})^3)^4 dx$,

9) $\frac{e^{2x} \cdot e^{3x}}{e^x}$, $\log_{10}(e^{\ln 10})$ $\ln\frac{1}{\sqrt{e^3}}$, $\sqrt{e^{-9x}} \cdot e^{-x} \cdot (e^{5x})^{\frac{3}{2}}$, $\left(\frac{(e^{2x})^3}{\sqrt{e^x}}\right)'$, $\int \frac{e^{9x}}{e^{3x}} dx$,

10) $\frac{e^{8x}}{e^{2x}}$, $\sqrt{e^{36x}}$, $\ln\frac{e^{24x}}{e^{6x}}$, $e^{-7} \cdot e^{e^{3\ln 2}}$ $e^{-3x})^3 \cdot e^{5\ln(e^{2x})}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{e^x}}\right)'$, $\int \sqrt{e^{16x+4}} dx$,

11) $\ln\sqrt{e^{-x}} + \ln\sqrt{e^{-x}}$, $\frac{\sqrt{e^{-13x}} \cdot (e^{2x})^3}{\sqrt{e^x}}$, $e^{12x} \cdot (e^{6x})^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{e^{-16x}}$ $x\, e^{2x})'$ $\int \frac{\sqrt{e^{6x}}}{\sqrt{e^{2x}}} dx$,

12) $e^{\ln(e^{\ln 2})}$, $\sqrt{e^{-x^2}}$, $\frac{e^{-33} e^{8\ln(e^4)}}{e^{-2}}$, $(e^{3x})^{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{e^{-11x}}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{e^{-3x}}}\right)'$, $\int \sqrt{e^{36x}} dx$.

Opgave 2.3 *(eksponentialfunktioner m.m.)*

1) *Find uden brug af regnemidler*

$$e^{\ln 7} \qquad e^{-\ln 7} \qquad \ln\left(\frac{1}{e^7}\right) \qquad e^{2\cdot \ln 7} \qquad 10^{3\cdot \log 2}\ .$$

2) *Find differentialkvotienten af funktionerne*

$$\left(x^x\right)^x \qquad x^{(x^x)}\ .$$

Opgave 2.4 *(logaritmefunktioner, eksponentialfunktioner m.m.)*

Hvilke af de følgende ligninger er sande for alle $x,y \in]0;\infty[$ *?*

1) $\ln(x+y) = \ln x + \ln y$

2) $x^{\ln y} = y^{\ln x}$

3) $2^{(3^4)} = \left(2^3\right)^4$

4) $\dfrac{1}{\ln x} = -\ln x$

5) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$

6) $\sqrt{\ln x} = \dfrac{1}{2}\cdot \ln x$

7) $\ln x \cdot \ln y = \ln(x+y)$

8) $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{\ln x}$

9) $\dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

10) $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$

11) $\ln\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\cdot \ln x$

12) $\log 10 = 10$

13) $\ln 3 + \ln 7 = \ln 21$.

Kontrollér nogle af dine svar ved hjælp af en lommeregner.

Opgave 2.5a *(reducér udtryk indeholdende* a^x*)*

Reducér de følgende udtryk uden hjælpemidler:

1) 2^0, $2^{\log_2 3}$, $\sqrt{2^{6x}}$, $\frac{15^x}{3^x}$, $\frac{(3^{3x+2})^5\,3^x}{3^{14x+10}}$, $\left(\sqrt{4^x}\right)'$, $\int 2^{3x}\,dx$,

2) $10^{\log_{10} 3}$, $9\cdot 3^{2x}$, $16^x\cdot 4^{-x}$, $\frac{3}{2}5^{x-1} - \frac{2}{3}5^{x-1}$, $\left(7^x\cdot 2^x\right)'$, $\int 2^{-2x}\,dx$,

3) $8\cdot 2^x$, $10^{\log_{10} 100} + 2^{\log_2 7}$, $4\cdot 9^x - 3\cdot 3^{2x}$, $\left(\sqrt{9^x}\right)'$, $\int (2^{x+3})^2\,dx$,

4) $2^x\cdot 3^x$, $\frac{12^x}{4^x}$, $\log_{10}(e^{\ln 100})$, $\frac{1}{4}2^x - \frac{3}{14}2^x$, $\left(\frac{6^x}{2^x}\right)'$, $\int \frac{3}{\sqrt{2^{6x}}}\,dx$,

5) $7^x\cdot 7^{-x}$, $\frac{e^{x\cdot\ln 15}}{e^{x\cdot\ln 5}}$, $\frac{1}{3}7^{x-1} + \frac{1}{4}7^{x-1}$, $\left(3\cdot 3^{x+1}\right)'$, $\int \frac{20^x}{2^{2x}}\,dx$,

6) $\frac{1}{8}2^x$, $\frac{3}{8}5^{x-1} - \frac{1}{6}5^{x-1}$, $\frac{1}{e^{x\cdot\ln 2 + x\cdot\ln 3}}$, $\left(x\cdot 2^x\right)'$, $\int \sqrt{4^x}\,dx$,

7) $(2^x\cdot 3^x)^2$, $\sqrt{25^x}$, $\frac{1}{4}2^{x+2}$, $\frac{12^x}{2^{2x}}$, $\frac{1}{3}2^x - \frac{1}{5}2^x$, $\left(2^{2x}\cdot 4^x\right)'$, $\int \frac{1}{2^{-2x}}\,dx$,

8) $\frac{1}{25}5^{2x}$, $100\cdot 10^x$, $4^x - 2^{2x}$, $\frac{e^{x\cdot\ln 6}}{e^{-x\cdot\ln 2}}$, $\left(\sqrt{\frac{12^x}{3^x}}\right)'$, $\int \frac{9^{x+4}}{3^{x+7}}\,dx$,

9) $\sqrt{2^{-8x}}$, $10^{-\log_{10} 6} + 2^{-\log_2 6}$, $\frac{2^{6x}\,2^{3x}\,2^{-8x}}{2^{-3x}}$, $\left(4\cdot 2^x\right)'$, $\int \frac{1}{\sqrt{9^x}}\,dx$.

Opgave 2.5 *(eksponentialfunktion)*

En funktion f *er bestemt ved* $f(x) = 4^{2x} - 5\cdot 4^x + 4$.

1) Undersøg f *med hensyn til definitionsmængde, fortegn, asymptoter og monotoniforhold. Tegn grafen.*

2) Bestem arealet af punktmængden $\{(x,y) \mid f(x) \le y \le 0\}$.

Opgave 2.6 *(eksponentialfunktion)*

Bestem integralerne

1) $\int_1^2 x^2 e^{-x^3}\,dx$ 2) $\int_1^2 3^{1-x}\,dx$ 3) $\int_{-2}^2 2^x\cdot 3^x\,dx$.

Opgave 2.7a *(reducér udtryk indeholdende* x^a*)*

Reducér de følgende udtryk uden hjælpemidler:

1) $\frac{x^{15}}{x^3}$, $\sqrt[5]{x^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{(x^3)^5 x^3}{(((x^2)^2)^2)^2}$, $\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt[5]{x^2}$, $\left(\sqrt[3]{x^4}\right)'$, $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^{\frac{9}{5}}}}dx$,

2) $x^2\cdot(x^2x^3)^4$, $x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{-\frac{1}{6}}$, $\sqrt[12]{x^{-\frac{6}{5}}}$, $\left(\sqrt[7]{x^{\frac{1}{3}}}\right)^6$, $(x^7\cdot x^2)'$, $\int \frac{x^{-3}}{x^{-2}}dx$,

3) $\frac{(x^3)^4}{x^6}$, $(x^5x^3)^{\frac{1}{4}}\cdot x^{-8}$, $\left(\sqrt[9]{8^{\frac{3}{5}}}\right)^2$, $\sqrt[5]{x^{-\frac{10}{3}}}$, $\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}\right)'$, $\int \frac{\sqrt{x}}{x^{-2}}dx$,

4) $\frac{x^{20}}{(x^2)^5}$, $x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{5}}$, $\sqrt[7]{x^{\frac{3}{5}}}$, $\left(\sqrt[4]{9^{\frac{1}{3}}}\right)^6$, $\left(\sqrt[5]{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^2}\right)'$, $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[5]{x^2}}dx$,

5) $x^{16}\cdot x^{-4}$, $\left(\sqrt[4]{5^{\frac{1}{6}}}\right)^3$, $x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{5}}\cdot x^{\frac{2}{3}}$, $\left((x^3)^2\cdot x^5\right)'$, $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Opgave 2.7 *(potensfunktioner)*

Hvilke af de følgende udtryk er definerede?

1) 0^1
2) $(\pi)^{-\pi}$
3) $(-3)^{\frac{1}{4}}$
4) $(-4)^{\frac{1}{3}}$
5) $(-3)^4$
6) $(-3)^3$
7) $(-3)^{\frac{3}{4}}$
8) $(-4)^{\frac{2}{3}}$
9) 1^0
10) $(-\pi)^{\pi}$
11) 0^{-1}
12) 0^0.

Opgave 2.8 *(potensfunktion, funktionsundersøgelse m.m.)*

I den tekniske litteratur om projektering af industrianlæg kan man finde udtryk som

$2x^{1.1} - x^{2.3}$.

1) Angiv mængden D af reelle tal, for hvilke ovennævnte udtryk er defineret.

2) Angiv mængden D' af reelle tal for hvilke ovennævnte udtryk er differentiabelt.

I det følgende betragtes en funktion f givet ved

$f(x) = 2x^{1.1} - x^{2.3}$, $x \in [0;2]$.

3) Lav en tabel over f(x) for x-værdierne

0.00, 0.25, 0.50, ... , 1.75, 2.00 .

4) Find funktionens nulpunkter med 4 betydende cifre.

5) Find med 4 betydende cifre de x-værdier, for hvilke funktionen har lokalt ekstremum.

6) Tegn grafen for f på ternet papir (sæt 1 enhed = 10 cm).

7) Angiv største- og mindsteværdi for f (globale ekstrema).

8) Anslå ud fra tegningen en tilnærmet værdi for arealet af den plane punktmængde, der begrænses af x-aksen og grafen for f.

9) Find det i spørgsmål 8 omtalte areal med 4 betydende cifre.

Opgave 2.9 *(potensfunktioner)*

Bestem integralerne

1) $\int_0^1 (2x-3)\sqrt{x^2-3x+2}\,dx$ 2) $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

3) $\int_1^2 \sqrt[3]{x}\,dx$ 4) $\int_1^2 x^2\sqrt[3]{x}\,dx$.

Opgave 2.10 *(standardfunktioner)*

Angiv for hvert af de følgende 5 udtryk

a) mængden D af reelle tal, for hvilke udtrykket er defineret,

b) mængden D' af reelle tal, for hvilke udtrykket er differentiabelt,

c) differentialkvotienten.

1) $e^x + 3^x + x^x + 0^x$ 2) $x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{2}{3}} + x^0 + x^{-\frac{2}{3}}$

3) $\frac{5x^4 - 3x^2}{2x^4 - 8x^2}$ 4) $\ln x + x\cdot\log x + \frac{\ln x}{x} + \ln(\log(11-x))$

5) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + x^2\sqrt{(1-x^2)^3} + \sqrt{3^x - 1}$.

Opgave 2.11 *(enkelt-logaritmisk koordinatsystem)*

Aflæs de to punkter med y-koordinater 0.2 og 20 på figur 2.8 og beregn heraf a og q med 3 betydende cifre.

Opgave 2.12 *(enkelt-logaritmisk koordinatsystem)*

Sammenhørende værdier af CCl_4's damptryk p (målt i mm Hg) og temperaturen t (målt i ^oC) er angivet i følgende tabel:

t	*0*	*20*	*40*	*60*
p	*33.1*	*89.5*	*210.9*	*439.0*

1) *Afsæt i et enkelt-logaritmisk koordinatsystem punkterne* $\left(\frac{1}{T}, p\right)$, *hvor T er temperaturen målt i ^oK (T = 273+t).*
2) *Aflæs CCl_4's kogepunkt, dvs. temperaturen når p = 760 mm.*
3) *Trykket p er en funktion f af T.*
   Idet vi forudsætter, at ovennævnte punkter ligger på en ret linie [1], skal man finde funktionsudtrykket for f.

Opgave 2.13 *(dobbelt-logaritmisk koordinatsystem)*

Ved et forsøg har man fundet følgende sammenhørende værdier af en størrelse x og en størrelse y.

x	*10*	*20*	*30*	*40*	*50*	*60*	*80*
y	*160*	*450*	*980*	*1400*	*2300*	*2900*	*5400*

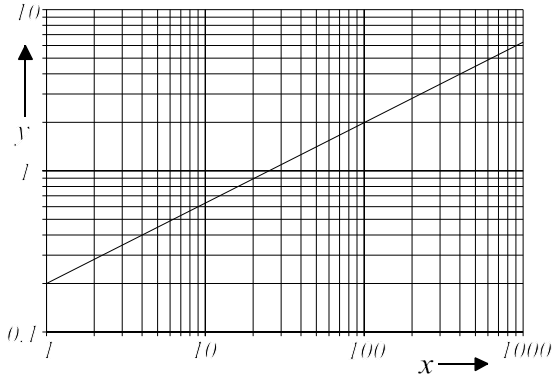
1) *Afsæt punkterne i et dobbelt-logaritmisk koordinatsystem, og vis derved, at sammenhængen mellem x og y er givet ved ligningen* $y = q\,x^a$.
2) *Aflæs på kurven den til x=70 svarende værdi af y.*
3) *Beregn konstanterne a og q med tre betydende cifre.*
4) *Beregn de til x=0 og x=100 svarende værdier af y.*

[1] *I G.W. Castellan: "Physical Chemistry", 1973 udledes "Clapeyrons damptryksligning", og det forklares, at man med tilnærmelse kan forvente en ret linie.*

Opgave 2.14 *(dobbelt-logaritmisk koordinatsystem)*

I det viste dobbelt-logaritmiske koordinatsystem er der på basis af nogle laboratoriedata tegnet en ret linie, som er grafen for en funktion y=f(x).

Angiv funktionsudtrykket for f.



Opgave 2.15 *(trigonometrisk funktion)*

En funktion f er givet ved

$$f(x) = -\cos^2 x + \cos x + 2 \quad , \quad 0 \le x \le 2\pi \, .$$

1) Undersøg f med hensyn til fortegn og monotoniforhold, og tegn grafen for f.
2) Beregn arealet af den figur, der begrænses af grafen for f og linien med ligningen

$$y = \frac{9}{4}$$

Opgave 2.16 *(trigonometrisk funktion)*

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \tan x + \tan^2 x \quad , \quad 0 \le x \le 2\pi \, .$$

1) Undersøg f med hensyn til fortegn, monotoniforhold og asymptoter, og tegn grafen for f.
2) Beregn arealet af den figur, der begrænses af grafen for f og x-aksen.

Opgave 2.17 *(arcusfunktioner)*

Find (uden brug af regnemidler)

$$1)\ \operatorname{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad 2)\ \operatorname{Arctan} 1 \qquad 3)\ \operatorname{Arctan}(-1) \, .$$

Løs ligningerne

$$4)\ \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{3} \qquad 5)\ \operatorname{Arccos} x = \frac{2\pi}{3} \qquad 6)\ \operatorname{Arccot} x = \frac{\pi}{2} \, .$$

Opgave 2.18 *(trigonometriske funktioner m.m.)*

Hvilke af de følgende ligninger er korrekte for alle de værdier af x, hvor udtrykkene på begge sider af lighedstegnet er defineret?

1) $\sin(-x) = \sin x$

2) $\cos(-x) = \cos x$

3) $\cos(\pi + x) = \cos x$

4) $\sin(\pi + x) = -\sin x$

5) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

6) $\operatorname{Arcsin}(\sin x) = x$

7) $\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$

8) $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1 - x^2}$

9) $\cos^{-1} x = \frac{1}{\cos x}$.

Opgave 2.19 *(arcusfunktion, funktionsundersøgelse m.m.)*

Lad en funktion f være givet ved

$$f(x) = 2 \cdot \operatorname{Arccos}\frac{2 - x}{2} - \sqrt{4x - x^2} \ .$$

1) Angiv mængden D af reelle tal x, for hvilke f(x) er defineret.

2) Lav en tabel over f(x) for x-værdierne 0, 1, 2, 3 *og* 4.

3) Vis, at f er voksende.

4) Undersøg $f'(x)$ for $x \to 0$ og $x \to 4$.

5) Tegn grafen for f på ternet papir eller ved hjælp af en computer. (Sæt 1 enhed = 2.5 cm).

Opgave 2.20 *(standardfunktioner)*

Angiv for hvert af følgende 6 udtryk

a) mængden D af reelle tal, for hvilke udtrykket er defineret,

b) mængden D' af reelle tal, for hvilke udtrykket er differentiabelt,

c) differentialkvotienten.

1) $\frac{\cos x + \operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1 + x}}$

2) $\operatorname{Arctan}(\ln x)$

3) $\frac{3\pi}{4} - \operatorname{Arccos} x - \sqrt{1 - x^2}$ *(svær)*

4) $\sin x + \ln(\cos x) + (x + 1)e^{\tan x}$

5) $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos}(\cos x) + \frac{x}{\operatorname{Arctan} x}$

6) $\frac{x + \operatorname{Arcsin} x}{1 + \ln x} + (\sin x)^{\sqrt{x}}$.

Opgave 2.21 *(integraltabel)*
Find (uden brug af numerisk integration)

1) $\int_0^1 (2x\,\mathrm{Arctan}\,x + \frac{x^2}{1+x^2})\,dx$

2) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x\cdot \mathrm{Arcsin}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

3) $\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx$.

4) $\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$

5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Opgave 2.22 *(hyperbolske funktioner m.m.)*
Find uden brug af hjælpemidler

1) $\cosh(\ln 2)$
2) $\tanh(\ln 3)$
3) $\cosh 1 + \sinh 1$
4) $\cosh 1 - \sinh 1$
5) $\sinh\left(\ln(1+\sqrt{2})\right)$
6) $\tanh 1 + \coth 1$
7) $\mathrm{Arcosh}\,1$
8) $\mathrm{Artanh}\left(-\frac{3}{5}\right)$.

Opgave 2.23 *(hyperbolske funktioner, funktionsundersøgelse m.m.)*
Ved gennemregning af et apparats virkemåde er der fremkommet funktionen f givet ved

$$f(x) = \cosh x - \frac{1}{9}\sinh(2x)\,, \qquad x \in [-1;\frac{5}{2}]\ .$$

Der er lavet følgende tabel over f(x) med 4 decimaler:

x	*-1.0*	*-0.5*	*0*	*0.5*	*1.0*	*1.5*	*2.0*	*2.5*
f(x)	*1.9461*	*1.2582*	*1.0000*	*0.9970*	*1.1401*	*1.2393*	*0.7300*	*-2.1125*

1) *Find nulpunkter for f med 4 betydende cifre (benyt f.eks.* $\sinh(2x)=2\cdot\cosh x\cdot\sinh x$ *).*
2) *Find med 4 betydende cifre de x-værdier, for hvilke funktionen har lokalt ekstremum, og angiv funktionens største- og mindsteværdi.*
3) *Tegn grafen for f på ternet papir. (Sæt 1 enhed* $\approx$ *5 cm).*
4) *Anslå ud fra tegningen så nøjagtigt som muligt arealet af den mængde i planen, der afgrænses af koordinatakserne og grafen for f i 1. kvadrant.*
5) *Find det i spørgsmål 4 omtalte areal med 4 betydende cifre.*

Opgave 2.24 *(alle standardfunktioner)*

På hver linie er mindst én af de funktioner, der er angivet i søjle 1-5 lig med funktionen angivet i venstre søjle (i hvert fald i et vist interval). Markér disse funktioner med et × i de omstående rubrikker eller i et mindre afkrydsningsskema bestående af 9×5 terner på et stykke ternet papir. Eksempel:

	$\sqrt{x^3}$	$\cos x$	$\sqrt{x^4}$	$-x^{-2}$	$x \cdot x$
x^2 =			×		×

		1	*2*	*3*	*4*	*5*
1)	$e^{-\ln x}$ =	$-x$	*1*	$\frac{1}{x}$	*0*	$x - e$
2)	$\cos(\text{Arcsin}\, x)$ =	$1 + x$	$1 + \text{Arctan}\, x$	$\sqrt{1 - x^2}$	$\sin x$	$\cot x$
3)	$e^{2\ln x}$ =	$\square^2$	2^x	$2x$	$\sqrt{x}$	x^{2e}
4)	$\sinh(\text{Arcosh}\, x)$ =	$1 - x$	$1 + x^2$	e^x	$-\sqrt{x^2 - 1}$	$\sqrt{x^2 - 1}$
5)	$\ln(\cosh x + \sinh x)$ =	$\square e^x$	$x + \frac{1}{x}$	$\tanh x$	x	$e^x - 1$
6)	$\tan(2 \cdot \text{Arctan}\, x)$ =	$2x$	$\frac{2x}{1 - x^2}$	$2 \cdot \tan x$	$\tan^2 x$	$\frac{x}{1 + x^2}$
7)	$\cosh(2 \cdot \text{Arcosh}\, x)$ =	$2x$	$1 + x^2$	$\text{Arcosh}\, x$	$x^2 - 1$	$2x^2 - 1$
8)	$\log_5(x^{\ln 5})$ =	$\square^5 \ln 5$	$\ln(5^x)$	$25x$	$x \cdot \ln 25$	$\ln x$
9)	$2^{\ln(x^2)}$ =	$\ln(x^4)$	$4^{\ln x}$	$x^{\ln 4}$	4^x	x^4

Kontrollér i hvert fald den sidste række ved hjælp af en lommeregner.

Opgave 2.25 *(alle standardfunktioner)*

Reducér udtrykket

$$\sqrt{\cosh(\ln x) - \sinh(\ln x)} - x^{\ln(\sinh x)} + e^{\sqrt{\ln x}} + (\sinh x)^{\ln x} - e^{-\ln\sqrt{x}}$$

for alle $x \in [1;\infty[$.

Kontrollér resultatet på en lommeregner for $x = 1.234567$.

Opgave 2.26 *(alle standardfunktioner)*

Angiv for hvert af følgende 7 udtryk

a) mængden D af reelle tal, for hvilke udtrykket er defineret,

b) mængden D' af reelle tal, for hvilke udtrykket er differentiabelt,

c) differentialkvotienten.

1) $\cos(\sinh x)\tanh x$

2) $\dfrac{\sin x}{\sinh(x)}$

3) $(\cosh x)^{\sinh(\ln x)}$

4) $\cosh(\sinh(x\cdot\ln x))$

5) $\tanh\left(\ln(x-\sqrt{2x-3}\,)\right)$

6) $\sin(\sinh(4x+3))$

7) $\sinh x + \operatorname{Arcosh} x + \tanh x - \dfrac{1}{\coth x}$.

Opgave 2.27 *(alle standardfunktioner)*

Reducér om muligt følgende udtryk:

a) $\ln(e^7)$ *b)* $e^{\ln 4}$ *c)* $(e^3)^4$ *d)* $\dfrac{e^7}{e^3}$ *e)* $e^7\cdot e^3$

f) $\ln(2^{10})$ *g)* $e^{\ln 4 - \ln 2}$ *h)* $\dfrac{e^7 - e^3}{2e^3}$ *i)* $(\ln 2)^3$ *j)* $\dfrac{\sqrt[7]{3^{3/4}\cdot\sqrt{27}}}{9^{1/8}}$

k) $\dfrac{\sin(2v)}{2\cdot\sin v}$ *l)* $10^{-9\cdot\log_{10}2}$

Opgave 2.28 *(alle standardfunktioner)*

Reducér om muligt følgende udtryk uden hjælpemidler:

a) $2^3\cdot 4^3$ *b)* $2^3\cdot 2^4$ *c)* $\ln(2^3) + \ln(2^4)$ *d)* $e^{\ln 49 - \ln 7}$

e) $\ln\dfrac{1}{e^{-1/3}}$ *f)* $\dfrac{\ln 42 - \ln 14}{\ln 9}$ *g)* $\dfrac{\ln 42}{\ln 14}$ *h)* $\cos^2 v + \sin^2 v$

i) $\sqrt{a+b} - \sqrt{a}$ *j)* $\dfrac{\sqrt[5]{3^{5/6}\cdot 6^{1/3}}}{9^{5/12}}$ *k)* $10^{-2\cdot\log_{10}7}$ *l)* $(\ln x)\cdot(\ln y)$

Opgave 2.29 *(alle standardfunktioner)*

Find uden hjælpemidler

a) $\left(x\sqrt{x}\right)'$ *b)* $\left(\ln\left(\frac{x^2\cdot\cos^4 x}{\ln x}\right)\right)'$ *c)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^{14}+3x^{13}+1}{5x^{14}+x^{12}+7}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x}$ *e)* $\cos(2v)+2\sin^2 v$ *f)* $10^{-3\cdot\log_{10}4}$

g) $\frac{e^{\ln x+2\ln y}-e^{\ln x}}{x(y+1)}$ *h)* $\frac{\sqrt[3]{2^{4/5}\cdot 4^{1/5}}}{16^{3/20}}$

Opgave 2.Eksam64b *(alle standardfunktioner, integration)*

Lad der være givet en funktion $y = y(t)$:

$$y(t) = \begin{cases} t\cdot\operatorname{Arcsin}\frac{t}{7} & \text{for} \quad t\in\,]0;7[\\ 50\frac{e^{-\sqrt{\ln t}}}{t\sqrt{\ln t}} & \text{for} \quad t\in\,]7;24[\end{cases}.$$

Find $\int_0^{24} y(t)\,dt$ *uden at anvende numerisk metode.*

Opgave 2.Eksam84b *(numerisk integration, 10 point)*

Foretag en iterativ beregning af værdien af $\int_6^{16}\operatorname{Arctan}(\ln x)\,dx$.

Facit anføres med 3 betydende cifre. (Husk at anføre mellemregninger.)

3 GRÆNSEUNDERSØGELSER OG INTEGRATION

3.1 INDLEDNING

Ved ingeniørmæssige beregninger kan man være interesseret i at bestemme grænseværdi for et udtryk, når f.eks. en koncentration går mod nul, et tryk går mod nul, tiden går mod uendelig eller et antal går mod uendelig. Grænseværdibestemmelsen kan formelt føre til ubestemte udtryk af formerne

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\cdot\infty, \quad \infty-\infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty \quad \text{og} \quad \infty^0.$$

I mange tilfælde vil en omskrivning kunne løse problemet:

a) Forkortning. Hvis $\frac{f(x)}{g(x)}$ formelt går mod $\frac{\infty}{\infty}$, kan man forsøge at dividere i tæller og nævner med en dominerende størrelse. Eksempelvis vil $\frac{3x^3+5x^2+4}{2x^3+x+7}$ formelt gå mod $\frac{\infty}{\infty}$ for $x\to\infty$,men efter division med den "store" størrelse x^3 fås

$$\frac{3+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^3}}{2+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}} \to \frac{3+0+0}{2+0+0} = \frac{3}{2} \quad \text{for} \quad x\to\infty$$

Analogt vil $\frac{e^x+7}{3e^x+\sin x}$ formelt gå mod $\frac{\infty}{\infty}$ for $x\to\infty$ men efter division med den "store" størrelse e^x fås $\frac{1+7e^{-x}}{3+e^{-x}\sin x} \to \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3}$ for $x\to\infty$.

b) Kendte formler kan bruges til omskrivning. Eksempelvis vil $\frac{1-\cos^2 x}{2\cos x\cdot\tan x}$ formelt gå mod $\frac{0}{0}$ for $x\to\infty$, men benyttes formlerne $\cos^2 x+\sin^2 x = 1$ og $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, fås

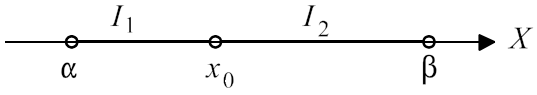
$$\frac{\sin^2 x}{2\cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{2}\sin x \to 0 \quad \text{for} \quad x\to 0$$

3.2 L'HOSPITALS REGEL

I vanskeligere tilfælde kan problemet ofte løses ved *l*'Hospitals regel (staves også *l*'Hôpital):

SÆTNING 3.1 *(l'Hospitals regel). Lad funktionerne f og g være differentiable i åbne intervaller $I_1 =]\alpha; x_0[$ og $I_2 =]x_0; \beta[$, og lad $g'(x) \neq 0$ i disse intervaller.*

Antag enten $\begin{cases} f(x) \to 0 \quad for \quad x \to x_0 \quad og \\ g(x) \to 0 \quad for \quad x \to x_0 \end{cases}$



eller antag $\begin{cases} |f(x)| \to \infty \quad for \quad x \to x_0 \quad og \\ |g(x)| \to \infty \quad for \quad x \to x_0 \ . \end{cases}$

Såfremt $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to a \quad for \quad x \to x_0$, *så vil også* $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to a \quad for \quad x \to x_0$.

I denne sætning må symbolet x_0 gerne erstattes med

a) x_0- *eller* ∞ *(i så fald betragtes kun intervallet I_1) eller med*

b) x_0+ *eller* $-\infty$ *(i så fald betragtes kun intervallet I_2).*

Endvidere må symbolet "a" gerne erstattes med $+\infty$ *eller* $-\infty$.

NB. Bemærk, at det i sætningen er forudsat, at $\dfrac{f}{g}$ formelt fører til et af de ubestemte udtryk

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{\infty}{-\infty}, \quad \frac{-\infty}{\infty} \quad \text{eller} \quad \frac{-\infty}{-\infty}.$$

Bevis. Vi indskrænker os til at undersøge brøken $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ for det tilfælde, hvor både $f(x)$ og $g(x)$ går mod 0 for $x \to x_0$. Endvidere forudsættes, at $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$ og $g'(x)$ er definerede i x_0 og kontinuerte i x_0. Så fås

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} \to \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad \text{for} \quad x \to x_0$$

og

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad \text{for} \quad x \to x_0.$$

Hermed er *l*'Hospitals regel bevist under de gjorte forudsætninger.

Et mere generelt bevis for *l*' Hospitals regel findes i supplement 3A.

Eksempel 3.1. De ubestemte udtryk $\frac{0}{0}$ og $\frac{\infty}{\infty}$.

Ved beregningen af et kemisk absorptionstårn fremkommer brøken $\frac{x-1}{x-e^{k(1-x)}}$, hvor k er en positiv konstant.

1) Undersøg brøken for $x \to 1+$.

2) Undersøg brøken for $x \to \infty$.

LØSNING:

1) Lad T betegne brøkens tæller x-1, og N dens nævner $x-e^{k(1-x)}$. Vi finder $T \to 0$ for $x \to 1+$ og $N \to 0$ for $x \to 1+$. Grænseværdibestemmelsen fører altså formelt til det ubestemte udtryk $\frac{0}{0}$. Derfor forsøges med *l*'Hospitals regel, dvs. $\frac{T}{N}$ erstattes med $\frac{T'}{N'}$, som undersøges. Dette vil vi kort skrive

$$\frac{x-1}{x-e^{k(1-x)}} \underset{\substack{T\to 0\\ N\to 0\\ x\to 1+}}{\overset{\text{l'Hospital}}{\sim}} \frac{1}{1+k\cdot e^{k(1-x)}} \to \underline{\underline{\frac{1}{1+k}}} \quad \text{for} \quad x \to 1+ .$$

(Kontrol: For x=1.01 og k=2 fås $\frac{x-1}{x-e^{k(1-x)}} \approx 0.336$, som er nær ved $\frac{1}{1+2} = 0.3333...$).

Tegnet $\sim$ skal her forstås sådan, at **hvis** $\frac{T'}{N'}$ går mod et tal, eller mod $+\infty$ eller $-\infty$, så vil $\frac{T}{N}$ gå mod det samme.

2) For $x \to \infty$ fører grænseværdibestemmelsen formelt til det ubestemte udtryk $\frac{\infty}{\infty}$.
Derfor forsøges med *l*'Hospitals regel

$$\frac{x-1}{x-e^{k(1-x)}} \underset{\substack{T\to \infty\\ N\to \infty\\ x\to \infty}}{\overset{\text{l'Hospital}}{\sim}} \frac{1}{1+k\cdot e^{k(1-x)}} \to \underline{\underline{1}} \quad \text{for} \quad x \to \infty .$$

(Kontrol: For x=100 og k=2 fås $\frac{x-1}{x-e^{k(1-x)}} \approx 0.990$, som er nær ved grænsen 1).

Edb-løsning. Benyttes matematikprogrammet Maple, bliver de tilsvarende beregninger:

```
assume ( k>0 ) ;
f := x -> (x-1) / (x-exp(k*(1-x))) ;
```

$$f := x \to \frac{x-1}{x-e^{(k(1-x))}}$$

```
limit ( f(x), x=1, right ) ;
```

$$\frac{1}{1+k\sim}$$

"~" angiver, at der er en betingelse på k ($k>0$)

```
limit ( f(x), x=infinity ) ;
```

$$1$$

Omskrivning til brøk.

l'Hospitals regel er umiddelbart velegnet, når vi formelt føres til de ubestemte brøker $\frac{0}{0}$ og $\frac{\infty}{\infty}$. I de andre tilfælde omskrives til et brøkproblem, inden *l*'Hospitals regel anvendes:

a) $\underline{\underline{0\cdot\infty}}$. Fører $f\cdot g$ til det ubestemte udtryk $0\cdot\infty$ omskrives til $\frac{f}{\left(\frac{1}{g}\right)}$ eller $\frac{g}{\left(\frac{1}{f}\right)}$.

b) $\underline{\underline{0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0}}$. Fører f^g til et af de ubestemte udtryk 0^0, 1^∞ eller ∞^0, omskrives til $e^{g\cdot\ln f}$, hvor $g\cdot\ln f$ behandles som under punkt a.

c) $\underline{\underline{\infty-\infty}}$. Fører $f-g$ til det ubestemte udtryk $\infty-\infty$, omskrives til $f\cdot\left(1-\frac{g}{f}\right)$ og eventuelt videre til $\frac{1-\frac{g}{f}}{\frac{1}{f}}$.

Eksempel 3.2. Det ubestemte udtryk $0\cdot\infty$.

Ved blanding af to rene stoffer er tilvæksten i den termodynamiske frie energi tilnærmet givet ved $\Delta G = NRT\cdot[x\ln x + (1-x)\cdot\ln(1-x)]$, hvor x er molbrøken[1] af det ene stof, mens N, R og T er konstanter. Undersøg ΔG for $x\to 0+$.

LØSNING:

Udtrykket $x\cdot\ln x$ fører til et ubestemt udtryk af formen $0\cdot(-\infty)$ for $x\to 0+$. Vi har da

$$x\cdot\ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\substack{\text{l'Hospital}\\ T\to-\infty\\ N\to\infty\\ x\to 0+}}{\sim} \frac{\frac{1}{x}}{-\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{-\frac{1}{x}} = -x \to \underline{\underline{0}} \quad \text{for} \quad x\to 0+.$$

Heraf følger, at $\Delta G \to NRT\cdot[0+1\cdot\ln 1] = \underline{\underline{0}}$ for $x\to 0+$.

---

[1] Molbrøken af stof 1 er defineret ved $\frac{n_1}{n_1+n_2}$, idet n_1 og n_2 er antal mol af henholdsvis stof 1 og stof 2.

Eksempel 3.3. Det ubestemte udtryk 1^{∞}.

Undersøg $\left(1+\frac{10}{n}\right)^{-n}$ for $n\to\infty$.

Forklaring. I en beholder der er tømt så godt som muligt, befinder sig en rest på 1 liter opløsning af et stof A med koncentrationen 1 gram/liter. For at fjerne stoffet A bruges 10 liter rent opløsningsmiddel således: beholderen skylles omhyggeligt n gange med tilsætning af $\frac{10}{n}$ liter opløsningsmiddel pr. gang. Efter hver "tømning" af beholderen sidder der dog 1 liter opløsning tilbage pga. vedhæftning til vægge m.m. En skylning vil derfor gange koncentrationen i beholderen med $\left(1+\frac{10}{n}\right)^{-1}$. Efter n skylninger er koncentrationen altså $\left(1+\frac{10}{n}\right)^{-n}$ gram A/liter.

LØSNING:

Udtrykket $\left(1+\frac{10}{n}\right)^{-n}$ fører til et ubestemt udtryk af formen $1^{-\infty}$ for $n\to\infty$. Derfor omskrives således

$$\left(1+\frac{10}{n}\right)^{-n} = e^{-n\cdot\ln\left(1+\frac{10}{n}\right)}.$$

Eksponenten $-n\cdot\ln\left(1+\frac{10}{n}\right)$ fører nu til et ubestemt udtryk af formen $\infty\cdot 0$. Derfor omskrives eksponenten til en brøk

$$-n\cdot\ln\left(1+\frac{10}{n}\right) = -\frac{\ln\left(1+\frac{10}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \underset{\substack{T\to 0\\ N\to 0\\ n\to\infty}}{\overset{\text{1' Hospital}}{\sim}}$$

$$-\frac{\frac{1}{1+\frac{10}{n}}\cdot\left(-\frac{10}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} = -\frac{10}{1+\frac{10}{n}} \to -10 \quad \text{for} \quad n\to\infty.$$

Vi har altså $\left(1+\frac{10}{n}\right)^{-n} \to \underline{\underline{e^{-10}}}$ for $n\to\infty$.

Eksempel 3.4. Det ubestemte udtryk $\infty - \infty$.

Undersøg $1+x^2 - x\sqrt{1+x^2}$ for $x \to \infty$. Problemet forekommer i teknisk strømningslære.

LØSNING:

Udtrykket $f(x) - g(x) = (1+x^2) - x\sqrt{1+x^2}$ fører til et ubestemt udtryk af formen $\infty - \infty$ for $x \to \infty$.

Derfor omskrives således

$$1+x^2 - x\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)\left[1 - x\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\right] = (1+x^2)\left[1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right] = (f(x))^2 \cdot \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right].$$

Udtrykket i den kantede parentes kan omskrives til $\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right]$ og går altså mod 0 for $x \to \infty$. Derfor omskrives til en brøk, sådan at *l*'Hospitals regel kan anvendes:

$$(f(x))^2 \cdot \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right] = \frac{1 - \frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{(f(x))^2}} = \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{1+x^2}} \underset{\substack{T \to 0 \\ N \to 0 \\ x \to \infty}}{\overset{\text{l' Hospital}}{\sim}} \frac{-\frac{\sqrt{1+x^2} - x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}}{-\frac{2x}{(1+x^2)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \to \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \quad \text{for} \quad x \to \infty .$$

(Kontrol: For $x = 100$ fås $1+x^2 - x\sqrt{1+x^2} \approx 0.50001$, som er nær ved grænseværdien $\frac{1}{2}$.)

3.3 STØRRELSESFORHOLD

Den følgende sætning letter ofte bestemmelsen af grænseværdier.

SÆTNING 3.2 *(størrelsesforhold for logaritme-, potens- og eksponentialfunktion). De tre funktioner*

$$\ln x \qquad x^a \qquad b^x, \qquad \textit{hvor} \quad a>0,\ b>1,$$

er opstillet efter "størrelsesorden" for $x \to \infty$, *dvs.*

(1) $\dfrac{\ln x}{x^a} \to 0$ *for* $x \to \infty$ [1] *(2)* $\dfrac{x^a}{a^x} \to 0$ *for* $x \to \infty$

Bevis. Da $\dfrac{\ln x}{x^a} \underset{\substack{T\to\infty\\ N\to\infty\\ x\to\infty}}{\overset{\text{l' Hospital}}{\sim}} \dfrac{\frac{1}{x}}{a\cdot x^{a-1}} = \dfrac{1}{a\cdot x^a} \to 0$ for $x \to \infty$, er (1) bevist.

Sættes $z = b^x$, dvs. $x = \dfrac{\ln z}{\ln b}$, fås $\dfrac{x^a}{b^x} = \dfrac{\left(\frac{\ln z}{\ln b}\right)^a}{z} = \dfrac{1}{(\ln b)^a}\cdot\left(\dfrac{\ln z}{z^{\frac{1}{a}}}\right)^a$.

Da $z \to \infty$ for $x \to \infty$, og $\dfrac{\ln z}{z^{\frac{1}{a}}} \to 0$ for $z \to \infty$, er (2) bevist.

Eksempel 3.5. Størrelsesforhold.

Temperaturen T i en plade til tiden t er beregnet til $T = \dfrac{A}{\sqrt{t}}\cdot e^{-\frac{k}{t}}$, hvor A og k er positive konstanter.

Undersøg T for $t \to 0+$.

LØSNING:

Sættes $u = \dfrac{1}{t}$, fås $T = A\sqrt{u}\cdot e^{-ku} = \dfrac{A\sqrt{u}}{e^{ku}}$.

Af sætning 3.2 følger nu, at $T \to 0$ for $u \to \infty$, dvs. $T \to 0$ for $t \to 0+$.

---

[1] I sætning 3.2 kan $\ln x$ åbenbart erstattes med $\log_c x$, hvor c >1.

Da $\log_c x = \dfrac{\ln x}{\ln c}$, fås nemlig $\dfrac{\log_c x}{x^a} = \dfrac{1}{\ln c}\cdot\dfrac{\ln x}{x^a} \to \dfrac{1}{\ln c}\cdot 0 = 0$ for $x \to \infty$.

3.4 UEGENTLIGE INTEGRALER

Ved mange anvendelser er der behov for et udvidet integralbegreb, der også omfatter integration af en funktion, som ikke er begrænset, eller integration af en funktion over et ubegrænset interval, f.eks. $[a;\infty[$. Integraler af denne type kaldes **uegentlige integraler.**

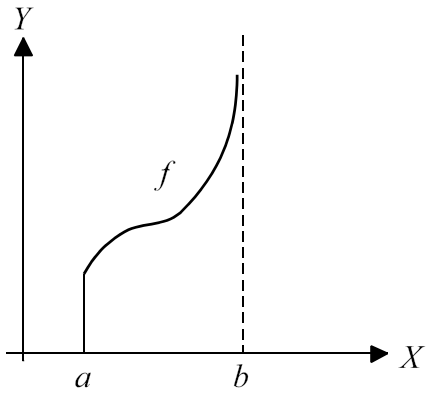


Fig. 3.1. *f er ubegrænset; f har en asymptote x=b.*

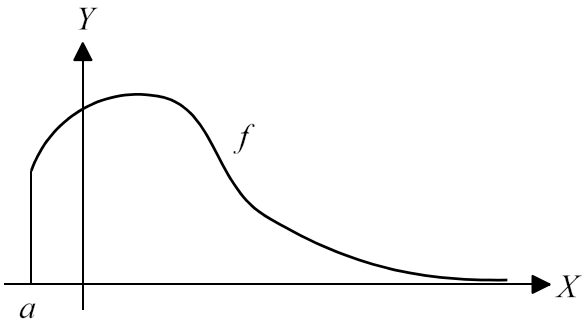


Fig. 3.2. *Integrationsintervallet* $[a;\infty[$ *er ubegrænset.*

DEFINITION af konvergens af uegentligt integral. *Lad* f *være en kontinuert funktion i intervallet* $D = [a;b[$. *Hvis* $\int_a^t f(x)\,dx$ *har en grænseværdi I for* $t \to b$ *(ensidet), siges* $\int_a^b f(x)\,dx$ *at være konvergent med værdien I og ellers divergent (se figur 3.3). Symbolet b må gerne være* ∞ *(se figur 3.4).*
Tilsvarende definition indføres for intervaller af typen $]a;b]$.

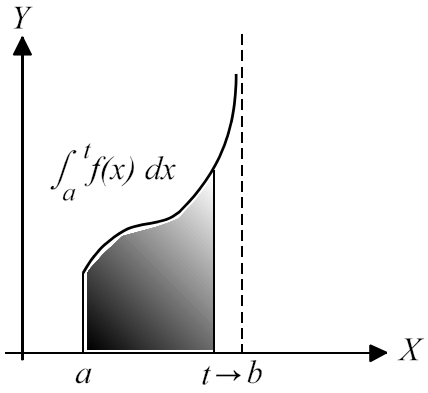


Fig. 3.3. *Det skal undersøges, om integralet har en grænseværdi for* $t \to b$.

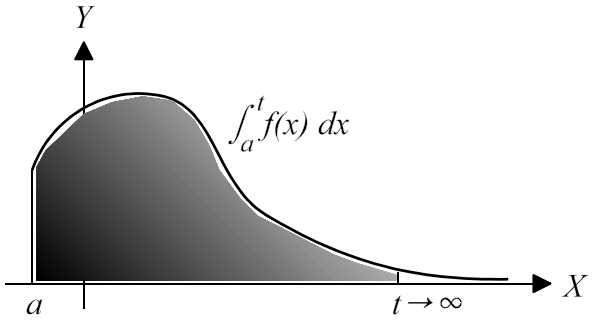


Fig. 3.4. *Det skal undersøges, om integralet har en grænseværdi for* $t \to \infty$

Eksempel 3.6. Uegentligt integral.

Find om muligt

1) $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x-8}}\,dx$ 2) $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ 3) $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$.

LØSNING:

1) $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x-8}}\,dx = \int_0^8 (x-8)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \left[\frac{(x-8)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_0^{x\to 8-} = 0 - \frac{3}{2}(-8)^{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{-6}}$.

2) $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\operatorname{Arctan} x\right]_1^{x\to\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$.

3) $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_{x\to 0+}^1 =$ " $\ln 1 - (-\infty)$". Integralet er <u>divergent</u>.

<u>Edb-løsning</u>. I programmet Maple udføres de tilsvarende integrationer på følgende måde:

```
int ( 1 /surd (x-8,3), x=0..8 ) ;
                                    -6
int ( 1 / (1+x^2), x=1..infinity ) ;
                                    1/4 π
int ( 1 / x , x=0..1 ) ;
                                    ∞
```

Er der problemer i et **indre punkt** c, deles integralet op i to $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, som begge skal være konvergente, for at $\int_a^b f(x)\,dx$ siges at være konvergent.

Uegentlige integraler, hvor der er problemer i **mere end ét punkt**, behandles som vist i det følgende ved at opdele integrationsintervallet i passende delintervaller. For funktionen f, hvis graf er vist på figur 3.5, opdeles således i 3 delintervaller, og de uegentlige integraler $\int_{-\infty}^2 f_1(x)\,dx$, $\int_2^5 f_2(x)\,dx$, $\int_5^\infty f_3(x)\,dx$ beregnes hver for sig. Er de alle konvergente, siges integralet $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ at være konvergent, og vi sætter

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^2 f_1(x)\,dx + \int_2^5 f_2(x)\,dx + \int_5^\infty f_3(x)\,dx\,.$$

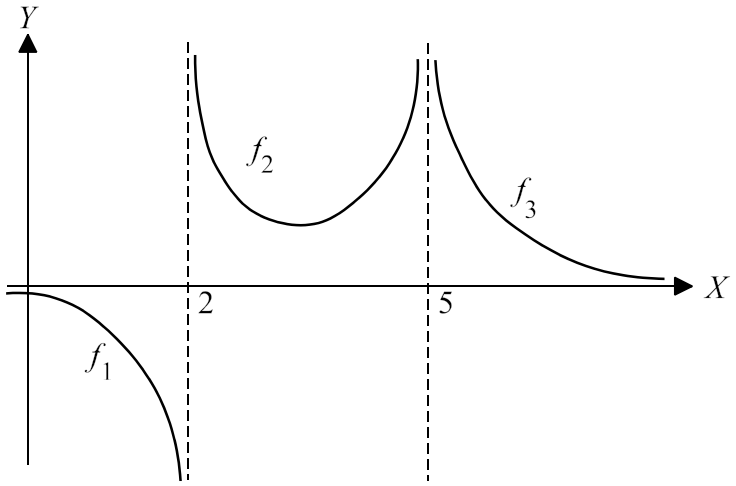


Fig. 3.5. *Funktion f med lodrette asymptoter og ubegrænset definitionsmængde.*

Ved at benytte grænseovergang mod 2 og 5 (lodrette asymptoter) og mod $\pm\infty$ fås:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \Big[F_1(x)\Big]_{x\to -\infty}^{x\to 2-} + \Big[F_2(x)\Big]_{x\to 2+}^{x\to 5-} + \Big[F_3(x)\Big]_{x\to 5+}^{x\to \infty}$$

$$= \lim_{x\to 2-} F_1(x) - \lim_{x\to -\infty} F_1(x) + \lim_{x\to 5-} F_2(x) - \lim_{x\to 2+} F_2(x) + \lim_{x\to \infty} F_3(x) - \lim_{x\to 5+} F_3(x).$$

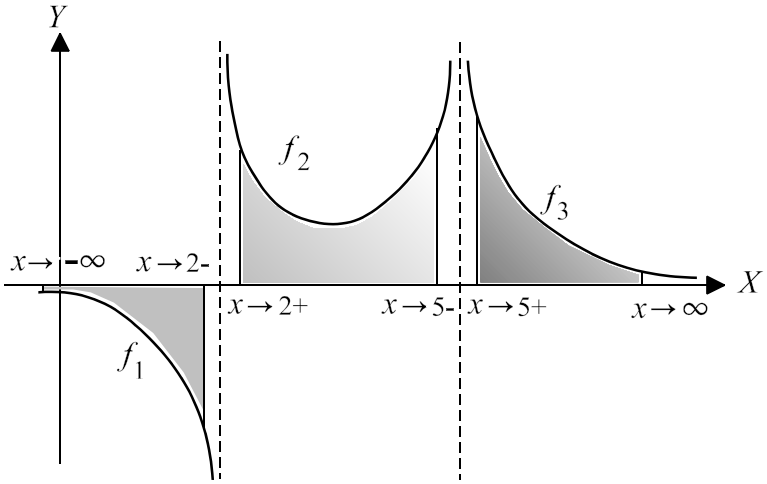


Fig.3.6. *Integration med grænseovergange ved lodrette asymptoter samt mod $-\infty$ og $+\infty$.*

Det "uegentlige" integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ tillægges altså kun en værdi, hvis alle 6 grænseværdier eksisterer uafhængigt af hinanden.

Eksempelvis

$$\int_0^{72} \frac{1}{\sqrt[3]{x-8}}\,dx = \int_0^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x-8}}\,dx + \int_8^{72} \frac{1}{\sqrt[3]{x-8}}\,dx$$

$$= \left[\frac{3}{2}(x-8)^{\frac{2}{3}}\right]_0^{x\to 8-} + \left[\frac{3}{2}(x-8)^{\frac{2}{3}}\right]_{x\to 8+}^{72} = 0 - \frac{3}{2}(-8)^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}(64)^{\frac{2}{3}}$$

$$= -6 + 24 = \underline{\underline{18}},$$

dvs. $\int_0^{72} \frac{1}{\sqrt[3]{x-8}}\,dx$ er konvergent med værdien 18.

Derimod er $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ divergent, da $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ er divergent ifølge eksempel 3.6.

(Se dog eventuelt supplement 3B.)

3.5 DEKOMPOSITION

Indledning

Ved hjælp af en integraltabel er det ikke svært at integrere en sum af simple funktioner som

$$2x + 3 + \frac{2}{x-2} + \frac{3x+1}{x^2-2x+2}\,. \tag{1}$$

Men hvis dette udtryk havde været "sat på fælles brøkstreg":

$$\frac{(2x+3)(x-2)(x^2-2x+2) + 2(x^2-2x+2) + (3x+1)(x-2)}{(x-2)(x^2-2x+2)}$$

eller kortere

$$\frac{2x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x - 10}{x^3 - 4x^2 + 6x - 4} \tag{2}$$

kunne det ikke umiddelbart findes i integraltabellen.

Der er derfor et behov for en metode til at gøre det omvendte af at sætte på fælles brøkstreg.

Anderledes udtrykt: der er behov for en metode til at "dekomponere" et udtryk $\frac{P(x)}{Q(x)}$ af form som (2), hvor $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomier, til et udtryk af form som (1). Dekomposition benyttes i alle de tilfælde, hvor det er en fordel at arbejde med de simplest mulige brøker (se f.eks. også kapitlet om Laplace-transformation i bind 3).

Dekomposition i simpelt tilfælde

Er nævneren $Q(x)$ af n'te grad, og er nævnerens reelle rødder forskellige, kan man ofte udføre dekompositionen, som vist i det følgende eksempel 3.7. En udførlig beskrivelse af metoden, som også omhandler vanskeligere tilfælde, findes i kapitel 5 suplement 5B.

Eksempel 3.7. Dekomposition.

a) Dekomponér brøken $f(x) = \frac{2x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x - 10}{x^3 - 4x^2 + 6x - 4}$.

b) Find $\int_0^1 f(x)\,dx$.

LØSNING:

a1. Dekomposition til polynomium + ægte brøk. Da tællerens grad er ≥ nævnerens grad (brøken er "uægte"), foretages polynomiedivision:

$$
\begin{array}{l|l|l}
x^3-4x^2+6x-4 & 2x^4-5x^3+5x^2+x-10 & 2x+3 \\
\hline
 & \underline{2x^4-8x^3+12x^2-8x} & \\
 & +3x^3-7x^2+9x-10 & \\
 & \underline{3x^3-12x^2+18x-12} & \\
 & 5x^2-9x+2 &
\end{array}
$$

dvs.

$$\frac{2x^4-5x^3+5x^2+x-10}{x^3-4x^2+6x-4} = 2x+3 + \frac{5x^2-9x+2}{x^3-4x^2+6x-4}$$

(Uægte brøk = polynomium + ægte brøk).

a2. Dekomposition af ægte brøk til simplest mulige ægte brøker. Den ægte brøk

$$\frac{5x^2-9x+2}{x^3-4x^2+6x-4}$$

omskrives derpå til

$$\frac{5x^2-9x+2}{(x-2)(x^2-2x+2)},$$

hvor nævneren er skrevet som et produkt af de simplest mulig **reelle** polynomier (dvs. reelle polynomier af første grad og reelle polynomier af anden grad med negativ diskriminant - se eventuelt kapitel 5 afsnit 5.9.

Ved at betragte nævnerens faktorer ses nu, at den simpleste omskrivning til en sum af ægte brøker må være af formen [1)]

$$\frac{5x^2-9x+2}{(x-2)(x^2-2x+2)} = \frac{a}{x-2} + \frac{bx+c}{x^2-2x+2}, \tag{3}$$

hvor *a, b* og *c* er konstanter.

Konstanten a findes ved at multiplicere ligning (3) med den til a hørende nævner $x-2$:

$$\frac{5x^2-9x+2}{x^2-2x+2} = a + (x-2)\cdot\frac{bx+c}{x^2-2x+2}$$

og derpå indsætte $x=2$, så a står alene på højre side:

$$\boxed{x=2}: \quad \frac{5\cdot 2^2-9\cdot 2+2}{2^2-4+2} = a+0 \quad \Leftrightarrow \quad a=\frac{4}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a=2}}.$$

[1)] Af supplement 5B vil det fremgå, at denne omskrivning altid er mulig. Brøken $\frac{bx+c}{x^2-2x+2}$ kan naturligvis også skrives $\frac{bx}{x^2-2x+2} + \frac{c}{x^2-2x+2}$, hvilket ofte vil være nyttigt ved integration.

For at finde b og c indsættes 2 små hele tal, som ikke tidligere har været indsat:

$\boxed{x=0}$: $\quad \frac{2}{(-2)(2)} = \frac{2}{-2} + \frac{c}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} = -1 + \frac{c}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{c=1}}$.

$\boxed{x=1}$: $\quad \frac{5-9+2}{(1-2)(1-2+2)} = \frac{2}{1-2} + \frac{b+1}{1-2+2} \quad \Leftrightarrow \quad 2 = -2+b+1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{b=3}}$.

Vi har hermed fundet

$$\frac{5x^2-9x+2}{x^3-4x^2+6x-4} = \frac{2}{x-2} + \frac{3x+1}{x^2-2x+2}.$$

a3. Sammenfatning af resultaterne fra a1 og a2. Vi har alt i alt fundet

$$f(x) = \underline{\underline{2x+3+\frac{2}{x-2}+\frac{3x+1}{x^2-2x+2}}}.$$

Edb-løsning. I programmet Maple kan dekompositionen foretages således:

```
>convert( ( 2*x^4-5*x^3+5*x^2+x-10 ) / ( x^3-4*x^2+6*x-4 ), parfrac, x ) ;
```

$$2x+3+2\frac{1}{x-2}+\frac{1+3x}{x^2-2x+2}$$

b. Integration. Vi har nu

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (2x+3)\,dx + \int_0^1 \frac{2}{x-2}\,dx + \int_0^1 \frac{3x}{x^2-2x+2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$$

$$= \quad \left[x^2+3x\right]_0^1 + 2\left[\ln|x-2|\right]_0^1 + 3\left[\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2|\right]_0^1$$

$\boxed{\text{Schaum 17.12.2}}$

$$+ 3\int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$$

$$= \quad 4 - 2\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 2 + 4\left[\frac{2}{\sqrt{4}}\operatorname{Arctan}\frac{2x-2}{\sqrt{4}}\right]_0^1 = \underline{\underline{4-\frac{7}{2}\ln 2+\pi}}.$$

$\boxed{\text{Schaum 17.12.1}}$

SUPPLEMENT: 3A BEVIS FOR L'HOSPITALS REGEL

Som en hjælpesætning ved beviset anvendes følgende:

SÆTNING 3A.1 *(den udvidede middelværdisætning). Når* $f(x)$ *og* $g(x)$ *er kontinuerte i det lukkede interval* $[a;b]$ *og differentiable i det åbne interval* $]a;b[$, *så findes der mindst ét punkt c i intervallet* $]a;b[$, *for hvilket*

$$[f(b)-f(a)]\cdot g'(c) = [g(b)-g(a)]\cdot f'(c) .$$

Bevis for udvidet middelværdisætning. Vi indfører en hjælpefunktion h givet ved

$$h(x) = [f(b)-f(a)]\cdot[g(x)-g(a)] - [g(b)-g(a)]\cdot[f(x)-f(a)] .$$

Det ses, at $h(a)=h(b)=0$, og at h opfylder betingelserne i differentialregningens middelværdisætning (h kontinuert i $[a;b]$, differentiabel i $]a;b[$). Der findes derfor mindst ét punkt c mellem a og b, hvor differentialkvotienten

$$h'(x) = [f(b)-f(a)]\cdot g'(x) - [g(b)-g(a)]\cdot f'(x)$$

er 0 (se figur 3A.1), dvs.

$$[f(b)-f(a)]\cdot g'(c) - [g(b)-g(a)]\cdot f'(c) = 0 .$$

Hermed er sætningen bevist.

(Den udvidede middelværdisætning omfatter den sædvanlige middelværdisætning som et specialtilfælde, nemlig svarende til, at $g(x)$ sættes lig med x).

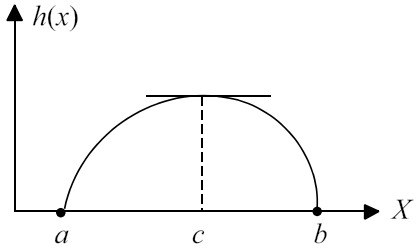


Fig. 3A.1. *Middelværdisætningen anvendt på h giver h'(c)*=0.

Bevis for l'Hospitals regel. Vi vil bevise *l'*Hospitals regel for det tilfælde, hvor

$$f(x) \to 0 \quad \text{for} \quad x \to x_0 \quad \text{og}$$
$$g(x) \to 0 \quad \text{for} \quad x \to x_0 ,$$

og hvor $x_0 \in \mathbb{R}$ (dvs. x_0 er ikke erstattet med $+\infty$ eller $-\infty$). Da endvidere grænseovergangen $x \to x_0$ ikke vedrører eventuelle funktionsværdier i x_0, kan vi tillade os under beviset at sætte $f(x_0)=0$ og $g(x_0)=0$, hvorved f og g bliver kontinuerte i hele intervallet $I=]\alpha;\beta[$. Lad i det følgende $x \in I$, men $x \neq x_0$.

Funktionerne f og g opfylder nu betingelserne i den udvidede middelværdisætning, dvs. der eksisterer et tal c mellem x_0 og x, sådan at

(1) $$\left[f(x)-f(x_0)\right]\cdot g'(c) = \left[g(x)-g(x_0)\right]\cdot f'(c) .$$

Da $f(x_0)=0$ og $g(x_0)=0$, går ligning (1) over i

(2) $$f(x)\cdot g'(c) = g(x)\cdot f'(c) .$$

Ifølge middelværdisætningen eksisterer der også et tal d mellem x_0 og x, sådan at

$$g'(d) = \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} .$$

Da vi har forudsat $g'(d) \neq 0$ og sat $g(x_0)=0$, fås heraf $g(x) \neq 0$.

Vi kan derfor dividere med $g(x)$ og $g'(c)$ i ligning (2), så vi får

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

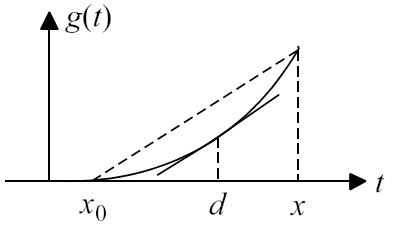


Fig. 3A.2. *Middelværdisætningen anvendt på g giver* $g(x) \neq 0$.

Da c ligger mellem x_0 og x, vil $c \to x_0$ for $x \to x_0$. Da det endvidere er forudsat, at $\frac{f'(c)}{g'(c)} \to a$ for $c \to x_0$,

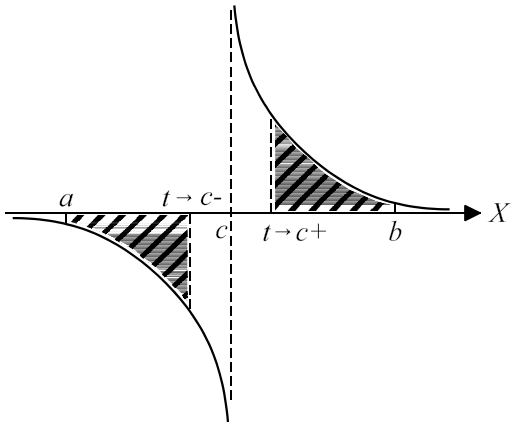
og $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, vil $\frac{f(x)}{g(x)} \to a$ for $x \to x_0$.

Det ses, at symbolet a kan erstattes med $+\infty$ eller $-\infty$.

SUPPLEMENT: 3B CAUCHY'S HOVEDVÆRDI

Figuren viser en funktion, der har en lodret asymptote $x=c$.

Cauchy's hovedværdi af det uegentlige integral over $[a;b]$ defineres som integralets grænseværdi, når t nærmer sig diskontinuitetspunktet c fra hver side "med samme fart".



Eksempelvis

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0+}\left[\int_{-1}^{-t} \frac{1}{x}\,dx + \int_{t}^{1} \frac{1}{x}\,dx\right] = \lim_{t\to 0+}\left(\left[\ln|x|\right]_{-1}^{-t} + \left[\ln|x|\right]_{t}^{1}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0+}\left(\ln|-t| - \ln|t|\right) = \underline{0},$$

dvs. Cauchy's hovedværdi er 0.

Edb-løsning. Den tilsvarende ordre i Maple er

```
int ( 1/x, x=-1..1, CauchyPrincipalValue ) ;
```

Resultat: 0

OPGAVER

Opgave 3.1 *(grænseværdi)*

Funktionerne g_1, g_2 *og* g_3 *er bestemt ved*

$$g_1(x) = \frac{5x^2+3x+1}{x^2+1}, \qquad x \in [1;\infty[$$

$$g_2(x) = \frac{7x^2-5\sin x}{x^3}, \qquad x \in [1;\infty[$$

$$g_3(x) = \cos\frac{1}{x}, \qquad x \in [1;\infty[\ .$$

Find $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, *hvor funktionen f er bestemt ved*

$$f(x) = \frac{g_1(x)g_3(x) - g_2(x) + 2g_3(x)}{g_1(x)g_3(x) - (g_2(x))^3} \ .$$

Opgave 3.2 *(grænseværdi)*

Undersøg

1^T)	$\frac{e^x+e^{-x}-2}{x-\ln(x+1)}$	*for* $x\to$	□)	$x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$	*for* $x\to\infty$
2)	$\frac{e^x-e^{-x}-2\cdot\ln(1+x)}{3x\cdot\sin x}$	*for* $x\to$	7)	$\sqrt[3]{2x+1}-\ln x$	*for* $x\to\infty$
3^T)	$x^{\frac{1}{1-x}}$	*for* $x\to\infty$	8)	$e^{x-2}-2^x$	*for* $x\to\infty$
4)	$\ln\frac{\sinh x}{x}$	*for* $x\to\infty$	9)	$\frac{3\sinh x-3\sin x-x^3}{x^7}$	*for* $x\to 0$
5)	$x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$	*for* $x\to 0+$	10)	$x\,e^{-\sqrt{x}}$	*for* $x\to\infty$

Opgave 3.3 *(grænseværdi)*

Undersøg

1^T) $\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ *for* $x\to\infty$

2) $\frac{\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\tan x}$ *for* $x\to\frac{\pi}{2}+$

3) $\sqrt{x^4+x^2}-x^2$ *for* $x\to\infty$

4) $(\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$ *for* $x\to\infty$

5) $\frac{\operatorname{Arcsin} x}{\ln(1+x^2)}$ *for* $x\to 0$

6) $x^{\frac{1}{x^2-1}}$ *for* $x\to\infty$

7) $\sqrt[n]{n}$ *for* $n\to\infty$

8) $\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ *for* $x\to 0$

9) $(\cot x)^{\sin x}$ *for* $x\to 0+$

10) $\frac{3^x-2^x}{x}$ *for* $x\to 0$.

Opgave 3.4 *(grænseværdi)*

Undersøg

1) $\frac{\operatorname{Arcsin} x-x2^x}{x^2\ln(x+2)}$ *for* $x\to 0$

2) $\left[\frac{3^x+2^x}{2}\right]^{\frac{1}{x}}$ *for* $x\to 0$

3) $\frac{2x}{\pi\cdot\cos x}-\tan x$ *for* $x\to\frac{\pi}{2}$

4) $\frac{xe^x}{(\ln x)^x}$ *for* $x\to\infty$

5) $\frac{\sin x}{\ln(1+x)}$ *for* $x\to\infty$

6) $\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}$ *for* $x\to 0$

7) $x\cdot\ln x$ *for* $x\to 0+$

8) $\sqrt{x}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ *for* $x\to\infty$

9) $\frac{\ln x}{\sin\frac{1}{x}}$ *for* $x\to\infty$

10) $(\cosh x)^{\frac{1}{\ln x}}$ *for* $x\to\infty$.

Opgave 3.5 *(grænseværdi)*

Undersøg

1) $x^{\frac{1}{\ln x}}$ *for* $x \to \infty$

2) $\frac{1}{x} - \frac{2}{\sin x}$ *for* $x \to 0+$

3) $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ *for* $x \to 0$

4) $\ln(2x+1) - \ln x$ *for* $x \to \infty$

5) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ *for* $x \to \infty$

6) $x \cdot \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$ *for* $x \to \infty$

7) $(7+x) \cdot \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$ *for* $x \to \infty$

8) $\frac{\ln x}{\tan x}$ *for* $x \to 0+$

9) $x^{\frac{1}{\sin x}}$ *for* $x \to 0+$

10) $\frac{1+\sinh x}{1-x^2}$ *for* $x \to -\infty$

Opgave 3.6 *(uegentligt integral)*

Find om muligt

1^T) $\int_0^{13} \frac{1}{\sqrt{|x-4|}}\,dx$ 2^T) $\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+3)^2}\,dx$ 3^T) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx$

4) $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$ 5) $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ 6) $\int_{-1}^{2} \left(\frac{3}{\sqrt{2-x}} + \frac{3}{\sqrt[5]{x}} + \frac{7}{\sqrt{x+1}} \right) dx$

7) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2-x+2}\,dx$ 8) $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2-x+2}\,dx$ 9) $\int_2^{8} \frac{2x+4}{x\sqrt{(x-2)(8-x)}}\,dx$

10) $\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$ *(substituer f.eks.* $x = u^6$*).*

Opgave 3.7 ^{T} *(dekomposition)*

1) *Dekomponér brøken* $\frac{x^5}{(x-2)\cdot(x^2-1)\cdot(x^2+1)}$.

2) *Find* $\int_0^{0.5} \frac{x^5}{(x-2)\cdot(x^2-1)\cdot(x^2+1)}\,dx$.

Opgave 3.8 *(dekomposition)*

1) Dekomponér brøken $\dfrac{2x^5+x^4+9x^3-4x^2-16x-22}{x^4+3x^2-4}$.

2) Find $\displaystyle\int_{-4}^{-2} \frac{2x^5+x^4+9x^3-4x^2-16x-22}{x^4+3x^2-4}\,dx$.

Opgave 3.9 *(dekomposition)*

Find $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4+2x^2-2}{x^4+x^2-2}\,dx$.

Opgave 3.10 *(dekomposition)*

Find $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{3x^5+2x^4-22x^3+x^2+35x-11}{x^3-7x+6}\,dx$.

Opgave 3.Eksam40b *(uegentligt integral, 15 point)*

Undersøg hvilke af integralerne

1) $\displaystyle\int_{14}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2}\,(x+8-5\sqrt{x+2})}$,

2) $\displaystyle\int_{7}^{14} \frac{dx}{\sqrt{x+2}\,(x+8-5\sqrt{x+2})}$,

der er konvergente, og bestem i bekræftende fald deres værdi.
Benyt f.eks. den monotone substitution $\mathrm{u}=\sqrt{x+2}$.

Opgave 3.Eksam49b *(uegentligt integral, 10 point)*

1) Beregn integralet $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\cos u}\sin u\,du$.

2) Undersøg, om integralet $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\cos u}\sin u\,du$ *er konvergent, og find i bekræftende fald integralets værdi.*

Opgave 3.Eksam51a *(grænseværdi, 10 point)*

1) Undersøg $\dfrac{\ln x}{\sinh x}$ *for* $x \to 0+$.

2) Undersøg $(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$ *for* $x \to \infty$.

Opgave 3.Eksam70b *(dekomposition, 15 point)*

For væksthastigheden i en biomasse har man fundet en rational approksimation

$$\frac{dM}{dt} = \frac{t^4 + t^3 + 4t^2 + 4t + 5}{t^3 + t^2 + 4t + 4} \text{ ton/døgn,}$$

hvor t *er tiden målt i døgn.*

Find $\int_0^7 \frac{dM}{dt}\,dt$ *(= biomassen efter 7 døgn) uden at anvende numerisk integration.*

Opgave 3.Eksam71a *(grænseværdi, 20 point)*

Undersøg $\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^x$ *og* $\left(\dfrac{x-2}{3x+2}\right)^x$ *for* $x \to \infty$.

Opgave 3.Eksam76b *(uegentligt integral, 15 point)*

Undersøg, om integralet $\int_1^\infty \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{x^2-1}}\,dx$ *er konvergent, og find i bekræftende fald dets værdi. (Vink: en af substitutionerne* $u = x^2 - 1$, $u = \sqrt[3]{x^2-1}$ *er anvendelig).*

Opgave 3.Eksam85b *(dekomposition, 15 point)*

1) Dekomponér brøken $\dfrac{-x^2+4x-5}{(x^2-2x+2)(x^2-1)}$ *i en sum af stambrøker.*

2) Undersøg, om integralet $\int_2^\infty \frac{-x^2+4x-5}{(x^2-2x+2)(x^2-1)}\,dx$ *er konvergent, og find i bekræftende fald dets værdi.*

Opgave 3.Eksam91b *(uegentligt integral, 15 point)*

Undersøg, om integralet $\int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\ln\left(1+e^t\right)\right)}{\left(1+e^t\right)\left(1+e^{-t}\right)}\,dt$ *er konvergent, og find i bekræftende fald dets værdi. (Vink: en af substitutionerne* $x=e^{-t}$, $x=e^t$, $x=1+e^{-t}$, $x=1+e^t$, $x=\ln\left(1+e^t\right)$, $x=\sin\left(\ln\left(1+e^t\right)\right)$ *er anvendelig).*

Opgave 3.Eksam96b *(dekomposition, uegentligt integral, 20 point)*

1) Dekomponér brøken $\frac{x-2}{x^4+3x^2-4}$ *i en sum af stambrøker.*

2) Undersøg, om integralet $\int_2^{\infty} \frac{x-2}{x^4+3x^2-4}\,dx$ *er konvergent, og find i bekræftende fald dets værdi.*

Opgave3.Eksam134 *(grænseværdi, integration, 25 point)*

1) Vis, at $\frac{\sqrt{x-1}}{\ln x} \to +\infty$ *for* $x \to 1_+$

2) Vis, at substitutionen $\square = t^2+1$, $t \geq 0$, *omdanner det uegentlige integral* $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{\ln x}\,dx$ *til et egentligt integral af formen* $\int_0^2 g(t)\,dt$, *hvor* $g(0)$ *defineres på passende måde således, at* g *dermed er kontinuert på* $[0;2]$. *Angiv* $g(t)$ *for alle* $t \in [0;2]$.

3) Find ved hjælp af Simpsons metode med $n=2$ *og* 4 *en tilnærmet værdi for* $\int_0^2 g(t)\,dt$.

Opgave 3.Eksam135 *(grænseværdi, uden brug af hjælpemidler, 7 point)*

Idet $f(x) = \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\ln(1+x)}$ *for* $x>0$ *skal man finde*

1) $\lim_{x \to 1} f(x)$, *2)* $\lim_{x \to 0} f(x)$ *og 3)* $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

Opgave 3.Eksam156 *(grænseværdi, uden brug af hjælpemidler, 5 point)*

Undersøg $\frac{\sqrt[3]{x}}{\ln(x+1)}$ *for* $x \to \infty$.

Opgave 3.Eksam159 *(uegentligt integral, dekomposition, 10 point)*

Besvar hvert af de følgende 2 spørgsmål med ét facit.

a) (5 point)

Find $\int_{\ln a}^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{e^{-t}+1}}\,dt$, *hvor* $a>0$.

b) (5 point)

Dekomponér brøken $\frac{8}{(x-1)(x^2+2x+5)}$.

Opgave 3.Eksam169 *(integration, 10 point)*

Find $\int \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)(x+1)}\,dx$.

Opgave 3.Eksam173 *(grænseværdi, uden brug af hjælpemidler, 6 point)*

Lad $f(x)=\frac{2\sqrt{x}-1-x}{x^2-2x+1}$ *for* $x>0,\ x\neq 1$.

Find følgende grænseværdier:

a) $\lim_{x\to 0+} f(x)$, *b)* $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ *og* *c)* $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Opgave 3.Eksam178 *(uegentligt integral, dekomposition, 12 point)*

a) Dekomponér brøken $\frac{1}{x^2+7x+12}$ *i en sum af stambrøker.*

b) Undersøg, om integralet $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+7x+12}\,dx$ *er konvergent, og find i bekræftende fald dets værdi.*

Opgave 3.Eksam181 *(ingen hjælpemidler, dekomposition, 5 point)*

Dekomponér brøken $\frac{4x+2}{(x-2)(x^2+2x+2)}$.

Opgave 3.Eksam185 *(ugentligt integral, 10 point)*

Undersøg om integralet

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2x^2+3}} - \frac{1}{x\sqrt{2}} \right) dx$$

er konvergent, og find i bekræftende fald dets værdi.

Opgave 3.Eksam190 *(grænseværdi, uden brug af hjælpemidler, 7 point)*

Lad funktionen f *være defineret ved* $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x}$ *for* $x \neq 0$.

Find grænseværdierne $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *og* $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$.

Opgave 3.Eksam192 *(dekomposition, uden brug af hjælpemidler, 9 point)*

a) Dekomponér brøken $\dfrac{6x^2-18x+16}{(x+1)(x^2-4x+5)}$.

b) Find $\displaystyle\int \frac{6x^2-18x+16}{(x+1)(x^2-4x+5)}\,dx$.

Opgave 3.Eksam198 *(grænseværdi, unden hjælpemidler, 7 point)*

Undersøg $\dfrac{1+x-e^x}{1-\cos\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$ *for* $x \to 0$.

Opgave 3.Eksam206 *(dekomposition, uden brug af hjælpemidler, 5 point)*

Dekomponér brøken $\dfrac{-3x+7}{(x^2-4x+5)(x-2)}$ *i en sum af stambrøker.*

Opgave 3.Eksam210 *(uegentligt integral, 15 point)*

Undersøg om følgende uegentlige integral er konvergent, og find i bekræftende fald dets værdi:

$$\int_5^{\infty} \left(\frac{x}{(x^2-5x+4)^{3/2}} - \frac{5}{(x^2-5x+4)^{3/2}} \right) dx \ .$$

Opgave 3.Eksam226 *(grænseværdi, uden brug af hjælpemidler, 5 point)*
Lad funktionen f *være defineret ved*

$$f(x) = \frac{\tan x - \sin x}{1 - \cos x}, \qquad (x \neq p \cdot \frac{\pi}{2},\ p \text{ er hel}) .$$

Undersøg $f(x)$ *for* $x \to 0$.

Opgave 3.Eksam227 *(dekomposition, uden brug af hjælpemidler, 5 point)*
Dekomponér følgende brøk i reelle stambrøker $\frac{5}{(x-3)(x^2-2x+2)}$.

Opgave 3.Eksam235 *(dekomposition, uden brug af hjælpemidler, 9 point)*
a) Dekomponér brøken $f(x) = \frac{-2x^2+x-5}{(x^2+1)(x-1)}$.
b) Find $\int f(x)\,dx$ *for* $x > 1$, *idet det oplyses, at* $\frac{d}{dx}\operatorname{Arctan} x = \frac{1}{x^2+1}$.

4 DIFFERENTIALLIGNINGER AF 1. ORDEN

4.1 INDLEDNING

Ingeniører beskæftiger sig for en stor del med dynamiske systemer, dvs. systemer hvor der sker ændringer, efterhånden som tiden går. Det kan f.eks. være produktionsanlæg, forsøgsopstillinger og måleapparater. En matematisk model for et sådant system vil hovedsagelig bestå af én eller flere såkaldte differentialligninger, som må løses, når man vil beregne systemets opførsel.

I dette kapitel omtales differentialligninger af 1. orden, f.eks.

$$\frac{dy}{dt} + 2y(t) = e^{-t}.$$

En **differentialligning af 1. orden** er en ligning, hvori der indgår den 1. afledede $\frac{dy}{dt}$ af en ukendt funktion $y(t)$, men ingen højere afledede. Vi kalder den uafhængige variabel for t, da den i praksis ofte er tiden. Vi lader S betegne den mængde i ty-planen, hvor differentialligningen ønskes løst. Når intet andet er nævnt, er S hele planen.

Ved en (partikulær) **løsning** til en differentialligning forstås en differentiabel funktion $y(t)$, f.eks. $y = e^{-t}$, som er defineret i et interval I [1] og for alle $t \in I$ tilfredsstiller differentialligningen samt $(t, y(t)) \in S$. Grafen for en løsning kaldes en løsningskurve (integralkurve).

[1] Vi vil altid forudsætte, at definitionsintervallet I er valgt størst muligt.

Eksempelvis har differentialligningen $\frac{dy}{dt} = 2t$ en partikulær løsning $y = t^2$, dvs. en af løsningskurverne er en parabel. Samtlige løsninger [1] er givet ved $y = \int 2t\,dt + C$, dvs. $y = t^2 + C$, hvor C er en vilkårlig (arbitrær) konstant. Ønskes en løsningskurve, der går gennem et givet punkt (t_0, y_0), skal konstanten åbenbart sættes til $C = y_0 - t_0^2$. Der går altså netop én løsningskurve gennem ethvert punkt af S (som her er hele ty-planen), og dette gælder praktisk taget altid for en differentialligning, som er bragt på formen $\frac{dy}{dt} = f(t,y)$. Der gælder nemlig følgende sætning, som anføres uden bevis.

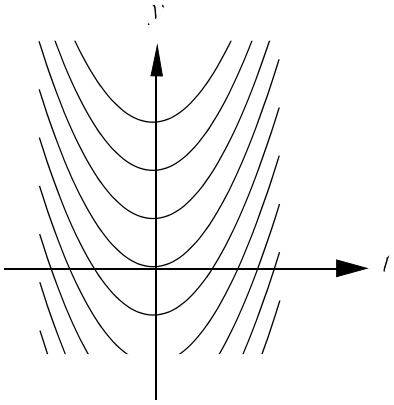


Fig. 4.1. *Skitse af den fuldstændige løsning til differentialligningen* $\frac{dy}{dt} = 2t$.

SÆTNING 4.1 *(eksistens og entydighed af løsningskurve). Lad S være en sammenhængende mængde i ty-planen, hvor $f(t,y)$ er kontinuert [2] og har en kontinuert partiel afledet $\frac{\partial f}{\partial y}$ med hensyn til y. Gennem ethvert indre punkt (t_0, y_0) af S går der da én og kun én løsningskurve til differentialligningen $\frac{dy}{dt} = f(t,y)$.*

Bemærk, at løsningskurven går "gennem" punktet (t_0, y_0), dvs. løsningskurven kan ikke have et endepunkt i et indre punkt af S. En konsekvens af sætningen er, at i S vil løsningskurverne aldrig røre eller skære hinanden. Kun de to første af de følgende seks skitser kan tænkes at forestille løsningskurver for en differentialligning $\frac{dy}{dt} = f(t,y)$, hvor forudsætningerne i sætning 4.1 er opfyldt. (Hvorfor?).

---

[1] Mængden bestående af samtlige løsninger kaldes kort den fuldstændige løsning.

[2] Kontinuitet omtales nærmere i afsnit 8.4.. Der gælder: ved sædvanlig regning med kontinuerte funktioner fås atter kontinuerte funktioner (ligesom ved funktioner af 1 variabel, se afsnit 1.3). Eksempelvis er $f(t,y) = \sin(2y + t^2)$ kontinuert i hele ty-planen, idet

$$\left.\begin{array}{ll} 2y & \text{kontinuert} \\ t^2 & \text{kontinuert} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{ll} 2y + t^2 & \text{kontinuert} \\ \sin & \text{kontinuert} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sin(2y + t^2) \quad \text{kontinuert}.$$

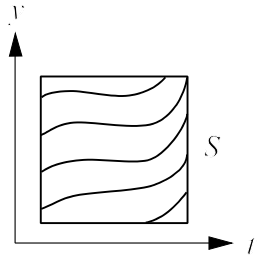


Fig. 4.2

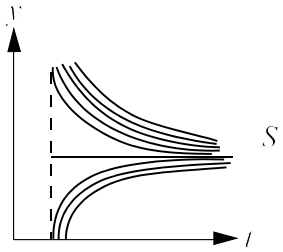


Fig. 4.3

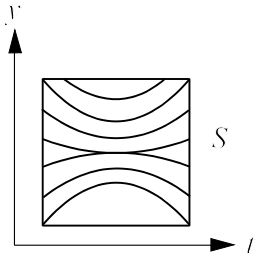


Fig. 4.4

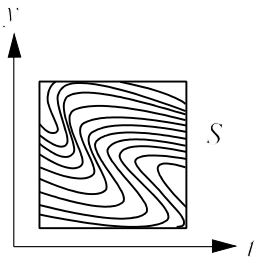


Fig. 4.5

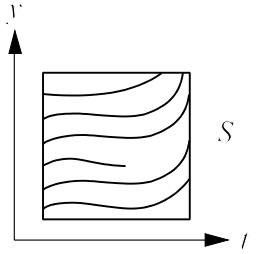


Fig. 4.6

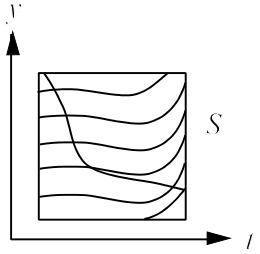


Fig. 4.7

4.2 NUMERISK LØSNING AF 1. ORDENS DIFFERENTIALLIGNING

I det følgende betragtes en 1. ordens differentialligning, der er bragt på formen

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \quad .$$

Det er ofte umuligt at angive eksakte udtryk for løsningskurverne. Man kan i sådanne tilfælde udnytte den information, som differentialligningen giver: i ethvert punkt (t,y) af ty-planen skal en løsningskurve gennem punktet have en tangent med en kendt hældning $f(t,y)$. Eksempelvis kan en differentialligning $\frac{dy}{dt} = f(t,y)$ illustreres som på figur 4.8: - for et stort antal punkter er der gennem hvert punkt (t,y) tegnet et kort liniestykke med hældningskoefficienten $f(t,y)$.

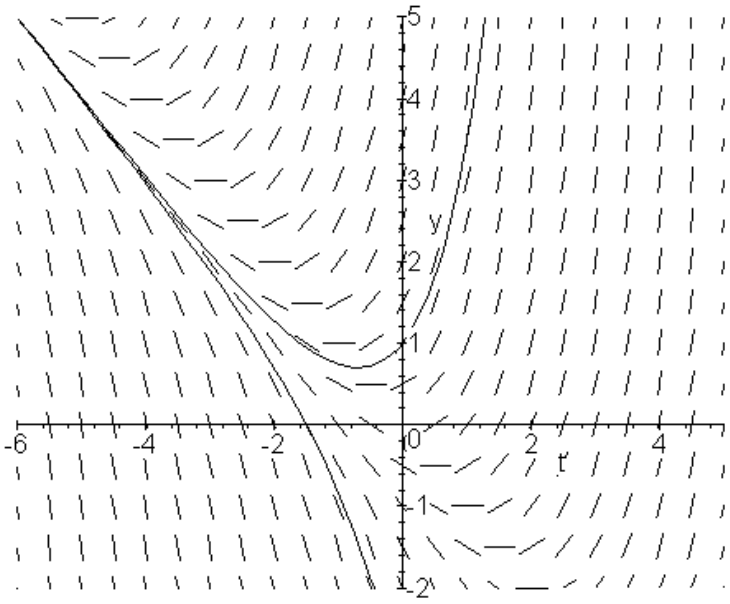


Fig. 4.8 *Geometrisk fortolkning af differentialligningen* $\frac{dy}{dt} = f(t,y)$.

Figuren giver et umiddelbart indtryk af løsningkurvernes forløb. De kan bestemmes mere præcist ved numerisk beregning: ud fra et startpunkt (t_0, y_0) beregnes et tilnærmet nabopunkt (t_1, y_1), ud fra dette et nyt punkt (t_2, y_2) osv. På denne måde kan man finde en numerisk løsning i form af en tabel:

t	t_0	t_1	t_2	t_3	. . .	t_n
$y(t)$	y_0	y_1	y_2	y_3	. . .	y_n

hvor t-værdierne f.eks. har en ækvidistant afstand h.

Eulers metode. For en differentialligning

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \ , \qquad t \in [a;b]$$

ønsker vi at tabellere den løsning $y(t)$, som opfylder begyndelsesbetingelsen $y(a) = y_0$. Først opdeles intervallet $[a;b]$ i n delintervaller med ens længde $h = \frac{b-a}{n}$, se figur 4.9.

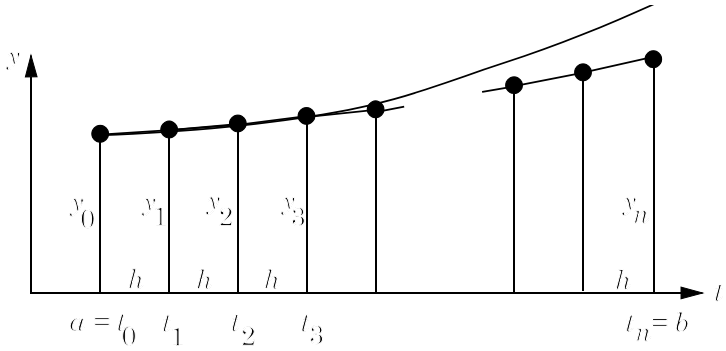


Fig. 4.9. *Numerisk løsning punkt for punkt.*

Derpå beregnes de tilnærmede kurvepunkter $(t_1,y_1), (t_2,y_2), \ldots, (t_n,y_n)$ ét for ét, idet vi ud fra det i'te punkt $P_i = (t_i, y_i)$ beregner det næste punkt $P_{i+1} = (t_{i+1}, y_{i+1})$ ved at følge tangenten i P_i. Ifølge differentialligningen vil løsningskurven gennem P_i have hældningskoefficienten $\frac{dy}{dt} = f(t_i, y_i)$ i punktet P_i, se figur 4.10. Tangenten i P_i har derfor ligningen

$$y - y_i = f(t_i, y_i) \cdot (t - t_i) \ .$$

Indsættes $t = t_i + h$, fås $y = y_i + f(t_i, y_i) \cdot h = y_i + k$, hvor $k = f(t_i, y_i)\, h$. Ved at følge tangenten i stedet for den ukendte løsningskurve, når vi derfor frem til punktet $P_{i+1} = (t_i + h, y_i + k)$.

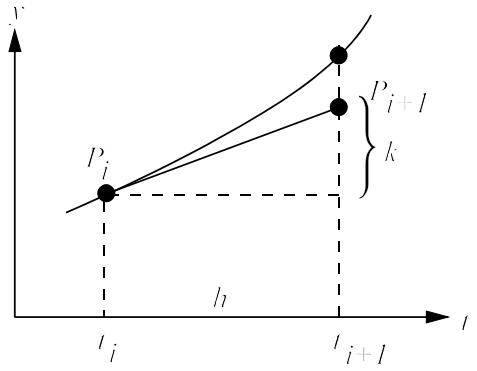


Fig. 4.10. *Beregning af k ved Eulers metode.*

På grund af den ringe nøjagtighed kan Eulers metode ikke anbefales til praktisk brug, men i appendix findes en algoritme for den mere nøjagtige Runge-Kutta metode af 4. orden.

Algoritme. Eulers metode kan sammenfattes i følgende algoritme:

$$h = \frac{b-a}{n} \qquad \text{Skridtstørrelse } \Delta t = h.$$

$$t_0 = a \qquad \text{Startværdi for } t.$$

Gentag for $i = 0,1,2,\ldots,n-1$:

$$k = h \cdot f(t_i, y_i) \qquad \text{Tilnærmet } y\text{-tilvækst.}$$

$$t_{i+1} = t_i + h \qquad \text{Næste } t\text{-værdi.}$$

$$y_{i+1} = y_i + k \qquad \text{Næste } y\text{-værdi.}$$

Den sidste linie burde egentlig være $y_{i+1} = y_i + k + O(h^2)$, men ved beregningen negligeres det lille (ukendte) led $O(h^2) \approx \text{konstant} \cdot h^2$, som så udgør den såkaldte metodefejl ved det enkelte skridt. Den ophobede metodefejl efter flere skridt kan naturligvis blive større.

Eksempel 4.1. Numerisk løsning af differentialligning

Tabellér løsningen til differentialligningsproblemet

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t+y+3}, \qquad y(1) = 2, \qquad t \in [1;3]$$

med mindst 1 betydende ciffer.

LØSNING:

Differentialligningens højreside er funktionen $f(t,y) = \frac{1}{t+y+3}$, som for nemheds skyld kan programmeres på lommeregner eller datamat. Vi vil benytte Eulers metode. Startpunktet for algoritmen bliver $(t_0, y_0) = (1,2)$, idet $y(1) = 2$.

Ét delinterval ($h=2$, $n=1$). Vælges skridtstørrelsen $\Delta t = h = 2$, gennemløbes hele intervallet $[1;3]$ i ét skridt:

$\boxed{h = 2, \quad i = 0}$

$$k = h \cdot f(t_0, y_0) = 2 \cdot f(1,2) = 2 \cdot \frac{1}{1+2+3} = \frac{1}{3}$$

$$t_1 = t_0 + h = 1 + 2 = 3$$

$$y_1 = y_0 + k = 2 + \frac{1}{3} = \underline{\underline{2.3333}}.$$

To delintervaller ($h=1$, $n=2$). Benyttes en mindre h-værdi, bliver metodefejlen mindre, og fejlen kan bedømmes ved at sammenligne resultater opnået med forskellige h-værdier. Vælges skridtstørrelsen $\Delta t = h = 1$, gennemløbes hele intervallet $[1;3]$ i to skridt:

$\boxed{h = 1, \quad i = 0}$

$$k = h \cdot f(t_0, y_0) = 1 \cdot f(1,2) = 1 \cdot \frac{1}{1+2+3} = \frac{1}{6}$$

$$t_1 = t_0 + h = 1 + 1 = 2$$

$$y_1 = y_0 + k = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6} = \underline{\underline{2.1667}}.$$

$\boxed{h = 1, \quad i = 1}$

$$k = h \cdot f(t_1, y_1) = 1 \cdot f\left(2, \frac{13}{6}\right) = 1 \cdot \frac{1}{2 + \frac{13}{6} + 3} = \frac{6}{43} = 0.1395$$

$$t_2 = t_1 + h = 2 + 1 = 3$$

$$y_2 = y_1 + k_2 = 2.1667 + 0.1395 = \underline{\underline{2.3062}}.$$

Flere delintervaller (n=4, 8, 16,…). Beregningerne gentages - hver gang med en halvt så stor h-værdi som forrige gang - indtil resultaterne er stabile. Resultaterne er opstillet i den følgende tabel:

t	$h = 2$ $y(t)$	$h = 1$ $y(t)$	$h = 0.5$ $y(t)$	$h = 0.25$ $y(t)$
1.00	2.000	2.000	2.000	2.000
1.25				2.042
1.50			2.083	2.081
1.75				2.119
2.00		2.167	2.159	2.156
2.25				2.191
2.50			2.229	2.224
2.75				2.257
3.00	2.333	2.306	2.294	2.288

Runge-Kutta metode af 4. orden. Denne metode er omtalt i appendix 4.1. Man finder

t	$h = 2$ $y(t)$	$h = 1$ $y(t)$	$h = 0.5$ $y(t)$	$h = 0.25$ $y(t)$
1 .00	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000
1.25				2.04069
1.50			2.07954	2.07954
1.75				2.11673
2.00		2.15240	2.15240	2.15240
2.25				2.18668
2.50			2.21967	2.21967
2.75				2.25148
3.00	2.28221	2.28219	2.28219	2.28219

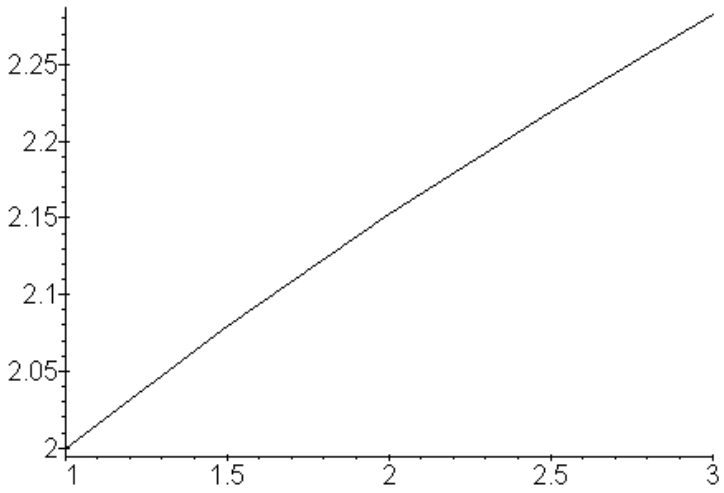
I programmet Maple udføres en meget nøjagtig numerisk løsning ved ordrerne:

```
> g := dsolve ( {diff(y(t),t) = 1/(t+y(t)+3), y(1)=2} ,y(t), numeric, value = array ( [1,1.5,2,2.5,3]) ) ;
```

$$g := \begin{bmatrix} [t & y(t)] \\ \begin{bmatrix} 1. & 2. \\ 1.500000000000000 & 2.079541464901165 \\ 2. & 2.152401280014156 \\ 2.500000000000000 & 2.219670174148936 \\ 3. & 2.282185821444132 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

En graf kan fås ved ordrerne:

```
>with ( plots ) :
>odeplot ( g, [t,y(t)], 1..3 ) ;
```



4.3 DIFFERENTIALLIGNINGER, HVOR DE VARIABLE KAN SEPARERES

Vi vil i dette afsnit betragte en differentialligning af typen

$$\frac{dy}{dt} = f(t)\cdot g(y)\,. \qquad (1)$$

Selv om denne type differentialligninger kendes fra A-niveau i matematik, er den så vigtig, at løsningsmetoden repeteres. Beviset for at metoden giver alle løsninger findes i supplement 4A.

Forudsætninger. Vi vil forudsætte, at $f(t)$ er kontinuert for alle t i et interval I, og at $g(y)$ er differentiabel med en kontinuert differentialkvotient $g'(y)$ for alle y i et interval J. Sætning 4.1 garanterer da, at der går netop én løsningskurve gennem ethvert indre punkt af rektanglet givet ved I og J.

Løsningsmetode

1) **Separere variable.** Først betragtes hovedtilfældet $g(y) \neq 0$. Man samler her alt med y på venstre side af lighedstegnet og alt med t på højre side (adskiller de variable). Herved fås:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(t)\,dt$$

Differentialligningen kan nu løses ved at integrere på begge sider:

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(t)\,dt + C \qquad (C \text{ er en arbitrær konstant}).$$

Lad $Q(y) = \int \frac{1}{g(y)}\,dy$ og $F(t) = \int f(t)\,dt$. Løsningerne er da bestemt ved ligningen

$$Q(y) = F(t) + C. \qquad (2)$$

2) **Retlinede løsninger.** Vi betragter nu tilfældet $g(y) = 0$. Lad ligningen $g(y) = 0$ have rødderne $y_1, y_2, \ldots y_n$. De rette linier $y = y_1$, $y = y_2$, . . . , $y = y_n$ (linier parallelle med t-aksen) er da løsninger til differentialligningen (1), (ses ved at indsætte $y = y_i$, $\frac{dy}{dt} = 0$ i differentialligningen).

3) **Samtlige løsninger.** Samtlige løsninger fås ved at sammenfatte løsningerne fra 1) og 2):

$$y = Q^{-1}(F(t)+C) \;\vee\; y = y_1 \;\vee\; y = y_2 \;\vee\; \ldots \;\vee\; y = y_n.$$

Det er ofte umuligt i praksis at angive løsningerne "explicit" på formen

$$y = Q^{-1}(F(t) + C).$$

I stedet må man nøjes med at angive løsningerne "implicit" på formen (2).

4) **Partikulær løsning gennem (t_0, y_0).** I praksis skal man ofte bruge en (partikulær) løsning, som opfylder en **begyndelsesbetingelse** $y(t_0) = y_0$, dvs. til tiden t_0 skal funktionsværdien være y_0. Vi skelner mellem to tilfælde:

a) $\boxed{g(y_0) \neq 0}$. En partikulær løsning gennem (t_0, y_0) findes ved at indsætte (t_0, y_0) i ligning (2) og beregne C. Da vi herved får bestemt netop én værdi af C, går der netop én løsningskurve gennem (t_0, y_0) - i overensstemmelse med sætning 4.1.

Alternativ metode. Er man ikke interesseret i samtlige løsninger, men kun i en partikulær løsning gennem (t_0, y_0), kan man overspringe stk. 1), 2) og 3) ovenfor. Den partikulære løsning kan nemlig direkte findes af

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(u)}\,du = \int_{t_0}^{t} f(\mathrm{v})\,d\mathrm{v} \qquad (3)$$

b) $\boxed{g(y_0) = 0}$. En partikulær løsning gennem (t_0, y_0) er i dette tilfælde den retlinede løsning $y = y_0$.

Eksempel 4.2. Separere variable.

a) Find (om muligt eksplicit) samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = -\left(2 - \frac{1}{t+1}\right)(y-1), \qquad t \geq 0 .$$

(En praktisk anvendelse er vist sidst i dette eksempel).

b) Find og skitsér de partikulære løsningskurver, som går gennem henholdsvis $(t,y) = (0,2)$ og $(t,y) = (1,1)$.

LØSNING:

a1) Separere variable. Forudsættes $y-1 \neq 0$, kan de variable i differentialligningen adskilles:

$$\frac{dy}{y-1} = -\left(2 - \frac{1}{t+1}\right) dt .$$

Ved integration fås:

$$\int \frac{dy}{y-1} = -\int \left(2 - \frac{1}{t+1}\right) dt + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|y-1| = -2t + \ln|t+1| + C$$
$$\Leftrightarrow \quad |y-1| = e^{-2t+\ln(t+1)+C}$$
$$\Leftrightarrow \quad |y-1| = e^{C} \cdot e^{\ln(t+1)} \cdot e^{-2t}$$
$$\Leftrightarrow \quad y-1 = \pm e^{C}(t+1)e^{-2t}$$
$$\Leftrightarrow \quad y-1 = K(t+1)e^{-2t}, \qquad K = \pm e^{C}, \quad \text{dvs.} \quad K \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$
$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 1 + K(t+1)e^{-2t}}} .$$

a2) Retlinede løsninger. I tilfældet $y-1 = 0$ fås den retlinede løsning:

$y-1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1$.

Linien $\underline{\underline{y = 1}}$ er en retlinet løsning.

a3) Samtlige løsninger. Løsningerne fra a1) og a2) udgør tilsammen samtlige løsninger:

$y = 1 + K(t+1)e^{-2t} \quad (K \neq 0) \qquad \vee \qquad y = 1$.

Da $K = 0$ giver $y = 1$, kan de alle sammenfattes i ét udtryk:

$\underline{\underline{y = 1 + K(t+1)e^{-2t}, \qquad K \in \mathbb{R}}}$. (4)

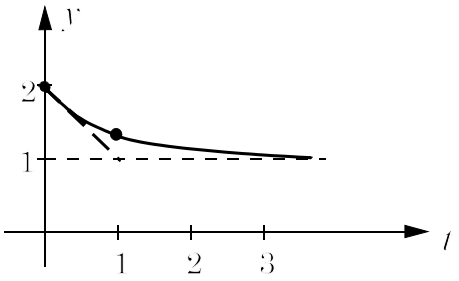
b1) Partikulær løsningskurve gennem $(t,y) = (0,2)$. Punktet $(t,y) = (0,2)$ indsættes i (4), og K bestemmes:

$$2 = 1 + K(0+1)e^0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 1 + K \quad \Leftrightarrow \quad K = 1,$$

$$\underline{\underline{y(t) = 1 + (t+1)e^{-2t}, \qquad t \geq 0}}.$$

Grafen for løsningskurven er skitseret på grundlag af:

1) Begyndelsespunktet $(t,y) = (0,2)$.
2) Tangenthældningen $\frac{dy}{dt} = -1$ i begyndelsespunktet. Denne hældning fås ved indsættelse af $(t,y) = (0,2)$ i den givne differentialligning. (Af differentialligningen ses i øvrigt, at $\frac{dy}{dt} < 0$ for $y > 1$, dvs. $y(t)$ er aftagende for $t \geq 0$).
3) Den vandrette asymptote $y = 1$. Denne asymptote findes således:
$$(t+1)e^{-2t} = \frac{t+1}{e^{2t}} \to 0 \quad \text{for } t \to \infty, \qquad \text{dvs. } y(t) \to 1 \quad \text{for } t \to \infty.$$
4) Støttepunktet $(t,y) = (1,\ 1.27)$.

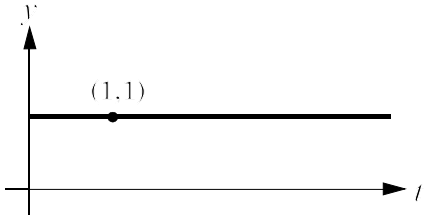


Alternativ metode. Hvis man ikke allerede har fundet samtlige løsninger, og **kun** ønsker en partikulær løsning, kan man direkte anvende ligning (3)

$$\int_2^y \frac{dy}{y-1} = -\int_0^t \left(2 - \frac{1}{t+1}\right) dt, \qquad t > 0,\ y > 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\ln|y-1|\right]_2^y = \left[-2t + \ln|t+1|\right]_0^t$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln(y-1) - \ln 1 = -2t + \ln(t+1)$$
$$\Leftrightarrow \quad y - 1 = e^{-2t + \ln(t+1)}$$
$$\Leftrightarrow \quad y = 1 + (t+1)e^{-2t}, \qquad t \geq 0.$$

b2) Partikulær løsningskurve gennem $(t, y) = (1, 1)$. Da punktet $(1, 1)$ ligger på den retlinede løsningskurve må denne være den søgte partikulære løsningskurve.



Maple:

$$L := \frac{d}{dt}y(t) = -\left(2 - \frac{1}{t+1}\right)\cdot(y(t)-1)$$

Fuldstændig løsning: $desolve\left(L, y(t)\right)$ Resultat: $y(t) = \left(\frac{e^{2t}}{t+1} + _C1\right)\cdot\left(e^{-2t}t + e^{-2t}\right)$

Reduktion: Sæt cursor på udskrift, højre musetast, simplify:

$$y(t) = e^{-2t}\left(e^{2t} + _C1\cdot t + _C1\right)$$

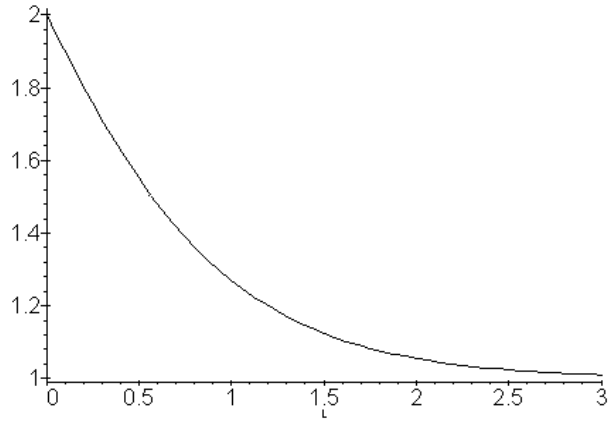
Partikulær løsning: $desolve\left(\{L, y(0)=2\}, y(t)\right)$ Resultat: $y(t) = \left(\frac{e^{2t}}{t+1} + 1\right)\cdot\left(e^{-2t}t + e^{-2t}\right)$

Reduktion ved simplify $y(t) = e^{-2t}\left(e^{2t} + t + 1\right)$

En graf kan fås på følgende måde:

Cursor på udskrift, højre musetast, right hand side Resultat $e^{-2t}\left(e^{2t} + t + 1\right)$

Cursor på udskrift, højre musetast, Plots, 2-D Plots
Cursor på den fremkomnne figur, venstre musetast, højre musetast, vælg axes, Fjern flueben ved "Use data ectents , vælg "Vertical axes", sæt "Range min" til 0 og "Range max" til 3
Nedenstående figur fremkommer.



Eksempel 4.3. Anvendelse i reaktionskinetik

Opstilling af differentialligning. Lad A og B være to stoffer, der reagerer med hinanden efter reaktionsligningen $A+B\rightarrow$ produkter. Koncentrationerne af A og B til tiden t betegnes henholdsvis C_A og $C_B\,[mol/\ell]$. Idet der pr. tidsenhed forsvinder lige mange mol af A og B, må der gælde

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{dC_B}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad C_A = C_B + \text{konstant} \ . \tag{5}$$

Endvidere antages processen at følge den simple hastighedslov:

$$\frac{dC_A}{dt} = -k\cdot C_A\cdot C_B \ , \tag{6}$$

hvor $k = 2-\frac{1}{t+1}$ er en "hastighedskonstant" (k afhænger af tiden som følge af, at temperaturen ændrer sig).

Lad koncentrationen af A og B til tiden $t=0$ være $C_{A0}>0$ og $C_{B0}>0$ og lad $C_{A0}-C_{B0}=1$.

Heraf følger, at $C_{A0}=1+C_{B0}>1$.

Ifølge ligning (5) vil der da til enhver tid $t\geq 0$ gælde $C_A-C_B=1$ eller $C_B=C_A-1$. Vi får derfor ved indsættelse i (6), at

$$\frac{dC_A}{dt} = -\left(2-\frac{1}{t+1}\right)\cdot C_A\cdot (C_A-1).$$

Erstattes for kortheds skyld C_A med y og C_{A0} med y_0, bliver problemet at finde den løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = -\left(2-\frac{1}{t+1}\right)\cdot y(y-1), \qquad t\geq 0,\ y>1,$$

der går gennem punktet $(t,y)=(0,y_0),\ y_0>1$.

Løsning af differentialligning. Ved at separere de variable (alternativ metode) fås

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{y(y-1)} = -\int_0^t\left(2-\frac{1}{t+1}\right)dt, \qquad t\geq 0,\ y>1,\ y_0\geq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|\right]_{y_0}^{y} = \left[-2t+\ln|t+1|\right]_0^t \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(1-\frac{1}{y}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{y_0}\right) = -2t+\ln(t+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(1-\frac{1}{y}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{y_0}\right) - 2t + \ln(t+1) \quad \Leftrightarrow \quad 1-\frac{1}{y} = \left(1-\frac{1}{y_0}\right)e^{-2t}(t+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} = 1-\left(1-\frac{1}{y_0}\right)e^{-2t}(t+1) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{y_0}\right)(t+1)\,e^{-2t}} \ .$$

Tolkning af løsning. Erstattes y med C_A og y_0 med C_{A0}, fås $C_A = \dfrac{1}{1-\left(1-\frac{1}{C_{A0}}\right)(t+1)\,e^{-2t}}$.

Det ses, at C_A efterhånden aftager mod 1, i overensstemmelse med at A reagerer med B, således at B efterhånden bliver næsten helt opbrugt.

4.4 DEN LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNING AF FØRSTE ORDEN

Ved en lineær [1] differentialligning af første orden forstås en ligning af formen

$$\alpha_1(t)\,\frac{dy}{dt} + \alpha_0(t)\,y(t) = \beta(t)\,,$$

hvor α_1, α_0 og β er funktioner af t. Vi betragter differentialligningen i et interval I, hvor $\alpha_1(t) \neq 0$. Ligningen kan da **normeres** ved division med $\alpha_1(t)$, så den kommer på formen

$$\frac{dy}{dt} + p(t)\,y(t) = q(t)\,.$$

Idet vi forudsætter, at funktionerne p og q er kontinuerte i intervallet I, gælder følgende sætning:

SÆTNING 4.2 *(lineær differentialligning af 1. orden). Samtlige løsninger til den normerede differentialligning*

$$\frac{dy}{dt} + p(t)\,y(t) = q(t)\,, \qquad t \in I$$

er givet ved

$$y(t) = e^{-P(t)}\left[\int q(t)\,e^{P(t)}\,dt + C\right]$$

$$= e^{-P(t)}\int q(t)\,e^{P(t)}\,dt + C\,e^{-P(t)}, \qquad C \in \mathbb{R},\ t \in I, \qquad \text{(“panserformel”)} \quad (7)$$

hvor P er en stamfunktion til p, dvs. $P(t) = \int p(t)\,dt$, og C er en arbitrær konstant.

<u>Bevis</u>.

$$y'(t) + p(t)\,y(t) = q(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[y'(t) + p(t)\,y(t)\right]e^{P(t)} = q(t)\,e^{P(t)} \qquad \text{Multiplikation med } e^{P(t)}.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[y(t)\,e^{P(t)}\right]' = q(t)\,e^{P(t)} \qquad \text{Omskrivning.}$$

$$\Leftrightarrow \quad y(t)\,e^{P(t)} = \int q(t)\,e^{P(t)}\,dt + C \qquad \text{Integration.}$$

$$\Leftrightarrow \quad y(t) = e^{-P(t)}\left[\int q(t)\,e^{P(t)}\,dt + C\right] \qquad \text{Division med } e^{P(t)}.$$

I praksis skal man ofte bruge en (partikulær) løsning, som opfylder en begyndelsesbetingelse $y(t_0) = y_0$, dvs. til tiden t_0 skal funktionsværdien være y_0. Indsættes t_0 og y_0 i løsningsformlen (7), fastlægges netop én værdi af konstanten C, dvs. gennem ethvert punkt (t_0, y_0) går der netop 1 løsningskurve - i overensstemmelse med sætning 4.1 (eksistens og entydighed af løsningskurve).

---

[1] Betegnelsen "lineær" stammer fra, at de "ukendte størrelser" $\frac{dy}{dt}$ og $y(t)$ indgår på lignende måde, som de "ukendte størrelser" x og y indgår i en ret linies ligning $\alpha_1 x + \alpha_0 y = \beta$.

Sættes $q(t) = 0$ for alle $t \in I$, fås den tilsvarende **homogene** [1] differentialligning

$$\frac{dy}{dt} + p(t)\,y(t) = 0\,, \qquad t \in I,$$

og formlen for løsningerne reduceres til

$$y(t) = C y_{\mathrm{h}}(t)\,, \qquad C \in \mathbb{R}\,,$$

hvor

$$y_{\mathrm{h}}(t) = \mathrm{e}^{-P(t)}.$$

Betragtes igen den **inhomogene** differentialligning, kan panserformlen (7) nu skrives

$$y(t) = y_{\mathrm{h}}(t) \int \frac{q(t)}{y_{\mathrm{h}}(t)}\,dt + C y_{\mathrm{h}}(t), \qquad C \in \mathbb{R}, \quad t \in I,$$

eller kort

$$y(t) = y_{\mathrm{p}}(t) + C y_{\mathrm{h}}(t), \qquad C \in \mathbb{R}, \quad t \in I,$$

hvor $y_{\mathrm{p}}(t)$ er en partikulær løsning til den inhomogene differentialligning, og $C y_{\mathrm{h}}(t)$ er samtlige løsninger til den homogene ligning. Her kan $y_{\mathrm{p}}(t)$ være en vilkårlig partikulær løsning. (Bevis: differensen mellem to partikulære løsninger må være af formen "$\mathbf{konstant} \cdot y_{\mathrm{h}}(t)$", dvs. indeholdt i leddet $C y_{\mathrm{h}}(t)$.)

Eksempel 4.4a. Lineær 1. ordens differentialligning

Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$t\frac{dy}{dt} - y(t) = t^2, \qquad t > 0\,.$$

LØSNING:

Først normeres differentialligningen ved division med t:

$$\frac{dy}{dt} - \frac{1}{t}\,y(t) = t\,.$$

A) Homogen ligning. Vi finder $\mathrm{P}(t) = \int p(t)\,dt = \int \frac{-1}{t}\,dt = -\ln|t| = -\ln t$, og $y_{\mathrm{h}}(t) = \mathrm{e}^{-P(t)} = \mathrm{e}^{\ln t} = t\,.$

Samtlige løsninger til den tilsvarende homogene differentialligning er da:

$$y(t) = C\,t\,, \qquad C \in \mathbb{R}, \qquad \text{idet} \quad y(t) = C y_{\mathrm{h}}(t).$$

B) Inhomogen ligning. Vi finder

$$y_{\mathrm{p_1}}(t) = y_{\mathrm{h}}(t) \int \frac{q(t)}{y_{\mathrm{h}}(t)}\,dt = t\int \frac{t}{t}\,dt = t\int 1\,dt = t\cdot t = t^2.$$

Samtlige løsninger til den inhomogene differentialligning er følgelig:

$$\underline{\underline{y(t) = t^2 + C\,t\,, \qquad C \in \mathbb{R}}}, \qquad \text{idet} \quad y(t) = y_{\mathrm{p_1}}(t) + C y_{\mathrm{h}}(t)\,.$$

---

[1] Betegnelsen "homogen" benyttes, når alle led $\neq 0$ er ensartede, i den forstand at de alle indeholder de "ukendte størrelser" $\frac{dy}{dt}$ og $y(t)$.

Eksempel 4.4b. Lineær 1. ordens differentialligning

Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$t\frac{dy}{dt} - y(t) = t^5, \qquad t > 0.$$

LØSNING:

Først normeres differentialligningen ved division med t:

$$\frac{dy}{dt} - \frac{1}{t}y(t) = t^4.$$

A) Homogen ligning. Se eksempel 4.3a.

B) Inhomogen ligning. Vi finder

$$y_{p_2}(t) = y_h(t)\int \frac{q(t)}{y_h(t)}\,dt = t\int \frac{t^4}{t}\,dt = t\int t^3\,dt = t\cdot\frac{t^4}{4} = \frac{t^5}{4}.$$

Samtlige løsninger til den inhomogene differentialligning er følgelig:

$$y(t) = \frac{t^5}{4} + Ct, \qquad C \in \mathbb{R}, \qquad \text{idet} \quad y(t) = y_{p_2}(t) + Cy_h(t).$$

Eksempel 4.4c. Lineær 1. ordens differentialligning

Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$t\frac{dy}{dt} - y(t) = t^2 + t^5, \qquad t > 0.$$

LØSNING:

Først normeres differentialligningen ved division med t:

$$\frac{dy}{dt} - \frac{1}{t}y(t) = t + t^4.$$

A) Homogen ligning. Se eksempel 4.3a.

B) Inhomogen ligning. Da højre side q(t) er en sum af t og t^4, betragtes disse funktioner hver for sig, som vist i eksemplerne 4.3a og 4.3b, hvorpå vi danner summen af de partikulære løsninger:

$$y_p(t) = y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t).$$

Samtlige løsninger til differentialligningen er følgelig:

$$y(t) = t^2 + \frac{t^5}{4} + Ct, \qquad C \in \mathbb{R}, \qquad \text{idet} \quad y(t) = y_p(t) + Cy_h(t).$$

Eksempel 4.5. Lineær 1. ordens differentialligning

1) Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$2\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t+1}y(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+1}}, \qquad t > -1 .$$

(En praktisk anvendelse er vist sidst i dette eksempel).

2) Find den løsning, som opfylder begyndelsesbetingelsen $y(0) = 0$.

LØSNING:

1) Først normeres differentialligningen ved division med 2:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2(t+1)}y(t) = \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t+1}} .$$

Samtlige løsninger er da ifølge sætning 4.2 givet ved:

$$y(t) = e^{-\int \frac{1}{2(t+1)}dt}\left(\int \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t+1}}\, e^{\int \frac{1}{2(t+1)}dt}\, dt + C\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\ln|t+1|}\left(\int \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t+1}}\, e^{\frac{1}{2}\ln|t+1|}\, dt + C\right)$$

$$= \frac{1}{e^{\ln\left((t+1)^{\frac{1}{2}}\right)}}\left(\int \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t+1}}\, e^{\ln\left((t+1)^{\frac{1}{2}}\right)} dt + C\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t+1}}\left(\int \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t+1}}\sqrt{t+1}\, dt + C\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t+1}}\left(\frac{1}{2}\int e^{-t}dt + C\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t+1}}\left(-\frac{1}{2}e^{-t} + C\right)$$

$$y(t) = \frac{C - \frac{1}{2}e^{-t}}{\sqrt{t+1}}, \qquad C \in \mathbb{R} .$$

2) Begyndelsesbetingelsen $y(0) = 0$ giver

$$\frac{C - \frac{1}{2}\cdot e^0}{\sqrt{0+1}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{2} \ .$$

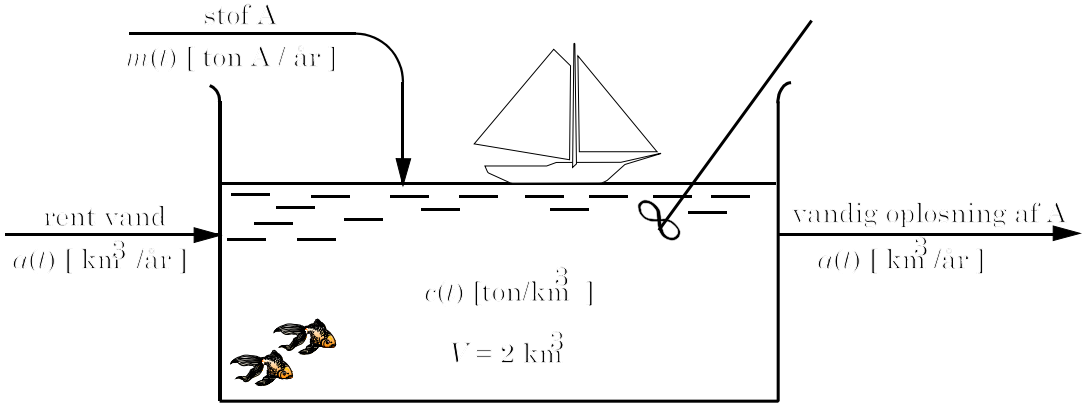
Den søgte partikulære løsning er altså

$$\underline{\underline{y(t) = \frac{1 - e^{-t}}{2\sqrt{t+1}}}} \ .$$

ANVENDELSE:

En sø, der rummer $V = 2\ \mathrm{km}^3$ rent vand, har et naturligt tilløb af rent vand på $a(t) = \frac{1}{t+1}\ [\mathrm{km}^3/\text{år}]$, hvor tiden t er målt i år, og et lige så stort fraløb (der ses bort fra fordampning).

Fra et bestemt tidspunkt $t = 0$, tilføres et stof A til søen med en hastighed på $m(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+1}}\ [\text{ton } A/\text{år}]$. Søens A-koncentration $c(t)\ [\text{ton } A/\mathrm{km}^3]$ ønskes beregnet som funktion af tiden t for $t > 0$ [1].



[1] Idet det forudsættes, at stoffet A øjeblikkelig fordeler sig homogent over hele søen (perfekt omrøring!), har det mening at tale om søens A-koncentration $c(t)\ [\text{ton } A/\mathrm{km}^3]$ til et bestemt tidspunkt t. Endvidere forudsættes, at tilførslen af A er så lille, at den kun giver negligérbare rumfangsændringer af væsken.

Bevis. For søen opstilles nu balancen

IND + PRODUCERET = UD + AKKUMULERET

som et differentielt regnskab over, hvor mange ton A der passerer ind og ud af søen i et tidsinterval $[t; t+dt]$.

1) IND: Da tilførelseshastigheden til tidspunktet t er $m(t)$ [ton A/år], vil der i løbet af tiden dt blive tilført $m(t)\cdot dt$ [ton A].

2) PRODUCERET: Der vil ikke blive produceret A i søen.

3) UD: Da koncentrationen i søen til tidspunktet t er $c(t)$ [ton A/km^3], og fraløbet er $a(t)$ [km^3/år], vil der i løbet af tiden dt forsvinde $a(t)\cdot c(t)\cdot dt$ [ton A] fra søen.

4) AKKUMULERET: Til tiden t er den totale mængde A i søen $V\cdot c(t)$ [ton]. I løbet af det infinitesimale tidsrum dt vil der i søens totale A - indhold ske en differentiel ændring $d(V\cdot c(t))$.

Balanceligningen bliver altså

$$m(t)\,dt + 0 = a(t)\cdot c(t)\,dt + d(V\cdot c(t)) \ .$$

Ved division med dt fås differentialligningen

$$\begin{aligned} & m(t) = a(t)\cdot c(t) + V\cdot \frac{dc}{dt} \\ \Leftrightarrow \quad & V\frac{dc}{dt} + a(t)\cdot c(t) = m(t) \\ \Leftrightarrow \quad & 2\frac{dc}{dt} + \frac{1}{t+1}\cdot c(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+1}} \ . \end{aligned}$$

Udførlig "matematisk" udledelse af differentialligningen.

I et tidsrum fra t til $t+\Delta t$ vil der ske følgende:

1) IND: Blive tilført søen $\int_t^{t+\Delta t} m(t)\,dt$ [ton A].

2) PRODUCERET: Ikke blive produceret A i søen.

3) UD: Forsvinde $\int_t^{t+\Delta t} a(t)\cdot c(t)\,dt$ [ton A] fra søen.

4) AKKUMULERET: Ske en forøgelse af mængden af A i søen på $V\cdot c(t+\Delta t) - V\cdot c(t)$ [ton A].

Balanceligningen bliver altså

$$\int_t^{t+\Delta t} m(t)\,dt + 0 = \int_t^{t+\Delta t} a(t)\cdot c(t)\,dt + V\cdot c(t+\Delta t) - V\cdot c(t) \ .$$

Ifølge integralregningens middelværdisætning har vi

$$\int_t^{t+\Delta t} m(t)\,dt = m(t_1)\cdot \Delta t \ , \qquad \text{hvor} \quad t_1 \in [t; t+\Delta t], \qquad \text{og}$$

$$\int_t^{t+\Delta t} a(t)\cdot c(t)\,dt = a(t_2)\cdot c(t_2)\cdot \Delta t \ , \qquad \text{hvor} \quad t_2 \in [t; t+\Delta t] \ .$$

Ifølge differentialregningens middelværdisætning har vi

$$c(t+\Delta t) - c(t) = c'(t_3)\cdot \Delta t \ , \qquad \text{hvor} \quad t_3 \in [t; t+\Delta t] \ .$$

Indsættes dette i balanceligningen, fås

$$\begin{aligned} & m(t_1)\cdot \Delta t = a(t_2)\cdot c(t_2)\cdot \Delta t + V\cdot c'(t_3)\cdot \Delta t \\ \Leftrightarrow \quad & V\cdot c'(t_3) + a(t_2)\cdot c(t_2) = m(t_1) \ . \end{aligned}$$

Lader vi nu $\Delta t \to 0$, vil t_1, t_2 og t_3 konvergere mod t, så vi får differentialligningen

$$V\cdot c'(t) + a(t)\cdot c(t) = m(t) \ .$$

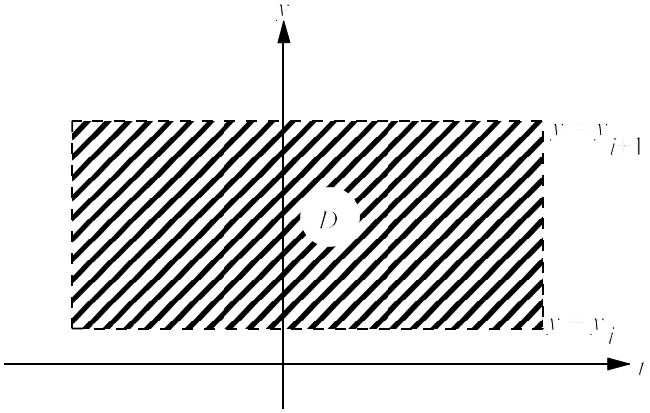
SUPPLEMENT: 4A SEPARERE VARIABLE

Vi ønsker at bevise, at den i afsnit 4.3 angivne løsningsmetode virkelig giver samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = f(t)\cdot g(y)\,. \tag{1}$$

Vi deler beviset op svarende til de 4 dele, der er angivet i løsningsmetoden.

1) **Separere variable.** Vi indskrænker os til at betragte et rektangel D, hvor $g(y) \neq 0$ (se figuren).



For $(t,y) \in D$ kan vi

da dividere med $g(y)$ i den givne differentialligning (1), og vi får

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dt} = f(t)\,. \tag{1a}$$

Lad $y = h(t)$ være en løsning til ligning (1a). Vi har nu for alle $(t,y) \in D$:

Beregninger	Kommentarer
$\frac{1}{g(h(t))}\cdot h'(t) = f(t)$	Ligning (1a).
$\Leftrightarrow \int \frac{1}{g(h(t))}\cdot h'(t)\,dt = \int f(t)\,dt + C$	Er to funktioner ens, er deres stamfunktioner ens på nær en konstant.
$\Leftrightarrow \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(t)\,dt + C$	Integration ved substitution, idet vi substituerer $y = h(t),\quad dy = h'(t)\,dt$.
$\Leftrightarrow Q(y) = F(t) + C$	Ligning (2).

2) **Retlinede løsninger.** Kræver ingen yderligere omtale.

3) **Samtlige løsninger.** Da $Q' = \frac{1}{g}$, og da g har samme fortegn overalt i D, må Q være en monoton funktion. Heraf følger igen, at Q har en omvendt funktion Q^{-1}. Ligning (2) bestemmer derfor (implicit) y som en funktion af t: $y = Q^{-1}(F(t) + C)$.

I praksis kan det dog være besværligt at løse ligning (2) med hensyn til y.

4) **Partikulær løsning.** Kun den alternative metode kræver yderligere omtale. At en partikulær løsning gennem $(t_0, y_0) \in D$ kan bestemmes af ligningen

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(y)}\, dy = \int_{t_0}^{t} f(t)\, dt\,,$$

ses på følgende måde: Indsættes (t_0, y_0) i ligning (2), fås: $Q(y_0) = F(t_0) + C,$

hvoraf vi finder $C = Q(y_0) - F(t_0).$

Løsningskurven gennem (t_0, y_0) er derfor givet ved ligningen

$$Q(y) = F(t) + Q(y_0) - F(t_0) \quad \Leftrightarrow \quad Q(y) - Q(y_0) = F(t) - F(t_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad [Q(y)]_{y_0}^{y} = [F(t)]_{t_0}^{t} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(y)}\, dy = \int_{t_0}^{t} f(t)\, dt\,.$$

SUPPLEMENT: 4B ANDRE TYPER AF DIFFERENTIAL-LIGNINGER AF 1. ORDEN

Hver af de følgende typer differentialligninger kan ved en substitution overføres i en simplere differentialligning, som vi allerede kender en løsningsmetode til. I appendix 4.2 findes en oversigt over alle differentialligningerne og deres løsning.

I: $\frac{dy}{dt} = f(at+by+c)$.

Sættes $z = at+by+c$, fås $\frac{dz}{dt} = a + b\frac{dy}{dt} = a + bf(z)$. I differentialligningen $\frac{dz}{dt} = a + bf(z)$ kan de variable adskilles.

Eksempel: $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t+y+3}$, $t+y+3 \neq 0$.

Sættes $z = t+y+3$, fås $\frac{dz}{dt} = 1 + \frac{dy}{dt} = 1 + \frac{1}{z} = \frac{z+1}{z}$. I differentialligningen $\frac{dz}{dt} = \frac{z+1}{z}$ kan de variable adskilles.

II: $\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right)$, $t \neq 0$.

Sættes $z = \frac{y}{t}$, fås $y = t \cdot z$, og dermed $\frac{dy}{dt} = z + \frac{dz}{dt} \cdot t$.

Indsættes disse udtryk i differentialligningen, fås $z + \frac{dz}{dt} t = f(z)$ eller $\frac{dz}{dt} = \frac{f(z)-z}{t}$.

Her kan de variable adskilles.

Eksempel: $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} + \tan\left(\frac{y}{t}\right)$, $t \neq 0$.

Sættes $z = \frac{y}{t}$, fås efter ovenstående omskrivninger $\frac{dz}{dt} = \frac{z+\tan(z)-z}{t}$, hvor de variable kan adskilles.

III: $\frac{dy}{dt} = \frac{P(t,y)}{Q(t,y)}$, hvor P og Q er polynomier, hvor alle led har samme grad k, f.eks.

$P(t,y) = 5t^3 + 3t^2y + ty^2 + 4y^3$ (3. grad) og $Q(t,y) = t^3 + 4ty^2$ (3. grad).

Ved at dividere med t^k i både tæller og nævner føres differentialligningen over i en differentialligning af typen $\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right)$.

Eksempel: $\frac{dy}{dt} = \frac{5t^3 + 3t^2y + ty^2 + 4y^3}{t^3 + 4ty^2}$.

Ved division med t^3 fås $\frac{dy}{dt} = \frac{5 + 3\left(\frac{y}{t}\right) + \left(\frac{y}{t}\right)^2 + 4\left(\frac{y}{t}\right)^3}{1 + 4\left(\frac{y}{t}\right)^2}$.

IV: $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} f(y \cdot t)$.

Sættes $z = y \cdot t$, fås $y = \frac{z}{t}$, og dermed $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{t^2} z + \frac{1}{t} \frac{dz}{dt}$. Indsættes disse udtryk i differentialligningen, fås $\frac{1}{t} \frac{dz}{dt} - \frac{z}{t^2} = \frac{z}{t^2} f(z)$.

Multipliceres med t, fås $\frac{dz}{dt} = \frac{z f(z) + z}{t}$. Her kan de variable adskilles.

Eksempel: $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} \cdot \frac{3ty - 4}{ty - 2}$.

Sættes $z = y \cdot t$, fås efter ovenstående omskrivninger $\frac{dz}{dt} = \frac{z \cdot \frac{3z-4}{z-2} + z}{t}$, hvor de variable kan adskilles.

V: <u>Bernoulli's differentialligning</u>: $\frac{dy}{dt} + p(t)\, y(t) = q(t)\, y^a$, $a \neq 0,\ a \neq 1$.

Sættes $y = z^{\frac{1}{1-a}}$, fås $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1-a} z^{\frac{1}{1-a}-1} \frac{dz}{dt} = \frac{1}{1-a} z^{\frac{a}{1-a}} \frac{dz}{dt}$.

Indsættes disse udtryk i differentialligningen, fås $\frac{1}{1-a} z^{\frac{a}{1-a}} \frac{dz}{dt} + p(t)\, z^{\frac{1}{1-a}} = q(t)\, z^{\frac{a}{1-a}}$.

Divideres med $\frac{1}{1-a} z^{\frac{a}{1-a}}$, fås $\frac{dz}{dt} + p(t)(1-a) z = q(t)(1-a)$, som er lineær.

Eksempel: $\frac{dy}{dt} - \frac{t}{1-t^2} y = \frac{t}{1-t^2} y^2$.

Sættes $y = z^{\frac{1}{1-2}} = z^{-1}$, fås efter ovenstående omskrivninger $\frac{dz}{dt} - \frac{t}{1-t^2}(-1) z = \frac{t}{1-t^2}(-1)$, som er lineær.

VI: <u>Ricatti-differentialligning</u>: $\frac{dy}{dt} = f(t) y + g(t) y^2 + h(t)$.

Løsningsmetoden forudsætter, at man er i stand til at gætte én partikulær løsning $y_1(t)$ til differentialligningen.

Sættes $y = y_1 + z$, fås $\frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + \frac{dz}{dt}$.

Indsættes disse udtryk i differentialligningen, fås $\frac{dy_1}{dt} + \frac{dz}{dt} = f(t)(y_1 + z) + g(t)(y_1 + z)^2 + h(t)$ eller

$$\left(\frac{dy_1}{dt} - \left(f(t) y_1 + g(t) y_1^2 + h(t) \right) \right) + \frac{dz}{dt} - \left(f(t) z + 2 g(t) y_1 z + g(t) z^2 \right) = 0.$$

Da y_1 er en løsning, er den første parentes lig 0. Vi har altså $\frac{dz}{dt} - \left(f(t) + 2 g(t) y_1(t) \right) z = g(t) z^2$.

Denne er en Bernoulli-differentialligning (se V).

Eksempel: $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} y - \frac{1}{t} (y - t)^2$, $t > 0$.

Det ses umiddelbart, at $y = t$ er en partikulær løsning. Vi har:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} y - \frac{1}{t} y^2 + 2y - t = \left(\frac{1}{t} + 2 \right) y - \frac{1}{t} y^2 - t.$$

Det ses, at differentialligningen er en Ricatti-differentialligning.

Sættes $y = t + z$, fås efter ovenstående omskrivninger

$$\frac{dz}{dt} - \left(\left(\frac{1}{t} + 2 \right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{t} \cdot t \right) \right) z = \left(-\frac{1}{t} \right) z^2 \text{ eller}$$

$$\frac{dz}{dt} - \frac{1}{t} z = -\frac{1}{t} z^2.$$

Denne er en Bernoulli-differentialligning.

OPGAVER

Opgave 4.1 (numerisk metode)

Tabellér løsningerne til de følgende differentialligningsproblemer med mindst 2 betydende cifre:

1) $\frac{dy}{dt} = \frac{t+y}{2}, \qquad y(0) = \frac{1}{2}, \quad t \in [0;0.25]$

2) $\frac{dy}{dt} = e^{-t-y}, \qquad y(0) = 0, \quad t \in [0;0.25]$

3) $\frac{dy}{dt} = t \cdot \ln y, \qquad y(0) = 1.2, \quad t \in [0;0.25]$

Opgave 4.2 (separere variable)

1) Find (om muligt eksplicit) den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = 2t(y-3).$$

2) Find og skitsér den partikulære løsningskurve, som går gennem punktet $(t,y) = (0,2)$.

Opgave 4.3 (separere variable)

1) Find (om muligt eksplicit) den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t^2-1}, \qquad t \neq \pm 1.$$

2) Find og skitsér den partikulære løsningskurve, som går gennem punktet $(t,y) = (0,1)$.

Opgave 4.4 (separere variable)

1) Find (om muligt eksplicit) den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y^2}{t^2}, \qquad t \neq 0.$$

2) Find og skitsér de partikulære løsningskurver, som går gennem henholdsvis

$(t,y) = (1,1)$, $(t,y) = (1,\frac{1}{2})$ *og* $(t,y) = (1,0)$.

Opgave 4.5 (separere variable)

1) Find (om muligt eksplicit) den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = 2t(y-1)^2 .$$

2) Find og skitsér de partikulære løsningskurver, som går gennem henholdsvis $(t,y) = (2,1)$ og $(t,y) = (0,0)$.

Opgave 4.6 (separere variable)

1) Find (om muligt eksplicit) den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y^2-1}{2y \cdot t \cdot \ln t}, \qquad t>0, \quad t \neq 1, \quad y \neq 0 \quad .$$

2) Find og skitsér de partikulære løsningskurver, som går gennem henholdsvis $(t,y) = (e, \frac{1}{2})$ og $(t,y) = (2,1)$.

Opgave 4.7 (separere variable)

Lad der være givet differentialligningen

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{t}{t+1} \cdot \left(\frac{3}{2} C_A^2 - 4C_A + 2 \right) . \qquad (1)$$

1) Find (om muligt eksplicit) den løsning $C_A(t)$, som opfylder betingelsen $C_A(0) = 1$.

2) Udledning. Lad A og B være to stoffer, der kan reagere med hinanden og danne et tredie stof D:

$$A + B \rightleftarrows 2D .$$

Koncentrationerne af A, B og D betegnes henholdsvis C_A, C_B og C_D [mol/l]. Der gælder da (for en reaktor med konstant volumen)

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{dC_B}{dt} \quad , \quad \frac{dC_D}{dt} = -2 \cdot \frac{dC_A}{dt} .$$

Endvidere har man fundet følgende udtryk for reaktionshastigheden

$$-\frac{dC_A}{dt} = \frac{t}{2(t+1)} (C_A C_B - C_D^2) .$$

Til tiden $t = 0$ gælder $C_A(0) = C_B(0) = 1$ og $C_D(0) = 0$.

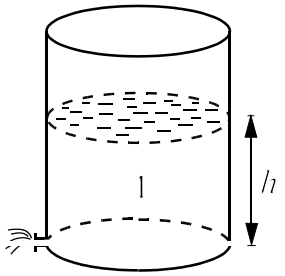
Udled heraf differentialligningen (1).

Opgave 4.8 (separere variable)

En kemiingeniør bruger to beholdere til hver sin væske, og har opstillet differentialligninger (se nedenfor) for væskernes udstrømning. Til tiden $t = 0$ timer er væskehøjden h netop 4 meter i begge beholderne.

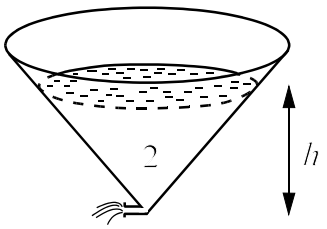
Væske 1.

$$\frac{dh}{dt} = -k_1\sqrt{h}\,, \qquad k_1 = 2\ meter^{\frac{1}{2}} \cdot timer^{-1}$$



Væske 2.

$$\frac{dh}{dt} = -k_2 h^{-\frac{3}{2}}, \qquad k_2 = 12\ meter^{\frac{5}{2}} \cdot timer^{-1}$$



1) Find væskehøjderne til ethvert tidspunkt t.

2) Udled ovennævnte differentialligninger (konstanterne k_1, k_2 skal dog ikke bestemmes), idet det oplyses, at volumenstrømmen $\left[m^3/time\right]$ er proportional med $\sqrt{h}$.

   (Vink: Udtryk f.eks., at beholderens væskeindhold skal svinde lige så meget pr. tidsenhed, som der løber ud pr. tidsenhed).

Opgave 4.9 (separere variable)

Lad der være givet differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = a \cdot N(t) - b \cdot [N(t)]^2 \qquad (1)$$

hvor $N(t)$ angiver antallet af mikroorganismer i en population til tiden t,

$$a = 3.4\,[dag^{-1}] \quad og \quad b = 2 \cdot 10^{-4}\,[dag^{-1}]\ .$$

Find og skitsér (om muligt eksplicit) den løsningskurve, som opfylder betingelsen $N(0) = 100$.

(Denne S-formede kurve er et eksempel på en såkaldt "logistisk kurve").

Forklaring. Logistisk lov for vækst af en population.

Funnktionen $N(t)$ angiver antallet af individer (f.eks. bakterier) i en population til tiden t. Polulationens vækshastighed $\frac{dN}{dt}$ er sammensat af 2 komponenter:

1) Leddet $a \cdot N(t)$ alene angiver, at individantallet øges med en nettohastighed (= fødselshastighed - dødshastighed), som er proportional med det øjeblikkelige antal individer.

2) Leddet $-b \cdot N(t)^2$ alene angiver, at individantallet aftager med en nettohastighed, som er proportional med N^2. (Dette kan f.eks. skyldes, at populationens affaldsstoffer er giftige for den selv).

Opgave 4.10 ^{T} (lineær, 1. orden)

1) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$t\frac{dy}{dt} + y(t) = 3t^2, \qquad t > 0 \ .$$

2) Find og skitsér den partikulære løsningskurve, som går gennem punktet $(t,y) = (1,2)$.

Opgave 4.10a (lineær, 1. orden)

Find den fuldstændige løsning til hver af differentialligningerne

1) $y'(t) + 2y(t) = 0$
2) $y'(t) + \frac{2}{t}y(t) = 0, \quad t>0$
3) $-y'(t) - \frac{3}{t}y(t) = 0, \quad t>0$
4) $y'(t) + y(t) = 0$
5) $t^2 \cdot y'(t) - ty(t) = 0, \quad t<0$
6) $y'(t) + 3y(t) = 2t - 4$
7) $y'(t) + 3y(t) = 7e^{4t}$
8) $y'(t) + 3y(t) = 5\cos t - 5\sin t$
9) $y'(t) + 3y(t) = 2t - 4 + 7e^{4t}$
10) $y'(t) - 2y(t) = e^t$
11) $y'(t) + \frac{2}{t}y(t) = 4t, \quad t>0$
12) $y'(t) - \frac{1}{t}y(t) = \frac{1}{t^3}, \quad t>0.$

Opgave 4.11 (lineær, 1. orden)

1) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$2\frac{dy}{dt} - t \cdot y(t) = t.$$

2) Find og skitsér den partikulære løsningskurve, som går gennem punktet $(t,y) = (0,0)$.

Opgave 4.12 (lineær, 1. orden)

1) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(4-9t^2)\frac{dy}{dt} + 18t \cdot y(t) = (4-9t^2)^{\frac{3}{2}}, \qquad \left(t \in \left]-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right[\right) .$$

2) Find den løsning $y(t)$, som opfylder betingelsen $y(0) = 4$.

Opgave 4.13 (lineær, 1. orden)

1) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(1+2t)\frac{dy}{dt} - y(t) = 1, \qquad t > -\frac{1}{2} .$$

2) Find og skitsér den partikulære løsningskurve, som går gennem punktet $(t,y) = (0,0)$.

Opgave 4.14 (lineær, 1. orden)

1) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$t\frac{dy}{dt} + (t^2-1) \cdot y(t) = 2t^3, \qquad t > 0 .$$

2) Find og skitsér den partikulære løsningskurve, som går gennem punktet $(t,y) = (1,2)$.

Opgave 4.15 (lineær, 1. orden)

Vi betragter et legeme, som afkøles i en luftstrøm. Eksperimenter viser, at et sådant legemes temperatur T falder med en hastighed, der er tilnærmelsesvis proportional med $T - T_{luft}$, hvor T_{luft} er luftens temperatur (Newtons lov for afkøling i en strøm). Temperaturen T_{luft} i luftstrømmen er konstant 30^0C. Legemets temperatur er 100^0C til tiden $t = 0$ og 70^0C til tiden $t = 3$ min. Hvornår er legemets temperatur blevet 40^0C?

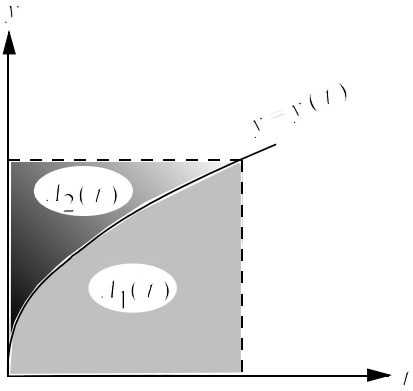
Opgave 4.16 (lineær, 1. orden)

Find en funktion $y(t)$, sådan at

1) $y(1) = 1$ og

2) $A_1(t) = 3 \cdot A_2(t)$ for alle $t \geq 0$,

hvor $A_1(t)$ og $A_2(t)$ er de skraverede figurers arealer.



Opgave 4.17 (lineær, 1. orden)

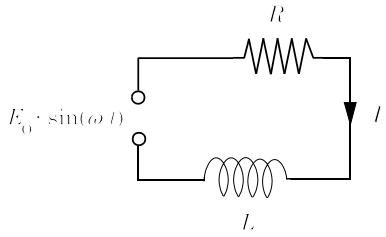
Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$L\frac{dI}{dt} + R \cdot I(t) = E_0 \cdot \sin(\omega t),$$

hvor L, R, E_0 og ω er konstanter.

Forklaring. Differentialligningen gælder for det viste elektriske kredsløb, hvor

$I(t)$	=	strømstyrken til tiden t
L	=	selvinduktionskoefficienten af spolen
R	=	den elektriske modstand i kredsen
E_0	=	amplituden af den påtrykte spænding
ω	=	vinkelfrekvensen for den påtrykte spænding.



Opgave 4.18 (lineær, 1. orden))

I et præparat vil antallet af ^{14}C-atomer, som henfalder radioaktivt pr. tidsenhed være proportionalt med det øjeblikkelige antal tilstedeværende ^{14}C-atomer. Der går ca. 5700 år, inden 50% af ^{14}C-atomerne er henfaldet. Hvor lang tid går der, inden 90% af ^{14}C-atomerne er henfaldet ? (Anvendelse: Bestemmelse af præparatets alder).

Opgave 4.Eksam6b (lineær, 18 point)

1) Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2(t-2)}y = -\frac{1}{2(t-2)}, \qquad t > 2.$$

2) Find den partikulære løsning f til ovennævnte differentialligning, som er bestemt ved $f(3) = 0$. Skitsér grafen for f.

Opgave 4.Eksam52b (separere variable, 10 point)

1) Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(y^2-1)}{(t-1)2y}, \qquad t > 1 \ \wedge \ y > 0.$$

Løsningerne angives på formen y lig med en funktion af t.

2) Skitsér de partikulære integralkurver, der går gennem henholdsvis $(t_0, y_0) = (2,1)$ og $(t_1, y_1) = (2,4)$.

Opgave 4.Eksam86b (separere variable, 15 point)

1) Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y^3+1}{y^2 \cdot t \cdot \ln t}, \qquad t > 1 \ \wedge \ y < 0 \ .$$

Løsningerne anføres på formen y lig med en funktion af t.

2) Skitsér den partikulære integralkurve, der går gennem punktet $(t_0, y_0) = (2,-1)$.

Opgave 4.Eksam92b (separere variable, 10 point)

Lad der være givet differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{y-1}}{2\sqrt{t-1}}, \qquad y > 1, \ \ t > 1.$$

1) Find samtlige løsninger.

2) Skitsér den partikulære integralkurve, der går gennem punktet $(t_0, y_0) = (2,5)$.

Opgave 4.Eksam122 (numerisk løsning, 15 point)

For differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = t + \frac{1}{y^2}$$

ønsker man i intervallet $[0;2]$ at bestemme den partikulære løsning $y = y(t)$, der svarer til begyndelsesbetingelsen $(t,y) = (0,1)$ ved hjælp af Eulers metode.

Først benyttes skridtstørrelsen $h = 2$, og man finder $y(2) = 3.000$. Derefter halveres skridtstørrelsen.

Beregn med en skridtstørrelse på $h = 1$ værdien af $y(1)$ og $y(2)$ (2. dec.). Metoden skal klart fremgå af besvarelsen (det er altså ikke nok med et regnemaskineprogram).

Opgave 4.Eksam129 (lineær, 20 point)

1) Find samtlige løsninger til differentialligningen $\frac{dy}{dt} = \frac{\cos t \cdot \sqrt{1+\sin t} - y}{t+\pi}$ for $t > -\pi$.

2) Undersøg, om der findes en løsning y for hvilken $y(t) \to 0$ for $t \to -\pi$ (fra højre).

Opgave 4.Eksam158 (separere variable, uden hjælpemidler, 10 point)

Lad der være givet differentialligningen $\frac{dy}{dt} = 3t^2(y+1)$.

Find en løsning $y(t)$, som opfylder begyndelsesbetingelsen $y(0) = 7$. Løsningen skal anføres på formen y lig med en funktion af t.

Opgave 4.Eksam182 (separere variable, uden brug af hjælpemidler, 10 point)

1) Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(y-1)^2}{t+1}, \qquad t > -1 \ \wedge \ y > 1.$$

Løsningerne anføres på formen: y lig med en funktion af t.

2) Find den integralkurve, der går gennem punktet $(t_0, y_0) = (0,2)$.

Opgave 4.Eksam202 (lineær, 15 point)

Find samtlige løsninger til differentialligningen $(t^2+1)\frac{dy}{dt} + ty = t^3$.

Find og skitsér grafen for den partikulære løsning, der går gennem punktet $(t,y) = (0, -\frac{2}{3})$.

Opgave 4.Eksam205 (separere variable, uden brug af hjælpemidler, 10 point).

1) Find samtlige løsninger til differentialligningen $\frac{dy}{dt} = \frac{(t-1)(y^3-1)}{y^2}, \qquad y>1, \ t>1.$

Løsningerne anføres på formen: y lig med en funktion af t.

2) Find den løsningskurve, der går gennem $(t_0, y_0) = (2,2)$.

Opgave 4.Eksam217 (lineær, 20 point).

Idet det oplyses, at

$$\frac{-2t^2 + 6t + 1}{(t-2)(t^2+1)} = \frac{1}{t-2} - \frac{3t}{t^2+1}$$

skal man finde den løsning til differentialligningen

$$(t-2)(t^2+1)\cdot\frac{dy}{dt} + (-2t^2 + 6t + 1)\cdot y = t\,, \qquad t<2\,,$$

som går gennem punktet $(t,y) = (0,\frac{2}{3})$.

Opgave 4.Eksam239 (separere variable, 20 point).

Betragt differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dy}{dt} = 1 - y + e^{2t}y^2\,.$$

1) Lad $y(t)$ være en løsning til $(*)$ og sæt $\mathbf{v}(t) = \mathrm{e}^t y(t)$. Vis, at $\mathbf{v}$ opfylder en separabel differentialligning, løs denne og anfør til slut løsningerne til $(*)$.
2) Bestem den løsning $y(t)$ til $(*)$, der opfylder $y(0) = 0$.
   Angiv også definitionsintervallet for $y(t)$.

Opgave 4B.1 ($y' = f(at+by+c)$)

Find samtlige løsninger til differentialligningerne

1) $\frac{dy}{dt} = (y+t)^2$ 2) $\frac{dy}{dt} = \tan(y+t) - 1$ 3) $\frac{dy}{dt} = (t+y-7)^2$.

Opgave 4B.2 $\left(y' = f\left(\frac{y}{x}\right)\right)$

Find for de følgende differentialligninger den partikulære løsning gennem punktet (t_0,y_0).

1) $2\left(\frac{y}{t}\right)\frac{dy}{dt} - \left(\frac{y}{t}\right)^2 + 1 = 0\,,$ $(t_0,y_0) = (1,3)$

2) $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} + \frac{2t^3\cos(t^2)}{y}\,,$ $(t_0,y_0) = (\sqrt{\pi},0)$.

Opgave 4B.3 ("homogen" differentialligning)

Find samtlige løsninger til differentialligningerne

1) $\frac{dy}{dt} = \frac{3y-4t}{y-2t}\,,$ $(t_0,y_0) = (1,1)$

2) $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2+ty+y^2}{t^2}\,,$ $(t_0,y_0) = (1,1)$

3) $\frac{dy}{dt} = \frac{1-2y-4t}{2t-y+1}\,,$ $(t_0,y_0) = (0,0)$.

Opgave 4B.4 $\left(y' = \frac{y}{t} f(y \cdot t) \right)$

Find samtlige løsninger til differentialligningen $\frac{dy}{dt} = \frac{2y^2 t + 4y}{t}$.

Opgave 4B.5 (Bernoullis differentialligning)

Givet differentialligningen $\frac{dy}{dt} - \frac{1}{2t} y = \frac{t}{2y}$, $t > 0$.

1) Find samtlige løsninger til differentialligningen.
2) Skitsér den partikulære løsning, som går gennem punktet $(1,1)$.

Opgave 4B.6 (Bernoullis differentialligning)

Find samtlige løsninger til følgende differentialligninger

1) $\frac{dy}{dt} - \frac{1}{t} y = \frac{y^2 \cdot \ln t}{t}$, $t > 0$.
2) $\frac{dy}{dt} + y = \frac{t}{y}$, $y > 0$.
3) $3\frac{dy}{dt} + y = (1 - 2t) y^4$.
4) $\frac{dy}{dt} - \frac{1}{2t} y = 5t^2 y^5$.

Opgave 4B.7 (Ricatti differentialligning)

Find samtlige løsninger til følgende differentialligninger, idet det først skal kontrolleres, at $y = y_1(t)$ er en partikulær løsning.

1) $\frac{dy}{dt} = t^3 (y - t)^2 + \frac{y}{t}$, $y = y_1(t) = t$
2) $\frac{dy}{dt} = y + e^{2t} - y^2$, $y = y_1(t) = e^t$
3) $\frac{dy}{dt} = -y + \frac{1}{t} y^2 + 1 - \frac{1}{t}$, $y = y_1(t) = 1$.

5 KOMPLEKSE TAL

5.1 INDLEDNING

Fra man i skolens første klasse startede med de naturlige tal:

$$1, 2, 3, \ldots \qquad (\mathbb{N})$$

er der tre gange sket en udvidelse af talbegrebet.

1) Udvidelsen til alle hele tal:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (\mathbb{Z})$$

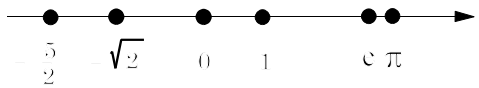
idet ligninger som $x+2=1$ skal have en løsning.

2) Udvidelsen til de rationale tal:

$$\ldots, -\frac{1}{2}, -1, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{1}{3}, \ldots \qquad (\mathbb{Q})$$

idet ligninger som $2x=3$ skal have en løsning.

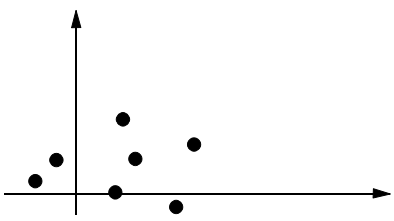
3) Udvidelsen til de reelle tal:



(alle punkter på en tallinie) $(\mathbb{R})$

idet f.eks. ligninger som $x^2=2$ skal have en løsning.

I dette kapitel udvides talbegrebet en sidste gang til de komplekse tal, idet ligninger som $x^2=-1$ skal have en løsning.



(alle punkter i en talplan) $(\mathbb{C})$

Dette fandt man allerede ca. år 1550 nødvendigt for at beregne sædvanlige reelle løsninger til trediegradsligninger. I dag betyder de komplekse tal en begrebsmæssig og arbejdsmæssig forenkling af mange problemstillinger og løsningsmetoder, især når der indgår svingninger.

Senere vil vi bruge de komplekse tal til løsning af ligninger, herunder differentialligninger.

5.2 MÆNGDEN AF KOMPLEKSE TAL

Det er velkendt, hvordan de reelle tal kan identificeres med punkterne på en tallinie. Vi vil kalde tallinien for de *reelle tals akse*.

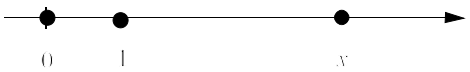


Fig. 5.1. *De reelle tals akse samt tre reelle tal* $0, 1$ *og* x.

På tilsvarende måde ønsker vi at identificere de "komplekse tal" med punkterne i en plan. Den kaldes den "*komplekse talplan*".

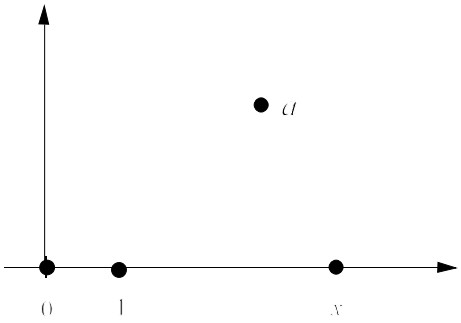


Fig. 5.2. *Den komplekse talplan samt fire komplekse tal* $0, 1, x$ *og* a.

DEFINITION *(komplekse tal). Et komplekst tal a er et punkt i en plan. Planen kaldes den komplekse talplan. Mængden* $\mathbb{C}$ *af komplekse tal indeholder de reelle tal som en delmængde beliggende på de reelle tals akse.*

For at retfærdiggøre, at der er tale om "tal", må vi senere forsøge at indføre addition og multiplikation, samt undersøge om de sædvanlige algebraiske love for tal er opfyldt.

Rektangulære koordinater. I den *komplekse talplan* indlægges et retvinklet koordinatsystem, hvor førsteaksen er de *reelle tals akse*, og andenaksen kaldes de *imaginære tals akse*. Første- og andenkoordinaten til et komplekst tal a kaldes henholdsvis *realdelen* og *imaginærdelen* af a, og skrives kort Re*(a)* og Im*(a)* (se figur 5.3). Bemærk, at Im*(a)* er et reelt tal.

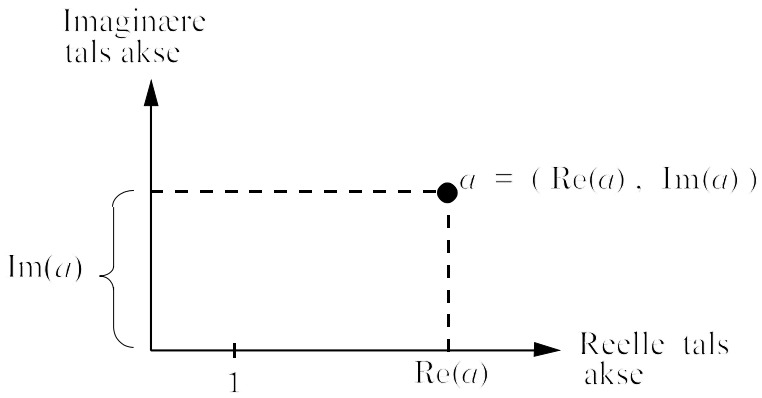


Fig. 5.3. *Realdel* Re*(a) og imaginærdel* Im*(a).*

Polære koordinater. Et punkt P*'s* placering i et koordinatsystem kan angives i såkaldte polære koordinater (figur 5.4):

1) r = *længden* $|\overline{OP}|$ af stedvektoren til P,

2) v = *vinklen* fra førsteaksen til stedvektoren $\overline{OP}$.

Vinklen måles i planens positive omløbsretning (mod uret) og er naturligvis kun bestemt på nær et multiplum af 2π. Hvis $P = O$, er vinklen uden betydning og kan gives en vilkårlig værdi.

Lad det til punktet P svarende komplekse tal være a. De polære koordinater til a betegnes $|a|$ og arg*(a)* (se figur 5.5), hvor $|a|$ kaldes *modulus* af a eller den numeriske værdi af a, mens arg*(a)* kaldes *argumentet* af a. Den værdi for arg*(a),* som tilhører intervallet $]-\pi;\pi]$, kaldes *hovedværdien* af arg*(a)* og skrives Arg(a) med stort A. Eksempelvis vil det reelle tal 2 have modulus 2 og argument 0, ligesom det reelle tal -3 vil have modulus 3 og argument π.

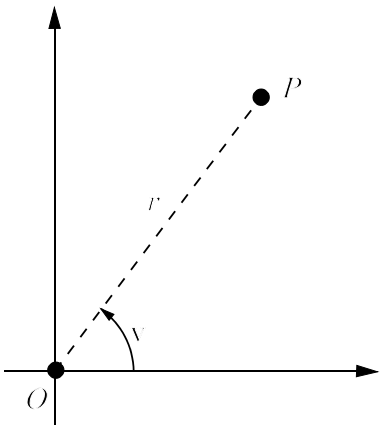


Fig. 5.4. *De polære koordinater r og* v *til et punkt P.*

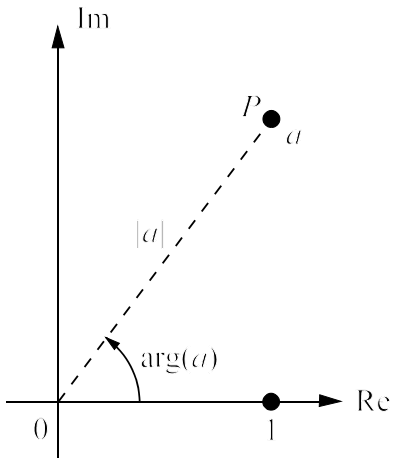
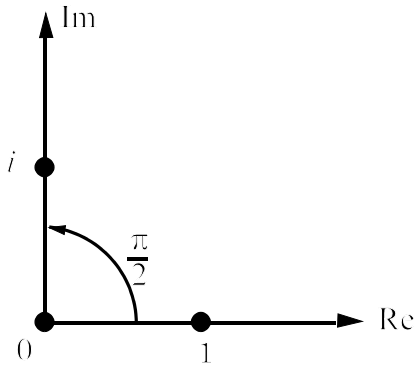


Fig. 5.5. *Den komplekse talplan.*

Tallet i. Tallet med realdel 0 og imaginærdel 1 kaldes den "imaginære enhed" og betegnes med bogstavet i (undertiden med bogstavet j), se figur 5.6. Vi har altså Re*(i)*=0 og Im*(i)*=1. Af figuren ses, at tallet i har modulus 1 og argument $\frac{\pi}{2}$, dvs. $|i| = 1$ og $\mathrm{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$.

Fig. 5.6. *Den imaginære enhed i.*



5.3 ADDITION OG SUBTRAKTION

To komplekse tal a og b adderes ved at addere deres stedvektorer (Re(a), Im(a)) og (Re(b), Im(b)) .

DEFINITION *(addition). Summen* $a+b$ *har realdelen* Re*(a)*+Re*(b)* *og imaginærdelen* Im*(a)*+Im*(b), dvs. stedvektoren til* $a+b$ *fås ved sædvanlig vektoraddition af stedvektorerne til* a *og* b *(se figur 5.7).*

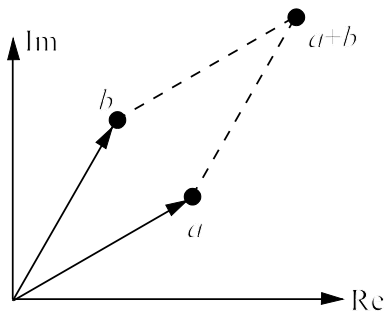


Fig. 5.7. *Additionen* $a+b$.

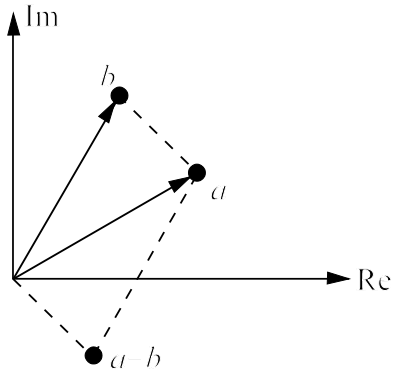


Fig. 5.8. *Subtraktionen* $a-b$.

Additionen af to reelle tal efter denne regel giver åbenbart samme resultat som sædvanlig, f.eks. 2+3 = 5, 2+(-3) = -1 og (-2)+(-3) = -5. Tallet 0 er neutralt element ved addition, da a+0 = 0+a = a.

Subtraktion a-b udføres som vektorsubtraktion (figur 5.8), dvs. a-b har realdel Re(a)-Re(b) og imaginærdel Im(a)-Im(b).

Subtraktionen a-b plejer man at definere ved additionen a+(-b), hvor det "modsatte tal" -b er givet ved, at der skal gælde b+(-b)=0, dvs. -b må have realdel -Re(b) og imaginærdel -Im(b) og altså stedvektor modsat b's.

5.4 MULTIPLIKATION OG DIVISION

To komplekse tal a og b multipliceres ved at multiplicere deres modulus'er og addere deres argumenter:

DEFINITION *(multiplikation). Stedvektoren til* $\mathbf{a \cdot b}$ *fås, ved at stedvektoren til* a *drejes en vinkel på* arg*(b) og derpå multipliceres med* $|b|$, *dvs.* $\mathbf{a \cdot b}$ *har modulus* $|a| \cdot |b|$ *og argument* arg*(a)*+arg*(b) (se figur 5.9).*

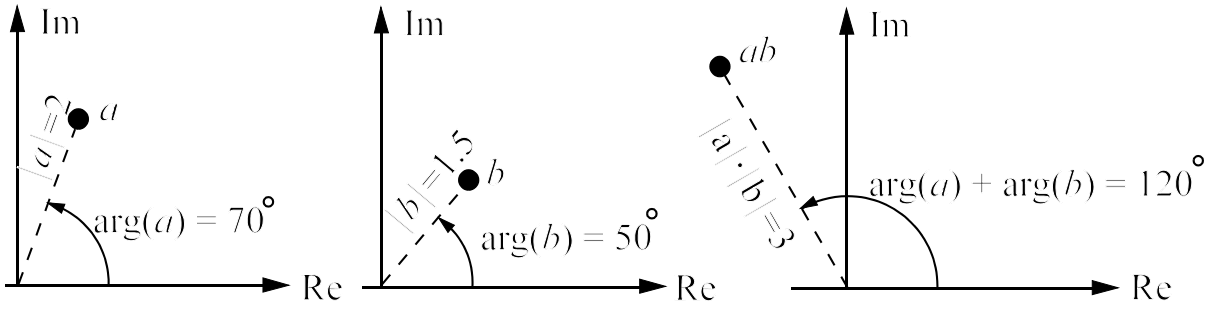


Fig. 5.9. *Multiplikationen* $\mathbf{a \cdot b}$.

Multiplikation af to reelle tal efter denne regel giver åbenbart samme resultat som sædvanlig, f.eks. fås $\mathbf{2 \cdot 3 = 6}$, idet $|2| \cdot |3| = |6|$ og arg(2)+arg(3) = 0+0 = 0 = arg (6) . Analogt fås $2 \cdot (-3) = -6$, idet $|2| \cdot |-3| = |6| = |-6|$ og arg(2)+arg(-3) = $0 + \pi = \pi = \arg(-6)$. Endvidere fås $(-2) \cdot (-3) = 6$, idet $|-2| \cdot |-3| = 6 = |6|$ og arg(-2)+arg(-3) = $\pi + \pi = 2\pi$ = arg(6) . Tallet 1 er neutralt element ved multiplikation, da $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. Derimod ses multiplikation med tallet i at give en drejning på 90^0, dvs. $a \cdot i$ er bestemt ved tværvektoren af stedvektoren til a; specielt fås (for $a=i$) den fundamentale relation

$$\boxed{i^2 = -1}\ .$$

<u>Division</u> $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ udføres grafisk ved at stedvektoren til a drejes -arg*(b)* og multipliceres med $\frac{1}{|b|}$.

Divisionen $\frac{a}{b}$ plejer man at definere ved multiplikationen $a \cdot b^{-1}$, hvor det "reciprokke tal" b^{-1} er givet ved, at der skal gælde $b \cdot b^{-1} = 1$, dvs. b^{-1} må have modulus $\frac{1}{|b|}$ og argument -arg(b).

5.5 REKTANGULÆR FORM

Ved hjælp af tallet i kan et vilkårligt komplekst tal a skrives på "rektangulær form" (figur 5.10):

$$a = \mathrm{Re}(a) + i \cdot \mathrm{Im}(a),$$

f.eks. kan et tal a med Re(a)=3 og Im(a)=2 skrives på formen $3 + i \cdot 2$ (se figur 5.10).

Bevis. Tallet $i \cdot \mathrm{Im}(a)$ findes, ved at stedvektoren til det reelle tal Im(a) drejes $\frac{\pi}{2}$ (så vi får tværvektoren). Addition med stedvektoren for Re(a) giver derfor stedvektoren til tallet med abscissen Re(a) og ordinaten Im(a), dvs. a.

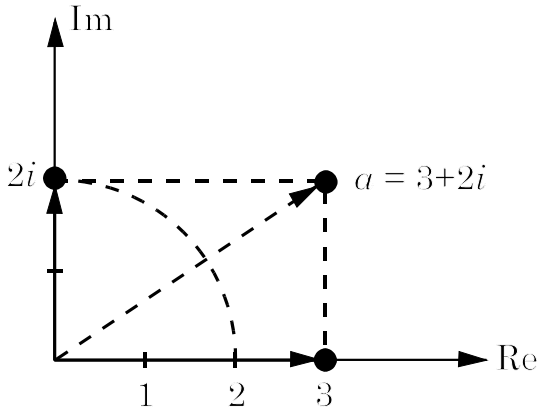


Fig. 5.10. *Rektangulær form.*

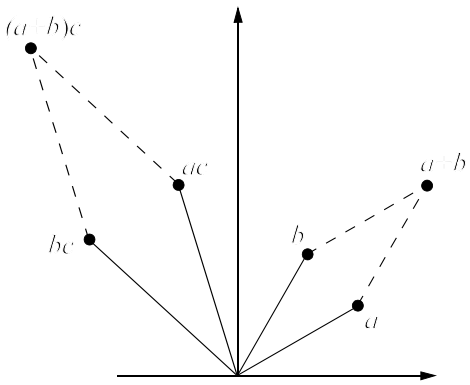
Den rektangulære forms store fordel ligger i, at regneoperationerne + - · / kan udføres *efter de samme regler* (algebraiske love) som for reelle tal, med den tilføjelse, at tallet i har egenskaben $i^2 = -1$. Eksempelvis fås efter gamle regler $(1+i) \cdot i = i + i^2 = i - 1 = \underline{-1+i}$, og dette resultat er korrekt, da multiplikation af $1 + i$ med i skal give tværvektoren $-1+i$.

Bevis. Vi vil vise, at ligesom de rationale tal og de reelle tal, er de komplekse tal et *tallegeme*, dvs.

1)	$a+b = b+a$,	$a \cdot b = b \cdot a$	kommutative love
2)	$(a+b)+c = a+(b+c)$,	$(ab)c = a(bc)$	associative love
3)	$0+a = a+0 = a$,	$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$	0 og 1 er neutrale elementer
4)	$a+(-a) = (-a)+a = 0$,	$a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1 \quad (a \neq 0)$	modsat og inverst element eksisterer
5)	$(a+b)c = ac + bc$		distributiv lov

Af afsnittene om addition og multiplikation følger umiddelbart, at punkterne 1-4 er opfyldt.

Den distributive lov $(a+b)c = ac + bc$ bevises lettest grafisk.



Multipliceres a, b og $a+b$
med c, betyder det grafisk, at stedvektorerne til a, b og $a+b$ først drejes vinklen $\arg(c)$ og derefter multipliceres deres længder med $|c|$. Da et parallelogram ved en sådan drejning efterfulgt af en multiplikation igen afbildes i et parallelogram, er loven bevist.

Kan talmængden $\mathbb{R}$ udvides på andre måder? Ja, f.eks. vil mængden af brøker $\frac{P(x)}{Q(x)}$, hvor $P(x)$ og $Q(x)$ er reelle polynomier, åbenbart opfylde reglerne 1-5 ovenfor, når addition og multiplikation foretages på sædvanlig måde; de reelle tal er den delmængde, hvor $P(x)$ og $Q(x)$ har graden 0. - Derimod vil regningen med matricer (talskemaer), som omtales senere, ikke opfylde alle reglerne 1-5 ovenfor, idet multiplikation ikke bliver kommutativ, og mange matricer ikke har nogen invers. Matricer er altså ikke "tal". Men de er nyttige ved løsning af ligninger, og de har fundet en bemærkelsesværdig fortolkning som fysiske variable i kvanteteorien om atomer og molekyler.

Eksempel 5.1. Regning med komplekse tal.

Reducér udtrykkene

1) $(3+2i)(6-i)+3-7i$

2) $\dfrac{-4+7i}{2+3i}$.

LØSNING:

1) $(3+2i)(6-i) + 3 - 7i = 18 - 3i + 12i - 2i^2 + 3 - 7i$
$= 21 + 2i - 2i^2 = 21 + 2i + 2 = \underline{\underline{23 + 2i}}$
(under reduktionen er benyttet $i^2 = -1$).

2) $\dfrac{-4 + 7i}{2 + 3i} = \dfrac{(-4+7i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{-8 + 12i + 14i - 21i^2}{4 - 9i^2}$

$= \dfrac{13 + 26i}{13} = \underline{\underline{1 + 2i}}$.

Bemærk, at man ved division forlænger med $2-3i$ i brøkens tæller og nævner, således at nævneren bliver et reelt tal. Tallet $\mathrm{Re}(a) - i\cdot\mathrm{Im}(a)$ kaldes det "*kompleks konjugerede*" af $\mathrm{Re}(a) + i\cdot\mathrm{Im}(a)$.

Maple:
I "Math mode" : Det komplekse Tal i vælges fra menuen "Common Symbols"
$(3+2i)\cdot(6-i)+3-7i$ Resultat 23+2 *I*
$(-4+7i)/(2+3i)$ Resultat 1+2 *I*

5.6 POLÆR FORM. EKSPONENTIALFUNKTIONEN

Tallet $e^{i\alpha}$. Tallet med modulus 1 og argument α, betegnes $e^{i\alpha}$ (se figur 5.11). At betegnelsen $e^{i\alpha}$ er rimelig begrundes 2 sider senere.

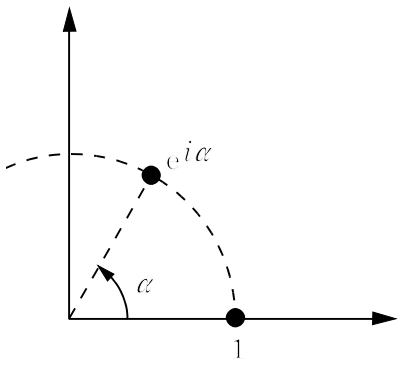


Fig. 5.11. *Tallet* $e^{i\alpha}$.

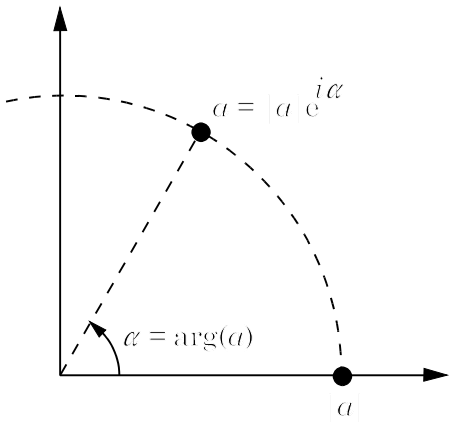


Fig. 5.12. *Polær form.*

Polær form. Ved hjælp af tallet $e^{i\alpha}$ kan ethvert komplekst tal a skrives på "polær form" (figur 5.12):

$$a = |a|e^{i\alpha}, \qquad \text{hvor} \quad \alpha = \arg(a)\,.$$

Bevis. Ved multiplikation af $|a|$ med $e^{i\alpha}$ bliver stedvektoren til det reelle tal $|a|$ multipliceret med 1 og drejet vinklen α, så vi netop får a (figur 5.12).

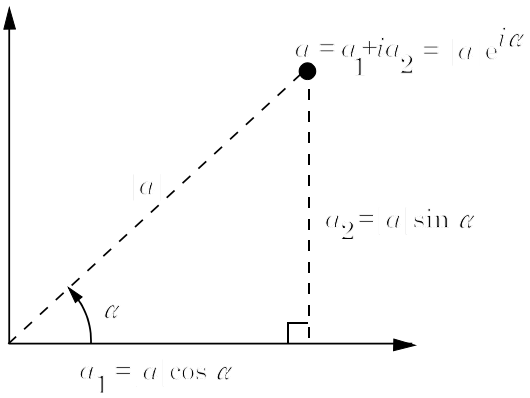


Fig. 5.13. *Omregning.*

Omregning mellem polære og rektangulære koordinater. Af definitionen på cos og sin fås følgende formler til omregningen $P \to R$ fra polær form $a = |a| e^{i\alpha}$ til rektangulær form $a = a_1 + i a_2$ (se figur 5.13):

$$a_1 = |a| \cos\alpha \qquad a_2 = |a| \sin\alpha$$

og omvendt $R \to P$:

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \qquad \tan\alpha = \frac{a_2}{a_1} \quad (a_1 \neq 0).$$

NB1: Ved bestemmelsen af $\alpha = \arg(a)$ tilrådes det nøje at bemærke, i hvilken kvadrant a ligger (ligningen $\tan\alpha = \frac{a_2}{a_1}$ bestemmer nemlig kun α på nær et multiplum af π og kan i øvrigt kun benyttes for $a_1 \neq 0$).

NB2: Mange lommeregnere har en tast, f.eks. $P \to R$, der omregner fra polære koordinater til rektangulære koordinater og omvendt.

Eksempel 5.2. Omregning mellem rektangulær og polær form.

1) Omskriv tallet $a = -2 - 2\sqrt{3}\,i$ til polær form.

2) Omskriv tallet $b = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$ til rektangulær form.

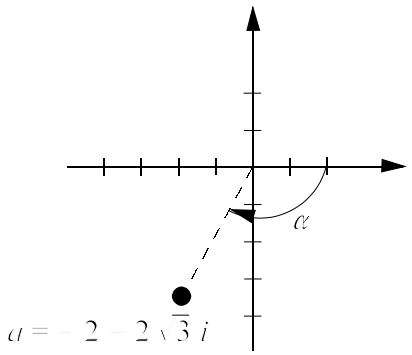
LØSNING:

1) $|a| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$

$$\tan\alpha = \frac{-2\sqrt{3}}{-2}$$

$$\alpha = \arg(a) = \operatorname{Arctan}\frac{-2\sqrt{3}}{-2} - \pi$$

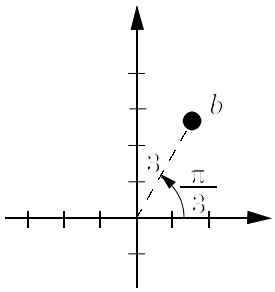
$$a = 4e^{i(\operatorname{Arctan}\sqrt{3}-\pi)} = 4e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\pi\right)} = \underline{\underline{4e^{-i\frac{2\pi}{3}}}}.$$



2) $b = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$b = 3\cdot\cos\frac{\pi}{3} + i\,3\cdot\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}}}.$$



Maple:
I "Math mode" : Det komplekse Tal i vælges fra menuen "Common Symbols"

1) Skriv $-2-\sqrt{3}\cdot i$ ($\sqrt{\ }$ vælges fra menuen "Expression")

Cursor på udtrykket, højre musetast,vælg "Conversions", Polar Resultat: $\text{polar}\left(4,-\frac{2}{3}\pi\right)$

2) Skriv $3\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}$ (e,i,π vælges fra menuen "Common Symbols")

Cursor på udtrykket, højre musetast,vælg "Conversions", a+ibr Resultat: $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}I\sqrt{3}$

Eksponentialfunktionen.

DEFINITION *Det komplekse tal* $e^x \cdot e^{iy}$ *betegnes* e^{x+iy}.

Tallet e^{x+iy} har åbenbart den rektangulære form $e^x \cos y + i e^x \sin y$ (se figur 5.14).

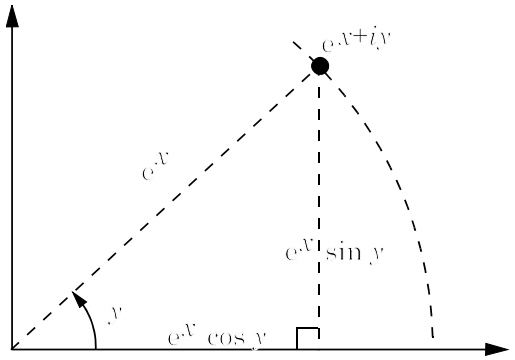


Fig. 5.14. *Eksponentialfunktionen.*

At den eksponentielle skriveform e^{x+iy} er rimelig, fremgår af den følgende sætning, der siger, at de sædvanlige regneregler for eksponentialfunktioner også gælder for komplekse eksponentialfunktioner.

SÆTNING 5.1. *De sædvanlige regler for* e^x *gælder også for* $e^z = e^{x+iy}$: [1)]

$$\left.\begin{array}{lll} 1) & e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} & \\ 2) & \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2} & \\ 3) & \dfrac{1}{e^z} = e^{-z} & \\ 4) & (e^z)^n = e^{nz} & \\ 5) & \dfrac{d}{dt} e^{at} = a e^{at} & 1) \\ 6) & \int e^{at}\,dt = \dfrac{1}{a} e^{at} \quad (a \neq 0) & 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} z, z_1, z_2, a \in \mathbb{C} \\ t \in \mathbb{R} \\ n \in Z \quad (\textit{hele tal}) \end{array}$$

[1)] En kompleks funktion $f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$ af en reel variabel t siges at være kontinuert, differentiabel eller integrabel, hvis både dens realdel $f_1(t)$ og dens imaginærdel $f_2(t)$ er det. Man definerer

$$f'(t) = f_1'(t) + i f_2'(t)$$

$$\int f(t)\,dt = F(t), \quad \text{når } F'(t) = f(t)$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f_1(t)\,dt + i \int_a^b f_2(t)\,dt \qquad (= F(b) - F(a)).$$

Bevis.

1) Når e^{z_1} = [stedvektoren til e^{x_1} drejet y_1] multipliceres med e^{z_2} = [stedvektoren til e^{x_2} drejet y_2],

fås [stedvektoren til $e^{x_1+x_2}$ drejet y_1+y_2] = $e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$.

2) Fremkommer af 1) ved at erstatte z_1 med z_1-z_2 og dividere igennem med e^{z_2}.

3) Fremkommer af 2) for $z_1=0$ og $z_2=z$.

4) Fremkommer ved gentagen anvendelse af 1) for $z_1=z_2=z$ og suppleret med 3) for $n<0$.

5) $\frac{d}{dt}e^{at} = \frac{d}{dt}e^{a_1t+ia_2t}$ (idet $a=a_1+ia_2$ på rektangulær form)

$$= \frac{d}{dt}\left[e^{a_1t}\cos(a_2t)\right] + i\frac{d}{dt}\left[e^{a_1t}\sin(a_2t)\right]$$

$$= \left[a_1e^{a_1t}\cos(a_2t) - a_2e^{a_1t}\sin(a_2t)\right] + i\left[a_1e^{a_1t}\sin(a_2t) + a_2e^{a_1t}\cos(a_2t)\right]$$

$$= a_1\left[e^{a_1t}\cos(a_2t) + ie^{a_1t}\sin(a_2t)\right] + ia_2\left[e^{a_1t}\cos(a_2t) + ie^{a_1t}\sin(a_2t)\right]$$

$$= (a_1+ia_2)\left[e^{a_1t+ia_2t}\right] = ae^{at}.$$

6) Ved differentiation af $\frac{1}{a}e^{at}$ fås netop e^{at}.

Eulers formler. Vi kan skrive e^{iu} og e^{-iu} på rektangulær form:

$$e^{iu} = \cos u + i\cdot\sin u$$

$$e^{-iu} = \cos u - i\cdot\sin u.$$

Ved addition og subtraktion af disse ligninger fås Eulers formler

$$\cos u = \frac{e^{iu}+e^{-iu}}{2}, \qquad \sin u = \frac{e^{iu}-e^{-iu}}{2i}.$$

Heraf ses slægtskabet mellem de trigonometriske og de hyperbolske funktioner

$$\cosh u = \frac{e^{u}+e^{-u}}{2}, \qquad \sinh u = \frac{e^{u}-e^{-u}}{2}.$$

I stedet for at regne med $\cos u$ og $\sin u$ kan man ofte med fordel gå over til e^{iu} og e^{-iu}, som regneteknisk er lettere at arbejde med.

Andre standardfunktioner. Alle de reelle standardfunktioner (logaritme-, potens-, eksponential-, trigonometriske og hyperbolske funktioner) kan udvides til komplekse funktioner af en kompleks variabel z..

Eksempel 5.3. Eulers formler.

Find $\int \sin(3t)\cos t\, dt$ ved brug af Eulers formler.

LØSNING:

$$\int \sin(3t)\cos t\, dt = \int \frac{e^{i3t} - e^{-i3t}}{2i} \cdot \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\, dt$$

$$= \int \frac{e^{i4t} - e^{-i4t} - e^{-i2t} + e^{i2t}}{4i}\, dt$$

$$= \frac{1}{4i}\left[\frac{1}{4i}e^{i4t} + \frac{1}{4i}e^{-i4t} + \frac{1}{2i}e^{-i2t} + \frac{1}{2i}e^{i2t}\right]$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{e^{i4t} + e^{-i4t}}{2} - \frac{1}{4}\frac{e^{i2t} + e^{-i2t}}{2}$$

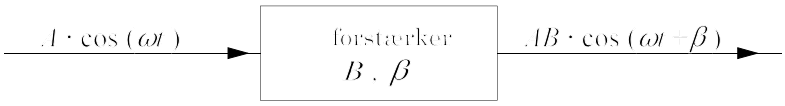
$$= -\frac{1}{8}\cos(4t) - \frac{1}{4}\cos(2t).$$

Eksempel 5.4. Strømning gennem tanke.

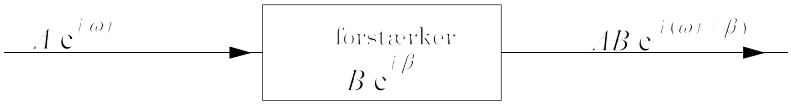
Indledning: hvad er kompleks forstærkning? Når en lille svingning $A\cdot\cos(\omega t)$ indvirker på en forstærker eller et andet fysisk system, fås normalt en ny svingning, responsen, der fremkommer af den oprindelige ved multiplikation med en forstærkning B:

$$\begin{pmatrix} \textit{amplitude} \\ A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \textit{forstærkning} \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \textit{ny amplitude} \\ AB \end{pmatrix}.$$

Sædvanligvis vil responsen også få fasen drejet en vinkel β :



Det hele kan meget praktisk beskrives således: en indgående kompleks svingning $Ae^{i\omega t}$ multipliceres med en "kompleks forstærkning" $Be^{i\beta}$, så der fremkommer en udgående kompleks svingning $ABe^{i(\omega t+\beta)}$. De fysiske svingninger skal blot tolkes som realdelene af de komplekse svingninger.

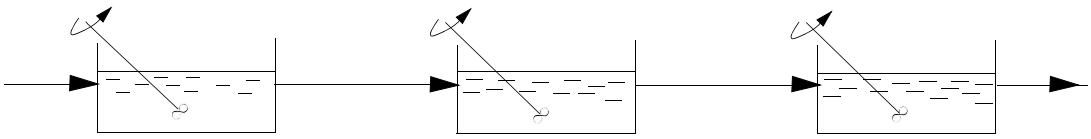


Problem. En konstant volumenstrøm (konstant antal m^3 pr. minut) passerer tre serieforbundne ens tanke. Svingninger i den indkommende strøms temperatur, massefylde, koncentration o.lign. dæmpes af tankene, idet hver tanks "komplekse forstærkning" er $\frac{1}{i\omega\tau + 1}$, hvor

τ = middelopholdstid i tanken = **60** min.

ω = vinkelfrekvens af svingning = $\frac{1}{30}$ min.^{-1}.

Find den komplekse forstærkning hidrørende fra hele tanksystemet.



LØSNING:

$$\left(\frac{1}{i\omega\tau+1}\right)^3 = \frac{1}{(1+2i)^3} = \frac{1}{1^3+3\cdot 1^2\cdot 2i+3\cdot 1\cdot(2i)^2+(2i)^3}$$

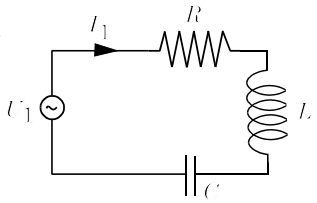
$$= \frac{1}{1+6i-12-8i} = \frac{1}{-11-2i} = \frac{-11+2i}{(-11-2i)(-11+2i)}$$

$$= \frac{-11+2i}{121+4} = \underline{\underline{\frac{-11}{125} + \frac{2}{125}i}}.$$

Det betyder, at systemet dæmper den indkommende svingning med faktoren $\sqrt{\left(\frac{-11}{125}\right)^2+\left(\frac{2}{125}\right)^2} = \frac{1}{5\sqrt{5}}$ og ændrer fasen til nær modfase.

Eksempel 5.5. Anvendelse på vekselstrøm.

Lad en elektromotorisk kraft $U_1 = U_0\cos(\omega t)$ være serieforbundet med en modstand på R, en spole med en selvinduktion på L og en kondensator med kapaciteten C. Idet



$$\begin{pmatrix} \textit{spændings-}\\ \textit{forskellen}\\ \textit{over } R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \textit{spændings-}\\ \textit{forskellen}\\ \textit{over } L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \textit{spændings-}\\ \textit{forskellen}\\ \textit{over } C \end{pmatrix} = U_0\cos(\omega t),$$

fås fra elektricitetslæren

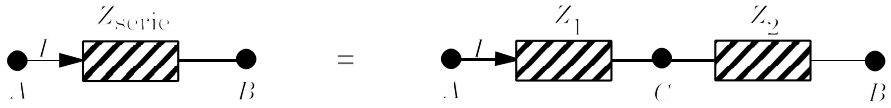
$$RI_1 + L\frac{dI_1}{dt} + \frac{\int I_1\,dt}{C} = U_0\cos(\omega t), \qquad (1)$$

hvor I_1 er strømmen, og $\int I_1\,dt$ er den øjeblikkelige ladning på kondensatoren.

1) <u>Kompleks strøm og spænding</u>. Generalisér ligningen (1) til at gælde for en kompleks spænding $U = U_0 e^{i\omega t}$ og en kompleks strøm $I = I_1 + iI_2$.

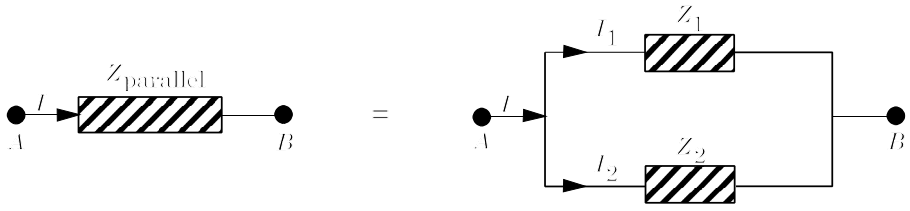
2) <u>Kompleks impedans Z</u>. Bestem et komplekst tal Z, så $U = ZI$ ("kompleks Ohms lov"), når I er en vekselstrøm $I = I_0 e^{i\omega t}$, hvor I_0 er en kompleks konstant.

3) <u>Seriekobling</u>. Vis, at to serieforbundne komplekse impedanser Z_1 og Z_2 kan erstattes med en enkelt $Z_{serie} = Z_1 + Z_2$:



4) <u>Parallelkobling</u>. Vis, at to parallelforbundne komplekse impedanser Z_1 og Z_2 kan erstattes med en enkelt

$$Z_{parallel} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \left(\text{dvs. } \frac{1}{Z_{parallel}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right):$$



5)

Komponenter. Vis, at de komplekse impedanser for de elementære komponenter er givet ved:

	kompleks impedans	symbol
modstand R [ohm]	R	
selvinduktion L [henry]	$i\omega L$	
kapacitet C [farad]	$\frac{1}{i\omega C}$	

LØSNING:

1) Sammen med ligning (1) betragtes ligningen

$$iRI_2 + iL\frac{dI_2}{dt} + i\frac{\int I_2\,dt}{C} = iU_0\sin(\omega t) \quad . \qquad (2)$$

Indføres den komplekse strøm $I = I_1 + iI_2$ og den komplekse spænding $U = U_0 e^{i\omega t} = U_0\cos(\omega t) + iU_0\sin(\omega t)$, fås ved addition af ligningerne (1) og (2):

$$\underline{\underline{RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{\int I\,dt}{C} = U.}} \qquad (3)$$

2) $I = I_0 e^{i\omega t}$, hvor I_0 er en kompleks konstant, fås $\frac{dI}{dt} = I_0\, i\omega\, e^{i\omega t} = i\omega t$, og

$\int I\,dt = \frac{I_0}{i\omega} e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega}$. Ved indsættelse i ligning (3) fås:

$$RI + Li\omega I + \frac{I}{i\omega C} = U \quad \Leftrightarrow \quad \left(R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}\right) I = U$$

dvs. $U = ZI$, hvor $\underline{\underline{Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}}}$.

3) Den "komplekse Ohms lov" $U = ZI$ giver

$$U_{AB} = U_{AC} + U_{CB} = Z_1 I + Z_2 I = (Z_1 + Z_2) I = Z_{serie} \cdot I$$

dvs. $\underline{\underline{Z_{serie} = Z_1 + Z_2}}$.

4) Den "komplekse Ohms lov" $I = \frac{U}{Z}$ giver

$$I = I_{(1)} + I_{(2)} = \frac{U_{AB}}{Z_1} + \frac{U_{AB}}{Z_2} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right) U_{AB} = \frac{U_{AB}}{Z_{parallel}}, \quad \text{dvs.}$$

$$\frac{1}{Z_{parallel}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad \text{eller} \quad \underline{\underline{Z_{parallel} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}}}.$$

5) Følger af besvarelsen af 2) og 3) ovenfor.

5.7 DEN BINOME LIGNING $z^n = a$

Vi betragter nu den "binome ligning" $z^n = a$, hvor n er et helt positivt tal, og a er et vilkårligt komplekst tal forskelligt fra 0. Idet a skrives på polær form $a = |a|\,e^{i\alpha}$ eller rektangulær form $a = a_1 + ia_2$, gælder følgende sætning.

SÆTNING 5.2 *(rødder i binom ligning). Ligningen* $z^n = |a|\,e^{i\alpha}$ $(a \neq 0)$ *har netop* n *forskellige rødder:* $z_p = \sqrt[n]{|a|}\; e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + p\frac{2\pi}{n}\right)}$, $p \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. *Rødderne er vinkelspidser for en regulær n-kant med centrum i 0 (se figur 5.15).*

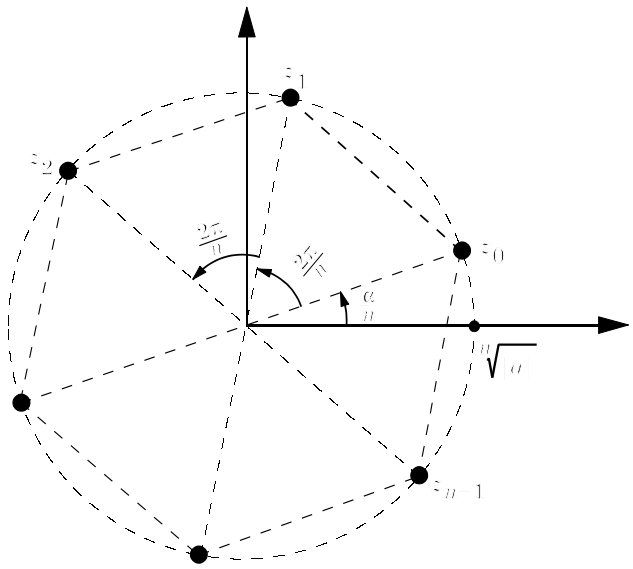


Fig. 5.15. *Rødderne i den binome ligning* $z^n = |a|\,e^{i\alpha}$.

For n=2 kan de to løsninger til ligningen $z^2 = a_1 + ia_2$ *også skrives* $z = \pm\left[\sqrt{\frac{|a|+a_1}{2}} + i\cdot\mathrm{sign}(a_2)\cdot\sqrt{\frac{|a|-a_1}{2}}\right]$, *hvor*

$$\mathrm{sign}(a_2) = \begin{cases} 1 & \text{for } a_2 \geq 0 \\ -1 & \text{for } a_2 < 0. \end{cases}$$

Bevis for sætning 5.2. Indsættes z på polær form $z = |z|\,e^{iu}$ i den givne ligning, fås

$$\left(|z|\,e^{iu}\right)^n = |a|\,e^{i\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad |z|^n\,e^{inu} = |a|\,e^{i\alpha}.$$

At to komplekse tal er ens, betyder, at de har samme modulus og (på nær et multiplum af 2π) også samme argument. Vi får derfor

$$\begin{cases} |z|^n = |a| \\ nu = \alpha + p2\pi, \quad p \in Z \text{ (hele tal)} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|a|} \\ u = \frac{\alpha}{n} + p\frac{2\pi}{n}. \end{cases}$$

Dermed har vi fundet rødderne

$$z = |z|\,e^{iu} = \sqrt[n]{|a|}\,e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+p\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

Det ses, at rødderne har modulus $\sqrt[n]{|a|}$ og argument $\frac{\alpha}{n}+p\frac{2\pi}{n}$, hvor p er et helt tal. Geometrisk ligger rødderne altså på en cirkel med radius $\sqrt[n]{|a|}$, og vinklen mellem stedvektorerne til to på hinanden følgende rødder er $\frac{2\pi}{n}$ (se figur 5.15). Rødderne er derfor vinkelspidser i en regulær n-kant, dvs. ligningen har *netop* n forskellige rødder, som fremkommer, når p gennemløber tallene 0, 1, 2, ..., n -1. (Andre værdier af p giver ikke nye rødder, da eksponentialfunktionen har perioden $2\pi i$).

For tilfældet $n = 2$ kan vi kontrollere den alternative skriveform for de to rødder:

$$\left(\pm\left[\sqrt{\frac{|a|+a_1}{2}}+i\cdot\operatorname{sign}(a_2)\cdot\sqrt{\frac{|a|-a_1}{2}}\right]\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{|a|+a_1}{2}}\right)^2+i^2\cdot\left(\sqrt{\frac{|a|-a_1}{2}}\right)^2+2i\cdot\operatorname{sign}(a_2)\sqrt{\frac{|a|+a_1}{2}\cdot\frac{|a|-a_1}{2}}$$

$$= \frac{|a|+a_1}{2}-\frac{|a|-a_1}{2}+2i\cdot\operatorname{sign}(a_2)\sqrt{\frac{|a|^2-a_1^2}{4}} = \frac{a_1}{2}+\frac{a_1}{2}+i\cdot\operatorname{sign}(a_2)\sqrt{a_1^2+a_2^2-a_1^2} = a_1+i\,a_2.$$

Eksempel 5.6. Binom ligning.

Løs ligningen $z^4 = -8+i8\sqrt{3}$. Rødderne ønskes angivet på rektangulær form. Endvidere ønskes de afsat i en kompleks talplan.

LØSNING:

Idet $-8+i8\sqrt{3} = 16e^{i\frac{2\pi}{3}}$, fås

$$z^4 = 16e^{i\frac{2\pi}{3}} \qquad \text{eller} \qquad z^4 = 16e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+p\cdot 2\pi\right)}$$

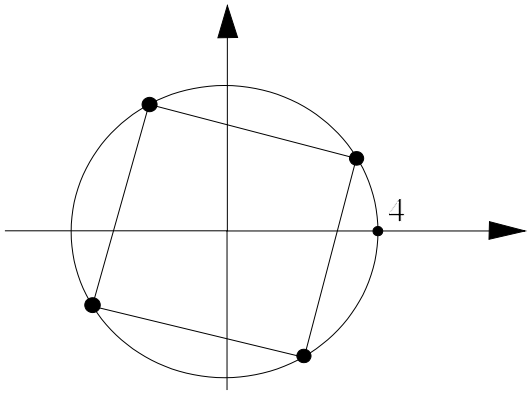
$$\Leftrightarrow \quad z = \left(16e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+p\cdot 2\pi\right)}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16}\,e^{i\left(\frac{2\pi}{3\cdot 4}+p\cdot\frac{2\pi}{4}\right)}, \qquad p = 0,1,2,3$$

$$\Leftrightarrow \quad z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+p\cdot\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad z = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \vee \quad z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \vee \quad z = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} \quad \vee \quad z = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}.$$

Ved omskrivning fra polær form til rektangulær form fås:

$$\underline{\underline{z = \sqrt{3}+i}} \quad \vee \quad \underline{\underline{z = -1+\sqrt{3}i}} \quad \vee \quad \underline{\underline{z = -\sqrt{3}-i}} \quad \vee \quad \underline{\underline{z = 1-\sqrt{3}i}}.$$

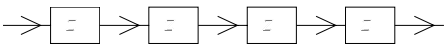


LØSNING med Maple:

>solve (z^4=-8+8*sqrt(3)*I) ;

$$\sqrt{3}+I, -\sqrt{3}-I, 1-I\sqrt{3}, -1+I\sqrt{3}$$

Anvendelse. Fire ens systemer, hver med "kompleks forstærkning" z *(se eksempel 5.4),* serieforbindes, og man måler, at den samlede komplekse forstærkning z^4 er $-8+i8\sqrt{3}$. Hvilke værdier kan z have?



5.8 ANDENGRADSLIGNINGEN

Komplekse koefficienter. Ligningen $Az^2+Bz+C=0 \quad (A\neq 0)$ med komplekse koefficienter A, B og C har 2 løsninger (når en dobbeltrod regnes for 2 løsninger). Vi kan nemlig foretage samme omskrivning som i det reelle tilfælde:

$$Az^2+Bz+C=0 \qquad \text{(multiplicerer med 4A:)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4A^2z^2+4ABz+4AC=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2Az+B)^2=B^2-4AC$$

$$\Leftrightarrow \quad (2Az+B)^2=D \qquad (1)$$

Ligning (1) er en binom ligning, som vi ved har 2 løsninger, forudsat at diskriminanten $D=B^2-4AC\neq 0$. Andengradsligningens løsninger kan derfor findes ved at løse den binome ligning (eller af appendix 5.2). Er A, B og C reelle tal, bliver løsningerne særlig simple, som fremhævet i den følgende sætning.

SÆTNING 5.3 *(reelle koefficienter). Andengradsligningen*

$$Az^2 + Bz + C = 0 \qquad (A \neq 0)$$

med de ***reelle*** *koefficienter A, B og C, og diskriminanten* $D = B^2 - 4AC$ *har*

1) for $D>0$ *to reelle løsninger* $z = \dfrac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}$,

2) for $D=0$ *én reel løsning* $z = \dfrac{-B}{2A}$,

3) for $D<0$ *to komplekse løsninger* $z = \dfrac{-B \pm i\sqrt{|D|}}{2A}$.

(Bemærk, at alle 3 tilfælde løst kan sammenfattes i den første formel $\dfrac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}$, *idet f.eks.* $\pm\sqrt{-16} = \pm\sqrt{i^2 16} = \pm 4i$).

Bevis. Idet D er reel, fås af den binome ligning (1)

$$z + \frac{B}{2A} = \begin{cases} \dfrac{\pm\sqrt{D}}{2A} & \text{for } D>0 \\ 0 & \text{for } D=0 \\ \dfrac{\pm i\sqrt{|D|}}{2A} & \text{for } D<0\,. \end{cases}$$

Heraf følger sætningen ved at isolere z i de 3 tilfælde.

Eksempel 5.7. Andengradsligningen med reelle koefficienter.

Løs, inden for mængden af komplekse tal, ligningen $2z^2 - 4z + 10 = 0$.

LØSNING:

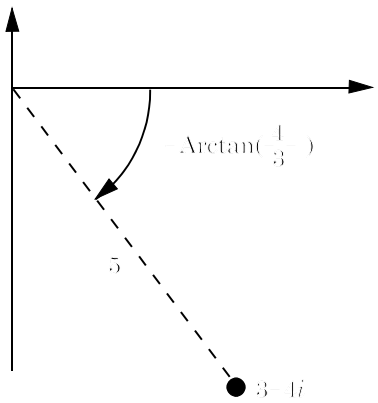
Diskriminanten er $D = (-4)^2 - 4\cdot 2\cdot 10 = -64 < 0$. I dette tilfælde bliver der derfor to komplekse løsninger

$$z = \frac{-(-4) \pm i\sqrt{64}}{2\cdot 2} = \underline{\underline{1 \pm 2i}}\,.$$

Eksempel 5.8. Andengradsligning med komplekse koefficienter.

Løs ligningen

$$z^2 + 2iz - 4 + 4i = 0 \ .$$



LØSNING:

Diskriminanten er

$$D = (2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4 + 4i) = -4 + 16 - 16i = 12 - 16i,$$

som indsat i $\left(z + \frac{B}{2A} \right)^2 = \frac{D}{4A^2}$ giver

$$\left(z + \frac{2i}{2} \right)^2 = \frac{12 - 16i}{4} \iff (z+i)^2 = 3 - 4i \iff (z+i)^2 = 5\mathrm{e}^{i\left(\mathrm{Arctan}(-\frac{4}{3}) + 2p\pi\right)}$$

$$\iff \quad z + i = \sqrt{5}\mathrm{e}^{i\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}(-\frac{4}{3})} \quad \vee \quad z + i = \sqrt{5}\mathrm{e}^{i\left(\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}(-\frac{4}{3}) + \pi\right)}$$

$$\iff \quad z + i = 2 - i \quad \vee \quad z + i = -2 + i \qquad \iff \qquad \underline{\underline{z = 2 - 2i}} \quad \vee \quad \underline{\underline{z = -2}} \ .$$

5.8 POLYNOMIER

Anvendelser. Nogle meget vigtige typer differentialligninger, f.eks.

$$\frac{d^7x}{dt^7} - \frac{d^6x}{dt^6} - \frac{d^5x}{dt^5} - 3\frac{d^4x}{dt^4} + 32\frac{d^3x}{dt^3} - 68\frac{d^2x}{dt^2} + 68\frac{dx}{dt} - 28x(t) = 0$$

har løsninger af formen $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Indsættes $x = \mathrm{e}^{\lambda t}$, fås således

$$\left(\lambda^7 - \lambda^6 - \lambda^5 - 3\lambda^4 + 32\lambda^3 - 68\lambda^2 + 68\lambda - 28\right)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0$$

$$\iff \quad \lambda^7 - \lambda^6 - \lambda^5 - 3\lambda^4 + 32\lambda^3 - 68\lambda^2 + 68\lambda - 28 = 0 \ .$$

Den sidste ligning indeholder et polynomium. Vi vil derfor nærmere studere polynomier og deres rødder (nulpunkter), inden vi fortsætter med differentialligninger i næste kapitel.

Af det forrige afsnit følger, at andengradsligningen $a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ har netop 2 rødder (når en dobbeltrod regnes for 2 rødder).

Tilsvarende siger den følgende sætning, at et vilkårligt polynomium $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ har netop n rødder. Koefficienterne $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ er her komplekse tal (specielt kan de altså være reelle tal), $a_n \neq 0$ og $n \in \{1,2,3,\ldots\}$.

SÆTNING 5.4 *(algebraens fundamentalsætning). Ethvert polynomium af n'te grad* $(n \geq 1)$

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$$

kan netop på én måde (når der bortses fra faktorernes rækkefølge) opløses i n førstegradsfaktorer

$$P(z) = a_n (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\ldots(z-\lambda_n) \ .$$

Der er altså netop n rødder $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, *hvoraf nogle kan være ens.*

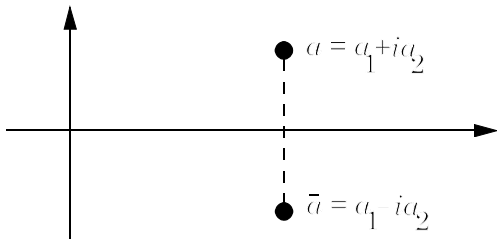
NB: Hvis en bestemt førstegradsfaktor $z-\lambda_j$ optræder i alt m gange, siges λ_j at være m *gange rod*.

Eksempel: $Az^2 + Bz + C = A(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)$, hvor λ_1 og λ_2 er polynomiets rødder.

Eksempel: $2z^4 - 8z^3 + 14z^2 - 12z + 4 = 2(z-1)(z-1)(z-1-i)(z-1+i)$, hvor $1,\ 1,\ 1+i$ og $1-i$ er polynomiets rødder.

Konjugering.

Lad $a = a_1 + ia_2$ $(a_1, a_2 \in \mathbb{R})$ være et komplekst tal. Ved spejling i de reelle tals akse fås *a's komplekst konjugerede tal* $a_1 - ia_2$, der betegnes $\overline{a}$.



Af definitionen følger, at $\overline{a} + a$ og $a \cdot \overline{a}$ bliver reelle tal, og at

$$\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}, \quad \overline{a-b} = \overline{a} - \overline{b}, \quad \overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}, \quad \overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}, \quad \overline{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha} \ (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Polynomier med reelle koefficienter.

Ved de fleste anvendelser vil et polynomium

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \quad (a_n \neq 0,\ n \in \{1,2,3,\ldots\})$$

have reelle koefficienter $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$, og så gælder:

SÆTNING 5.5 *(polynomier med reelle koefficienter). Hvis* λ *er en kompleks (ikke-reel) rod i* $P(z)$, *så er det kompleks konjugerede tal* $\overline{\lambda}$ *også en rod. Dette betyder, at* $P(z)$ *kan opløses i et produkt af:*

førstegradsfaktorer med reelle koefficienter og

andengradsfaktorer $z^2 - (\lambda + \overline{\lambda})z + \lambda\overline{\lambda}$ *med reelle koefficienter.*

Hvis λ *er p gange rod, vil* $\overline{\lambda}$ *også være p gange rod, således at* $P(z)$ *indeholder andengrads-faktoren p gange.*

Eksempel: $2z^4 - 10z^3 + 20z^2 - 20z + 8 = 2(z-1)(z-2)(z^2 - 2z + 2)$, hvor polynomiet har rødderne 1, 2, $1+i$ og $1-i$.

Bevis. Ifølge sætning 5.4 kan $P(z)$ opløses i førstegradsfaktorer
$P(z) = a_n(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\ldots(z-\lambda_n)$, hvor $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ er polynomiets rødder. Til de reelle rødder svarer altså førstegradsfaktorer $(z-\lambda_k)$ med reelle koefficienter.

Hvis $\lambda = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$ er en "kompleks rod" $(y \neq 0)$, har vi

$$a_n(x+iy)^n + a_{n-1}(x+iy)^{n-1} + \ldots + a_1(x+iy) + a_0 = 0 .$$

Ved konjugering fås under brug af de ovennævnte regler for konjugering

$$\overline{a_n}(x-iy)^n + \overline{a_{n-1}}(x-iy)^{n-1} + \ldots + \overline{a_1}(x-iy) + \overline{a_0} = \overline{0}$$

eller, da a'erne er reelle tal

$$a_n(x-iy)^n + a_{n-1}(x-iy)^{n-1} + \ldots + a_1(x-iy) + a_0 = 0 .$$

Heraf ses, at $\overline{\lambda} = x - iy$ er en kompleks rod i $P(z)$. Polynomiet $P(z)$ må derfor indeholde de to komplekse førstegradsfaktorer $(z-\lambda)$ og $(z-\overline{\lambda})$, og dermed andengradsfaktoren

$$(z-\lambda)(z-\overline{\lambda}) = z^2 - (\lambda + \overline{\lambda})z + \lambda\overline{\lambda},$$

hvor $\lambda + \overline{\lambda}$ og $\lambda\overline{\lambda}$ er reelle.

Til sidst betragtes det tilfælde, hvor λ er p gange rod i $P(z)$. Ved division med andengradsfaktoren opnås et polynomium $Q(z)$, hvor graden er 2 lavere. Hvis $p > 1$, er λ og dermed $\overline{\lambda}$ også en rod i $Q(z)$. Ved fortsat division indses, at $\overline{\lambda}$ er p gange rod i $P(z)$ og, at $P(z)$ altså indeholder andengradsfaktoren p gange.

Hvordan finder man rødderne? I praksis kan rødderne i et *n*'te gradspolynomium med *reelle* koefficienter findes på flere måder:

1) Hvis koefficienterne $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ er hele tal, prøves med gæt af typen $\pm\frac{p}{q}$, hvor p går op i a_0, og q går op i a_n. Herved findes *samtlige* rationale rødder.

2) Kendes allerede nogle rødder $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ vil *polynomiedivisionen* $\frac{P(z)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\ldots(z-\lambda_p)}$ give et polynomium $Q(z)$ af lavere grad, hvis rødder derpå skal findes.

3) Benytte et program som Maple.

4) Alle rødder (også de komplekse) kan findes ved mere omfattende *numeriske metoder*.

Eksempel 5.9. Polynomium med reelle koefficienter.

Det oplyses, at $1+i$ er en rod i polynomiet

$P(z) = 2z^5 - 10z^4 + 30z^3 - 50z^2 + 48z - 20$.

1) Angiv alle rødderne.
2) Opløs $P(z)$ i et produkt af førstegradspolynomier med reelle koefficienter og andengradspolynomier med reelle koefficienter.

LØSNING:

1) Da $\lambda = 1+i$ er en rod, og $P(z)$ har reelle koefficienter, vil også $\overline{\lambda} = 1-i$ være en rod. Derfor indeholder $P(z)$ faktoren

   $(z-\lambda)(z-\overline{\lambda}) = (z-1-i)(z-1+i) = z^2 - 2z + 2$.

   Da $P(z)$ er af ulige grad og har reelle koefficienter, må der være mindst én reel rod. Ved "$\frac{p}{q}$ metoden" eller numerisk rodsøgning findes roden 1. Polynomiet $P(z)$ indeholder altså faktoren $(z-1)(z^2-2z+2) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$.

   Ved polynomiedivision med denne faktor fås

$$\begin{array}{l|l|l}
z^3-3z^2+4z-2 & 2z^5-10z^4+30z^3-50z^2+48z-20 & |\,2z^2-4z+10 \\
\hline
 & \underline{2z^5-6z^4+8z^3-4z^2} & \\
 & -4z^4+22z^3-46z^2+48z-20 & \\
 & \underline{-4z^4+12z^3-16z^2+8z} & \\
 & 10z^3-30z^2+40z-20 & \\
 & \underline{10z^3-30z^2+40z-20} & \\
 & 0 &
\end{array}$$

De resterende rødder i $P(z)$ bliver da rødderne i andengradsligningen

$2z^2-4z+10=0$. Disse rødder er $\dfrac{-(-4)\pm i\sqrt{|(-4)^2-4\cdot 2\cdot 10|}}{2\cdot 2} = 1\pm 2i$.

Samtlige rødder i $P(z)$ er altså $\underline{\underline{1+i,\ 1-i,\ 1,\ 1+2i,\ 1-2i}}$.

2) Af regningerne ovenfor fås

$\underline{\underline{P(z) = 2(z-1)(z^2-2z+2)(z^2-2z+5)}}$.

Maple:

I "Math mode" :

Skriv $2z^5-10z^4+30z^3-50z^2+48z-20$

Sæt Cursor på udtryk, højre musetast, vælg solve, solve

Resultat: {z=1},{z=1+2*I*},{z=2-2*I*},{z=1+*I*},{z=1-*I*}

SUPPLEMENT: 5A ALGEBRAENS FUNDAMENTALSÆTNING

SÆTNING 5.4 *(algebraens fundamentalsætning). Ethvert polynomium af n'te grad*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$$

kan på netop én måde (når der bortses fra faktorernes rækkefølge) opløses i n førstegradsfaktorer

$$P(z) = a_n(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\ldots(z-\lambda_n).$$

Der er altså netop n rødder $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, *hvoraf nogle kan være ens.*

Bevis. Vi vil opdele beviset i 3 dele. I del 1) forudsættes, at ethvert polynomium (af grad ≥ 1) har mindst én rod. Denne påstand bevises først i del 3).

1) Ethvert polynomium (af grad ≥ 1***) kan opløses i førstegradsfaktorer.***

Lad $P(z)$ have graden n, og lad λ_1 være en rod, dvs. $P(\lambda_1) = 0$. Ved sædvanlig "polynomiedivision" med $z-\lambda_1$ kan vi én for én bestemme koefficienterne i et polynomium $Q_1(z)$, sådan at

$$P(z) = (z-\lambda_1)Q_1(z) + r,$$

hvor r betegner divisionsresten (en konstant). Idet $P(\lambda_1) = 0$, fås heraf $r = 0$ og dermed $P(z) = (z-\lambda_1)Q_1(z)$, hvor $Q_1(z)$ har graden $n-1$. - - På samme måde fortsættes med $Q_1(z)$, og efter n skridt er vi færdige.

2) Opløsningen af et polynomium i førstegradsfaktorer er entydig.

Lad

$$P(z) = a(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\ldots(z-\lambda_n) = b(z-\mu_1)(z-\mu_2)\ldots(z-\mu_m).$$

Da de to polynomier har henholdsvis az^n og bz^m som højeste led, er $n = m$ og $a = b$. Da λ_1 er rod på venstre side, og altså også på højre side, er λ_1 et af tallene $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Lad os antage, at det er μ_1. Ved division med $x-\lambda_1$ fås da

$$a(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_n) = b(x-\mu_2)\ldots(x-\mu_n).$$

Efter n sådanne divisioner er påstanden bevist.

3) Ethvert polynomium $P(z)$ ***(af grad*** ≥ 1***) har mindst én rod*** z_0.

Lad $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, hvor $a_n \neq 0$ og $n \in \{1,2,3,\ldots\}$. Idet $|P(z)| \to \infty$ for $|z| \to \infty$, må der eksistere et tal z_0, for hvilket den kontinuerte funktion $|P(z)|$ har globalt minimum. Vi vil vise, at $P(z_0) = 0$.

Beviset føres indirekte ved at antage, at $P(z_0) \neq 0$, og indse, at dette fører til en modstrid.

Sættes $z = z_0 + h$, fås

$$P(z_0 + h) = a_0 + a_1(z_0 + h) + a_2(z_0 + h)^2 + \ldots + a_n(z_0 + h)^n,$$

som kan omskrives til formen

$$P(z_0 + h) = b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + \ldots + b_n h^n.$$

Her ser vi, at $b_0 = P(z_0)$. Lad b_k være det første af tallene $b_1, b_2, \ldots, b_n$, som ikke er nul (b_k eksisterer, da $b_n = a_n \neq 0$). Så kan vi skrive

$$P(z_0 + h) = P(z_0) + b_k h^k + b_{k+1} h^{k+1} + \ldots + b_n h^n .$$

Da komplekse tal adderes som vektorer, gælder $|a + b + \ldots + w| \leq |a| + |b| + \ldots + |w|$, dvs.

$$|P(z_0 + h)| \leq |P(z_0) + b_k h^k| + |b_{k+1} h^{k+1}| + |b_{k+2} h^{k+2}| + \ldots + |b_n h^n| . \qquad (1)$$

Lad nu r være et positivt tal, om hvilket vi blot forudsætter, at $|b_k| r^k \leq |P(z_0)|$. Lader vi h gennemløbe en cirkel c_1 med centrum i 0 og radius r (se figur 5.16), vil tallet $P(z_0) + b_k h^k$ gennemløbe en cirkel c_2 med centrum i $P(z_0)$ og radius $|b_k| r^k$ (endda k gange, figur 5.17). Det er derfor muligt at vælge en sådan værdi af h på c_1, at $|P(z_0) + b_k h^k|$ bliver mindst, dvs.

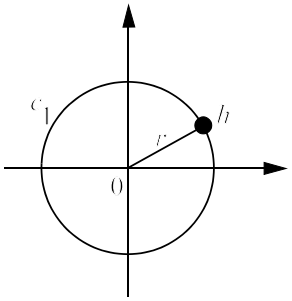


Fig. 5.16.

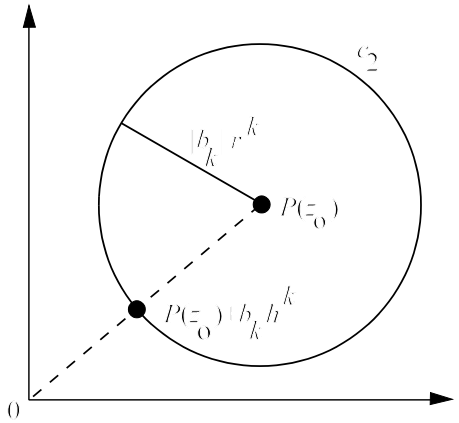


Fig. 5.17.

$P(z_0) + b_k h^k$ bliver skæringspunktet mellem c_2 og linien fra 0 til $P(z_0)$. For denne værdi af h har vi derfor, at $|P(z_0) + b_k h^k| = |P(z_0)| - |b_k| r^k$. Af uligheden (1) fås nu

$$\begin{aligned} |P(z_0 + h)| &\leq |P(z_0)| - |b_k| r^k + |b_{k+1}| r^{k+1} + \ldots + |b_n| r^n \\ &= |P(z_0)| - r^k \left(|b_k| - |b_{k+1}| r - \ldots - |b_n| r^{n-k} \right) . \end{aligned}$$

Størrelsen i parentesen konvergerer mod $|b_k| > 0$ for $r \to 0$. Vi kan derfor vælge r, således at størrelsen i parentesen er >0. Da fås $|P(z_0 + h)| < |P(z_0)|$ i strid med, at $|P(z_0)|$ er globalt minimum. Hermed er det indirekte bevis gennemført.

SUPPLEMENT: 5B DEKOMPOSITION I DET GENERELLE TILFÆLDE

I kapitel 3 har vi betragtet en brøk $\frac{P(x)}{Q(x)}$, hvor $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomier, f.eks. brøken $\frac{2x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x - 10}{(x-2)(x^2-2x+2)}$. Vi dekomponerede brøken til en sum af et polynomium og de simplest mulige ægte brøker, f.eks.

$$2x + 3 + \frac{2}{x-2} + \frac{3x+1}{x^2-2x+2}.$$

Vi vil nu se på det generelle tilfælde, hvor $Q(x)$ kan have nogle ens rødder, sådan at der optræder "gentagne" faktorer, når $Q(x)$ opløses i faktorer. Et eksempel herpå er brøken

$$\frac{3x^2 + 64x + 8}{(x-1)^3(x+2)(x^2+2x+2)^2}$$

hvor faktoren $x-1$ optræder 3 gange og faktoren x^2+2x+2 (der ikke har reelle rødder) optræder to gange. Man kan vise, at denne brøk kan dekomponeres til den følgende sum af seks simple brøker:

$$\underbrace{\frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-1}}_{\text{[stammer alle tre fra faktoren } (x-1)^3\text{]}} + \frac{d}{x+2} + \underbrace{\frac{ex+f}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{gx+h}{x^2+2x+2}}_{\text{[stammer begge fra faktoren } (x^2+2x+2)^2\text{]}}$$

hvor a, b, c, d, e, f, g og h er (entydigt bestemte) reelle konstanter. Herom handler den følgende sætning.

SÆTNING 5B.1 *(dekomposition). Lad* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *være en ægte brøk. Efter at nævneren* $Q(x)$ *er opløst i reelle faktorer:*

$$Q(x) = (x-r)^n \ldots (x^2 + \alpha x + \beta)^p, \quad ^{1)}$$

kan brøken $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *på netop én måde dekomponeres til et udtryk af formen:*

$$\underbrace{\frac{k_1}{x-r} + \frac{k_2}{(x-r)^2} + \ldots + \frac{k_n}{(x-r)^n}}_{\text{[stammer alle fra faktoren } (x-r)^n\text{]}} + \ldots + \underbrace{\frac{\ell_1 x + m_1}{x^2+\alpha x+\beta} + \frac{\ell_2 x + m_2}{(x^2+\alpha x+\beta)^2} + \ldots + \frac{\ell_p x + m_p}{(x^2+\alpha x+\beta)^p}}_{\text{[stammer alle fra faktoren } (x^2+\alpha x+\beta)^p\text{]}},$$

hvor $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots, \ell_1, m_1, \ell_2, m_2, \ldots, \ell_p, m_p \in \mathbb{R}$.

---

[1] Det forudsættes, at $r, \ldots, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, og at faktorer af typen $x^2 + \alpha x + \beta$ ikke har reelle rødder.

Bevis. Beviset føres ved successivt at fraspalte simple brøker fra $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

1) Vi vil først "fraspalte" brøken $\frac{k_n}{(x-r)^n}$, dvs. vise at der findes netop én konstant k_n, sådan at

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{k_n}{(x-r)^n} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

hvor $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ er en ny ægte brøk med en nævner

$$Q_1(x) = (x-r)^{n-1} \ldots (x^2+\alpha x+\beta)^p,$$

hvis grad er 1 lavere end graden af $Q(x)$.

Vi vil derfor betragte differensen $\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{k_n}{(x-r)^n}$. Lad os for kortheds skyld skrive $Q(x) = (x-r)^n \cdot q(x)$. Vi har da

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{k_n}{(x-r)^n} = \frac{P(x) - k_n \cdot q(x)}{Q(x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{k_n}{(x-r)^n} = \frac{P(x) - k_n \cdot q(x)}{(x-r)\cdot Q_1(x)} \qquad (\text{idet } Q(x) = (x-r)\cdot Q_1(x)).$$

Da vi ønsker, at $\frac{P(x) - k_n \cdot q(x)}{x-r}$ skal være et polynomium $P_1(x)$, må vi vælge k_n, sådan at $x-r$ går op i tælleren $P(x) - k_n \cdot q(x)$, dvs. så $P(r) - k_n \cdot q(r) = 0$. Idet $q(r) \neq 0$, eksisterer der netop én værdi af k_n $\left(\text{nemlig } k_n = \frac{P(r)}{q(r)}\right)$, som opfylder dette krav. Vi har hermed bevist, at der findes netop én konstant k_n, sådan at

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{k_n}{(x-r)^n} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

hvor graden af $Q_1(x)$ er 1 lavere end graden af $Q(x)$.

2) På samme måde fraspaltes $\frac{k_{n-1}}{(x-r)^{n-1}}$ fra $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, så vi får

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} - \frac{k_{n-1}}{(x-r)^{n-1}} = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)},$$

hvor graden af $Q_2(x)$ er 2 lavere end graden af $Q(x)$. Fortsættes på denne måde, fås

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{k_1}{x-r} + \frac{k_2}{(x-r)^2} + \ldots + \frac{k_n}{(x-r)^n} + \frac{P_n(x)}{Q_n(x)},$$

hvor graden af $Q_n(x)$ er n lavere end graden af $Q(x)$.

3) Helt analogt til punkt 1) kan vi vise, at der findes netop ét par konstanter ℓ_p og m_p, sådan at

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{\ell_p x + m_p}{\left[x^2+\alpha x+\beta\right]^p} + \frac{P_{n+2}(x)}{Q_{n+2}(x)},$$

hvor $\frac{P_{n+2}(x)}{Q_{n+2}(x)}$ er en ny ægte brøk med en nævner $Q_{n+2}(x)$, hvis grad er 2 lavere end graden af $Q_n(x)$. Idet vi definerer $Q_{n+2}(x)$ ved ligningen $Q_n(x) = (x^2+\alpha x+\beta)\cdot Q_{n+2}(x)$, fås

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} - \frac{\ell_p x + m_p}{(x^2+\alpha x+\beta)^p} = \frac{P_n(x) - (\ell_p x + m_p)\cdot q_n(x)}{(x^2+\alpha x+\beta)\cdot Q_{n+2}(x)} \qquad [\text{idet } Q_n(x) = (x^2+\alpha x+\beta)^p \cdot q_n(x)]\,.$$

Da vi ønsker, at $x^2+\alpha x+\beta$ skal gå op i tælleren $P_n(x) - (\ell_p x + m_p)\cdot q_n(x)$, må vi sørge for, at rødderne c og $\bar{c}$ i $x^2+\alpha x+\beta$ også er rødder i tælleren, dvs. $P_n(c) - (\ell_p c + m_p)\cdot q_n(c) = 0$ (og dermed $P_n(\bar{c}) - (\ell_p \bar{c} + m_p)\cdot q_n(\bar{c}) = 0$). Ligesom i eksempel 3.7 eksisterer der netop ét sæt værdier af ℓ_p og m_p, som opfylder dette krav. Vi har hermed vist, at

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{\ell_p x + m_p}{(x^2+\alpha x+\beta)^p} + \frac{P_{n+2}(x)}{Q_{n+2}(x)},$$

hvor graden af $Q_{n+2}(x)$ er 2 lavere end graden af $Q_n(x)$.

4) På samme måde fraspaltes $\frac{\ell_{p-1} x + m_{p-1}}{(x^2+\alpha x+\beta)^{p-1}}$ fra $\frac{P_{n+2}(x)}{Q_{n+2}(x)}$, så vi får

$$\frac{P_{n+2}(x)}{Q_{n+2}(x)} - \frac{\ell_{p-1} x + m_{p-1}}{(x^2+\alpha x+\beta)^{p-1}} = \frac{P_{n+4}(x)}{Q_{n+4}(x)},$$

hvor graden af $Q_{n+4}(x)$ er 4 lavere end graden af $Q_n(x)$. Fortsættes på denne måde, fås til sidst

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{k_1}{x-r} + \frac{k_2}{(x-r)^2} + \ldots + \frac{k_n}{(x-r)^n} + \ldots + \frac{\ell_1 x + m_1}{x^2+\alpha x+\beta} + \frac{\ell_2 x + m_2}{(x^2+\alpha x+\beta)^2} + \ldots + \frac{\ell_p x + m_p}{(x^2+\alpha x+\beta)^p}$$

svarende til udtrykket i sætningen.

5) Hvis fraspaltningerne foretages i en anden rækkefølge, kan man vise, at resultatet alligevel bliver det samme. Beviset kan foretages efter følgende retningslinier: - Antag, at der foreligger en dekomposition. a) Betragt en af de simple brøker B1 med nævner af højst mulig grad. b) Saml de øvrige led i dekompositionen på fælles brøkstreg. c) Indse som under punkt 1) og 3), at B1's tæller er entydigt bestemt. d) Fortsæt på lignende måde som under punkt 2) og 4).

Eksempel 5B.1. Dekomposition

Dekomponér brøken $\frac{2x^2-4x-10}{(x-3)(x-2)^2(x^2-4x+5)^2}$.

LØSNING:

Den ægte brøk $\frac{2x^2-4x-10}{(x-3)(x-2)^2(x^2-4x+5)^2}$

dekomponerer vi til en sum af de simplest mulige ægte brøker, dvs.

$$\frac{2x^2-4x-10}{(x-3)(x-2)^2(x^2-4x+5)^2} = \frac{a}{x-3}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{(x-2)^2}+\frac{dx+e}{x^2-4x+5}+\frac{fx+g}{(x^2-4x+5)^2} \tag{1}$$

Konstanten a findes ved at multiplicere ligning (1) med den til a hørende nævner $x-3$:

$$\frac{2x^2-4x-10}{(x-2)^2(x^2-4x+5)^2} = a + (x-3)\cdot(\text{udtryk})$$

og derpå indsætte $x=3$, så a står alene på højre side:

$$\boxed{x=3}: \quad \frac{2\cdot 3^2-4\cdot 3-10}{(3-2)^2(3^2-4\cdot 3+5)^2} = a \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{-4}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a=-1}}.$$

Analogt fås c efter multiplikation af ligning (1) med den til c hørende nævner $(x-2)^2$:

$$\boxed{x=2}: \quad \frac{2\cdot 2^2-4\cdot 2-10}{(2-3)(2^2-4\cdot 2+5)^2} = c \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{-10}{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{c=10}}.$$

Også f og g kan bestemmes på denne måde: - Først findes de komplekse rødder i den til f og g hørende nævner:

$$x^2-4x+5=0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4\pm i\sqrt{|4^2-4\cdot 5|}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\pm i.$$

Derpå fås f og g ved multiplikation af ligning (1) med $(x^2-4x+5)^2$ og indsættelse af en af de komplekse rødder:

$$\boxed{x=2+i}: \quad \frac{2(2+i)^2-4(2+i)-10}{(2+i-3)(2+i-2)^2} = f\cdot(2+i)+g$$

$$\Leftrightarrow \quad 2f+g+if = \frac{-12+4i}{1-i}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2f+g+if = \frac{(-12+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2f+g+if = -8-4i$$

$$\Leftrightarrow \quad f=-4 \ \wedge \ 2f+g=-8 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{f=-4}} \ \wedge \ \underline{\underline{g=0}}.$$

Vi har hermed fundet

$$\frac{2x^2-4x-10}{(x-3)(x-2)^2(x^2-4x+5)^2} = \frac{-1}{x-3}+\frac{b}{x-2}+\frac{10}{(x-2)^2}+\frac{dx+e}{x^2-4x+5}+\frac{-4x}{(x^2-4x+5)^2}.$$

For at bestemme de sidste 3 konstanter indsættes 3 små hele tal, som ikke tidligere har været indsat:

$$\boxed{x=0}: \quad \frac{-10}{-3(-2)^2\cdot 5^2} = \frac{-1}{-3}+\frac{b}{-2}+\frac{10}{(-2)^2}+\frac{e}{5} \quad \Leftrightarrow \quad e = \frac{5}{2}b-14. \tag{2}$$

$\boxed{x = 1}$: $\dfrac{2-4-10}{(-2)(-1)^2(1-4+5)^2} = \dfrac{-1}{-2} + \dfrac{b}{-1} + \dfrac{10}{(-1)^2} + \dfrac{d+e}{1-4+5} + \dfrac{-4}{(1-4+5)^2}$

$\Leftrightarrow \quad -2b + d + e = -16\,.$ (3)

$\boxed{x = -1}$: $\dfrac{2+4-10}{(-4)(-3)^2(1+4+5)^2} = \dfrac{-1}{-4} + \dfrac{b}{-3} + \dfrac{10}{(-3)^2} + \dfrac{-d+e}{1+4+5} + \dfrac{4}{(1+4+5)^2}\,.$

$\Leftrightarrow \quad -\dfrac{b}{3} - \dfrac{d}{10} + \dfrac{e}{10} = -\dfrac{7}{5}$ (4)

For at løse ligningssystemet (2), (3), (4) indsættes e fra ligning (2) i ligning (3) og (4):

$$\left.\begin{array}{lll} -2b + d + \dfrac{5}{2}b - 14 = -16 & \Leftrightarrow & b + 2d = -4 \\ -\dfrac{b}{3} - \dfrac{d}{10} + \dfrac{5}{20}b - \dfrac{14}{10} = -\dfrac{7}{5} & \Leftrightarrow & 5b + 6d = 0 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \underline{\underline{b = 6}} \\ \\ \underline{\underline{d = -5}}\,. \end{array}\right.$$

Af ligning (2) fås nu $\underline{\underline{e = 1}}$.

Vi har dermed fuldført dekompositionen:

$$\frac{2x^2-4x-10}{(x-3)(x-2)^2(x^2-4x+5)^2} = \frac{-1}{x-3} + \frac{6}{x-2} + \frac{10}{(x-2)^2} + \frac{-5x+1}{x^2-4x+5} + \frac{-4x}{(x^2-4x+5)^2}\,.$$

Edb-løsning. I programmet Maple kan dekompositionen foretages således:

convert ((2*x^2-4*x-10) / ((x-3)*(x-2)^2*(x^2-4*x+5)^2), parfrac, x) ;

$$-\frac{1}{x-3} + 10\frac{1}{(x-2)^2} + 6\frac{1}{x-2} - \frac{-1+5x}{x^2-4x+5} - 4\frac{x}{(x^2-4x+5)^2}$$

OPGAVER

Opgave 5.1 [T] *(multiplikation og division)*
Lad a *have modulus 1 og argument* $\frac{\pi}{6}$, *og lad* b *have modulus 2 og argument* $\frac{5\pi}{6}$.
Afsæt i en kompleks talplan tallene $a,\quad b,\quad i\cdot b,\quad a\cdot b,\quad \frac{a^2\cdot i}{b}$.

Opgave 5.1a *(regneregler)*
Reducér udtrykkene

1) $(1-i)\cdot(7+8\cdot i)$
2) $(1-i)+(7+8\cdot i)$
3) $(-3+i)\cdot(-14-i)$
4) $(-3+i)-(-14-i)$
5) $(2-i)\cdot(-3-i)$
6) $(2-i)+(-3-i)$
7) $\frac{1}{2+3\cdot i}$
8) $\frac{1}{3-4\cdot i}$
9) $\frac{1}{-2+i}$
10) $\frac{1}{-2-i}$

Opgave 5.2 *(regneregler)*

1) Reducér udtrykkene

a) $(1+2i)(-2+3i)\ +\ (2-i)(4+i)$
b) $(1+2i)^{-1}$
c) $\frac{2+i}{1+i}\ +\ \frac{1+17i}{10-4i}$
d) $\mathrm{Im}\left(\frac{1+273i}{1+16i}\right)$.

2[T]*) Løs ligningen* $\frac{z}{1+iz} = \frac{1+i}{3-i}$, $z\in\mathbb{C}$.

Opgave 5.3 *(regneregler)*

1) Reducér udtrykkene

a) $(3-2i)^3$
b) $\mathrm{Im}\left(\frac{1+16i}{16-i}\right)$
c) $\mathrm{Re}(\mathrm{Im}(3-2i))$
d) $\mathrm{Im}(\mathrm{Im}(3-2i))$
e) $(2-3i)(2+i)+\frac{1+7i}{3+i}+\frac{1+30i}{-30+i}$.

2) Løs ligningen $\frac{z+i}{z-i} = \frac{i}{4-i}$, $z\in\mathbb{C}$.

Opgave 5.3a *(regneregler)*

Reducér udtrykkene

1) $3\cdot e^{2i}\cdot(-2)\cdot e^{3i}$ *2)* $3\cdot e^{-2i}\cdot 4\cdot e^{2i}$ *3)* $R\cdot e^{i\omega t}\cdot e^{i\phi}$ *4)* $\square\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{i\omega t}$

Opgave 5.4 *(omregning* $R \rightarrow P$*)*

Foretag en omregning til polær form af tallene

1) 1 *2)* i *3)* $-5i$ *4)* $-1-i$

5[T]*)* $-1-i\sqrt{3}$ *6)* $\sqrt{3}-i$ *7)* $-4+i4$ *8)* $\sqrt{5}+i\sqrt{15}$

9) $1+2i$ *10)* $1-2i$ *11)* $-2-3i$ *12)* $\cos(30^\circ)+i\sin(30^\circ)$.

Opgave 5.5[T] *(omregning* $P \rightarrow R$*)*

Foretag en omregning til rektangulær form af tallene

1) $e^{i5\pi}$ *2)* $e^{1+i\frac{\pi}{2}}$ *3)* $e^{\ln 3-i\frac{\pi}{4}}$ *4)* $2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ *5)* $3e^{-i70^0}$

6) $5e^{i2}$ *7)* $4e^{i\cdot 1.50}$ *8)* $4e^{-i\cdot 1.50}$ *9)* $2e^{i100t}$ *10)* $r\,e^{i\omega t}$.

Opgave 5.5a *(regneregler)*

Reducér udtrykkene

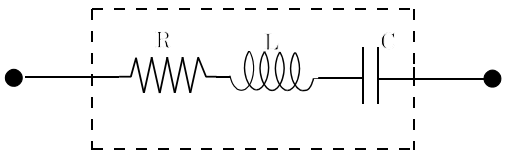
1) $(4+3i)4e^{i\cdot 1.50}$ *2)* $\dfrac{8\cos(-58^\circ)+i\sin(-58^\circ)}{4e^{-i\cdot 1.50}}$ *3)* $\dfrac{1+2i}{-2-3i}$

4) $\dfrac{4e^{i\cdot 100t}}{3e^{i\cdot 50t}}$ *5)* $\dfrac{4e^{i\cdot 100t}}{3e^{-i\cdot 50t}}\cdot(4+3i)$ *6)* $4e^{i\cdot 1.50}+5e^{i\cdot 0.644}$.

Opgave 5.6 *(beregning af modulus)*

Lad $R = 8$ *ohm*, $L = 10^{-2}$ *henry*, $C = 10^{-4}$ *farad* *(hvor* $ohm = sec^{-1}\cdot henry = sec\cdot farad^{-1}$*)*.

For apparatet

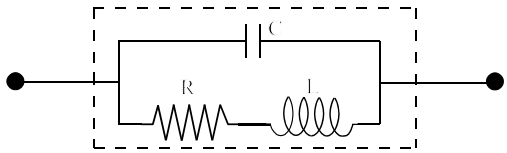


er den komplekse impedans Z *givet ved* $z = R + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}$ *(jævnfør eksempel 5.5).*

Find den (positive) værdi af vinkelfrekvensen ω*, for hvilken modulus* $|Z|$ *bliver mindst.*

Opgave 5.7 *(impedans)*

1) Find den komplekse impedans Z for apparatet



udtrykt ved C, R og L (jævnfør eksempel 5.5).

2) Idet $R = 8\ ohm$, $L = 10^{-2}\ henry$ *og* $C = 10^{-4}\ farad$, *skal man finde den positive værdi af vinkelfrekvensen* ω, *for hvilken Z bliver et reelt tal.*

Opgave 5.8 *(binom ligning)*

Løs hver af de følgende ligninger og afbild rødderne i talplanen

1) $z^2 = 2i$

2T) $z^4 = 16i$

3) $z^3 = e^{1+i\frac{\pi}{4}}$

4) $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$

5) $(z+\sqrt{2})^4 = -16$

6) $e^{3z+i} = 1+i$.

Opgave 5.9 *(andengradsligning)*

Løs hver af de følgende ligninger og afbild rødderne i talplanen

1) $z^2 = -4i$

2) $z^2 - 8z + 25 = 0$

3) $3z^2 + z + 2 = 0$

4) $z^4 - z^2 - 2 = 0$

5) $z^8 - z^4 - 2 = 0$

6T) $z^4 - z^2 + 1 = 0$.

Opgave 5.10 *(andengradsligning)*

Find løsningerne z til ligningen

$$\cos z = 2,$$

idet cosinus-funktionen defineres for en kompleks variabel z ved Euler-formlen, dvs.

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

(Vink: find f.eks. først e^{iz}*)* .

Opgave 5.11 *(konjugering)*

1) Reducér følgende udtryk

$$\overline{\overline{a} + ia} + 2a \qquad (a \in \mathbb{C})$$

$$\overline{e^{ix} + 2i} - \cos x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\mathrm{Re}(1 + 4i - (\overline{1 + 4i}))$$

$$\frac{|a|^2 + \mathrm{Im}(a) + i\mathrm{Re}(a)}{i^7\,\overline{a}} \qquad (a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}) .$$

2) Løs ligningen

$$(1+3i)z + i\overline{z} + \mathrm{Im}(\overline{z}) = 2 - e^{i\frac{9\pi}{2}} .$$

Opgave 5.12 T *(opløsning af polynomier)*

Opløs polynomiet $z^5 - 9z^4 + 34z^3 - 66z^2 + 65z - 25$ *i førstegradsfaktorer og andengradsfaktorer med reelle koefficienter, idet det oplyses, at* $2 + i$ *er en rod.*

Opgave 5.13 *(opløsning af polynomier)*

Det oplyses, at polynomiet $z^7 - 3z^6 + 9z^5 - 17z^4 + 24z^3 - 22z^2 + 16z - 8$ *blandt andet har rødder af formen* $qi,\ q \in \mathbb{R}$. *Find alle polynomiets rødder.*

Opgave 5.Eksam39b *(binom ligning, 15 point)*

Der foreligger to komplekse tal $a = \frac{2i-1}{1+i}$ *og* $b = \frac{1}{i}$.

1) Skriv $\frac{a}{b}$ *på polær form.*

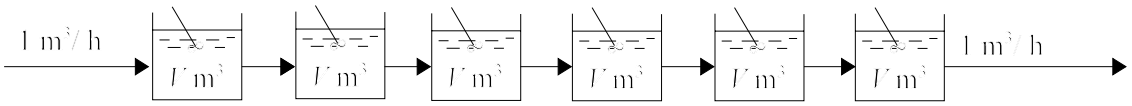
2) Find rødderne i den komplekse ligning $z^4 = \frac{a}{b}$. *Rødderne ønskes skrevet på rektangulær form, idet real- og imaginærdel ønskes bestemt med 2 decimaler.*

Opgave 5.Eksam48b *(polynomium, 15 point).*

Find rødderne i den komplekse ligning $z^6 - 2z^3 + 5 = 0$. *Rødderne ønskes skrevet på rektangulær form, idet real- og imaginærdel hver angives med 2 decimaler.*

Opgave 5.Eksam62b *(polynomium, 10 point).*
Opløs polynomiet $z^6 + 3z^5 + 9z^4 + 10z^3 + 13z^2 + 7z + 5$ *i førstegradsfaktorer, idet det oplyses, at* $z = i$ *og* $z = -1 + 2i$ *er rødder.*

Opgave 5.Eksam79b *(komplekse tal, 15 point).*



En koncentrationssvingning $\sin(t)$ *passerer det viste system med uændret fase, hvis* $(1 + iV)^6$ *er et* ***positivt reelt*** *tal (i = imaginære enhed) .*
Bestem $v \in]0;\infty[$, *så kravet er opfyldt.*

Opgave 5.Eksam90b *(komplekse tal, binom ligning, 15 point).*
1) Lad $Z_1 = -2 - i$, $Z_2 = -1 + i$ *og* $Z_3 = i$.

Lad endvidere Z være bestemt ved

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}.$$

Beregn modulus $|Z|$ *og argument* $\arg(Z)$.

Forklaring *(kan overspringen). I et vekselstrømskredsløb gælder Ohms lov* $U = Z \cdot I$, *hvor* U, Z *og* I *er komplekse størrelser. Idet impedanserne* Z_1, Z_2 *og* Z_3 *er anbragt parallelt, gælder* $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}$.

2) Find rødderne i ligningen $z^4 = -2 + 3i$. *Rødderne skal angives på rektangulær form (sumform) med mindst 2 decimaler.*

Opgave 5.Eksam137 *(komplekse tal, uden brug af hjælpemidler, 8 point).*
Reducér det komplekse udtryk $\frac{-2\sqrt{3} + 2i}{\sqrt{3} + i} + 2e^{-i2\pi/3}$ *og skriv resultatet på formen* $a\,e^{i\alpha}$, *hvor a og* α *er reelle tal, og* $a \geq 0$.

Opgave 5.Eksam171 *(binom ligning, 20 point).*
Find på formen $a + ib$ *de rødder i ligningen* $(z-1)^8 = 256 \cdot \left(\frac{-i}{i - \sqrt{3}} - \frac{1}{1 + i\sqrt{3}} \right)$,
der ligger i 2. kvadrant af den komplekse talplan (dvs. har negativ realdel og positiv imaginærdel).

Opgave 5.Eksam187 *(reduktion, binom ligning, 15 point).*
Denne opgaves 2 spørgsmål er uafhængige af hinanden.

a) Reducér det komplekse udtryk $\dfrac{(-1-\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})}{1+i} + e^{-i\pi/6}$ *og skriv resultatet på formen* $a\,e^{i\alpha}$, *hvor* a *og* α *er reelle tal og* $a>0$.

b) Find samtlige rødder i ligningen $z^6 = 8i, \quad z\in\mathbb{C}$, *og vis deres placering i den komplekse plan. Rødderne ønskes angivet på formen* $a+ib \quad (a,b\in\mathbb{R})$ *om muligt eksakt, ellers med 2 decimalers nøjagtighed.*

Opgave 5.Eksam197 *(polynomium, 15 point).*
Find samtlige rødder i ligningen $z^6 + 2z^3 + 2 = 0, \quad z\in\mathbb{C}$, *og vis deres placering i den komplekse plan. Rødderne ønskes angivet på formen* $a+ib \quad (a,b\in\mathbb{R})$ *om muligt eksakt, ellers med 2 decimalers nøjagtighed.*
NB: *Numerisk ligningsløsning med lommeregner er ikke acceptabelt.*

Opgave 5.Eksam199 *(reduktion, uden hjælpemidler, 10 point).*

a) Omskriv $\sqrt{3}+i$ *til polær form.*

b) Løs ligningen $\dfrac{32+32i}{z+i} + \dfrac{(\sqrt{3}+i)^6}{z-i} = 0$.

Facit skal angives på formen $z=a+ib$, *hvor* $a,b\in\mathbb{R}$.

Opgave 5.Eksam214 *(reduktion, uden brug af hjælpemidler, 10 point).*

a) Skriv det komplekse tal $-1+i\sqrt{3}$ *på polær form.*

b) Skriv tallet $\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{2}\cdot i}{e^{-i\frac{3\pi}{4}}} + \dfrac{(-1+i\sqrt{3})^9}{8(3+i)}$ *på formen* $a+ib$, *hvor a og b er reelle tal.*

Opgave 5.Eksam234 *(binom ligning, 15 point).*
Find samtlige rødder i ligningen $(z-e^{i\pi/4})^3 = 4(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})$ *og vis deres placering i den komplekse plan. Rødderne ønskes angivet enkeltvis på formen* $a+ib \quad (a,b\in\mathbb{R})$ *enten eksakt eller med 2 decimalers nøjagtighed.*
NB: *Numerisk ligningsløsning med lommeregner er ikke acceptabelt.*

Opgave 5B.1 *(dekomposition)*

1) Dekomponér brøken $\dfrac{2x^4+2}{(x^2-1)(x-1)}$.

2) Find $\displaystyle\int \frac{2x^4+2}{(x^2-1)(x-1)}\,dx$.

Opgave 5B.2 *(dekomposition)*

Find $\int \frac{2x^4+x^2-4x-3}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx$.

Opgave 5B.3 *(dekomposition)*

1) Dekomponér brøken $\frac{2x^4-x^3-x+1}{x^3(x-1)^2}$.

2) Find $\int_2^3 \frac{2x^4-x^3-x+1}{x^3(x-1)^2}\,dx$.

Opgave 5B.4 *(dekomposition)*

Find $\int \frac{-11x^3+21x^2-14x+3}{(x^2-2x+2)^2(x-1)}\,dx$.

Opgave 5B.5 *(dekomposition)*

Find $\int \frac{2x^8-4x^4+x^3+9}{(x-1)(x^2-1)(x^2+1)^2}\,dx$.

Opgave 5B.Eksam33b *(dekomposition, uegentligt integral, 35 point)*

Find $2\cdot\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x+2}+1}{(x+1)^2\cdot(x+3)}\,dx$. *Benyt f.eks. den monotone substitution* $u=\sqrt{x+2}$.

Opgave 5B.Eksam35b *(dekomposition, uegentligt integral, 25 point)*

1) Find $\int_0^{\infty} x\cdot e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

Benyt f.eks. den monotone substitution $u=\sqrt{x}$, *og at* $\frac{x^n}{e^x}\to 0$ *for* $x\to\infty$.

2) Dekomponér brøken $\frac{72(x^2+3x+9)}{(x^4-81)(x+3)}$.

Opgave 5B.Eksam50b *(dekomposition, 15 point)*

1) Dekomponér brøken $\frac{x^3+4x^2-21x+24}{(x-1)^2(x^2-9)}$ *i en sum af stambrøker.*

2) Find derpå stamfunktionen $\int \frac{x^3+4x^2-21x+24}{(x-1)^2(x^2-9)}\,dx$.

Opgave 5B.Eksam216 *(dekomposition, 10 point)*

Dekomponér brøken $\frac{-6t^3+20t^2-15t+8}{(t-2)^2(t^2+1)}$.

6 DIFFERENTIALLIGNINGSPROBLEM AF VILKÅRLIG ORDEN

6.1 INDLEDNING

Ved anvendelserne mødes tit differentialligninger, hvori der indgår anden afledede eller højere afledede af de ukendte funktioner. Eksempelvis er Newtons anden lov $m\frac{d^2y}{dt^2} = F$ en differentialligning, hvori der indgår den anden afledede af y.

Ved en *differentialligning af n'te orden* forstås en ligning, hvori der indgår en ukendt funktions n'te afledede, men ingen højere afledede. Eksempelvis er

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5t\frac{dy}{dt} + 6y(t) = \mathrm{e}^{-t}$$

en differentialligning af anden orden.

Ved en (partikulær) *løsning* i et interval I forstås en n gange differentiabel funktion $y = y(t)$, som er defineret i I og i dette interval tilfredsstiller differentialligningen. Grafen for en løsning kaldes en løsningskurve (integralkurve). Et udtryk for samtlige løsninger vil normalt indeholde n arbitrære konstanter. Eksempelvis fås for den følgende differentialligning af anden orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 3t^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \int 3t^2\,dt + C_1 = t^3 + C_1$$

$$\Leftrightarrow \quad y(t) = \int (t^3 + C_1)\,dt + C_2 = \frac{1}{4}t^4 + C_1 t + C_2\,,$$

dvs. udtrykket for samtlige løsninger indeholder netop to arbitrære konstanter C_1 og C_2. Derfor skal der også to betingelser til at fastlægge en bestemt løsningskurve. Det mest almindelige er at benytte såkaldte *begyndelsesbetingelser* [1] :

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{og} \quad y'(t_0) = p_0,$$

hvor y_0 og p_0 er givne tal. Et sådant begyndelsesværdiproblem svarer til, at et systems tilstand kendes til et starttidspunkt t_0, hvorpå differentialligningen praktisk taget altid fastlægger systemets tilstand entydigt til ethvert senere tidspunkt t. Herom handler den følgende sætning, der nævnes uden bevis.

---

[1] Ved nogle anvendelser møder man i stedet *randværdibetingelser*: $y(t_0) = y_0$ og $y(t_1) = y_1$.

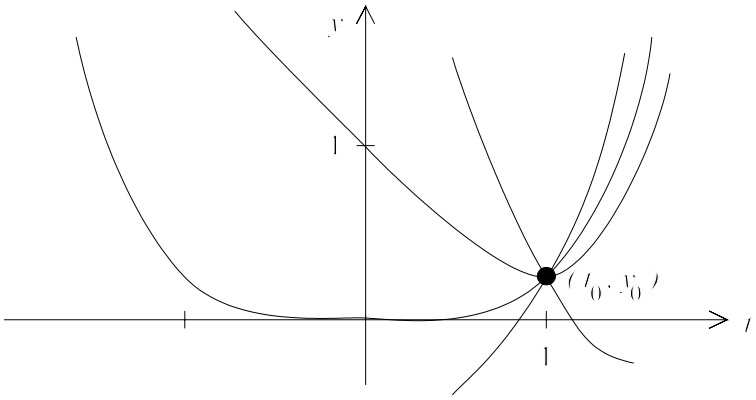


Fig. 6.1. *Differentialligningen* $\frac{d^2y}{dt^2} = 3t^2$ *har uendelig mange løsningskurver gennem* (t_0, y_0), *men kurverne har hver sin hældningskoefficient.*

SÆTNING 6.1 *(eksistens og entydighed af løsningskurve). Svarende til ethvert talsæt* $(t_0, y_0, p_0) \in S$ [1] *har differentialligningen*

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f(t, y, y')$$

én og kun én løsning $y(t)$, *som opfylder*

$$y(t_0) = y_0 \ , \qquad y'(t_0) = p_0 \qquad \text{("begyndelsesbetingelserne").}$$

For en n'te ordens differentialligning gælder tilsvarende, at man ved at fastlægge $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ til tiden t_0 ved n begyndelsesbetingelser, netop får én løsningskurve (jævnfør den følgende sætning).

SÆTNING 6.1A *(eksistens og entydighed af løsningskurve). Svarende til ethvert talsæt* $(t_0, y_0, p_{01}, p_{02}, \ldots, p_{0,n-1}) \in S$ [2] *har differentialligningen* $\frac{d^n y}{dt^n} = f(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ *én og kun én løsning* $y(t)$, *som opfylder* $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = p_{01}$, $y''(t_0) = p_{02}$, …, $y^{(n-1)}(t_0) = p_{0,n-1}$.

---

[1] *Sætning 6.1 forudsætter, at S er en åben sammenhængende mængde i* (t, y, p)*-rummet, hvor* $f(t, y, p)$ *er kontinuert og har kontinuerte partielle afledede* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *og* $\frac{\partial f}{\partial p}$.

[2] *Sætning 6.1A forudsætter, at S er en åben sammenhængende mængde i* $(t, y, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1})$*-rummet, hvor* $f(t, y, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1})$ *er kontinuert og har kontinuerte partielle afledede*

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial p_1}, \frac{\partial f}{\partial p_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial p_{n-1}} .$$

Numerisk løsning. For en 2. ordens differentialligning $\frac{d^2y}{dt^2} = f(t, y, y')$ findes der i appendix 6.1 en speciel 4. ordens Runge-Kutta-metode. For andre differentialligninger henvises til afsnittene 6.6 og 6.7.

6.2 DEN HOMOGENE LINEÆRE DIFFERENTIAL-LIGNING AF 2. ORDEN MED KONSTANTE KOEFFICIENTER

Differentialligningen

$$A\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + Cy(t) = 0 \qquad (A \neq 0) \tag{1}$$

siges at være af 2. orden, homogen og lineær med *konstante koefficienter* $A, B, C \in \mathbb{R}$. Da en eksponentialfunktion optrådte i løsningen til den homogene lineære differentialligning af 1. orden, er det naturligt at søge en løsning af typen $y(t) = e^{\lambda t}$, hvor λ er en konstant.
Indsættes $y(t) = e^{\lambda t}$ i differentialligningen (6.1), fås

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + B\lambda e^{\lambda t} + Ce^{\lambda t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\lambda t}(A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \qquad (\text{idet } e^{\lambda t} \neq 0)\,. \tag{2}$$

Funktionen $y(t) = e^{\lambda t}$ er altså en løsning til differentialligningen, hvis og kun hvis λ er en rod i den såkaldte *karakterligning* (2). Polynomiet $A\lambda^2 + B\lambda + C$ kaldes det *karakteristiske polynomium.*

To forskellige reelle rødder.

I det tilfælde, hvor karakterligningen har to forskellige reelle rødder λ_1 og λ_2, er $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ og $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ åbenbart to forskellige løsninger til differentialligningen. Ved indsættelse i differentialligningen (1) ses, at enhver linearkombination $C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$ da også er en løsning. Eftersom dette udtryk netop indeholder to arbitrære konstanter C_1 og C_2, er det nærliggende at formode, at vi her har samtlige løsninger. Dette viser sig da også at være tilfældet (se sætning 6.2).

To ens reelle rødder.

Vi betragter først tilfældet, hvor karakterligningen har to tætliggende reelle rødder λ og $\lambda + \Delta\lambda$.

Samtlige løsninger er da

$$y(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{(\lambda+\Delta\lambda)t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Sættes $C_1 = \frac{-1}{\Delta\lambda}$ og $C_2 = \frac{1}{\Delta\lambda}$, fås en speciel løsning $y_2^*(t) = \frac{e^{(\lambda+\Delta\lambda)t} - e^{\lambda t}}{\Delta\lambda}$.

Ved hjælp af denne specielle løsning kan (3) skrives på formen

$$y(t) = K_1 e^{\lambda t} + K_2 y_2^*(t), \qquad K_1, K_2 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

(Det svarer til, at vi sætter $C_1 = K_1 - \frac{K_2}{\Delta\lambda}$ og $C_2 = \frac{K_2}{\Delta\lambda}$.)

Da $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ er defineret ved $\frac{f(\lambda+\Delta\lambda, t) - f(\lambda, t)}{\Delta\lambda} \to \frac{\partial f}{\partial \lambda}$ for $\Delta\lambda \to 0$,

fås $y_2^*(t) \to \frac{\partial e^{\lambda t}}{\partial \lambda} = t e^{\lambda t}$ for $\Delta\lambda \to 0$.

Højresiden af ligning (4) har altså grænseværdien

$$K_1 e^{\lambda t} + K_2 t e^{\lambda t}, \qquad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

for $\Delta\lambda \to 0$. Det er defor nærliggende at formode, at dette udtryk angiver samtlige løsninger, når karakterligningen har to ens reeelle rødder λ. Dette viser sig da også at være tilfældet (se sætning 6.2).

To komplekse rødder.

Har karakterligningen to komplekse rødder $r \pm i\omega$, vil $y_1 = e^{(r+i\omega)t}$ og $y_2 = e^{(r-i\omega)t}$ være to komplekse løsninger til differentialligningen. Så vil også linearkombinationerne $\frac{y_1 + y_2}{2}$ og $\frac{y_1 - y_2}{2i}$ være løsninger. Vi finder

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{e^{(r+i\omega)t} + e^{(r-i\omega)t}}{2} = e^{rt} \cdot \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} = e^{rt} \cdot \cos \omega t$$

$$\frac{y_1 - y_2}{2i} = \frac{e^{(r+i\omega)t} - e^{(r-i\omega)t}}{2i} = e^{rt} \cdot \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = e^{rt} \cdot \sin \omega t.$$

Da dette er to forskellige reelle løsninger, er det nærliggende at formode, at samtlige reelle løsninger er

$$y = C_1 e^{rt} \cdot \cos \omega t + C_2 e^{rt} \cdot \sin \omega t, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Dette viser sig da også at være tilfældet (se sætning 6.2).

SÆTNING 6.2 *(fuldstændig løsning). Samtlige løsninger til differentialligningen*

$$A\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + Cy(t) = 0 \qquad (A \neq 0, \quad A,B,C \in \mathbb{R}) \qquad (5)$$

bestemmes ud fra rødderne λ_1 *og* λ_2 *i karakterligningen*

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

på følgende måde:

Rødder i karakterligning	*Fuldstændig løsning til (5)*	
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ *(reelle)*	$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$	C_1, C_2 *er reelle arbitrære konstanter*
$\lambda_1 = \lambda_2$ *(reelle)*	$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t}$	
$r_0 \pm i\omega_0$ *(komplekse)*	$e^{r_0 t}[C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)]$ [1]	

Bevis.

1) Reelle rødder i karakterligningen. Idet rødderne i karakterligningen er λ_1 og λ_2, har vi

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = A(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = A[\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2].$$

Vi får da

$$Ay'' + By' + Cy = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad A[y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y'' - \lambda_2 y' - \lambda_1(y' - \lambda_2 y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (y' - \lambda_2 y)' - \lambda_1(y' - \lambda_2 y) = 0 \quad \text{(dvs. } z' - \lambda_1 z = 0, \text{ hvor } z = y' - \lambda_2 y)$$

$$\Leftrightarrow \quad y' - \lambda_2 y = k_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{(inhomogen, lineær, 1. orden)}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = e^{\lambda_2 t}\left[\int k_1 e^{\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} dt + C_2\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \begin{cases} e^{\lambda_2 t}\left[\int k_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} dt + C_2\right] & \text{for } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ e^{\lambda_1 t}\left[\int k_1 dt + C_2\right] & \text{for } \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

---

[1] Omregning af svingninger. Amplitude $D \geq 0$ og fase $\omega t + \phi$ er meget anvendt beskrivelse af svingninger. I stedet for udtrykket $C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ kan man så enten skrive

$$D \cdot \cos(\omega t + \phi), \quad \text{hvor} \quad De^{i\phi} = C_1 - iC_2$$

eller

$$D \cdot \sin(\omega t + \psi), \quad \text{hvor} \quad De^{i\psi} = C_2 + iC_1.$$

Omregningen svarer til omregningen mellem rektangulære og polære koordinater (se evt. appendix 6.2 og beviset for sætning 6.2).

$$\Leftrightarrow \quad y = \begin{cases} e^{\lambda_2 t}\left[\dfrac{k_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + C_2\right] & \text{for } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ e^{\lambda_1 t}\left[k_1 t + C_2\right] & \text{for } \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad y(t) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} & \text{for } \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \\ C_1 t e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_1 t} & \text{for } \lambda_1 = \lambda_2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \, . \end{cases}$$

2) **Komplekse rødder i karakterligningen.** Da de komplekse rødder λ_1 og λ_2 i karakterligningen er forskellige, finder vi ved de samme regninger som under punkt 1, at samtlige *komplekse* løsninger til (5) er

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

hvor C_1 og C_2 nu er arbitrære komplekse konstanter. Da vi kun er interesseret i at beholde de reelle løsninger, indsættes $\lambda_1 = r_0 + i\omega_0$, $\lambda_2 = r_0 - i\omega_0$, $C_1 = a_1 + ib_1$ og $C_2 = a_2 + ib_2$ $\quad (r_0, \omega_0, a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R})$ i udtrykket for $y(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= (a_1 + ib_1)e^{(r_0+i\omega_0)t} + (a_2 + ib_2)e^{(r_0-i\omega_0)t} \\ &= (a_1 + ib_1)e^{r_0 t}e^{i\omega_0 t} + (a_2 + ib_2)e^{r_0 t}e^{-i\omega_0 t} \\ &= (a_1 + ib_1)e^{r_0 t}[\cos(\omega_0 t) + i\cdot\sin(\omega_0 t)] \\ &\quad + (a_2 + ib_2)e^{r_0 t}[\cos(\omega_0 t) - i\cdot\sin(\omega_0 t)] \\ &= e^{r_0 t}[a_1\cos(\omega_0 t) - b_1\sin(\omega_0 t) + i\left(b_1\cos(\omega_0 t) + a_1\sin(\omega_0 t)\right)] \\ &\quad + e^{r_0 t}[a_2\cos(\omega_0 t) + b_2\sin(\omega_0 t) + i\left(b_2\cos(\omega_0 t) - a_2\sin(\omega_0 t)\right)] \\ &= e^{r_0 t}[\left((a_1 + a_2)\cos(\omega_0 t) + (-b_1 + b_2)\sin(\omega_0 t)\right) \\ &\qquad + i\left((b_1 + b_2)\cos(\omega_0 t) + (a_1 - a_2)\sin(\omega_0 t)\right)] \, . \end{aligned}$$

Da vi søger de reelle løsninger, skal imagniærdelen af $y(t)$ være 0 for alle $t \in \mathbb{R}$, dvs. $b_1 + b_2 = 0$ og $a_1 - a_2 = 0$. Indsættes $b_1 = -b_2$ og $a_1 = a_2$ i udtrykket for $y(t)$, fås

$$y(t) = e^{r_0 t}[2a_2\cos(\omega_0 t) + 2b_2\sin(\omega_0 t)] \, .$$

Beviset for sætningen er hermed fuldført, idet $2a_2$ og $2b_2$ er arbitrære reelle konstanter.

Omregning af svingninger. Idet et komplekst tal kan udtrykkes såvel på polær form $De^{i\alpha}$ som på rektangulær form $a_1 + ia_2$, fås

$$\begin{aligned} & De^{i\alpha} = a_1 + ia_2 \quad \Leftrightarrow \quad De^{i\alpha}e^{i\omega t} = (a_1 + ia_2)e^{i\omega t} \quad \Leftrightarrow \quad De^{i(\omega t+\alpha)} = (a_1 + ia_2)e^{i\omega t} \\ \Leftrightarrow \quad & D[\cos(\omega t + \alpha) + i\cdot\sin(\omega t + \alpha)] = (a_1 + ia_2)[\cos(\omega t) + i\cdot\sin(\omega t)] \\ \Leftrightarrow \quad & D[\cos(\omega t + \alpha) + i\cdot\sin(\omega t + \alpha)] = a_1\cos(\omega t) - a_2\sin(\omega t) + i[a_2\cos(\omega t) + a_1\sin(\omega t)] \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} D\cdot\cos(\omega t + \alpha) = a_1\cos(\omega t) - a_2\sin(\omega t) & \wedge \\ D\cdot\sin(\omega t + \alpha) = a_2\cos(\omega t) + a_1\sin(\omega t) \, . \end{cases} \end{aligned}$$

Den sidste omskrivning følger af, at to komplekse tal er ens, hvis og kun hvis deres realdele er ens, og deres imaginærdele er ens. De to sidste ligninger for henholdsvis realdelen og imaginærdelen er i vort tilfælde ensbetydende, da de fremgår af hinanden ved differentiation (på nær en faktor $\pm\omega$).

Heraf følger, at ligningen $D\cdot\cos(\omega t+\phi) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)$

er sand, hvis og kun hvis $D\,e^{i\phi} = C_1 - iC_2$ (ses ved at sætte $a_1 = C_1$, $a_2 = -C_2$ og $\alpha = \phi$).

På samme måde følger, at relationen $D\cdot\sin(\omega t+\psi) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)$

er sand, hvis og kun hvis $D\,e^{i\psi} = C_2 + iC_1$ (ses ved at sætte $a_1 = C_2$, $a_2 = C_1$ og $\alpha = \psi$).

Eksempel 6.1. Differentialligningen $A\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + Cy(t) = 0$.

1) Find samtlige løsninger til hver af differentialligningerne:

a) $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y(t) = 0$

b) $\frac{1}{3}\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 3y(t) = 0$

c) $\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 20y(t) = 0$.

2) Find for differentialligningen c) den partikulære løsning, der opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = -1$ og $y'(0) = 2$. Såfremt løsningen indeholder en svingning, ønskes løsningen angivet på såvel formen $C_1e^{rt}\cos(\omega t) + C_2e^{rt}\sin(\omega t)$ som formen $D\,e^{rt}\cos(\omega t+\phi)$.

LØSNING:

1) Karakterligningerne er

a) $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

b) $\frac{1}{3}\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$

c) $\lambda^2 - 4\lambda + 20 = 0$

med rødderne

a) $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = -3$

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ (dobbeltrod)

c) $\lambda_1 = 2+4i$ og $\lambda_2 = 2-4i$.

Samtlige løsninger er da ifølge sætning 6.2

a) $\underline{\underline{y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-3t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}}$

b) $\underline{\underline{y(t) = C_1e^{3t} + C_2te^{3t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}}$

c) $\underline{\underline{y(t) = e^{2t}[C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t)], \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}}$.

2) For tilfælde c) søges nu den partikulære løsning svarende til begyndelsesbetingelserne $y(0) = -1$ og $y'(0) = 2$. Derfor må vi differentiere $y(t)$:

$$y'(t) = 2e^{2t}[C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t)] + e^{2t}[-4C_1\sin(4t) + 4C_2\cos(4t)] .$$

Ved indsættelse af begyndelsesbetingelserne i $y(t)$ og $y'(t)$ fås

$$y(0) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = -1$$
$$y'(0) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2C_1 + 4C_2 = 2 .$$

Heraf ses, at $C_1 = -1$ og $C_2 = 1$. Den søgte partikulære løsning er altså

$$\underline{\underline{y(t) = e^{2t}[-\cos(4t) + \sin(4t)]}}.$$

For at omregne løsningen til formen $De^{rt}\cos(\omega t + \phi)$ benyttes relationen $De^{i\phi} = C_1 - iC_2$, som i vort tilfælde bliver $De^{i\phi} = -1 - i$. Heraf fås $D = \sqrt{2}$ og $\phi = -\frac{3\pi}{4}$ (benyt f.eks. figuren), så den partikulære løsning også kan skrives

$$\underline{\underline{y(t) = \sqrt{2}\, e^{2t}\cos\left(4t - \frac{3\pi}{4}\right)}} .$$

Maple: "Math mode"

Skriv: $L := \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}y(t) - 4\cdot\frac{dy}{dt}y(t) + 20\cdot y(t) = 0$

Fuldstændig løsning: $desolve(L)$ Resultat: $y(t) = _C1e^{2t}\sin(4t) + _C2e^{2t}\cos(4t)$

Partikulær løsning:M:=y(0)=-1D(y)(0)=0

$desolve(\{L, M\})$ Resultat: $y(t) = e^{2t}\sin(4t) - e^{2t}\cos(4t)$

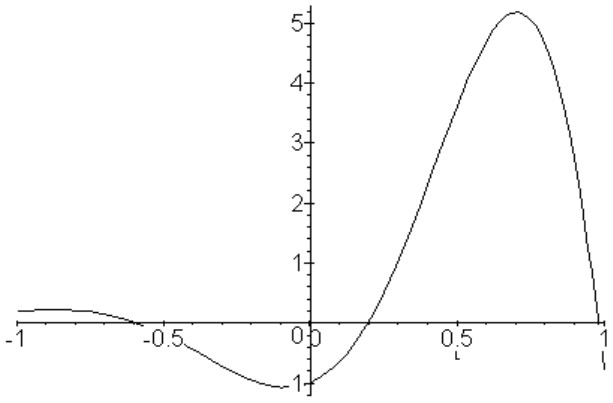
En graf kan fås på følgende måde:

Cursor på udskrift, højre musetast, right hand side Resultat $e^{2t}\sin(4t) - e^{2t}\cos(4t)$

Cursor på udskrift, højre musetast, Plots, 2-D Plots

Cursor på den fremkomnne figur, venstre musetast, højre musetast, vælg axes, Fjern flueben ved "Use data ectents , vælg "Vertical axes", sæt "Range min" til -1 og "Range max" til 1

Nedenstående figur fremkommer.



Eksempel 6.2. Svingning med luftmodstand

Et legeme med massen m bevæger sig på x-aksen under påvirkning af en fjederkraft $-k\cdot x$. Bevægelsen dæmpes af en luftmodstandskraft $-c\dfrac{dx}{dt}$. Opstil en differentialligning for systemet, og find de forskellige slags løsninger.

LØSNING:

Af Newtons 2. lov, $\textit{kraft} = \textit{masse}\cdot\textit{acceleration}$, fås

$$-c\cdot\frac{dx}{dt} - k\cdot x = m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \text{dvs} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + k\cdot x = 0 \quad \text{eller} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}\cdot x = 0 .$$

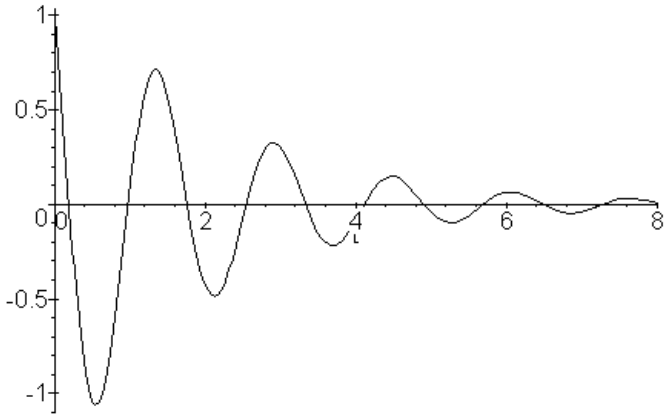
Karakterligningen $\lambda^2 + \dfrac{c}{m}\lambda + \dfrac{k}{m} = 0$ har diskriminanten $D = \left(\dfrac{c}{m}\right)^2 - 4\dfrac{k}{m}$.

$\boxed{D<0}$ **Dæmpede svingninger.** Dette tilfælde indtræffer, når dæmpningen c er så lille, at $\left(\dfrac{c}{2m}\right)^2 < \dfrac{k}{m}$.

Karakterligningen har 2 komplekse rødder:

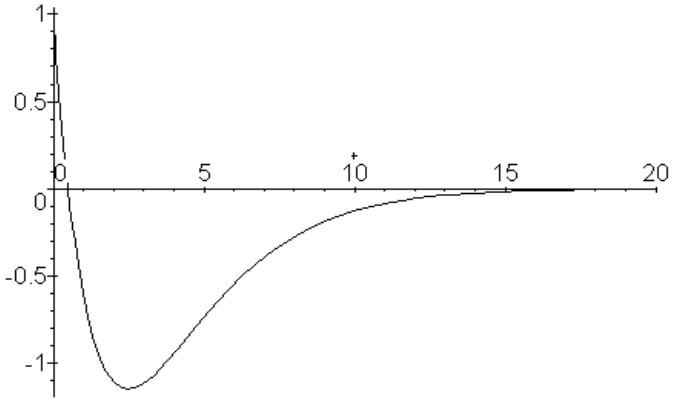
$$\frac{-\frac{c}{m} \pm i\sqrt{4\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{m}\right)^2}}{2} = \frac{-c}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = -r \pm i\omega .$$

Samtlige løsninger til differentialligningen er $x = C_1 e^{-rt}\cos(\omega t) + C_2 e^{-rt}\sin(\omega t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Faktoren e^{-rt} bevirker, at svingningernes amplitude nærmer sig 0 (dæmpede svingninger, se figuren):



$\boxed{D=0}$ **Kritisk dæmpning.** Dette tilfælde indtræder, når dæmpningen c er nået op på en bestemt kritisk størrelse, sådan at $\left(\dfrac{c}{2m}\right)^2 = \dfrac{k}{m}$, hvorved svingninger netop ikke kan forekomme.

Samtlige løsninger er $x = C_1 e^{-\frac{c}{2m}t} + C_2 t e^{-\frac{c}{2m}t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.



$D > 0$

Overkritisk dæmpning. Dette tilfælde indtræffer, når dæmpningen c er større end den kritiske værdi, sådan at $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m}$. Så har karakterligningen to forskellige reelle rødder:

$$\frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = \begin{cases} -r_1 \\ -r_2 \end{cases}.$$

Samtlige løsninger til differentialligningen er $x = C_1 e^{-r_1 t} + C_2 e^{-r_2 t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, og $x \to 0$ for $t \to \infty$ ligesom i de andre tilfælde.

6.3 DEN HOMOGENE LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNING AF N'TE ORDEN MED KONSTANTE KOEFFICIENTER

Differentialligningen

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = 0 \tag{6}$$

siges at være homogen og lineær med *konstante koefficienter* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. For homogene lineære ligninger gælder følgende generelle sætning:

SÆTNING 6.3 *(linearkombination af løsninger). Hvis*

$$y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)$$

er m løsninger til en homogen, lineær ligning, så er enhver linearkombination

$$C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \ldots + C_m y_m(t)$$

også en løsning.

Bevis. Beviset gennemføres ved at indsætte linearkombinationen i den homogene lineære ligning.

Vi har allerede omtalt løsningsmetoden for ligning (6) i tilfældet $n = 2$. I det følgende generaliseres denne metode til at gælde for alle $n \geq 1$.

Indsættes $y = e^{\lambda t}$ i differentialligningen (6), ses, at $e^{\lambda t}$ er en løsning, hvis og kun hvis λ er en rod i *karakterligningen*

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0 .$$

Ligningens venstre side kaldes det *karakteristiske polynomium*.

I det tilfælde hvor karakterligningen har n forskellige reelle rødder

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

er

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad y_n(t) = e^{\lambda_n t}$$

åbenbart n forskellige løsninger til differentialligningen. Man kan vise, at karakterligningen også i alle andre tilfælde bestemmer n forskellige "grundløsninger" til differentialligningen. Ifølge sætning 6.3 vil enhver linearkombination

$$C_1y_1(t) + C_2y_2(t) + \ldots + C_ny_n(t)$$

da også være en løsning. Det kan endda vises, at dette udtryk netop giver samtlige løsninger i overensstemmelse med, at der netop optræder n arbitrære konstanter $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Herom handler den følgende sætning, som nævnes uden bevis.

SÆTNING 6.4 *(samtlige løsninger). Differentialligningen*

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0y(t) = 0 \qquad (a_n \neq 0)$$

har samtlige løsninger givet ved

$$y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) + \ldots + C_ny_n(t) , \qquad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R} .$$

"Grundløsningerne" $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ *kan bestemmes ud fra de* n *rødder* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *i karakterligningen*

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

på følgende måde:

Rødder i karakterligning	*Tilhørende grundløsninger*
λ_j *er 1 gang rod (reel)*	$e^{\lambda_j t}$
λ_j *er p gange rod (reel)*	$e^{\lambda_j t},\ te^{\lambda_j t},\ t^2e^{\lambda_j t},\ldots,\ t^{p-1}e^{\lambda_j t}$
$r_0 + i\omega_0$ *og* $r_0 - i\omega_0$ *er 1 gang rod (kompleks)*	$e^{r_0 t}\cos(\omega_0 t),\quad e^{r_0 t}\sin(\omega_0 t)$
$r_0 + i\omega_0$ *og* $r_0 - i\omega_0$ *er p gange rod (kompleks)*	$e^{r_0 t}\cos(\omega_0 t),\quad e^{r_0 t}\sin(\omega_0 t),$ $te^{r_0 t}\cos(\omega_0 t),\quad te^{r_0 t}\sin(\omega_0 t),$ $t^2e^{r_0 t}\cos(\omega_0 t),\quad t^2e^{r_0 t}\sin(\omega_0 t),$ $\ldots \qquad \ldots$ $t^{p-1}e^{r_0 t}\cos(\omega_0 t),\quad t^{p-1}e^{r_0 t}\sin(\omega_0 t)$

Eksempel 6.3. Differentialligningen $a_n\frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = 0$.

Find samtlige løsninger til hver af differentialligningerne:

a) $\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 2y(t) = 0$

b) $\frac{d^5y}{dt^5} - 8\frac{d^4y}{dt^4} + 34\frac{d^3y}{dt^3} - 74\frac{d^2y}{dt^2} + 73\frac{dy}{dt} - 26y(t) = 0$.

LØSNING:

Karakterligningerne er

a) $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ b) $\lambda^5 - 8\lambda^4 + 34\lambda^3 - 74\lambda^2 + 73\lambda - 26 = 0$.

Rødderne i disse ligninger findes på samme måde som forklaret i afsnit 5.9 om polynomier.

Resultatet bliver a) $\lambda_1 = -1,\quad \lambda_2 = 1$ og $\lambda_3 = 2$

b) $\lambda_1 = 2,\quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (dobbeltrod), $\lambda_4 = 2+3i$ og $\lambda_5 = 2-3i$.

Samtlige løsninger er da ifølge sætning 6.4

a) $\underline{\underline{y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{t} + C_3e^{2t},\qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}}}$

b) $\underline{\underline{y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{t} + C_3te^{t} + C_4e^{2t}\cos(3t) + C_5e^{2t}\sin(3t)}},\ \underline{\underline{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R}}}$.

6.4 DEN INHOMOGENE DIFFERENTIALLIGNING MED KONSTANTE KOEFFICIENTER

Vi betragter først den inhomogene differentialligning af 2. orden

$$A\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + Cy(t) = q(t) \qquad (A \neq 0), \tag{7}$$

hvor $q(t)$ er kontinuert i et interval I og $A, B, C \in \mathbb{R}$. I afsnit 6.2 betragtede vi den tilsvarende homogene differentialligning, hvor $q(t) = 0$ for alle $t \in I$.

Løsningens struktur

SÆTNING 6.5 *(løsningens struktur). Samtlige løsninger til den inhomogene lineære differentialligning (7) har formen*

$$y(t) = y_p(t) + C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) .$$

De fremkommer ved til en vilkårlig partikulær løsning $y_p(t)$ *at addere samtlige løsninger* $C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$ *til den tilsvarende homogene differentialligning.*

Bevis. For en vilkårlig løsning y til (7) kan der altid findes en funktion f, sådan at $y = y_p + f$. Ved indsættelse i (7) fås da

$$\begin{aligned}
& A(y_p+f)'' + B(y_p+f)' + C(y_p+f) = q \\
\Leftrightarrow \quad & Ay_p'' + By_p' + Cy_p + Af'' + Bf' + Cf = q \\
\Leftrightarrow \quad & q + Af'' + Bf' + Cf = q \qquad \text{(da } y_p \text{ er en løsning til (7))} \\
\Leftrightarrow \quad & Af'' + Bf' + Cf = 0 .
\end{aligned}$$

Er differentialligningens højreside $q(t)$ "kompliceret", fordi den er en sum af flere "simple" led, er det ofte nemmest at finde en partikulær løsning $y_p(t)$ som en tilsvarende sum af "simple" led.

Er således

$y_{p1}(t)$ en partikulær løsning til $Ay'' + By' + Cy = q_1(t)$, og

$y_{p2}(t)$ en partikulær løsning til $Ay'' + By' + Cy = q_2(t)$,

ses ved indsættelse, at

$y_p(t) = k_1 y_{p1}(t) + k_2 y_{p2}(t)$ er en partikulær løsning til

$$Ay'' + By' + Cy = k_1 q_1(t) + k_2 q_2(t).$$

Sætning 6.5 om løsningens struktur kan let generaliseres til at gælde også for differentialligninger af højere end 2. orden:

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = q(t) \qquad (a_n \neq 0) . \tag{8}$$

Partikulær løsning

Da vi let kan finde samtlige løsninger til den homogene differentialligning, er problemet reduceret til at finde en partikulær løsning y_p til den inhomogene ligning (8). I det følgende angives fire metoder til at finde y_p.

"Gættemetoden" kan benyttes for differentialligninger af vilkårlig orden *n,* hvis $q(t)$ er et produkt af én eller flere af funktionerne $\sin(t)$, $\cos(t)$, e^{rt} og polynomier.

"Integralmetoden" kan benyttes for differentialligninger af 2. orden, hvorved y_p udtrykkes ved integraler (som forhåbentlig kan udregnes).

"Tabelmetoden" kan benyttes under de samme betingelser som for gættemetoden med den begrænsning, at hvis $q(t)$ indeholder et polynomium, må differentialligningen højst være af 2. orden. Fordelen ved metoden er, at et tabelopslag ofte er hurtigere og sikrere.

"Matematik-programmer", f.eks. Maple, vil sædvanligvis give samtlige løsninger i de samme tilfælde, som det er muligt at finde dem ved de foregående 2 metoder.

Gættemetoden

Denne metode kan anvendes, når højresiden $q(t)$ indeholder led af typen

$$P(t)\,\mathrm{e}^{rt}\cos(\omega t) \qquad \text{eller} \qquad P(t)\,\mathrm{e}^{rt}\sin(\omega t),$$

hvor $P(t) = k_m t^m + k_{m-1} t^{m-1} + \ldots + k_1 t + k_0$ er et polynomium. Specielt kan $q(t)$ altså være én af funktionerne

k	$(m=0,\ r=0,\ \omega=0)$
$k\mathrm{e}^{rt}$	$(m=0,\ \omega=0)$
$k\cdot\cos(\omega t)$	$(m=0,\ r=0)$
$k\cdot\sin(\omega t)$	$(m=0,\ r=0)$
$k_m t^m + k_{m-1} t^{m-1} + \ldots + k_1 t + k_0$	$(r=0,\ \omega=0)$.

Ideen bag metoden er, at man skal gætte på en partikulær løsning $y_p(t)$ af lignende type som højresiden $q(t)$. Er højresiden eksempelvis $q(t) = 3t^2+1$, gættes på et andengradspolynomium $y_p(t) = at^2 + bt + c$. Den gættede funktion $y_p(t)$ indsættes derpå i differentialligningen (8) og de ukendte konstanter *a, b* og *c* kan nu fastlægges. Andre eksempler på gæt er:

for	$q(t) = 6\mathrm{e}^{2t}$	gættes på	$y_p(t) = a\mathrm{e}^{2t}$
for	$q(t) = 4\sin(3t)$	gættes på	$y_p(t) = a\cdot\cos(3t) + b\cdot\sin(3t)$
for	$q(t) = (3t^2+1)\mathrm{e}^{2t}$	gættes på	$y_p(t) = (at^2 + bt + c)\mathrm{e}^{2t}$
for	$q(t) = (3t^2+1)\mathrm{e}^{2t}\cos(3t)$	gættes på	$y_p(t) = (at^2 + bt + c)\,\mathrm{e}^{2t}\cos(3t)$ $+ (dt^2 + et + f)\,\mathrm{e}^{2t}\sin(3t)$.

Grunden til at der må gættes på en sum bestående af både cosinus og sinus er, at ved indsættelse af cosinus-led i differentialligningen vil der også fremkomme sinus-led (og omvendt).

I visse tilfælde kan konstanterne (*a, b, c* osv.) ikke bestemmes (bl.a. når $q(t)$ er løsning til den homogene differentialligning). I alle sådanne tilfælde kan man multiplicere det oprindelige gæt med t, og hvis det ikke hjælper, kan man multiplicere med endnu et t, osv. [1]. I appendix 6.3 er anført et skema over, hvordan gæt bedst foretages.

Eksempel 6.4a. Gættemetoden.

Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y(t) = 12t.$$

LØSNING:

A) Homogen ligning. Differentialligningen har karakterligningen $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ med rødderne $\lambda = 2$ og $\lambda = -3$. Samtlige løsninger til den tilsvarende homogene differentialligning er da:

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

B) Inhomogen ligning. Da $12t$ er et polynomium af 1. grad, gættes på et polynomium af 1. grad:

$$y_{p_1}(t) = K_1 t + K_0.$$

Dette gæt vil med sikkerhed give en partikulær løsning, da ingen af karakterligningens rødder er nul.

Ved indsættelse af $y_{p_1}(t)$ i differentialligningen fås

$$0 + K_1 - 6(K_1 t + K_0) = 12t \quad \Leftrightarrow \quad [-6K_1 - 12]t + [K_1 - 6K_0] = 0.$$

Ligningen er opfyldt for alle t, hvis og kun hvis

$$-6K_1 - 12 = 0 \quad \wedge \quad K_1 - 6K_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K_1 = -2 \quad \wedge \quad K_0 = -\frac{1}{3}.$$

Hermed har vi fundet $y_{p_1}(t) = -2t - \frac{1}{3}$.

Samtlige løsninger til differentialligningen er følgelig

$$y(t) = -2t - \frac{1}{3} + C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

---

[1] De ændrede gæt er nødvendige, når og kun når $r + i\omega$ er en rod i karakterligningen. Hvis $r + i\omega$ er netop p gange rod i karakterligningen, så vil netop det oprindelige gæt multipliceret med t^p føre til en partikulær løsning.

Eksempel 6.4b. Gættemetoden.

Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y(t) = 78\cos(3t).$$

LØSNING:

A) Homogen ligning. Se eksempel 6.4a.

B) Inhomogen ligning. Da vi skal gætte på en funktion af lignende type som $\cos(3t)$ (og dens afledede), bliver vort gæt

$$y_{p_2}(t) = K\cdot\cos(3t) + L\cdot\sin(3t).$$

Dette gæt vil med sikkerhed give en partikulær løsning, da ingen af karakterligningens rødder er $3i$.

Idet $y'_{p_2}(t) = -3K\cdot\sin(3t) + 3L\cdot\cos(3t)$ og

$y''_{p_2}(t) = -9K\cdot\cos(3t) - 9L\cdot\sin(3t)$,

fås ved indsættelse i differentialligningen

$$\begin{aligned}
&\left(-9K\cdot\cos(3t) - 9L\cdot\sin(3t)\right) + \left(-3K\cdot\sin(3t) + 3L\cdot\cos(3t)\right) \\
&- 6\left(K\cdot\cos(3t) + L\cdot\sin(3t)\right) = 78\cos(3t) \\
\Leftrightarrow\quad &[-9K + 3L - 6K - 78]\cos(3t) + [-9L - 3K - 6L]\sin(3t) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad &[-15K + 3L - 78]\cos(3t) + [-3K - 15L]\sin(3t) = 0.
\end{aligned}$$

Ligningen er opfyldt for alle t, hvis og kun hvis

$$-15K+3L-78=0 \quad \wedge \quad -3K-15L=0 \quad \Leftrightarrow \quad K=-5 \quad \wedge \quad L=1.$$

Hermed har vi fundet $y_{p_2}(t) = -5\cos(3t) + \sin(3t)$.

Samtlige løsninger til differentialligningen er følgelig

$$\underline{\underline{y(t) = -5\cos(3t) + \sin(3t) + C_1e^{2t} + C_2e^{-3t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}}.$$

Eksempel 6.4c. Gættemetoden.

Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y(t) = -10e^{-3t}.$$

LØSNING:

A) Homogen ligning. Se eksempel 6.4a.

B) Inhomogen ligning. Da vi skal gætte på en funktion af lignende type som e^{-3t}, ville vi umiddelbart gætte på $y_{p_3}(t) = Ke^{-3t}$.

Dette gæt kan imidlertid ikke give nogen partikulær løsning, da e^{-3t} er en løsning til den homogene differentialligning. I så tilfælde skal man multiplicere gættet med t. (Hjælper det ikke multipliceres med endnu et t, osv.). Vort gæt bliver altså

$$y_{p_3}(t) = Kt\mathrm{e}^{-3t}.$$

Idet $y'_{p_3}(t) = K\mathrm{e}^{-3t} - 3Kt\mathrm{e}^{-3t}$ og $y''_{p_3}(t) = -3K\mathrm{e}^{-3t} - 3K\mathrm{e}^{-3t} + 9Kt\mathrm{e}^{-3t}$,

fås ved indsættelse i differentialligningen

$$\left(-6K\mathrm{e}^{-3t} + 9Kt\mathrm{e}^{-3t}\right) + \left(K\mathrm{e}^{-3t} - 3Kt\mathrm{e}^{-3t}\right) - 6Kt\mathrm{e}^{-3t} = -10\mathrm{e}^{-3t}$$

$$\Leftrightarrow \quad (9K - 3K - 6K)\,t\mathrm{e}^{-3t} + (-6K + K + 10)\mathrm{e}^{-3t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (-5K + 10)\,\mathrm{e}^{-3t} = 0.$$

Ligningen er opfyldt for alle t, hvis og kun hvis

$$-5K + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K = 2.$$

Hermed har vi fundet $y_{p_3}(t) = 2t\mathrm{e}^{-3t}$.

Samtlige løsninger til differentialligningen er følgelig

$$\underline{\underline{y(t) = 2t\mathrm{e}^{-3t} + C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2\mathrm{e}^{-3t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}}.$$

Eksempel 6.4d. Gættemetoden.

Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y(t) = 12t + 78\cos(3t) - 10\mathrm{e}^{-3t}.$$

LØSNING:

A) Homogen ligning. Se eksempel 6.4a.

B) Inhomogen ligning. Da højre side $q(t)$ er en sum af et polynomium $12t$, en trigonometrisk funktion $78\cos(3t)$ og en eksponentialfunktion $-10\mathrm{e}^{-3t}$, betragtes disse funktioner hver for sig, som vist i eksemplerne 6.4a, 6.4b og 6.4c, hvorpå vi danner summen af de partikulære løsninger:

$$y_p(t) = y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t) + y_{p_3}(t).$$

Samtlige løsninger til differentialligningen er følgelig

$$\underline{\underline{y(t) = -2t - \frac{1}{3} - 5\cos(3t) + \sin(3t) + 2t\mathrm{e}^{-3t} + C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2\mathrm{e}^{-3t},}}$$

$$\underline{\underline{C_1, C_2 \in \mathbb{R}.}}$$

Eksempel 6.5. Den komplekse metode for partikulære løsninger.

Find partikulære løsninger x_p og y_p til differentialligningerne

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 13x(t) = e^t\cos(2t) \qquad \text{og} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 13y(t) = e^t\sin(2t).$$

LØSNING:

I den sidste ligning er x og cos erstattet med y og sin. Selv om vi kun skulle løse én af de to differentialligninger, ville det alligevel være lettere at benytte følgende komplekse metode, hvor begge løses samtidig.
Den sidste differentialligning multipliceres med i og adderes til den første, og vi indfører $z = x+iy$:

$$x'' - 6x' + 13x + i(y'' - 6y' + 13y) = e^t\cos(2t) + ie^t\sin(2t),$$

$$(x+iy)'' - 6(x+iy)' + 13(x+iy) = e^t(\cos(2t) + i\sin(2t)) = e^t e^{i2t} = e^{(1+2i)t},$$

$$z'' - 6z' + 13z = e^{(1+2i)t}. \qquad (*)$$

Vi gætter på en partikulær løsning $z_p = Ke^{(1+2i)t}$, som indsættes i (*):

$$\left[(1+2i)^2 - 6(1+2i) + 13\right]z_p = e^{(1+2i)t}, \qquad \left[4-8i\right]z_p = e^{(1+2i)t},$$

$$z_p = \frac{1}{4-8i}e^{(1+2i)t} = \frac{1}{4-8i}\frac{4+8i}{4+8i}e^{(1+2i)t} = \frac{4+8i}{16+64}e^{(1+2i)t} = \left(\frac{1}{20}+\frac{i}{10}\right)e^t(\cos(2t)+i\sin(2t))$$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{20}e^t\cos(2t) - \frac{1}{10}e^t\sin(2t)\right]}_{x_p} + i\underbrace{\left[\frac{1}{10}e^t\cos(2t) + \frac{1}{20}e^t\sin(2t)\right]}_{y_p} = x_p + iy_p.$$

Eksempel 6.6. Gættemetoden.

Find samtlige løsninger til differentialligningen $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 13y(t) = e^{-2t}$.

LØSNING:

A) <u>Homogen ligning</u>. Differentialligningen har karakterligningen $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ med rødderne $\lambda = -2+3i$ og $\lambda = -2-3i$. Samtlige løsninger til den tilsvarende homogene differentialligning er da:

$$y(t) = C_1e^{-2t}\cos(3t) + C_2e^{-2t}\sin(3t), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

B) <u>Inhomogen ligning</u>. Vi gætter på en funktion af lignende type som e^{-2t} :

$$y_p(t) = Ke^{-2t}.$$

Dette gæt vil med sikkerhed give en partikulær løsning, da ingen af karakterligningens rødder er -2.
Ved indsættelse af $y_p(t)$ i differentialligningen fås

$$(4 - 8 + 13)\,y_p(t) = e^{-2t} \quad \Leftrightarrow \quad y_p(t) = \frac{1}{9}e^{-2t}.$$

Samtlige løsninger til differentialligningen er følgelig

$$y(t) = \frac{1}{9}e^{-2t} + C_1e^{-2t}\cos(3t) + C_2e^{-2t}\sin(3t), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Eksempel 6.7. Gættemetoden.

Find samtlige løsninger til differentialligningen $\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 9y(t) = t^2 e^{-3t}$.

LØSNING:

A) Homogen ligning. Differentialligningen har karakterligningen $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ med roden $\lambda = -3$ (dobbeltrod). Samtlige løsninger til den tilsvarende homogene differentialligning er da:

$$y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-3t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

B) Inhomogen ligning. Vi gætter på en funktion af lignende type som $t^2 e^{-3t}$, men da -3 er dobbeltrod i karakterligningen skal vi multiplicere gættet med t^2.

$$y_p(t) = Kt^4 e^{-3t},$$

$$y'_p(t) = 4Kt^3 e^{-3t} - 3Kt^4 e^{-3t},$$

$$y''_p(t) = 12Kt^2 e^{-3t} - 24Kt^3 e^{-3t} + 9Kt^4 e^{-3t}.$$

Ved indsættelse af $y_p(t)$ i differentialligningen fås

$$\left(12t^2 - 24t^3 + 9t^4 + 24t^3 - 18t^4 + 9t^4\right) K e^{-3t} = t^2 e^{-3t}$$

$$\Leftrightarrow \quad 12t^2 K e^{-3t} = t^2 e^{-3t} \quad \Leftrightarrow \quad K = \frac{1}{12}.$$

Samtlige løsninger til differentialligningen er følgelig

$$y(t) = \frac{1}{12} t^4 e^{-3t} + C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-3t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Integralmetoden

For en lineær differentialligning af 2. orden med konstante koefficienter kan en partikulær løsning udtrykkes direkte ved integraler. En fordel ved disse formler er, at de kan benyttes, uanset hvilken funktion $q(t)$ der står på højre side i differentialligningen (blot man kan udregne integralerne).

SÆTNING 6.6 *(integralmetoden). En partikulær løsning til differentialligningen*

$$A\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + Cy(t) = q(t), \qquad (A \neq 0) \tag{9}$$

bestemmes ud fra rødderne λ_1 *og* λ_2 *i karakterligningen*

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

på følgende måde:

Rødder i karakterligning	*Partikulær løsning til (9)*
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ [1]	$\frac{e^{\lambda_1 t}}{A(\lambda_1-\lambda_2)}\int q(t)e^{-\lambda_1 t}\,dt \;-\; \frac{e^{\lambda_2 t}}{A(\lambda_1-\lambda_2)}\int q(t)e^{-\lambda_2 t}\,dt$
$\lambda_1 = \lambda_2$	$\frac{te^{\lambda_1 t}}{A}\int q(t)\,e^{-\lambda_1 t}\,dt \;-\; \frac{e^{\lambda_1 t}}{A}\int q(t)\,t\,e^{-\lambda_1 t}\,dt$
$r_0 \pm i\omega_0$	$\frac{e^{r_0 t}\sin(\omega_0 t)}{A\omega_0}\int q(t)\,e^{-r_0 t}\cos(\omega_0 t)\,dt$ $-\frac{e^{r_0 t}\cos(\omega_0 t)}{A\omega_0}\int q(t)\,e^{-r_0 t}\sin(\omega_0 t)\,dt$

I appendix 6.5 findes tilsvarende formler for en differentialligning af vilkårlig orden n, hvor karakterligningen har n forskellige rødder.

Bevis. Idet vi benytter samme omskrivning, som i beviset for sætning 6.2, fås

$$Ay'' + By' + Cy = q(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad A[y'' - (\lambda_1+\lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y] = q(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad y'' - \lambda_2 y' - \lambda_1(y' - \lambda_2 y) = \frac{q(t)}{A}$$

$$\Leftrightarrow \quad (y' - \lambda_2 y)' - \lambda_1(y' - \lambda_2 y) = \frac{q(t)}{A}$$

$$\Leftrightarrow \quad z' - \lambda_1 z = \frac{q(t)}{A}, \qquad \text{hvor} \quad z = y' - \lambda_2 y$$

$$\Leftrightarrow \quad z = e^{\lambda_1 t}\left[\int \frac{q(t)}{A}\,e^{-\lambda_1 t}\,dt + C_1\right] \qquad \text{(ifølge sætning 4.2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad y' - \lambda_2 y = e^{\lambda_1 t}\left[\int \frac{q(t)}{A}\,e^{-\lambda_1 t}\,dt + C_1\right].$$

Da vi kun søger en partikulær løsning $y(t)$, sættes $C_1 = 0$:

$$y' - \lambda_2 y = e^{\lambda_1 t}\int \frac{q(t)}{A}\,e^{-\lambda_1 t}\,dt$$

---

[1] I tilfældet $\lambda_1 \neq \lambda_2$ vil formlen for den partikulære løsning også kunne anvendes, når λ_1 og λ_2 er vilkårlige komplekse rødder.

$$\Leftrightarrow \quad y = e^{\lambda_2 t}\left[\int e^{\lambda_1 t}\left(\int \frac{q(t)}{A}\, e^{-\lambda_1 t}\, dt\right) e^{-\lambda_2 t}\, dt + C_2\right]. \qquad \text{(ifølge sætning 4.2)}$$

Sættes $C_2 = 0$, fås

$$y = e^{\lambda_2 t}\int e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\left(\int \frac{q(t)}{A}\, e^{-\lambda_1 t}\, dt\right) dt.$$

Ved hjælp af delvis integration: $\int f(t)\cdot g(t)\,dt = F(t)\cdot g(t) - \int F(t)\cdot g'(t)\,dt$ med $f(t) = e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}$ og $g(t) = \int \frac{q(t)}{A}\, e^{-\lambda_1 t}\, dt$, fås

1) $\boxed{\lambda_1 \neq \lambda_2}$

$$y = e^{\lambda_2 t}\left[\frac{e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}}{\lambda_1-\lambda_2}\int \frac{q(t)}{A}\, e^{-\lambda_1 t}\, dt - \int \frac{e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}}{\lambda_1-\lambda_2}\,\frac{q(t)}{A}\, e^{-\lambda_1 t}\, dt\right]$$

$$= \frac{e^{\lambda_1 t}}{A(\lambda_1-\lambda_2)}\int q(t)\, e^{-\lambda_1 t}\, dt - \frac{e^{\lambda_2 t}}{A(\lambda_1-\lambda_2)}\int q(t)\, e^{-\lambda_2 t}\, dt. \qquad (10)$$

2) $\boxed{\lambda_1 = \lambda_2}$

$$y = e^{\lambda_1 t}\int 1\cdot\left(\int \frac{q(t)}{A}\, e^{-\lambda_1 t}\, dt\right) dt = e^{\lambda_1 t}\left[t\int \frac{q(t)}{A}\, e^{-\lambda_1 t}\, dt - \int t\,\frac{q(t)}{A}\, e^{-\lambda_1 t}\, dt\right]$$

$$= \frac{t e^{\lambda_1 t}}{A}\int q(t)\, e^{-\lambda_1 t}\, dt - \frac{e^{\lambda_1 t}}{A}\int q(t)\, t\, e^{-\lambda_1 t}\, dt.$$

3) $\boxed{r_0 \pm i\omega_0}$. Da formel (10) også gælder for $\lambda_1 = r_0 + i\omega_0$ og $\lambda_2 = r_0 - i\omega_0$, indsættes disse værdier i (10):

$$y(t) = \frac{e^{(r_0+i\omega_0)t}}{A(r_0+i\omega_0-(r_0-i\omega_0))}\int q(t)\, e^{-(r_0+i\omega_0)t}\, dt$$

$$- \frac{e^{(r_0-i\omega_0)t}}{A(r_0+i\omega_0-(r_0-i\omega_0))}\int q(t)\, e^{-(r_0-i\omega_0)t}\, dt$$

$$= \frac{e^{r_0 t}\cos(\omega_0 t) + i e^{r_0 t}\sin(\omega_0 t)}{2A\, i\omega_0}\int q(t)\left(e^{-r_0 t}\cos(\omega_0 t) - i e^{-r_0 t}\sin(\omega_0 t)\right) dt$$

$$- \frac{e^{r_0 t}\cos(\omega_0 t) - i e^{r_0 t}\sin(\omega_0 t)}{2A\, i\omega_0}\int q(t)\left(e^{-r_0 t}\cos(\omega_0 t) + i e^{-r_0 t}\sin(\omega_0 t)\right) dt$$

$$= \frac{e^{r_0 t}\left(\cos(\omega_0 t) + i\cdot\sin(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t) + i\cdot\sin(\omega_0 t)\right)}{2A\, i\,\omega_0}\int q(t)\, e^{-r_0 t}\cos(\omega_0 t)\, dt$$

$$+ \frac{e^{r_0 t}\left(-\cos(\omega_0 t) - i\cdot\sin(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t) + i\cdot\sin(\omega_0 t)\right)}{2A\, i\,\omega_0}\, i\int q(t)\, e^{-r_0 t}\sin(\omega_0 t)\, dt$$

$$= \frac{e^{r_0 t}\sin(\omega_0 t)}{A\omega_0}\int q(t)\, e^{-r_0 t}\cos(\omega_0 t)\, dt - \frac{e^{r_0 t}\cos(\omega_0 t)}{A\omega_0}\int q(t)\, e^{-r_0 t}\sin(\omega_0 t)\, dt.$$

Eksempel 6.8. Integralmetoden.

Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 4y(t) = \cos(\mathrm{e}^t).$$

LØSNING:

Da karakterligningen $2\lambda^2 + 6\lambda + 4 = 0$ har rødderne $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = -2$, fås følgende partikulære løsning $y_p(t)$ ved hjælp af sætning 6.6:

$$y_p(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2[-1-(-2)]}\int \cos(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^t\,dt - \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2[-1-(-2)]}\int \cos(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^{2t}\,dt.$$

Substitueres $u = \mathrm{e}^t$, $du = \mathrm{e}^t\,dt$, fås

$$y_p(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\int \cos u\,du - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\int u\cdot\cos u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\sin u - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}(\cos u + u\cdot\sin u)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\sin(\mathrm{e}^t) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\cos(\mathrm{e}^t) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\sin(\mathrm{e}^t) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\cos(\mathrm{e}^t).$$

Samtlige løsninger til differentialligningen er da

$$y(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\cos(\mathrm{e}^t) + C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-2t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Tabelmetoden

Tabelmetoden kan benyttes under de samme betingelser som for gættemetoden med den begrænsning, at hvis $q(t)$ indeholder et polynomium, må differentialligningen højst være af 2. orden. I tilfælde hvor gættemetoden fører til besværlige regninger, kan det være langt hurtigere at benytte tabelmetoden.

Eksempel 6.9. Tabelmetoden.

Find den partikulære løsning til differentialligningen

$$\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2} + 2y(t) = 2e^{3t}\cos 2t.$$

LØSNING:

1) Ligningen normeres ved division med $\frac{1}{2}$:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y(t) = 4e^{3t}\cos 2t.$$

2) Da $q(t)$ er af typen $k\,e^{rt}\cos(\omega t)$, skal vi i tabellen i appendix 6.4 benytte formlerne 26 - 29.

a) Benyttes formel 26 (løsning med faseforskydning), fås: Idet $r + i\omega = 3 + 2i$ ikke er en rod i det karakteristiske polynomium $H(\lambda) = \lambda^2 + 4$, skal vi benytte formel 22 for $\phi = 0$:

$$y_p(t) = \frac{4}{h}e^{3t}\cos(2t - \theta), \qquad \begin{cases} h = |\,H(3+2i)\,| \\ \theta = \mathrm{Arg}(\,H(3+2i)\,). \end{cases}$$

Da $H(3+2i) = (3+2i)^2 + 4 = 9 + 12i - 4 + 4 = 9 + 12i$, fås

$$h = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15 \quad \text{og} \quad \theta = \mathrm{Arctan}\frac{12}{9} = 0.9273$$

$$\underline{\underline{y_p(t) = \frac{4}{15}e^{3t}\cos(2t - 0.9273).}}$$

b) Benyttes i stedet, at $n = 2$ og $a_1 \neq -2r \quad (0 \neq -2\cdot 3)$, kan formel 27 benyttes:

$$y_p(t) = 4e^{3t}\,\frac{(3^2 + 0\cdot 3 + 4 - 2^2)\cos(2t) + (0 + 2\cdot 3)\cdot 2\sin(2t)}{(3^2 + 0\cdot 3 + 4 - 2^2)^2 + (0 + 2\cdot 3)^2\cdot 2^2}$$

$$= \frac{4e^{3t}}{225}(9\cos 2t + 12\sin 2t) = \underline{\underline{e^{3t}\left(\frac{16}{75}\sin 2t + \frac{4}{25}\cos 2t\right).}}$$

Matematikprogrammer
Kan man finde samtlige løsninger ved én af de foregående 2 metoder, kan man sædvanligvis også finde dem ved hjælp af f.eks. Maple.

Det følgende eksempel illustrerer det.

Eksempel 6.9. Program-metoden.

Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2} + 2y(t) = 2e^{3t}\cos 2t$$

ved at benytte programmet Maple.

LØSNING:
Maple: "Math mode"
Skriv: $\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}y(t)+2\cdot y(t)=2\cdot e^{3\cdot t}\cdot\cos(2\cdot t)$ anvend funktionerne i menuen i

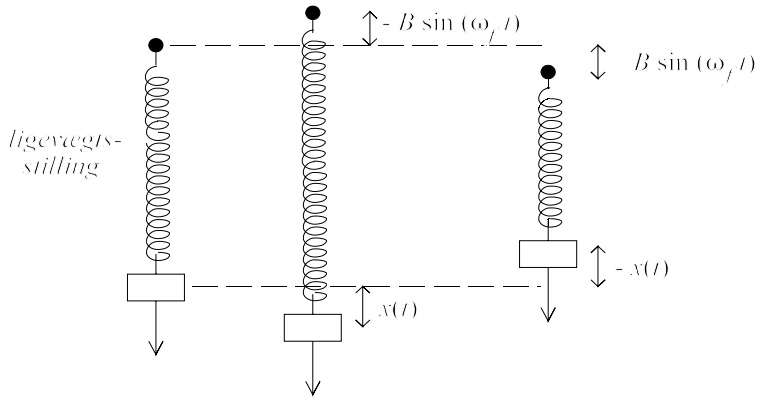
"Expression"

Sæt cursor på udskrift, og tryk på højre musetast. Vælg "Solvd DE""
Fuldstændig løsning:

$$y(t)=\sin(2t)_C2+\cos(2t)_C1+\frac{4}{75}e^{3t}\left(4\sin(2t)+3\cos(2t)\right)$$

Eksempel 6.11. Tvungen svingning.

I fortsættelse af eksempel 6.2, der omhandler en svingning med luftmodstand, vil vi nu tænke os, at fjederens fastspændingspunkt bevæges frem og tilbage på en sådan måde, at afvigelsen fra det oprindelige fastspændingspunkt til tiden t er $B\sin(\omega_f t)$, hvor $B, \omega_f \in \mathbb{R}$.



Herved ændres fjederens længde med $x(t) - B\sin\omega_f t$ (jfr. figuren), og fjederkraften bliver $-k\cdot\left(x(t) - B\sin\omega_f t\right)$.

Bevægelsesligningen bliver nu:

$$mx''(t) + ax'(t) + kx(t) = k\cdot B\sin\omega_f t\,.$$

For at finde en partikulær løsning til denne differentialligning anvendes gættemetoden.

Ved indsætning af $x(t) = \alpha_1\cos(\omega_f t) + \alpha_2\sin(\omega_f t)$ fås

$$\left[(k-m\omega_f^2)\alpha_1 + a\,\omega_f\,\alpha_2\right]\cos(\omega_f t) + \left[-a\,\omega_f\alpha_1 + (k-m\omega_f^2)\alpha_2\right]\sin(\omega_f t) = kB\sin(\omega_f t)$$

$$\Leftrightarrow \quad (k-m\omega_f^2)\alpha_1 + a\,\omega_f\,\alpha_2 = 0 \quad \wedge \quad -a\,\omega_f\,\alpha_1 + (k-m\omega_f^2)\alpha_2 = kB$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha_1,\alpha_2) = \left(\frac{-akB\,\omega_f}{(k-m\omega_f^2)^2 + a^2\omega_f^2}\,,\ \frac{kB(k-m\omega_f^2)}{(k-m\omega_f^2)^2 + a^2\omega_f^2}\right).$$

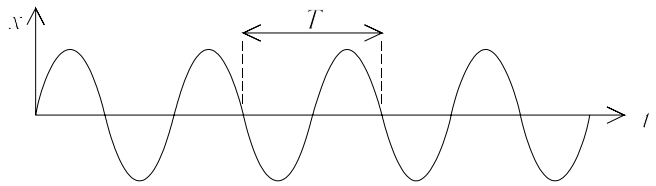
Da det er mere anskueligt at udtrykke svingningen ved aplitude og fase, omskrives $x(t) = \alpha_1\cos(\omega_f t) + \alpha_2\sin(\omega_f t)$ til $x(t) = A_f\sin(\omega_f t + \phi)$, hvor $A_f e^{i\phi} = \alpha_2 + i\alpha_1$ (sætning 6.2's fodnote). Som nævnt i eksempel 6.2 vil bidraget fra den homogene løsning efter en vis tid blive betydningsløst, hvorefter partiklen praktisk taget kun udfører svingningen $x(t) = A_f\sin(\omega_f t + \phi)$.

Resonans. Er gnidningen lille kan denne amplitude A_f blive langt større end B. Vi har nemlig

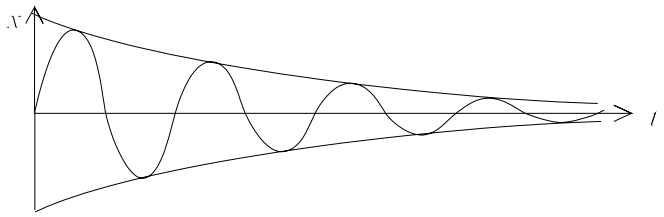
$$A_f = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} = \frac{kB}{\sqrt{(k-m\omega_f^2)^2 + a^2\omega_f^2}}\,.$$

Da A_f er størst for nævneren mindst, kan man ved differentiation af $(k-m\,\omega_f^2)^2 + a^2\omega_f^2$ finde, at A_f er størst for $\omega_f = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{a^2}{2m^2}}$ (resonanstilfældet).

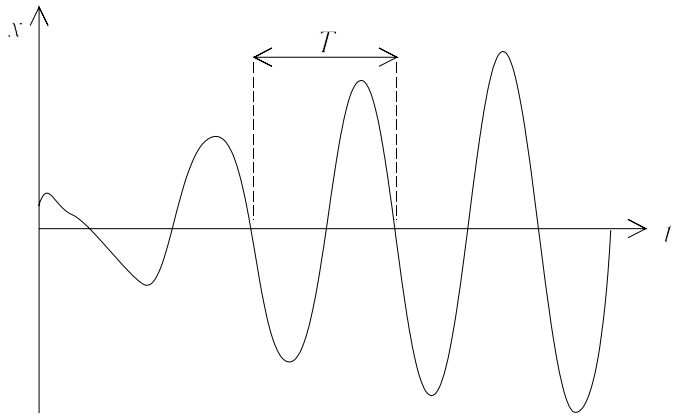
Dette er anskueliggjort i følgende figurer:



Fastspændingspunktets svingning $B\sin\omega_f t$.



Dæmpet svingning



Tvungen svingning tegnet i resonanstilfældet

6.5 DEN LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNING AF 2. ORDEN

Differentialligningen

$$\alpha_2(t)\,\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha_1(t)\,\frac{dy}{dt} + \alpha_0(t)\,y(t) = \beta(t), \qquad t \in I \tag{11}$$

hvor $\alpha_2(t), \alpha_1(t), \alpha_0(t)$ og $\beta(t)$ er reelle funktioner, er lineær og af anden orden (når α_2 ikke er identisk 0).

Tilfælde 1: α_2, α_1 og α_0 er konstanter. Vi har i de forrige afsnit angivet løsningsmetoder til (11) i det specielle tilfælde, hvor α_2, α_1 og α_0 er konstanter.

Tilfælde 2: $\alpha_0(t) = 0$. Er $\alpha_0(t) = 0$ for alle $t \in I$, er det også muligt at angive en løsningsmetode. Ved substitutionen $\frac{dy}{dt} = z$ føres ligning (11) nemlig over i en lineær differentialligning af første orden:

$$\alpha_2(t)\,\frac{dz}{dt} + \alpha_1(t)\,z(t) = \beta(t).$$

Af denne ligning kan man finde $z(t)$, og derefter kan $y(t)$ findes ved integration af $\frac{dy}{dt} = z(t)$.
Metoden er vist i det følgende eksempel.

Eksempel 6.12. Differentialligning uden et y-led.

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{t}\,\frac{dy}{dt} = 3t, \qquad t > 0.$$

LØSNING:
$\frac{dy}{dt} = z$ og $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dz}{dt}$ indsættes, og vi får

$$\frac{dz}{dt} - \frac{1}{t}\,z(t) = 3t.$$

Af sætning 4.2 fås $z(t) = 3t^2 + C_1 t$.

Idet $\frac{dy}{dt} = z = 3t^2 + C_1 t$, fås

$$y(t) = t^3 + \frac{1}{2}C_1 t^2 + C_2, \qquad t > 0 \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Tilfælde 3: Det generelle tilfælde. Det er ikke muligt generelt at angive en løsningsmetode til differentialligningen (11). Kan man imidlertid finde (gætte) én løsning til den tilsvarende homogene differentialligning, så kan de i den følgende sætning 6.7 angivne formler benyttes til at finde den fuldstændige løsning.

I sætning 6.7 er differentialligningen *normeret*, dvs. vi har divideret ligning (11) med $\alpha_2(t)$, så differentialligningen kommer på formen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p_1(t)\frac{dy}{dt} + p_0(t)\,y(t) = q(t).$$

Vi forudsætter endvidere, at $p_1(t)$, $p_0(t)$ og $q(t)$ er kontinuerte funktioner i intervallet I.

SÆTNING 6.7 *(fuldstændig løsning).*

1a) Den fuldstændige løsning til den homogene, normerede differentialligning

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p_1(t)\frac{dy}{dt} + p_0(t)\,y(t) = 0, \qquad t \in I \tag{12}$$

er bestemt ved

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t), \qquad t \in I, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

hvor y_1 *og* y_2 *er to vilkårlige, ikke-proportionale løsninger til (12).*

1b) Hvis $y = f_1(t)$ *er en* ***nulpunktsfri*** [1] *løsning til (12), da vil funktionen*

$$f_2(t) = f_1(t)\int \frac{1}{(f_1(t))^2}\, e^{-\int p_1(t)\,dt}\,dt \tag{14}$$

være en ny løsning til (12), som ikke er proportional med $f_1(t)$.

2a) Den fuldstændige løsning til den inhomogene differentialligning

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p_1(t)\frac{dy}{dt} + p_0(t)\,y(t) = q(t), \qquad t \in I \tag{15}$$

er bestemt ved

$$y(t) = y_p(t) + C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t), \qquad t \in I, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

hvor y_1 *og* y_2 *er to ikke-proportionale løsninger til (12), og* y_p *er en vilkårlig partikulær løsning til (15).*

---

[1] Dvs. funktionen er forskellig fra nul for alle $t \in I$.

2b) En partikulær løsning y_p *til (15) kan udregnes ved*

$$y_p(t) = y_2(t)\int \frac{y_1(t)\cdot q(t)}{W(t)}\,dt - y_1(t)\int \frac{y_2(t)\cdot q(t)}{W(t)}\,dt, \qquad (17)$$

hvor ***Wronski****-determinanten* $\mathrm{W}(t)$ *er defineret ved*

$$\mathrm{W}(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2,$$

og y_1 *og* y_2 *er to ikke-proportionale løsninger til (12).*

Bevis for sætningen findes i Supplement 6A.

Eksempel 6.13. Samtlige løsninger.

Find den fuldstændige løsning til den inhomogene differentialligning

$$t\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 4t^3 y(t) = t^3, \qquad t>0,$$

idet det oplyses, at $\mathrm{e}^{(t^2)}$ er en løsning til den tilsvarende homogene differentialligning.

LØSNING:

Af sætning 6.7 punkt 1b fås:

$$y_2(t) = \mathrm{e}^{t^2}\int \frac{1}{(\mathrm{e}^{(t^2)})^2}\,\mathrm{e}^{-\int\left(-\frac{1}{t}\right)dt}\,dt = \mathrm{e}^{t^2}\int \frac{1}{\mathrm{e}^{(2t^2)}}\,\mathrm{e}^{\ln t}\,dt$$

$$= \mathrm{e}^{t^2}\int \mathrm{e}^{-2t^2}\,t\,dt = \mathrm{e}^{t^2}\left(\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2t^2}\right) = -\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-t^2}.$$

Idet $W(t) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{(t^2)} & -\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{(-t^2)} \\ 2t\,\mathrm{e}^{(t^2)} & \frac{1}{2}\,t\,\mathrm{e}^{(-t^2)} \end{vmatrix} = t,$ fås af sætning 6.7 punkt 2.b:

$$y_p(t) = -\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{(-t^2)}\int \frac{\mathrm{e}^{(t^2)}\cdot t^2}{t}\,dt - \mathrm{e}^{(t^2)}\int \frac{\mathrm{e}^{(-t^2)}\cdot t^2}{-4t}\,dt$$

$$= -\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{(-t^2)}\int t\,\mathrm{e}^{(t^2)}\,dt + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{t^2}\int t\,\mathrm{e}^{(-t^2)}\,dt$$

$$= -\frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{(-t^2)}\,\mathrm{e}^{(t^2)} - \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{(t^2)}\,\mathrm{e}^{(-t^2)} = -\frac{1}{4}.$$

Ifølge sætning 6.7 punkt 2a er den fuldstændige løsning følgelig bestemt ved

$$y(t) = -\frac{1}{4} + C_1\mathrm{e}^{(t^2)} + C_2\mathrm{e}^{(-t^2)}.$$

6.6 SYSTEM AF 1. ORDENS DIFFERENTIALLIGNINGER. NUMERISK LØSNING

Indledning

Vi har hidtil kun omtalt, hvordan man finder én ubekendt funktion $y(t)$ ud fra én differentialligning. Ved de praktiske anvendelser skal man imidlertid ofte finde flere ubekendte funktioner $y(t), z(t), w(t), \ldots$ ud fra et system af differentialligninger, f.eks.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t+y+z+w+1}$$

$$\frac{dz}{dt} = e^{-t} \cdot y \cdot z \cdot w$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{t+y+z+w}{10}.$$

For simpelheds skyld vil vi indskrænke os til at betragte et system af 3 differentialligninger af 1. orden, idet principperne naturligvis gælder for et system af et vilkårligt antal differentialligninger af 1. orden (differentialligninger af højere end 1. orden kan omformes til flere differentialligninger af 1. orden, som vist i afsnit 6.7).

Ved en (partikulær) løsning til systemet

$$\frac{dy}{dt} = f_1(t,y,z,w)$$
$$\frac{dz}{dt} = f_2(t,y,z,w)$$
$$\frac{dw}{dt} = f_3(t,y,z,w)$$

forstås 3 funktioner $y = y(t),\ z = z(t)$ og $w = w(t),$ som er defineret i et interval I og i dette interval tilfredsstiller differentialligningssystemet. Analogt til sætning 6.1 kan man vise, at der gennem ethvert indre punkt (t_0, y_0, z_0, w_0) af en mængde S [1] går én og kun én løsningskurve $k\colon (y,z,w) = (y(t), z(t), w(t))$ til ovenstående system af differentialligninger.

Undertiden kan et system af differentialligninger løses eksakt (se f.eks. Bind 3 under omtalen af Laplace-transformation). Er dette ikke muligt, kan en numerisk metode benyttes.

---

[1] Det forudsættes, at S er en sammenhængende mængde i $tyzw$-rummet, at f_1, f_2, f_3 er kontinuerte i S, og at de i S har kontinuerte partielle afledede med hensyn til y, z og w.

Numerisk løsning af et system af differentialligninger

Vi søger en (partikulær) numerisk løsning til differentialligningssystemet:

$$\frac{dy}{dt} = f_1(t,y,z,w)$$

$$\frac{dz}{dt} = f_2(t,y,z,w)$$

$$\frac{dw}{dt} = f_3(t,y,z,w) \ .$$

Den søgte løsning $y = y(t),\ z = z(t)$ og $w = w(t)$ skal opfylde begyndelsesbetingelserne $y(t_0) = y_0,\ z(t_0) = z_0$ og $w(t_0) = w_0$. For overskuelighedens skyld er det praktisk at skrive problemet på vektorform:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t,y,z,w) \\ f_2(t,y,z,w) \\ f_3(t,y,z,w) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y(t_0) \\ z(t_0) \\ w(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

eller kortere

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{f}(t,\bar{y}) \ , \qquad \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$$

hvor $\bar{y}$ er en kort skrivemåde for (y,z,w).

Det er nærliggende at generalisere nogle kendte numeriske metoder, f.eks. Runge-Kutta-metoder, så de kan anvendes på systemer af differentialligninger.

Eulers metode. For en enkelt differentialligning

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \qquad y(t_0) = y_0$$

var Eulers metode givet ved

$$k = h \cdot f(t_i, y_i)$$
$$y_{i+1} = y_i + k \ .$$

For et system af differentialligninger (skrevet på vektorform)

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{f}(t,\bar{y}), \qquad \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$$

kan metoden generaliseres til

$$\bar{k} = h\cdot\bar{f}(t_i,\bar{y}_i)$$

$$\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + \bar{k},$$

dvs. (idet vi sætter $\bar{k} = (k,\ell,m)$)

$$\begin{pmatrix} k \\ \ell \\ m \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} f_1(t_i,y_i,z_i,w_i) \\ f_2(t_i,y_i,z_i,w_i) \\ f_3(t_i,y_i,z_i,w_i) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{i+1} \\ z_{i+1} \\ w_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \\ w_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ \ell \\ m \end{pmatrix}.$$

Skrevet helt ud bliver metoden altså

$$k = h\cdot f_1(t_i,y_i,z_i,w_i)$$
$$\ell = h\cdot f_2(t_i,y_i,z_i,w_i)$$
$$m = h\cdot f_3(t_i,y_i,z_i,w_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + k$$
$$z_{i+1} = z_i + \ell$$
$$w_{i+1} = w_i + m.$$

På grund af den ringe nøjagtighed kan Eulers metode ikke anbefales til praktisk brug. I appendix 6.6 findes en algoritme for den mere nøjagtige Runge-Kutta-metode af 4. orden.

Eksempel 6.14. Numerisk løsning af system af differentialligninger.

Tabellér løsningen til differentialligningsproblemet

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{t+y+z+w+1}, & y(0)&=0 \\ \frac{dz}{dt} &= \mathrm{e}^{-t}\cdot y\,z\,w, & z(0)&=1 \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{t+y+z+w}{10}, & w(0)&=0 \end{aligned}\right\} \quad t\in[0;1]$$

med mindst 1 betydende ciffer.

LØSNING:

Ét delinterval ($n=1$). Vælges skridtstørrelsen $\Delta t = h = 1$, gennemløbes hele intervallet $[0;1]$ i ét skridt:

$\boxed{i=0}$

$$\begin{pmatrix} k \\ \ell \\ m \end{pmatrix} = h\cdot\begin{pmatrix} f_1(t_0,y_0,z_0,w_0) \\ f_2(t_0,y_0,z_0,w_0) \\ f_3(t_0,y_0,z_0,w_0) \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{0+0+1+0+1} \\ \mathrm{e}^0\cdot 0\cdot 1\cdot 0 \\ \frac{0+0+1+0}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ \ell \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

To delintervaller ($n=2$). Vælges skridtstørrelsen $\Delta t = h = 0.5$, gennemløbes hele intervallet $[0;1]$ i to skridt:

$\boxed{i=0}$

$$\begin{pmatrix} k \\ \ell \\ m \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{0+0+1+0+1} \\ \mathrm{e}^0\cdot 0\cdot 1\cdot 0 \\ \frac{0+0+1+0}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \\ 0.05 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \\ 0.05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \\ 0.05 \end{pmatrix} \quad \text{for} \quad t = 0.5 \,.$$

$\boxed{i = 1}$

$$\begin{pmatrix} k \\ \ell \\ m \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1}{0.5 + 0.25 + 1 + 0.05 + 1} \\ e^{-0.5} \cdot 0.25 \cdot 1 \cdot 0.05 \\ \dfrac{0.5 + 0.25 + 1 + 0.05}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.17857 \\ 0.00379 \\ 0.09000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ \ell \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \\ 0.05 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.17857 \\ 0.00379 \\ 0.09000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.42857 \\ 1.00379 \\ 0.14000 \end{pmatrix} \quad \text{for} \quad t = 1 \,.$$

Flere delintervaller ($n = 2, 4, 8, 16, \ldots$). Beregningerne gentages - hver gang med en dobbelt så stor *n*-værdi (dvs. med en halvt så stor h-værdi) som forrige gang - indtil resultaterne skønnes at være nogenlunde stabile. Resultaterne er opstillet i følgende tabeller, idet der for overskuelighedens skyld for $h = \frac{1}{16}$ kun er medtaget 6 resultater. Bemærk, at alle mellemregninger er udført med regnemidlets fulde nøjagtighed.

t	$h = 1$ $y(t)$	$h = 0.5$ $y(t)$	$h = 0.25$ $y(t)$	$h = 0.125$ $y(t)$	$h = 0.0625$ $y(t)$	Resultat med 1 betydende ciffer
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0
0.125				0.063	0.061	0.06
0.250			0.13	0.12	0.12	0.1
0.375				0.17	0.17	0.2
0.500		0.25	0.23	0.23	0.22	0.2
0.625				0.26	0.26	0.3
0.750			0.32	0.31	0.30	0.3
0.875				0.35	0.34	0.3
1.000	0.50	0.43	0.40	0.38	0.38	0.4

t	$h=1$ $z(t)$	$h=0.5$ $z(t)$	$h=0.25$ $z(t)$	$h=0.125$ $z(t)$	$h=0.0625$ $z(t)$	Resultat med 3 betydende ciffer
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.00
0.125				1.000	1.000	1.00
0.250			1.000	1.000	1.000	1.00
0.375				1.000	1.000	1.00
0.500		1.000	1.000	1.001	1.001	1.00
0.625				1.002	1.003	1.00
0.750			1.003	1.004	1.004	1.00
0.875				1.005	1.006	1.01
1.000	1.000	1.004	1.007	1.008	1.009	1.01

t	$h=1$ $w(t)$	$h=0.5$ $w(t)$	$h=0.25$ $w(t)$	$h=0.125$ $w(t)$	$h=0.0625$ $w(t)$	Resultat med 1 betydende ciffer
0	0	0	0	0	0	0
0.125				0.0125	0.013	0.01
0.250			0.025	0.028	0.029	0.03
0.375				0.045	0.047	0.05
0.500		0.050	0.060	0.065	0.067	0.07
0.625				0.087	0.090	0.09
0.750			0.11	0.11	0.12	0.1
0.875				0.14	0.14	0.1
1.000	0.10	0.14	0.16	0.17	0.17	0.2

I Maple kan det tilsvarende problem løses på følgende måde:

```
>sys :=     diff(y(t),t) = 1/(t+y(t)+z(t)+w(t)+1),
>           diff(z(t),t) = exp(-t) * y(t) * z(t) * w(t),
>           diff(w(t),t) = (t+y(t)+z(t)+w(t))/10:    fcns := {y(t), z(t), w(t)}:
> dsolve( {sys, y(0)=0, z(0)=1, w(0)=0}, fcns, type=numeric, value=array( [0,0.25,0.5,0.75,1]) );
```

```
[[t    w(t)    y(t)    z(t)]]
[
[0 , 0 , 0 , 1.]
[.2500000000000000 , .02994853778369001 , .1140485394885566 ,
1.000231270952563]
[.5000000000000000 , .06965943245807865 , .2108132517879904 ,
1.001628680668670]
[.7500000000000000 , .1190444734730584 , .2949540646905664 ,
1.004813725790384]
[1. , .1781164772061103 , .3693779908092443 , 1.009962916572763]]
```

6.7 OMFORMNING AF DIFFERENTIALLIGNINGER AF N'TE ORDEN

Der er behov for at kunne omforme ét differentialligningsproblem til et andet differentialligningsproblem for at få flere løsningsmetoder til rådighed. I det følgende demonstreres omformning ved nogle eksempler.

Omformning af 2. ordens differentialligning

En 2. ordens differentialligning, f.eks.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{t + 2y + \frac{dy}{dt}}$$

kan omformes til et system af to 1. ordens differentialligninger. Det gøres ved at indføre en ny betegnelse $z = z(t)$ for den afledede $\frac{dy}{dt}$. For den viste differentialligning fås da

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= z \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{t + 2y + z}, \end{aligned}$$

som er et system af to 1. ordens differentialligninger til bestemmelse af de to ubekendte funktioner $y(t)$ og $z(t)$. Herefter kan problemet løses numerisk, som vist i afsnit 6.6.

Omformning af 3. ordens differentialligning

En 3. ordens differentialligning, f.eks.

$$\frac{d^3y}{dt^3} + t\frac{d^2y}{dt^2} - \sqrt{t}\,\frac{dy}{dt} + 5y(t) = e^{-t}$$

kan omformes til et system af tre 1. ordens differentialligninger. Det gøres ved at indføre nye betegnelser $z = z(t)$ og $w = w(t)$ for de afledede $\frac{dy}{dt}$ og $\frac{d^2y}{dt^2}$. For den viste differentialligning fås da

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= z \\ \frac{dz}{dt} &= w \\ \frac{dw}{dt} + tw - \sqrt{t}z + 5y &= e^{-t}, \end{aligned}$$

som er et system af tre 1. ordens differentialligninger til bestemmelse af de tre ubekendte funktioner $y(t)$, $z(t)$ og $w(t)$. Herefter kan problemet løses numerisk, som vist i afsnit 6.6.

Omformning af to sammenhørende 1. ordens differentialligninger

Et system af to 1. ordens differentialligninger, f.eks.

$$\frac{dy}{dt} = 1 + tyz \qquad (18)$$

$$\frac{dz}{dt} = t + y + z \qquad (19)$$

kan tit omformes til en enkelt 2. ordens differentialligning på følgende måde. Først findes y udtrykt ved t, z og $\frac{dz}{dt}$:

$$y = -t - z + \frac{dz}{dt}, \qquad (19^*)$$

Dernæst differentieres denne ligning:

$$\frac{dy}{dt} = -1 - \frac{dz}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}. \qquad (19^{*'})$$

Til sidst skal y og $\frac{dy}{dt}$ givet ved (19*) og (19*') indsættes i en af de givne ligninger (den ligning som har været "benyttet mindst"):

$$-1 - \frac{dz}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2} = 1 + t\left(-t - z + \frac{dz}{dt}\right)z$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^2z}{dt^2} - (zt+1)\frac{dz}{dt} + t(t+z)z = 2\,.$$

Herved har vi fundet en 2. ordens differentialligning for z alene. Såfremt man kan løse denne differentialligning, kan man så ved indsættelse i ligningen (19*) også finde den anden ubekendte funktion $y(t)$.

Man finder

t	$h=2$ $y(t)$	$h=1$ $y(t)$	$h=0.5$ $y(t)$	$h=0.25$ $y(t)$
0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.25				0.11405
0.50			0.21083	0.21081
0.75				0.29496
1.00		0.36959	0.36939	0.36938
1.25				0.43605
1.50			0.49638	0.49636
1.75				0.55136
2.00	0.60433	0.60207	0.60185	0.60183

t	$h=2$ $z(t)$	$h=1$ $z(t)$	$h=0.5$ $z(t)$	$h=0.25$ $z(t)$
0.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.25				1.00023
0.50			1.00162	1.00163
0.75				1.00481
1.00		1.00975	1.00995	1.00996
1.25				1.01696
1.50			1.02552	1.02553
1.75				1.03533
2.00	1.04397	1.04576	1.04595	1.04597

t	$h=2$ $w(t)$	$h=1$ $w(t)$	$h=0.5$ $w(t)$	$h=0.25$ $w(t)$
0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.25				0.02995
0.50			0.06966	0.06966
0.75				0.11904
1.00		0.17821	0.17812	0.17811
1.25				0.24695
1.50			0.32566	0.32566
1.75				0.41438
2.00	0.51467	0.51338	0.51327	0.51327

SUPPLEMENT: 6A BEVIS VEDR. LINEÆR DIFFERENTIALLIGNING AF 2. ORDEN

SÆTNING 6.7 *(fuldstændig løsning).*

1a) *Den fuldstændige løsning til den homogene, normerede differentialligning*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p_1(t)\frac{dy}{dt} + p_0(t)\,y(t) = 0, \qquad t \in I \tag{12}$$

er bestemt ved

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t), \qquad t \in I, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

hvor y_1 *og* y_2 *er to vilkårlige, ikke-proportionale løsninger til (12).*

1b) *Hvis* $y = f_1(t)$ *er en* ***nulpunktsfri*** [1] *løsning til (12), da vil funktionen*

$$f_2(t) = f_1(t) \int \frac{1}{\left(f_1(t)\right)^2} \, e^{-\int p_1(t)\,dt} \, dt \tag{14}$$

være en ny løsning til (12), som ikke er proportional med $f_1(t)$.

2a) *Den fuldstændige løsning til den inhomogene differentialligning*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p_1(t)\frac{dy}{dt} + p_0(t)\,y(t) = q(t), \qquad t \in I \tag{15}$$

er bestemt ved

$$y(t) = y_p(t) + C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t), \qquad t \in I, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

hvor y_1 *og* y_2 *er to ikke-proportionale løsninger til (12), og* y_p *er en vilkårlig partikulær løsning til (15).*

2b) *En partikulær løsning* y_p *til (15) kan udregnes ved*

$$y_p(t) = y_2(t) \int \frac{y_1(t) \cdot q(t)}{W(t)} \, dt - y_1(t) \int \frac{y_2(t) \cdot q(t)}{W(t)} \, dt, \tag{17}$$

hvor ***Wronski****-determinanten* $W(t)$ *er defineret ved*

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2,$$

og y_1 *og* y_2 *er to ikke-proportionale løsninger til (12).*

---

[1] Dvs. funktionen er forskellig fra nul for alle $t \in I$.

Bevis. I beviset forudsættes, at der i intervallet I eksisterer en nulpunktsfri løsning $y = f_1(t)$ til (12). Sætningens punkt 1a), 2a) og 2b) er dog også gyldige, selv om $y = f_1(t)$ har nulpunkter i I.

Bevis for punkt 1b). Lad funktionen y være en vilkårlig løsning til den homogene differentialligning (12).
Vi indfører nu hjælpefunktionen h bestemt ved

$$h(t) = \frac{y(t)}{f_1(t)} .$$

Da $f_1(t) \neq 0$ for alle $t \in I$, er $h(t)$ defineret i hele I, og

$$h(t) = \frac{y(t)}{f_1(t)} \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = h(t) \cdot f_1(t) .$$

Indsættes $y = h \cdot f_1$, $y' = h'f_1 + hf_1'$ og $y'' = h''f_1 + 2h'f_1' + hf_1''$ i differentialligningen (12), fås

$$h''f_1 + 2h'f_1' + h \cdot f_1'' + p_1 \cdot (h'f_1 + h \cdot f_1') + p_0 \cdot h \cdot f_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h[f_1'' + p_1 \cdot f_1' + p_0 \cdot f_1] + f_1 h'' + (2f_1' + p_1 \cdot f_1)h' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f_1 h'' + (2f_1' + p_1 \cdot f_1)h' = 0 \qquad \text{(da } f_1 \text{ er løsning til (12))}$$

$$\Leftrightarrow \quad h'' + \left(\frac{2f_1'}{f_1} + p_1 \right) h' = 0 .$$

Substitueres $h' = z$, fås:

$$z' + \left(\frac{2f_1'}{f_1} + p_1 \right) z = 0 \qquad \text{(homogen lineær differentialligning af 1. orden)}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = C_2 \, \mathrm{e}^{-\int \left(\frac{2f_1'(t)}{f_1(t)} + p_1(t) \right) dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad h' = C_2 \, \mathrm{e}^{-2\ln|f_1| - \int p_1(t)\,dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad h' = C_2 \, (f_1)^{-2} \cdot \mathrm{e}^{-\int p_1(t)\,dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad h(t) = C_2 \int \frac{1}{(f_1(t))^2} \, \mathrm{e}^{-\int p_1(t)\,dt} \, dt + C_1, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R} .$$

Indsættes det fundne udtryk for $h(t)$ i $y(t) = h(t) \cdot f_1(t)$, fås at en *vilkårlig* løsning $y(t)$ til differentialligningen kan skrives

$$y(t) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

hvor $f_2(t) = f_1(t) \int \frac{1}{(f_1(t))^2} \, \mathrm{e}^{-\int p_1(t)\,dt} \, dt .$

Da $\int \frac{1}{(f_1(t))^2} \, \mathrm{e}^{-\int p_1(t)\,dt} \, dt$ ikke er en konstant, er f_1 og f_2 ikke proportionale.

Bevis for punkt 1a). Lad y_1 og y_2 være to vilkårlige ikke-proportionale løsninger til (12). Da enhver løsning til (12) kan skrives på formen (20), eksisterer der fire tal a_1, a_2, b_1, b_2, sådan at

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 f_1 + a_2 f_2 \\ y_2 &= b_1 f_1 + b_2 f_2 . \end{aligned} \tag{21}$$

Idet y_1 og y_2 ikke er proportionale, er vektorerne (a_1, a_2) og (b_1, b_2) heller ikke proportionale. Heraf følger, at ligningssystemets determinant $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Vi kan derfor udtrykke f_1 og f_2 ved y_1 og y_2, og indsættes disse udtryk i (20), ses, at den fuldstændige løsning $y(t)$ kan skrives på formen (13).

Bevis for punkt 2a). Beviset er fuldstændig analogt til beviset for sætning 6.5.

Bevis for punkt 2b). Vi vil først at vise, at Wronskideterminanten er forskellig fra 0. Indsættes (14) i udtrykket for Wronskideterminanten fås:

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f_1(t) & f_1(t)\int \frac{1}{(f_1(t))^2} e^{-\int p_1(t)dt} dt \\ f_1'(t) & f_1'(t)\int \frac{1}{(f_1(t))^2} e^{-\int p_1(t)dt} dt + f_1(t)\frac{1}{(f_1(t))^2} e^{-\int p_1(t)dt} \end{vmatrix}$$

$$= e^{-\int p_1(t)\,dt}, \qquad t \in I.$$

Vi har følgelig, at $W_1(t) \neq 0$.

Er y_1 og y_2 to vilkårlige ikke-proportionale løsninger til (12), fås ved indsættelse af (21)

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 f_1 + a_2 f_2 & b_1 f_1 + b_2 f_2 \\ a_1 f_1' + a_2 f_2' & b_1 f_1' + b_2 f_2' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} W_1(t) .$$

Da $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ og $W_1(t) \neq 0$, er $W(t) \neq 0$, for $t \in I$.

Vi har derfor, at funktionen

$$y_p(t) = y_2(t)\int \frac{y_1(t)\,q(t)}{W(t)}\,dt - y_1(t)\int \frac{y_2(t)\,q(t)}{W(t)}\,dt$$

er defineret for alle $t \in I$.

Vi mangler nu blot at vise, at y_p virkelig er en løsning til ligning (15). Dette gøres nemmest ved at indsætte udtrykket for y_p i ligning (15).

Da $$y_p' = y_2' \int \frac{y_1 \cdot q}{W}\,dt + y_2 \cdot \frac{y_1 \cdot q}{W} - y_1' \int \frac{y_2 \cdot q}{W}\,dt - y_1 \cdot \frac{y_2 \cdot q}{W} = y_2' \int \frac{y_1 \cdot q}{W}\,dt - y_1' \int \frac{y_2 \cdot q}{W}\,dt$$

og $$y_p'' = y_2'' \int \frac{y_1 \cdot q}{W}\,dt + y_2' \cdot \frac{y_1 \cdot q}{W} - y_1'' \int \frac{y_2 \cdot q}{W}\,dt - y_1' \cdot \frac{y_2 \cdot q}{W}$$

$$= y_2'' \int \frac{y_1 \cdot q}{W}\,dt - y_1'' \int \frac{y_2 \cdot q}{W}\,dt + q\,\frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{W} = y_2'' \int \frac{y_1 \cdot q}{W}\,dt - y_1'' \int \frac{y_2 \cdot q}{W}\,dt + q,$$

fås ved indsættelse i (15):

$$y_2'' \int \frac{y_1 \cdot q}{W}\,dt - y_1'' \int \frac{y_2 \cdot q}{W}\,dt + q + p_1\left(y_2' \int \frac{y_1 \cdot q}{W}\,dt - y_1' \int \frac{y_2 \cdot q}{W}\,dt \right)$$

$$+ p_0\left(y_2 \int \frac{y_1 \cdot q}{W}\,dt - y_1 \int \frac{y_2 \cdot q}{W}\,dt \right) = q$$

$$\Leftrightarrow \quad [y_2'' + p_1 y_2' + p_0 y_2] \int \frac{y_1 \cdot q}{W}\,dt - [y_1'' + p_1 y_1' + p_0 y_1] \int \frac{y_2 \cdot q}{W}\,dt + q = q$$

$$\Leftrightarrow \quad q = q$$

(idet y_2 og y_1 er løsninger til den homogene ligning).

OPGAVER

Opgave 6.1 $^{\mathrm{T}}$ (homogen, konstante koefficienter)

Find samtlige løsninger til hver af differentialligningerne

1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0$

2) $3\dfrac{d^2y}{dt^2} - 6\dfrac{dy}{dt} + 30y = 0$

3) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - y = 0.$

Opgave 6.2 $^{\mathrm{T}}$ (homogen, konstante koefficienter)

Find den partikulære løsning til differentialligningen

$$\frac{1}{4}\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 5y = 0,$$

der opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = \sqrt{2}$ og $y'(0) = 2\sqrt{2}$.
Løsningen ønskes angivet såvel på formen $C_1 \mathrm{e}^{rt}\cos(\omega t) + C_2 \mathrm{e}^{rt}\sin(\omega t)$ som på formen $A\,\mathrm{e}^{rt}\cos(\omega t + \phi)$.

Opgave 6.3 (homogen, konstante koefficienter)

Find samtlige løsninger til hver af differentialligningerne

1) $y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = 0$

2) $y^{(4)}(t) + 6y'''(t) + 5y''(t) - 24y'(t) - 36y(t) = 0$

3) $y^{(5)}(t) - 3y^{(4)}(t) + 3y^{(3)}(t) - y''(t) = 0.$

Opgave 6.4 $^{\mathrm{T}}$ (konstante koefficienter)

1) Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 5t + 4\mathrm{e}^{t} + 2\sin t.$$

2) Find den partikulære løsning, som opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.

Opgave 6.5 (konstante koefficienter)

1) Find samtlige løsninger til differentialligningen $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 6e^t - 4t.$

2) Find den partikulære løsning, som opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = 1$ og $y'(0) = 2.$

Opgave 6.6 (konstante koefficienter)

1) Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 10\frac{dy}{dt} + 26y = 2e^t\cos t + e^t\sin t + e^{5t}\cos(2t).$$

2) Find den partikulære løsning, som opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = \frac{1}{8}$ og $y'(0) = \frac{1}{8}.$

Opgave 6.7 (konstante koefficienter)

1) Find samtlige løsninger til differentialligningen $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = (t^2 + t)e^{3t}.$

2) Find den partikulære løsning, som opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = 1$ og $y'(0) = -1.$

Opgave 6.8 (konstante koefficienter)

Find en partikulær løsning til følgende differentialligninger

1) $\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 20y = -5e^{3t}$

2) $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 5te^{-t}\cos(2t)$

3) $\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 9y = (2t+4)e^{-t}$

4) $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 2 + t$

5) $\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = t\cdot\cos(2t).$

Opgave 6.9 $^{\mathrm{T}}$ (konstante koefficienter)

Find samtlige løsninger til differentialligningen $\cos t\,\frac{d^2y}{dt^2} + \cos t\cdot y = 1, \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[.$

Opgave 6.10 (konstante koefficienter)

Find samtlige løsninger til differentialligningen $t^3 \frac{d^2y}{dt^2} - 2t^3 \frac{dy}{dt} + t^3 y = 2\mathrm{e}^t, \quad t > 0.$

Opgave 6.11 (konstante koefficienter)

1) Find samtlige løsninger til differentialligningen $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = \frac{17}{4} \cdot \sinh(2t).$

2) Find den partikulære løsning, som opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = 0$ og $y'(0) = 0.$

Opgave 6.12 (3. orden, konstante koefficienter)

Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$y'''(t) - 5y''(t) + 11y'(t) - 15y(t) = 32\,\mathrm{e}^{-t} - 20\sin t.$$

Opgave 6.13 $^{\mathrm{T}}$ (generel, 2. orden)

Find samtlige løsninger til differentialligningen $t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} - y = 5t^4, \quad t > 0,$

idet det oplyses, at en af funktionerne t, t^2, t^3 eller t^4 er løsning til den tilsvarende homogene differentialligning.

Opgave 6.14 (generel, 2. orden)

1) Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$t\frac{d^2y}{dt^2} - (2t+1)\frac{dy}{dt} + (t+1)y = (t^2+t-1)\mathrm{e}^t, \quad t > 0,$$

idet det oplyses, at $y(t) = \mathrm{e}^t$ er løsning til den tilsvarende homogene differentialligning.

2) Find den partikulære løsning, som opfylder begyndelsesbetingelserne $y(1) = e$ og $y'(1) = e.$

Opgave 6.15 (generel, 2. orden)

Find samtlige løsninger til differentialligningen $t^2 \frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt} + (t^2+2)y = t^3, \quad t > 0,$

idet det oplyses, at $y(t) = t \cdot \sin t$ er løsning til den tilsvarende homogene differentialligning.

Opgave 6.16 (numerisk metode)

Tabellér løsningerne til de følgende differentialligningsproblemer med mindst 1 betydende ciffer:

1 T) $\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dz}{dt} = \ln[(1+y)(1+z)], \qquad y(0) = 0$

$\dfrac{dz}{dt} = \ln(1+y) + \dfrac{1}{10}z \;, \qquad z(0) = 1 \qquad t \in [0;0.5].$

2) $\dfrac{dy}{dt} - \dfrac{dz}{dt} = -y - z + t - \dfrac{2}{1+t}, \qquad y(0) = 0$

$2\dfrac{dy}{dt} = (y-1)^2 + (z-t)^2 \;, \qquad z(0) = -1 \qquad t \in [0;0.25].$

3) $2\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dz}{dt} = -y - 2z + 2t + 1 \;, \qquad y(1) = 1$

$\dfrac{dy}{dt} - \dfrac{dz}{dt} = -(t - 1 + y - z)^2 \;, \qquad z(1) = 2 \qquad t \in [1;1.25].$

Opgave 6.17 (numerisk metode)

Tabellér løsningerne til de følgende differentialligningsproblemer med mindst 1 betydende ciffer (flere metoder kan anvendes, se appendix):

1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = \ln t \;, \qquad y(1) = 0 \;,\; y'(1) = 1, \qquad t \in [1;1.25].$

2) $(2t+2)\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} + y = \dfrac{t}{\sqrt{1+t}} \;, \qquad y(3) = 2 \;,\; y'(3) = \dfrac{1}{4}, \qquad t \in [3;3.5].$

3) $e^t\dfrac{d^2y}{dt^2} + t\dfrac{dy}{dt} + ty = t - 1 \;, \qquad y(0) = 0 \;,\; y'(0) = 1, \qquad t \in [0;0.25].$

Opgave 6.Eksam2b (konstante koefficienter, 25 point)

Find samtlige løsninger til hver af differentialligningerne

(1) $y''(t) + 4y(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}.$

(2) $y''(t) + 4y(t) = e^t\cos 2t, \qquad t \in \mathbb{R}.$

(3) $y''(t) + 4y(t) = \dfrac{1}{\sin 2t} \;, \qquad t \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[.$

Find dernæst den partikulære løsning til differentialligningen (1), som opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.

Opgave 6.Eksam31b (konstante koefficienter, 20 point)

Lad et polynomium være givet ved $P(z) = 2z^3 + 5z^2 + 6z + 2, \qquad z \in \mathbb{C}.$

1) Beregn $P(z)$ for $z = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Værdien ønskes skrevet på formen $a + ib$.

2) Det oplyses, at $P(-\frac{1}{2}) = 0$. Find samtlige rødder i polynomiet P.

3) Find samtlige løsninger til differentialligningen $2\frac{d^3y}{dt^3} + 5\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 2y = 0.$

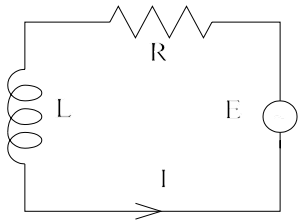
4) Find samtlige løsninger til differentialligningen $2\frac{d^3y}{dt^3} + 5\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 2y = te^{-t}.$

Opgave 6. Eksam36b (konstante koefficienter, 25 point)

1) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} + 16y = 5\sin 2t + 3e^{-4t}.$$

2) I et elektrisk kredsløb med en vekselspændingskilde E og en indskudt modstand R og en spole med selvinduktion L - serieforbundne, jfr. figuren - gælder for tiden $t \geq 0$, idet $I = I(t)$ betegner strømstyrken og den "påtrykte" elektromotoriske kraft $E = E_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$, følgende differentialligning:



$$(2) \qquad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E_m}{L} \sin \omega t \ .$$

a) Find, idet $R = 100$ Ohm, $L = 20$ Henry, $E_m = 220$ Volt og $\omega = \frac{R}{L}$, den fuldstændige løsning til (2).

b) Find den partikulære løsning til (2), for hvilken $I(0) = 0$.

Opgave 6.Eksam44b (konstante koefficienter, 25 point)

Find samtlige løsninger til hver af differentialligningerne

1) $$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = t^2 - \frac{1}{2}.$$

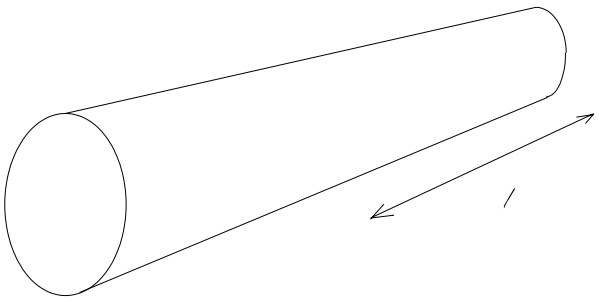
2) $$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 10\sin^3 t.$$

Opgave 6.Eksam53b (konstante koefficienter, 15 point)

For en rørformet kemisk reaktor gælder differentialligningen

$$\frac{d^2c}{d\ell^2} - \frac{dc}{d\ell} - \frac{3}{4}c = -7e^{-\frac{\ell}{4}} - 6e^{-\frac{\ell}{2}},$$

hvor c er koncentrationen af et stof,
og ℓ er en stedkoordinat.



1) Find samtlige løsninger.
2) Find den partikulære løsning $c(\ell)$ for hvilken $c(0) = 2$ og $\frac{dc}{d\ell}(0) = 6.$

Opgave 6.Eksam56b (konstante koefficienter, 15 point)

Bestem samtlige løsninger til hver af differentialligningerne

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 6\frac{d^2y}{dt^2} + 9\frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{d^3y}{dt^3} - 6\frac{d^2y}{dt^2} + 9\frac{dy}{dt} = -12e^{3t}.$$

Opgave 6.Eksam57b (lineær, 2. orden, 20 point)

Givet funktionen f bestemt ved udtrykket $f(t) = \cos(\ln(t)), \quad e^{-\frac{\pi}{2}} < t < e^{\frac{\pi}{2}}.$

1) Vis, at $y = f(t)$ er løsning til differentialligningen
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t^2}y = 0, \quad e^{-\frac{\pi}{2}} < t < e^{\frac{\pi}{2}}.$$
2) Find samtlige løsninger til differentialligningen.
3) Bestem den partikulære løsning til differentialligningen, som indeholder linieelementet $(t, y, \frac{dy}{dt}) = (1, 2, -1).$

Opgave 6.Eksam65b (konstante koefficienter, 10 point)

Find samtlige løsninger til hver af differentialligningerne

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 4y(t) = e^t \quad \text{og} \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 4y(t) = e^{-t}.$$

Opgave 6.Eksam66b (lineær, 2. orden, 15 point)

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2t+3}{(t+1)(t+2)}\frac{dy}{dt} = t+1, \quad t > -1$$

Opgave 6.Eksam71b (konstante koefficienter, 15 point)

Det oplyses, at $z_1 = -1$ er en rod og $z_2 = i$ en dobbeltrod i polynomiet

$$z^7 + 3z^6 + 6z^5 + 8z^4 + 9z^3 + 7z^2 + 4z + 2 .$$

1) Find de andre rødder.

2) Afbild alle rødderne i den komplekse plan.

3) Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{d^7y}{dt^7} + 3\frac{d^6y}{dt^6} + 6\frac{d^5y}{dt^5} + 8\frac{d^4y}{dt^4} + 9\frac{d^3y}{dt^3} + 7\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 2y = 0 .$$

Opgave 6.Eksam77b (lineær, 1. orden, 15 point)

Koncentrationen y af et stof i en kemisk reaktor opfylder differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{5}{t}\frac{dy}{dt} + \frac{8}{t^2}y = \sqrt{t} \qquad (t > 0),$$

hvor t er tiden. Find samtlige løsninger til ligningen.
(Vink: en af funktionerne e^t, $\sin t$, t^2 eller 2^t er løsning til den tilsvarende homogene differentialligning).

Opgave 6.Eksam87b (konstante koefficienter, 10 point)

Find samtlige løsninger til differentialligningen $\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} = 3e^{-3t}$.

Opgave 6.Eksam93b (konstante koefficienter, 20 point)

Find den fuldstændige løsning til hver af differentialligningerne

1) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 8e^{-3t}$. 2) $2\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + y = \frac{2}{e^t + 1}$.

Opgave 6.Eksam97b (generel 2. orden, 20 point)

Find samtlige løsninger til differentialligningen $t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} - 16y = t^2 \cdot \sqrt{t}, \quad t > 0,$
idet det oplyses, at funktionen $f_1(t) = t^{-4}$ er en partikulær løsning til den tilsvarende homogene differentialligning.

Opgave 6.Eksam98b (konstante koefficienter, 20 point)

1) Find rødderne til polynomiet $z^6 + 2z^3 + 2$. Rødderne ønskes angivet på sumform.

2) Find samtlige løsninger til differentialligningen $\frac{d^6y}{dt^6} + 2\frac{d^3y}{dt^3} + 2y = 0$.

Opgave 6.Eksam107 (numerisk integration, konstante koefficienter, 15 point)

1) Foretag en numerisk beregning af $\int_1^2 \mathrm{e}^{\sin x}\,dx$. Facit anføres med 2 betydende cifre. (Husk at anføre mellemregninger).

2) Bestem samtlige løsninger til differentialligningen $\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + y = \sin 2t$.

Opgave 6.Eksam115 (konstante koefficienter, 25 point)

1) Find samtlige løsninger til den komplekse ligning

$$z^3 - 6z^2 + 25z + 82 = 0. \qquad (1)$$

2) Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 6\frac{d^2y}{dt^2} + 25\frac{dy}{dt} + 82y = 0. \qquad (2)$$

3) Find den partikulære løsning til (2), som opfylder betingelsen

$$(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}) = (0, 0, -6, 13).$$

4) Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 6\frac{d^2y}{dt^2} + 25\frac{dy}{dt} + 82y = 29\mathrm{e}^{6t} - 164t. \qquad (3)$$

Opgave 6.Eksam119 (konstante koefficienter, 20 point)

Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{1}{3}\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 3y(t) = \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-3t} + 5\mathrm{e}^{-t}\cos(t-1).$$

Opgave 6.Eksam121 (grænseværdi, konstante koefficienter, uden brug af hj.midler, 10 point)

a) Find $\lim_{x\to\infty}\left(\mathrm{e}^{2\ln(2x+1)-\ln x}\cdot(\mathrm{e}^{-2})^{\ln x}\cdot\ln(\mathrm{e}^{x-1})\right)$.

b) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen $\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 13y(t) = 2\mathrm{e}^{3t}$.

Opgave 6.Eksam132 (generel, 2. orden, 20 point)

$$(*) \qquad t\frac{d^2y}{dt^2} + (1-4t)\frac{dy}{dt} + (4t-2)y = \mathrm{e}^{2t}\ln t, \qquad t>0.$$

a) Vis, at $y_1(t) = \mathrm{e}^{2t}$ er en løsning til den tilsvarende homogene ligning.

b) Find samtlige løsninger til $(*)$.

c) Bestem den løsning $y(t)$ til $(*)$ for hvilken $y(t)\to 1$ for $t\to 0+$.

Opgave 6.Eksam140 (generel 2. orden, 20 point)

Vi betragter differentialligningen $t^2 \frac{d^2y}{dt^2} = 2y + k \cdot t, \quad t > 0,$ hvor k er en reel konstant.

a) Vis, at $y(t) = t^2$ er en løsning, når $k = 0$.

b) Find samtlige løsninger, når $k = 0$.

c) Find samtlige løsninger, når $k \neq 0$.

Opgave 6.Eksam144 (konstante koefficienter, uden brug af hj.midler, 9 point)

Find samtlige løsninger til differentialligningen $2\frac{d^2y}{dt^2} + 16\frac{dy}{dt} + 32y = e^{-4t} + t.$

Opgave 6.Eksam150 (konstante koefficienter, uden brug af hj.midler, 10 point)

Find samtlige løsninger $y(t)$ til differentialligningen $y'' + 4y' + 6y = 5\sin t.$

Opgave 6.Eksam152 (generel 2.orden, 20 point)

a) Dekomponér brøken $\frac{7t + 5}{(t^2 - 1)(t + 2)}$.

b) Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$(t^2 - 1)\frac{dy}{dt} + \frac{7t + 5}{t + 2}y = \frac{2(t + 2)}{t - 1} \quad for \quad t \in \,]-1;1[.$$

Opgave 6.Eksam160 (konstante koefficienter, 20 point)

a) Find samtlige rødder i ligningen $z^3 + 27 = 0, \quad z \in \mathbb{C}.$

Rødderne ønskes angivet på formen $a + ib,$ hvor $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Afbild rødderne i den komplekse talplan.

c) Find samtlige løsninger til differentialligningen $\frac{d^3y}{dt^3} + 27y = e^t + \sin t.$

Opgave 6.Eksam166 (konstante koefficienter, uden brug af hj.midler, 10 point)

Find samtlige løsninger til differentialligningen $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = te^{-t}.$

Opgave 6. Eksam179 (omformning, 8 point)

Lad der være givet følgende differentialligningsproblem (begyndelsesværdiproblem):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 3y + 4\sqrt{z} \;=\; 5\sin t, \qquad y(2) = 6, \qquad y'(2) = 1,$$

$$\frac{d^3z}{dt^3} + 6\frac{d^2z}{dt^2} + 7\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + 8\frac{dy}{dt} + 9z \;=\; \mathrm{e}^{-t}, \qquad z(2) = 9,\; z'(2) = 8,\; z''(2) = 9.$$

Omform problemet til et nyt differentialligningsproblem, hvori der kun optræder 1. ordens differentialligninger med tilhørende begyndelsesbetingelser (for $t_0 = 2$) .

Opgave 6.Eksam180 (konstante koefficienter, 15 point)

Find samtlige løsninger til differentialligningen $\dfrac{d^6y}{dt^6} - 81\dfrac{d^2y}{dt^2} \;=\; \mathrm{e}^{-t} + 18\,.$

Opgave 6.Eksam189 (konstante koefficienter, 10 point)

Find samtlige løsninger til differentialligningen $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y \;=\; \mathrm{e}^{-2t} + 8t^2\,.$

Opgave 6.Eksam191 (konstante koefficienter, uden brug af hj.midler, 9 point)

Find samtlige løsninger til differentialligningen $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y \;=\; 4\sin(2t)\,.$

Opgave 6.Eksam200 (konstante koefficienter, uden brug af hj.midler, 8 point)

Find samtlige løsninger til differentialligningen $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 13y \;=\; 13t^2\,.$

Opgave 6.Eksam211 (generel 2. orden)

Betragt differentialligningen

$$(*) \quad ty'' - (1+2t)y' + (1+t)y \;=\; 2t^2\cdot\mathrm{e}^t \qquad \textit{for} \qquad t>0\,.$$

Den tilsvarende homogene ligning kan omskrives til

$$t(y'' - 2y' + y) - (y' - y) \;=\; 0\,.$$

a) Find samtlige løsninger til $y'' - 2y' + y \;=\; 0\,,$

og samtlige løsninger til $y' - y \;=\; 0\,.$

Vis, at $y_1 = \mathrm{e}^t$ er en løsning til begge disse ligninger.

b) Find samtlige løsninger til $(*)$.

Opgave 6.Eksam213 (konstante koefficienter, uden brug af hj.midler, 8 point)

Find samtlige løsninger til differentialligningen $y'' + 4y' + 13y = 2e^{-2t}$.

Opgave 6.Eksam221 (konstante koefficienter, uden brug af hj.midler, 9 point)

Find samtlige løsninger til differentialligningen $\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 9y = e^{-3t}$.

Opgave 6.Eksam222 (generel 2. orden, 20 point)

Antag, at temperaturen y i en kemisk reaktor opfylder differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2}{t}\frac{dy}{dt} + \left(\frac{2}{t^2} - 1\right)y = t^2, \qquad t > 0,$$

hvor t er tiden. Find samtlige løsninger til ligningen, idet det oplyses, at en af funktionerne $t,\ e^{-t},\ te^{-t},\ \mathrm{Arctan}\, t$ er løsning til den tilsvarende homogene differentialligning.

Opgave 6.Eksam232 (konstante koefficienter, 15 point)

Find samtlige løsninger til differentialligningen $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 3\cdot e^{-2t} + 20\cdot e^{3t}$.

Opgave 6.Eksam240 (konstante koefficienter, 20 point)

a) Find samtlige løsninger til differentialligningen
$y''' + 10y'' + 32y' + 32y = t + 7e^{-3t}$.

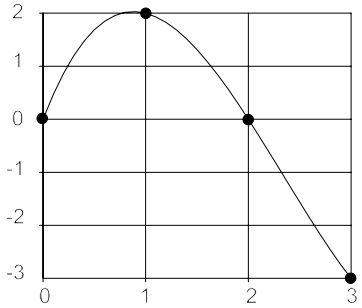
b) Betragt nu differentialligningen $y''' + 10y'' + 32y' + 32y = 6e^{-4t}$.
Angiv den **form** en partikulær løsning må have, dvs. angiv en ansats (et kvalificeret gæt). Eventuelle konstanter skal ikke bestemmes.

7 APPROKSIMERENDE FUNKTION

7.1 ANVENDELSER

En funktion f kan være givet på en ubekvem eller ufuldstændig facon, f.eks. ved et kompliceret udtryk, en graf eller en tabel:

$$\frac{x^{-x}\cos x + \sqrt{x}\cdot\tanh x}{x\cdot\ln x + 1}$$



x	0	1	2	3
$f(x)$	0	2	0	-3

Når f så skal indgå i beregninger (integration, differentiation, edb-programmering m.m.) sammen med andre funktioner, ser man tit f erstattet med en bekvem approksimerende funktion som $\tilde{f}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.

Konstanterne a_0, a_1, a_2, a_3 søges bestemt sådan, at den numeriske fejl $|f(x) - \tilde{f}(x)|$ bliver lille for de x-værdier, der kommer i betragtning.

7.2 TAYLOR-APPROKSIMATION FOR FUNKTION AF 1 VARIABEL

Ofte ønskes et polynomium $\tilde{f}$, som tilnærmer f særlig præcist for x-værdier nær et bestemt punkt x_0, se figur 7.1. For at få $\tilde{f}$ til at "ligne" f omkring punktet x_0 er det nærliggende at opstille kravene

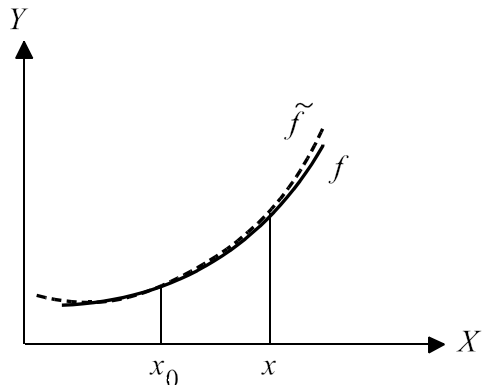


Fig.7.1. *Tilnærmelse nær x_0.*

$$\tilde{f}(x_0) = f(x_0), \quad \tilde{f}'(x_0) = f'(x_0), \quad \tilde{f}''(x_0) = f''(x_0), \quad \ldots, \quad \tilde{f}^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Så vil $\tilde{f}$ og f i punktet x_0 have samme værdi, samme tangenthældning, samme krumning osv.

SÆTNING 7.1 *(Taylorpolynomium). Lad f være n gange differentiabel i punktet x_0. Så findes der netop ét polynomium $\tilde{f}$ af højst n'te grad, der opfylder kravene*

$$\tilde{f}(x_0) = f(x_0), \quad \tilde{f}'(x_0) = f'(x_0), \quad \tilde{f}''(x_0) = f''(x_0), \ \ldots, \ \tilde{f}^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Det er givet ved

$$\tilde{f}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Polynomiet kaldes det n'te Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt x_0.

Bevis. Ethvert polynomium af højst n'te grad kan skrives på formen

$$\tilde{f}(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + c_3(x-x_0)^3 + \ldots + c_n(x-x_0)^n.$$

De afledede til og med n'te orden er

$$\tilde{f}'(x) = 0 + c_1 + 2c_2(x-x_0) + 3c_3(x-x_0)^2 + \ldots + nc_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$\tilde{f}''(x) = 0 + 0 + 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-x_0) + \ldots + n(n-1)c_n(x-x_0)^{n-2}$$

$$\tilde{f}^{(3)}(x) = 0 + 0 + 0 + 3\cdot 2c_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\tilde{f}^{(n)}(x) = 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots + n!c_n.$$

Kravene $\tilde{f}(x_0) = f(x_0), \ \tilde{f}'(x_0) = f'(x_0), \ \tilde{f}''(x_0) = f''(x_0), \ldots, \ \tilde{f}^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$ giver nu et system af lineære ligninger med c'erne som de ubekendte

$$\tilde{f}(x_0) = f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad c_0 + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 = f(x_0)$$

$$\tilde{f}'(x_0) = f'(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad 0 + c_1 + 0 + 0 + \ldots + 0 = f'(x_0)$$

$$\tilde{f}''(x_0) = f''(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad 0 + 0 + 2c_2 + 0 + \ldots + 0 = f''(x_0)$$

$$\tilde{f}^{(3)}(x_0) = f^{(3)}(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad 0 + 0 + 0 + 3\cdot 2c_3 + \ldots + 0 = f^{(3)}(x_0)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\tilde{f}^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots + n!c_n = f^{(n)}(x_0).$$

Ligningssystemet har netop én løsning:

$$c_0 = f(x_0), \quad c_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad c_3 = \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}, \ \ldots, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Kravene $\tilde{f}(x_0) = f(x_0), \ \tilde{f}'(x_0) = f'(x_0), \ \tilde{f}''(x_0) = f''(x_0), \ldots, \ \tilde{f}^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$ opfyldes altså af netop ét polynomium

$$\tilde{f}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Hermed er sætningen bevist.

Eksempelvis er det andet Taylorpolynomium for e^x med udviklingspunkt $x_0 = 0$:

$$\tilde{f}(x) = e^0 + \frac{e^0}{1!}(x-0)^1 + \frac{e^0}{2!}(x-0)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Fejl ved Taylormetoden. Vi kan ikke af sætning 7.1 se, hvor god en tilnærmelse $\tilde{f}(x)$ er til $f(x)$ i punktet x (se figur 7.2). Fejlen $f(x) - \tilde{f}(x)$ kaldes *restleddet*. I supplement 7A er vist, at for ethvert x findes et tal ξ i det åbne interval mellem x_0 og x (se figur 7.2), således at restleddet kan skrives

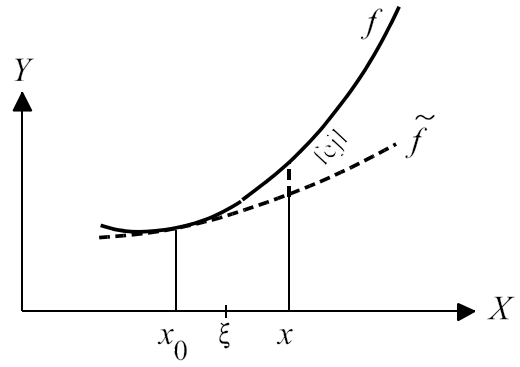


Fig.7.2. *Fejl i x.*

$$f(x) - \tilde{f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Sædvanligvis vurderes $f^{(n+1)}(\xi)$ blot groft til den sikre side, fordi det mest er restleddets størrelsesorden, man er interesseret i, og den afhænger som regel mere af de andre faktorer $\frac{1}{(n+1)!}$ og $(x-x_0)^{n+1}$.

Eksempelvis har vi $e^x = e^0 + \frac{e^0}{1!}x + \frac{e^0}{2!}x^2 + \frac{e^\xi}{3!}x^3$. I intervallet $\left[-\frac{1}{10};\frac{1}{10}\right]$ kan fejlen ved at benytte $1 + x + \frac{x^2}{2}$ fremfor e^x vurderes ved

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{3!}(x-x_0)^3\right| = \left|\frac{e^\xi}{3!}(x-0)^3\right| = \left|\frac{e^\xi}{6}\right| \cdot |x|^3 \le \frac{e^{\frac{1}{10}}}{6}\left(\frac{1}{10}\right)^3 < 0.2 \cdot 10^{-3}.$$

Her har vi indsat den størst mulige værdi af e^ξ for $\xi \in \left[-\frac{1}{10};\frac{1}{10}\right]$, og den værdi indtræffer for $\xi = \frac{1}{10}$, idet e^ξ er en voksende funktion af ξ. Faktisk gælder endda $\xi \in \left]-\frac{1}{10};\frac{1}{10}\right[$.

Eksempel 7.1. Approksimation ved Taylorpolynomium.

Lad den optimale temperatur T i en reaktor være bestemt ved $T = 3e^{x-1} - \ln x$, hvor x er en koncentration. I et interval omkring driftspunktet $x_0 = 1$ ønskes funktionen tilnærmet ved et polynomium.

1) Find det 2. Taylorpolynomium $\tilde{f}$ for
   $f(x) = 3e^{x-1} - \ln x$
   med udviklingspunkt $x_0 = 1$.
2) Kontrollér, at $|f(x) - \tilde{f}(x)| < 2 \cdot 10^{-3}$ for alle $x \in [0.9; 1.1]$.

LØSNING:

1) Vi finder

$$f(x) = 3e^{x-1} - \ln x; \qquad f(1) = 3$$

$$f'(x) = 3e^{x-1} - x^{-1}; \qquad f'(1) = 2$$

$$f''(x) = 3e^{x-1} + x^{-2}; \qquad f''(1) = 4.$$

Ifølge sætning 7.1 er polynomiet da

$$\tilde{f}(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = \underline{\underline{3+2(x-1)+2(x-1)^2}}.$$

2) **Fejlvurdering.** Idet $f^{(3)}(x) = 3e^{x-1} - 2x^{-3}$, fås for restleddets numeriske værdi

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| = \left|\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-1)^3\right| = \frac{|f^{(3)}(\xi)|}{3!} \cdot |x-1|^3 = \frac{1}{6}\left|3e^{\xi-1} - 2\xi^{-3}\right| \cdot |x-1|^3.$$

I stedet for at lave største- mindste-værdiundersøgelse på hele udtrykket $3e^{\xi-1} - 2\xi^{-3}$, er det lettere at maksimere hvert led for sig, selv om vi derved ofte skyder over målet.

Idet $|a \pm b| \le |a| + |b|$, for alle a,b gælder uligheden

$$\left|3e^{\xi-1} - 2\xi^{-3}\right| \le \left|3e^{\xi-1}\right| + \left|2\xi^{-3}\right|,$$

dvs. $$|f(x) - \tilde{f}(x)| \le \frac{1}{6}\left(\left|3e^{\xi-1}\right| + \left|2\xi^{-3}\right|\right) \cdot |x-1|^3.$$

Idet $x, \xi \in [0.9; 1.1]$, gælder der

$\left|3e^{\xi-1}\right| \le 3e^{1.1-1}$, fordi $e^{\xi-1}$ er en voksende funktion af ξ,

$\left|2\xi^{-3}\right| \le 2 \cdot 0.9^{-3}$, fordi ξ^{-3} er en aftagende funktion af ξ, og

$|x-1|^3 \le 0.1^3$, fordi $|x-1| \le 0.1$.

Altså har vi

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| \le \frac{1}{6}\left(3e^{1.1-1} + 2 \cdot 0.9^{-3}\right) \cdot 0.1^3 \approx 1.01 \cdot 10^{-3} < 2 \cdot 10^{-3}.$$

Kontrol imod regnefejl. Der vælges et punkt 1.01 nær udviklingspunktet 1. Derpå beregnes

$f(1.01) = 3.02020017$
$\tilde{f}(1.01) = 3.02020000$.

Afvigelsen 0.17×10^{-6} er kun af samme størrelsesorden som den forventede

$\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} 0.01^3 = f^{(3)}(\xi) \times 0.17 \times 10^{-6}$, så polynomiet kan formodes at være korrekt.

Maple: Det i eksempel 7.1 ønskede 2. Taylorpolynomium fås på følgende måde:

$f: x \to 3 \cdot e^{x-1} - \ln(x)$ (benyt formlerne i menuen "Expression")

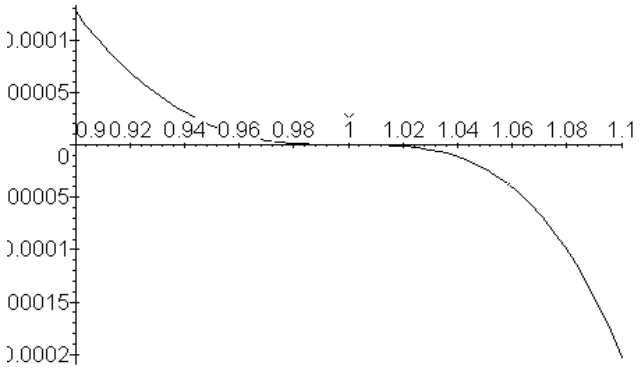
taylor(f(x),x=1,3); x=1,3 betyder, at der udvikles efter x med 1 som udviklingspunkt og op til 2. grad

Resultat : $3 + 2(x-1) + 2(x-1)^2 + O\left((x-1)^3\right)$

For at fjerne sidste led skrives p:=convert(%,polynom);

Resultat: $p := 3 + 2(x-1) + 2(x-1)^2$

For at bedømme fejlen tegnes differensen mellem f(x) og polynomiet:
plot(p-f(x),x=0.9..1.1);



Det ses, at fejlen er mindre end ca 0.00025

7.3 POLYNOMIE-KOLLOKATION

Ordet *kollokation* betyder sammenfald. Man siger, at to funktioner f og $\tilde{f}$, har kollokation i $x_0, x_1, \ldots, x_n$, hvis de har sammenfaldende funktionsværdi i disse punkter, se figur 7.3.

Hvis man ønsker en god approksimation over et større interval vil et kollokationspolynomium $\tilde{f}$, som regel være at foretrække fremfor et Taylorpolynomium af samme grad, da sidstnævnte først og fremmest giver en god approksimation i omegnen af et punkt.

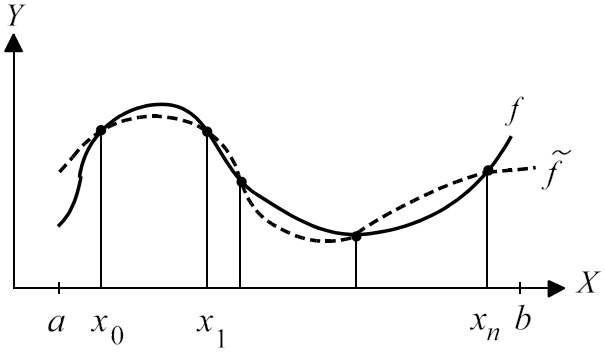


Fig.7.3. *Der er kollokation (sammenfald) i* $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

SÆTNING 7.2 *(kollokations-polynomium). Der findes netop ét approksimerende polynomium* $\tilde{f}$ *af højst n'te grad, der opfylder kollokationsbetingelserne*

$$\tilde{f}(x_0) = f(x_0), \quad \tilde{f}(x_1) = f(x_1), \quad \ldots, \quad \tilde{f}(x_n) = f(x_n),$$

hvor $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *alle er forskellige. Polynomiet kan skrives på formen*

$$\tilde{f}(x) = a_0 + (x - x_0)[a_1 + (x - x_1)[a_2 + (x - x_2)[a_3 + \ldots + (x - x_{n-1})[a_n]\ldots]]] .$$

Betingelsen $f(x_0) = \tilde{f}(x_0)$ *bestemmer* a_0, *betingelsen* $f(x_1) = \tilde{f}(x_1)$ *bestemmer derpå* a_1 *osv.*

Bevis. 1) ***Eksisterer der et kollokationspolynomium?*** Der henvises til eksempel 7.2, som tydeligt viser, hvordan konstanterne $a_0, a_1, \ldots, a_n$ altid kan bestemmes, sådan at der opnås et polynomium $\tilde{f}(x)$, som er af højst *n*'te grad, og som opfylder kollokationsbetingelserne $\tilde{f}(x_0) = f(x_0), \quad \tilde{f}(x_1) = f(x_1), \quad \ldots, \quad \tilde{f}(x_n) = f(x_n)$.

2) ***Er der mere end ét kollokationspolynomium?*** Polynomiet $\tilde{f}(x)$ er det eneste polynomium af højst *n*'te grad, som opfylder kollokationsbetingelserne. For er $\tilde{f}(x)$ og $\tilde{g}(x)$ to sådanne polynomier, bliver $\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x)$ et polynomium med $n+1$ rødder $x_0, x_1, \ldots, x_n$, dvs. $\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x)$ er nulpolynomiet (da et egentligt polynomium af *n*'te grad højst kan have *n* forskellige rødder). Derfor må $\tilde{f}(x)$ og $\tilde{g}(x)$ være ens.

Valg af kollokationspunkterne $x_0, x_1, \ldots, x_n$

Ækvidistante punkter som på figur 7.4 er de nemmeste at arbejde med.

Fig.7.4. *Ækvidistante punkter.*

Chebyshevpunkter som på figur 7.5 giver en forholdsvis lille og ensartet fejl i hele intervallet $[a;b]$. De er abscisserne for en ækvidistant inddeling af en halvcirkel med intervallet $[a;b]$ som diameter

(henholdsvis $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{i\pi}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$ og

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot \cos\left(\frac{i+\frac{1}{2}}{n+1}\pi\right), \quad i = 0, 1, \ldots, n).$$

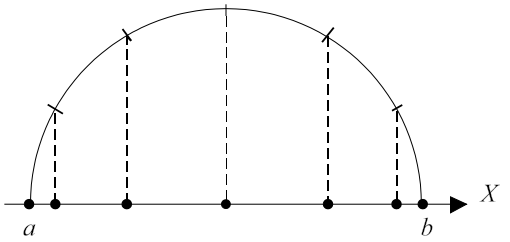


Fig. 7.5. *Chebyshev punkter.*

Fejl ved polynomie-kollokation

Antages det, at *f* er $n+1$ gange differentiabel i et interval, der indeholder $x_0, x_1, \ldots, x_n$ og *x*, så kan man vise, at metodens *fejl* $f - \tilde{f}$ kan skrives

$$f(x) - \tilde{f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n),$$

hvor ξ er et ukendt tal i intervallet $\left]\min\{x_0, x_1, \ldots, x_n, x\};\ \max\{x_0, x_1, \ldots, x_n, x\}\right[$.

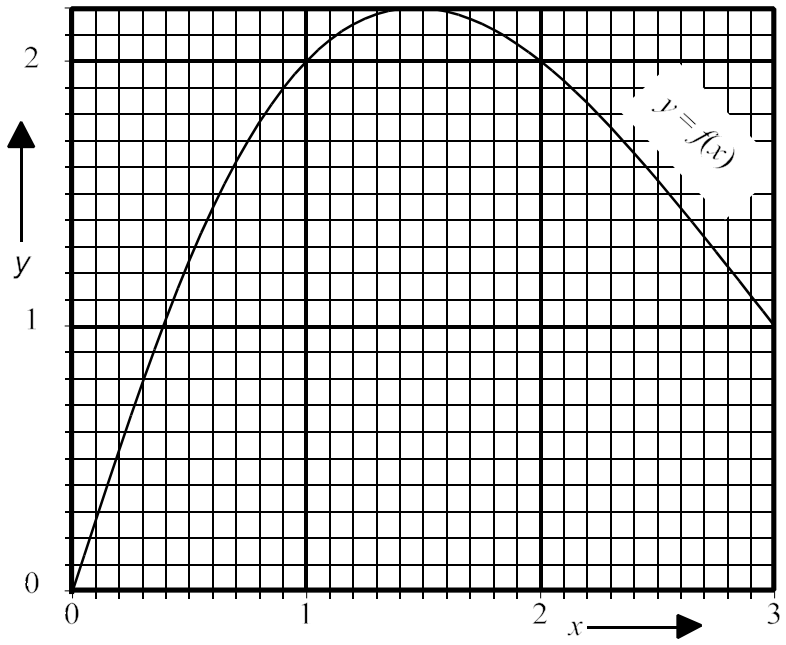
Eksempel 7.2. Kollokation med polynomium

Fra en automatisk skriver i laboratoriet kommer den viste graf. Den til grafen svarende funktion f er ukendt. Til brug ved indkodning på en computer ønskes et funktionsudtryk

$\tilde{f}$ fundet, hvis graf ligger tæt ved den viste graf.

a) Find et kollokationspolynomium $\tilde{f}$ af tredie grad,

b) Giv en vurdering af, om $|f(x)-\tilde{f}(x)| \le 0.15$ for alle $x \in [0;3]$.



LØSNING:

a) For nemheds skyld forsøges med de ækvidistante kollokationspunkter $x_0 = 0,\ x_1 = 1,$ $x_2 = 2$ og $x_3 = 3.$ På grafen aflæses de tilhørende værdier af $f(x)$:

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	2	2	1

.

Vi skriver nu $\tilde{f}(x) = a_0 + (x-0)[a_1 + (x-1)[a_2 + (x-2)a_3]],$ og kræver kollokation (sammenfald) med f for x-værdierne 0, 1, 2, 3:

$0 = \tilde{f}(0) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = a_0 + 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = 0$

$2 = \tilde{f}(1) \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 0 + (1-0)\,a_1 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = 2$

$2 = \tilde{f}(2) \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 0 + (2-0)[2 + (2-1)\,a_2] \quad \Leftrightarrow \quad a_2 = -1$

$1 = \tilde{f}(3) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 0 + (3-0)[2 + (3-1)[-1 + (3-2)\,a_3]] \quad \Leftrightarrow \quad a_3 = \frac{1}{6}$.

Dermed er der opnået et polynomium af 3. grad

$$\tilde{f}(x) = 0 + (x-0)[2 + (x-1)[-1 + (x-2)\tfrac{1}{6}]] = \underline{\underline{\tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{10}{3}x}},$$

som har kollokation med f i de 4 punkter.

b) Man får et indtryk af fejlen ved metoden, når $f(x)$ og $\tilde{f}(x)$ sammenlignes midt mellem kollokationspunkterne:

$f(0.5) = 1.25$ $\quad f(1.5) = 2.20$ $\quad f(2.5) = 1.55$

$\tilde{f}(0.5) = 1.31$ $\quad \tilde{f}(1.5) = 2.19$ $\quad \tilde{f}(2.5) = 1.56$.

Heraf skønnes, at $|f(x)-\tilde{f}(x)| \le 0.15$ for alle $x \in [0;3]$ (ellers bruges flere kollokationspunkter).

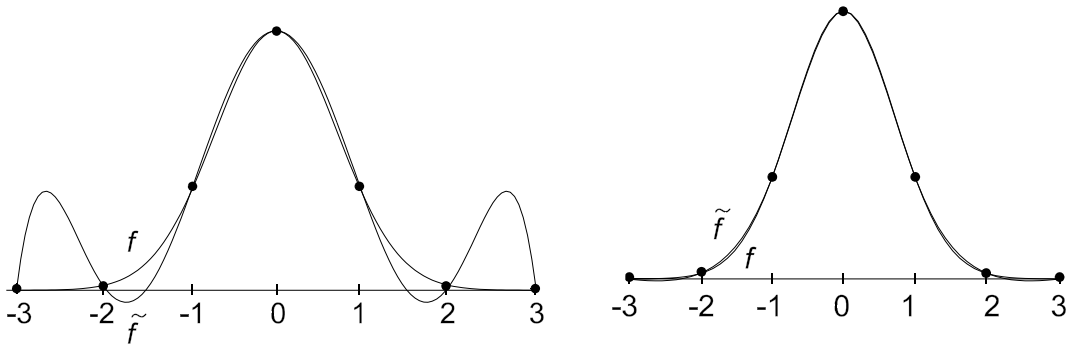
Edb-løsning. I Maple kan det ønskede kollokationspolynomium fås ved følgende ordre:

```
>interp( [0,1,2,3], [0,2,2,1], x ) ;
```

$$\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{10}{3}x$$

7.4 SPLINE-KOLLOKATION

Figur 7.6 skal illustrere, at med et lidt højere antal kollokationspunkter kan polynomier få et "vildt" forløb, mens splinefunktioner forbliver gode (giver dog større regnearbejde).



polynomium *kubisk splinefunktion*

Fig.7.6. *Tilnærmelser til* e^{-x^2} *(7 kollokationspunkter).*

Ideen til splinefunktioner kommer fra et gammelt tegneredskab, der på engelsk kaldes en spline. Det er en elastisk fiber, f.eks. af bambus. Når den tvinges gennem kollokationspunkterne, men i øvrigt får lov til at indstille sig frit, dannes af sig selv en meget "glat" kurve,

nemlig ifølge elasticitetsteorien den kurve, der har mindst krumning som helhed.

Fysisk spline og matematisk spline

En fysisk spline indstiller sig, sådan at den potentielle energi bliver mindst mulig. Man kan vise, at det svarer til at integralet $\int_{x_0}^{x_n} \frac{\tilde{f}''(x)^2\,dx}{\left[1+\tilde{f}'(x)^2\right]^{\frac{5}{2}}}$ bliver mindst muligt. Da nævneren i integranden ikke betyder meget, har man baseret den matematiske splineteori på det princip, at $\int_{x_0}^{x_n} \left(\tilde{f}''(x)\right)^2 dx$ skal være mindst mulig.

SÆTNING 7.3 *(spline-kollokation). Integralet* $\int_{x_0}^{x_n} \left(\tilde{f}''(x)\right)^2 dx$ *bliver mindst, når*

1) $\tilde{f}$ *i hvert delinterval* $[x_i;x_{i+1}]$ *mellem to nabo-kollokationspunkter er et polynomium* p_i *af højst 3. grad (kubisk polynomium),*

*2) der i "**knuderne**"* $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$ *gælder*

$$\left.\begin{aligned} p_{i-1}(x_i) &= p_i(x_i)\\ p'_{i-1}(x_i) &= p'_i(x_i)\\ p''_{i-1}(x_i) &= p''_i(x_i) \end{aligned}\right\} \quad i\in\{1,2,\ldots,n-1\}$$

og

3) $\tilde{f}$ *opfylder endepunktsbetingelserne* $\tilde{f}''(x_0)=0,\ \tilde{f}''(x_n)=0.$

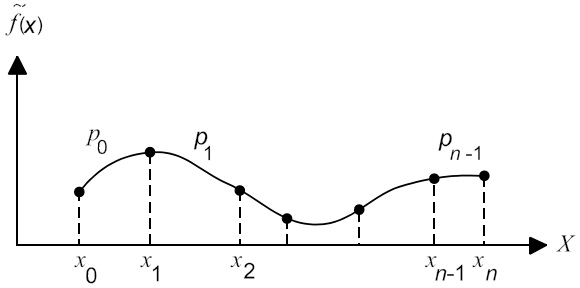


Fig.7.7. *Kubiske polynomier, der mødes meget glat, udgør en kubisk splinefunktion.*

NB. Kendes $f'(x_0)$ *og* $f'(x_n)$, *bør endepunktsbetingelserne 3) erstattes med de* ***bedre endepunktsbetingelser*** $\tilde{f}'(x_0)=f'(x_0),\quad \tilde{f}'(x_n)=f'(x_n).$

Betingelse 2 svarer til, at nabopolynomier mødes umærkeligt, fordi de ved knuden har samme værdi, tangenthældning og krumning - akkurat som en elastisk fiber gennem kollokationspunkterne

Betingelse 3 svarer til at en elastisk fiber gennem alle kollokationspunkterne vil få krumningen 0 i de yderste kollokationspunkter, hvis den får lov til at indstille sig frit. De bedre endepunktsbetingelser svarer til, at den elastiske fiber ikke får lov til at indstille sig frit gennem kollokationspunkterne, men bøjes i enderne til der her opnås korrekt tangenthældning.

DEFINITION *(kubisk splinefunktion). Ved en kubisk splinefunktion forstås en funktion* $\tilde{f}$, *der opfylder betingelserne 1) og 2) i sætning 7.3.*

<u>Bevis for sætning 7.3</u>. Lad to forskellige funktioner $\tilde{f}$ og g have kollokation med f i punkterne $x_0,x_1,\ldots,x_n$, lad $\tilde{f}$ opfylde betingelserne 1), 2), 3), og lad g have en kontinuert afledet af 2. orden. Vi kan da vise, at

$$\int_{x_0}^{x_n}\left(\tilde{f}''(x)\right)^2 dx \;<\; \int_{x_0}^{x_n}\left(g''(x)\right)^2 dx.$$

Vi finder nemlig

$$\int_{x_0}^{x_n}\left(g''(x)\right)^2 dx \;-\; \int_{x_0}^{x_n}\left(\tilde{f}''(x)\right)^2 dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_n}\left(g''(x)-\tilde{f}''(x)\right)^2 dx \;+\; 2\int_{x_0}^{x_n}\left(g''(x)-\tilde{f}''(x)\right)\tilde{f}''(x)\,dx \qquad \left(A^2-B^2=(A-B)^2+2(A-B)B\right)$$

$$= \int_{x_0}^{x_n} \left(g''(x) - \tilde{f}''(x)\right)^2 dx \; + \; 2\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(g''(x) - \tilde{f}''(x)\right) \tilde{f}''(x)\,dx \qquad \left(\int_{x_0}^{x_n} = \int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \right)$$

$$= \int_{x_0}^{x_n} \left(g''(x) - \tilde{f}''(x)\right)^2 dx \; + \; 2\sum_{i=1}^{n} \left[\left(g'(x) - \tilde{f}'(x)\right) \tilde{f}''(x) \right]_{x_{i-1}}^{x_i} \; - \; 2\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(g'(x) - \tilde{f}'(x)\right) \tilde{f}'''(x)\,dx$$

(partiel integration)

$$= \int_{x_0}^{x_n} \left(g''(x) - \tilde{f}''(x)\right)^2 dx \; + \; 2\left[\left(g'(x) - \tilde{f}'(x)\right) \tilde{f}''(x) \right]_{x_0}^{x_n} \; - \; 2\sum_{i=1}^{n} \tilde{f}'''(x_{i-1}) \left[g(x) - \tilde{f}(x) \right]_{x_{i-1}}^{x_i}$$

$$\left(\tilde{f}'''(x) \text{ konstant i } [x_{i-1}; x_i[\right)$$

$$= \int_{x_0}^{x_n} \left(g''(x) - \tilde{f}''(x)\right)^2 dx \; > 0 \qquad \left(\tilde{f}''(x_0) = \tilde{f}''(x_n) = 0, \quad g(x_i) = \tilde{f}(x_i) \right)$$

NB. I beviset kan vi åbenbart

erstatte endepunktsbetingelsen $\tilde{f}''(x_0) = 0$ med $\tilde{f}'(x_0) = f'(x_0) \;\wedge\; g'(x_0) = f'(x_0)$ og
erstatte endepunktsbetingelsen $\tilde{f}''(x_n) = 0$ med $\tilde{f}'(x_n) = f'(x_n) \;\wedge\; g'(x_n) = f'(x_n)$.

Derfor har vi samtidig vist, at skal en kollokationsfunktion $\tilde{f}$ have givne tangenthældninger i endepunkterne x_0 og x_n, så vil $\int_{x_0}^{x_n} \left(\tilde{f}''(x)\right)^2 dx$ blive mindst, når $\tilde{f}$ desuden opfylder betingelserne 1) og 2) i sætning 7.3.

Eksempel 7.3. Spline-kollokation med ækvidistante x-værdier.

Det ønskes, at en kubisk splinefunktion $\tilde{f}$ skal stemme med måleværdierne

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	2	2	1

og opfylde endepunktsbetingelserne $f''(0) = 0, \quad f''(3) = 0$.

Da en løsning vil kræve, at man løser 12 ligninger med 12 ubekendte, vil vi i opgaver af denne art ofte opgive nogle af polynomiernes koefficienter.
Her oplyses (skal ikke vises), at $\tilde{f}(x)$ er givet ved

$$p_0(x) = -\frac{7}{15}x^3 + \frac{37}{15}x \qquad \text{for } x \in [0;1]$$

$$p_1(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{7}{5}(x-1)^2 + \frac{16}{15}(x-1) + 2 \qquad \text{for } x \in [1;2]$$

$$p_2(x) = A_2(x-2)^3 + B_2(x-2)^2 + C_2(x-2) + D_2 \qquad \text{for } x \in [2;3].$$

Find konstanterne $A_2, B_2, C_2,$ og D_2.

LØSNING:

Kollokationsbetingelsen $\tilde{f}(2) = 2$ giver $p_2(2) = 2$, dvs.

$A_2 \cdot 0 + B_2 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 + D_2 = 2$ eller $D_2 = \underline{\underline{2}}$.

Glathedsbetingelsen $p_1''(2) = p_2''(2)$ giver

$2 - \frac{14}{5} = 2B_2$ eller $B_2 = \underline{\underline{\frac{-2}{5}}}$.

Endepunktsbetingelsen $\tilde{f}''(3) = 0$ giver $p_2''(3) = 0$, dvs.

$6A_2 + 2B_2 = 0$ hvoraf $6A_2 - \frac{4}{5} = 0$ eller $A_2 = \underline{\underline{\frac{2}{15}}}$.

Kollokationsbetingelsen $\tilde{f}(3) = 1$ giver $p_2(3) = 1$, dvs.

$A_2 + B_2 + C_2 + D_2 = 1$ hvoraf

$\frac{2}{15} - \frac{2}{5} + C_2 + 2 = 1$ eller $C_2 = \underline{\underline{\frac{-11}{15}}}$.

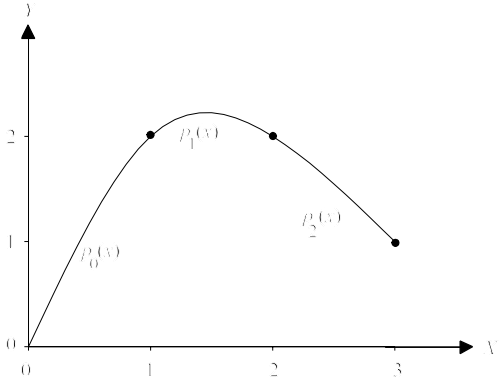
Kontrol: Glathedsbetingelsen $p_1'(2) = p_2'(2)$ giver $1 - \frac{14}{5} + \frac{16}{15} = C_2$ eller $C_2 = \frac{-11}{15}$, dvs. samme værdi som før.

Vi har nu:

$$p_0(x) = \frac{1}{15}(-7x^3 + 37x) \quad , \quad x \in [0;1]$$

$$p_1(x) = \frac{1}{15}(5x^3 - 36x^2 + 73x - 12), \quad x \in [1;2]$$

$$p_2(x) = \frac{1}{15}(2x^3 - 18x^2 + 37x + 12), \quad x \in [2;3].$$



Midt mellem kollokationspunkterne sammenlignes med f:

$f(0.5) = 1.25 \quad f(1.5) = 2.20 \quad f(2.5) = 1.55$
$p_0(0.5) = 1.18 \quad p_1(1.5) = 2.22 \quad p_2(2.5) = 1.55$.

Heraf skønnes, at $|f(x) - \tilde{f}(x)| \le 0.15$ for alle $x \in [0;3]$ (ellers bruges flere kollokationspunkter).

Edb-løsning. I Maple kan den ønskede spline fås på følgende måde:

```
>readlib ( spline ) ;
>spline ( [0,1,2,3],  [0,2,2,1],  x,  3 ) ;
```

$$\mathrm{If}\left(x < 1, \frac{37}{15}x - \frac{7}{15}x^3, x < 2, -\frac{4}{5} + \frac{73}{15}x - \frac{12}{5}x^2 + \frac{1}{3}x^3, \frac{4}{5} + \frac{37}{15}x - \frac{6}{5}x^2 + \frac{2}{15}x^3\right)$$

SUPPLEMENT: 7A MERE OM TAYLORPOLYNOMIUM

SÆTNING 7A.1 *(Taylors formel). Lad f være en* $(n+1)$ *gange differentiabel funktion i et interval* $[a;b]$, *og lad* $\tilde{f}$ *være det tilsvarende n'te Taylorpolynomium med udviklingspunkt* $x_0 \in [a;b]$.
Der findes da for et vilkårligt punkt $x \in [a;b]$ *et punkt* ξ *mellem* x_0 *og x, således at*

$$f(x) - \tilde{f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (1)$$

Bevis. Sætningen er klart sand for $x = x_0$. Lad i det følgende $x \neq x_0$ være et fast punkt i intervallet $[a;b]$.
I kapitel 3 supplement 3A har vi bevist den udvidede middelværdisætning. Den siger:
Når h(x) og g(x) er kontinuerte i det lukkede interval [*a;b*] *og differentiable i det åbne interval*]*a;b*[, *findes der mindst ét punkt c i intervallet*]*a;b*[, *for hvilket* $(h(b)-h(a))\cdot g'(c) = (g(b)-g(a))\cdot h'(c)$.

Lad $h(x) = f(x) - \tilde{f}(x_0)$ og $g(x) = (x-x_0)^{n+1}$.
Vi har da $h(x_0) = f(x_0) - \tilde{f}(x_0) = 0$, $h'(x_0) = f'(x_0) - \tilde{f}'(x_0) = 0$, $h''(x_0) = f''(x_0) - \tilde{f}''(x_0) = 0$,
. . . , $h^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) - \tilde{f}^{(n)}(x_0) = 0$,
og tilsvarende $g(x_0) = 0$, $g'(x_0) = 0$, $g''(x_0) = 0$, . . . , $g^{(n)}(x_0) = 0$.

Ved indsættelse i den udvidede middelværdisætning fås

$$\big(h(x)-h(x_0)\big)\cdot g'(c_1) = \big(g(x)-g(x_0)\big)\cdot h'(c_1) \quad \text{eller} \quad h(x)\cdot g'(c_1) = g(x)\cdot h'(c_1),$$

der igen giver $\dfrac{h(x)}{g(x)} = \dfrac{h'(c_1)}{g'(c_1)}$, hvor c_1 tilhører det åbne interval mellem x_0 og x.

Anvendes den udvidede middelværdisætning på $h'(x)$ og $g'(x)$, fås tilsvarende

$$\big(h'(c_1)-h'(x_0)\big)\cdot g''(c_2) = \big(g'(c_1)-g'(x_0)\big)\cdot h''(c_2) \quad \text{eller} \quad h'(c_1)\cdot g''(c_2) = g'(c_1)\cdot h''(c_1),$$

der igen giver $\dfrac{h'(c_1)}{g'(c_1)} = \dfrac{h''(c_2)}{g''(c_2)}$, hvor c_2 tilhører det åbne interval mellem x_0 og c_1.

Sådan kan fortsættes. Til sidst får vi, idet $g^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, at

$$\frac{h^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)} = \frac{h^{(n+1)}(c_{n+1})}{g^{(n+1)}(c_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$$, hvor c_{n+1} tilhører det åbne interval mellem x_0 og c_n.

Vi har nu vist, at $\dfrac{h(x)}{g(x)} = \dfrac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$, dvs

$$h(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}\cdot g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - \tilde{f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Med $c_{n+1} = \xi$ er sætningen vist.

SÆTNING 7A.2 *(Taylors grænseformel). Lad f være n gange differentiabel i et interval $[a;b]$, lad $f^{(n)}$ være kontinuert i $[a;b]$, og lad $\tilde{f}(x)$ være det n'te Taylorpolynomium med udviklingspunkt $x_0 \in [a;b]$.*
Der gælder da

$$f(x) = \tilde{f}(x) + \varepsilon(x-x_0)\cdot(x-x_0)^n,$$

hvor $\varepsilon(x-x_0)$ betegner en funktiontype, der går mod 0 for $x \to x_0$.

Ofte skrives i stedet $f(x) = \tilde{f}(x) + O((x-x_0)^n)$, hvor O er af den i afsnit 1.6 beskrevne funktionstype.

Bevis. Af Taylors formel fås, at der for ethvert $x \in [a;b]$ findes et tal ξ mellem x og x_0, således at

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Restleddet omskrives: $\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$

Da $f^{(n)}(x)$ er kontinuert, og ξ ligger mellem x og x_0, vil $f^{(n)}(\xi) \to f^{(n)}(x_0)$ for $x \to x_0$.

Vi har derfor $\frac{f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \varepsilon(x-x_0)\cdot(x-x_0)^n,$ hvorved sætningen er bevist.

Kendte Taylorpolynomier. Benyttes Taylors grænseformel med udviklingspunkt 0, fås

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \varepsilon(x)\cdot x^n$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \varepsilon(x)\cdot x^{2n}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \varepsilon(x)\cdot x^{2n+1}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \varepsilon(x)\cdot x^n$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^n + \varepsilon(x)\cdot x^n$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} + \varepsilon(x)\cdot x^5$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \frac{63}{256}x^5 + \varepsilon(x)\cdot x^5$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + \varepsilon(x)\cdot x^n$$

hvor

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Eksempel 7A.1 Approksimation via kendte Taylorpolynomier.

Find for hver af følgende funktioner et polynomium af 4. grad, som tilnærmer funktionen godt for t-værdier nær 0:

1) $f(t) = \cos\left(\frac{1}{2}t^2\right)$

2) $f(t) = \frac{1}{1-t} - \sqrt{1+t^2}$

3) $f(t) = \cos(t+t^2)$.

LØSNING:

1) Af $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \varepsilon(x)x^3$ fås ved indsættelse af $x = \frac{1}{2}t^2$:

$$f(t) = \cos\left(\frac{1}{2}t^2\right) = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}t^2\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{1}{2}t^2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}t^2\right)^3 = \underline{\underline{1 - \frac{1}{8}t^4 + \varepsilon(t)t^6}} .$$

2) Af $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \varepsilon(x)\cdot x^4$ og $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \varepsilon(x)\cdot x^2$ fås ved indsættelse af henholdsvis $x = -t$ og $x = t^2$:

$$f(t) = \frac{1}{1-t} - \sqrt{1+t^2} = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \varepsilon(t)\cdot t^4 - [1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{8}t^4 + \varepsilon(t^2)t^4]$$

$$= \underline{\underline{t + \frac{1}{2}t^2 + t^3 + \frac{9}{8}t^4 + \varepsilon(t)t^4}} .$$

3) Af $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \varepsilon(x)x^4$ fås ved indsættelse af $x = t + t^2$:

$$\cos(t+t^2) = 1 - \frac{1}{2!}(t+t^2)^2 + \frac{1}{4!}(t+t^2)^4 + \varepsilon(t+t^2)\cdot(t+t^2)^4 .$$

Idet vi kun skal medtage led op til 4. grad, og led som kt^5, kt^6 osv. er af typen $\varepsilon(t)t^4$, fås

$$\cos(t+t^2) = 1 - \frac{1}{2}(t^2 + 2t^3 + t^4) + \frac{1}{24}(t^4) + \varepsilon(t)t^4$$

$$= \underline{\underline{1 - \frac{1}{2}t^2 - t^3 - \frac{11}{24}t^4 + \varepsilon(t)t^4}} .$$

Bemærk, at ved hver tilnærmelse er der medtaget **alle** de led, som på nogen måde kan bidrage til et 4. gradspolynomium til slut. - I sådanne tilfælde gælder, som det vises i den følgende sætning 7A.3, at slutresultatet netop bliver Taylorpolynomiet for f med udviklingspunkt 0.

SÆTNING 7A.3 *(Entydighed af Taylorpolynomium). Hvis en n gange differentiabel funktion* $f(x)$ *har* $f^{(n)}$ *kontinuert og kan skrives* $f(x) = Q(x) + \varepsilon(x-x_0)\cdot(x-x_0)^n$, *hvor* $Q(x)$ *er et polynomium af højst n'te grad, så er* $Q(x)$ *det n'te Taylorpolynomium med udviklingspunkt* x_0.

Bevis. Det er givet, at

$$f(x) = Q(x) + \varepsilon_1(x-x_0)\cdot(x-x_0)^n .$$

Idet $\tilde{f}(x)$ er det n'te Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt x_0, har vi

$$f(x) = \tilde{f}(x) + \varepsilon_2(x-x_0)\cdot(x-x_0)^n .$$

Vi har derfor

$$Q(x) + \varepsilon_1(x-x_0)\cdot(x-x_0)^n = \tilde{f}(x) + \varepsilon_2(x-x_0)\cdot(x-x_0)^n$$

eller

$$\tilde{f}(x) - Q(x) = \varepsilon(x-x_0)\cdot(x-x_0)^n .$$

Skrives

$$\tilde{f}(x) - Q(x) = a_n(x-x_0)^n + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \ldots + a_1(x-x_0) + a_0 ,$$

ses, at da $\tilde{f}(x) - Q(x) \to 0$ for $x \to x_0$, må $a_0 = 0$.

Divideres med $x - x_0$, fås

$$a_n(x-x_0)^{n-1} + a_{n-1}(x-x_0)^{n-2} + \ldots + a_1 = \varepsilon(x-x_0)(x-x_0)^{n-1} .$$

Igen ses, at da højre side går mod 0 for $x \to x_0$, må $a_1 = 0$. Divideres med $x - x_0$, ses ved fortsættelse på samme måde, at alle koefficienter $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ må være 0, dvs. de to polynomier er identiske.

Eksempel 7A.2. Bestemmelse af grænseværdi ved Taylors grænseformel.

Undersøg $1 + x^2 - x\sqrt{1+x^2}$ for $x \to \infty$.

LØSNING:

I eksempel 3.4 blev problemet løst ved hjælp af *l*'Hospitals regel, men det var ret besværlige regninger. Det er nemmere i sådanne tilfælde at benytte Taylors grænseformel med udviklingspunkt 0. For at få problemet overført til en grænseværdi mod 0 substitueres $x = \frac{1}{t}$:

$$1 + x^2 - x\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}} = \frac{t^2+1-\sqrt{t^2+1}}{t^2} = \frac{1+t^2-\sqrt{1+t^2}}{t^2} .$$

Da nævneren er af 2. grad, udvikles tælleren til 2. grad, hvorpå vi lader $t \to 0+$ $(x \to \infty)$:

$$\frac{1+t^2-\left(1+\frac{1}{2}t^2+\varepsilon(t^2)t^2\right)}{t^2} = \frac{1+t^2-1-\frac{1}{2}t^2-\varepsilon(t)t^2}{t^2} = \frac{1}{2} - \varepsilon(t) \to \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \quad \text{for} \quad t \to 0+ .$$

Taylorrækker. For mange funktioner kan man finde et Taylorpolynomium af vilkårlig høj grad n. Hvis

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right] = f(x)$$

for alle $x \in [a;b]$ (dvs. restleddet går mod nul for $n \to \infty$), så skriver man

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots \quad , \quad x \in [a;b]$$

og siger, at f er udviklet i en Taylorrække.

Nogle nyttige Taylorrækker med udviklingspunkt 0 er:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \ldots \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots \quad , \quad x \in]-1;1]$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots \quad , \quad |x| < 1$$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} - \ldots \quad , \quad |x| \le 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \frac{63}{256}x^5 + \ldots \quad , \quad x \in]-1;1]$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \binom{\alpha}{4} x^4 + \binom{\alpha}{5} x^5 + \ldots \quad , \quad \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ |x| < 1 \end{cases}$$

hvor

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\ldots(\alpha-n+2)(\alpha-n+1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots \quad 2 \cdot 1} \ .$$

Der er flere Taylorrækker i Schaums håndbog kapitel 22, ligesom de får en mere udførlig behandling i Bind 3.

SUPPLEMENT: 7B RATIONAL KOLLOKATION

Figur 7B.1 skal illustrere, at nær asymptoter bliver en polynomieapproksimation som regel dårlig, men en rational approksimation derimod god.

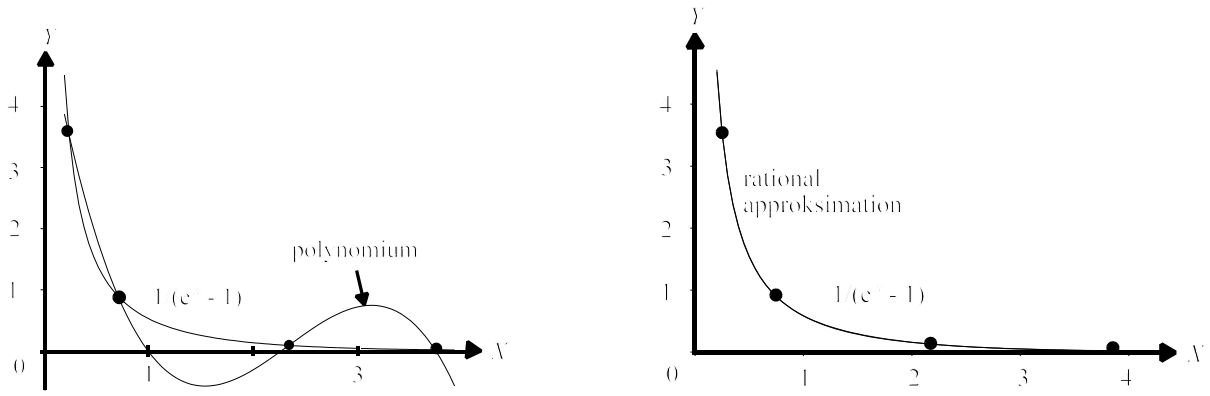


Fig. 7B.1. *Tilnærmelser til* $\dfrac{1}{e^x-1}$ *(4 kollokationspunkter).*

Hvis man i polynomiet

$$a_0 + (x-x_0)\cdot[a_1+(x-x_1)\cdot[a_2+(x-x_2)\cdot[a_3+\ldots+(x-x_{n-1})\cdot[a_n]\ldots]]]$$

erstatter gangetegnene ($\cdot$) med divisionstegn (/), fås formen for en rational approksimation

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \cfrac{x-x_0}{a_1 + \cfrac{x-x_1}{a_2 + \cfrac{x-x_2}{a_3 + \ddots + \cfrac{x-x_{n-1}}{a_n}}}} .$$

Eksempel 7B.1. Rational kollokation.

Løs problemet i eksempel 7.2 ved rational approksimation.

LØSNING:

Vi skriver

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \cfrac{x-0}{a_1 + \cfrac{x-1}{a_2 + \cfrac{x-2}{a_3}}}$$

og kræver kollokation med f for x-værdierne 0, 1, 2, 3:

$$0 = \tilde{f}(0) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = a_0 + 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = 0$$

$$2 = \tilde{f}(1) \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 0 + \frac{1-0}{a_1 + 0} \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = 0.5$$

$$2 = \tilde{f}(2) \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 0 + \frac{2-0}{0.5 + \frac{2-1}{a_2 + 0}} \quad \Leftrightarrow \quad a_2 = 2$$

$$1 = \tilde{f}(3) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 0 + \frac{3-0}{0.5 + \frac{3-1}{2 + \frac{3-2}{a_3}}} \quad \Leftrightarrow \quad a_3 = -\frac{5}{6} \ .$$

Dermed er der opnået en rational approksimation

$$\tilde{f}(x) = 0 + \frac{x-0}{0.5 + \frac{x-1}{2 - \frac{6}{5}(x-2)}} = \frac{-3x^2 + 11x}{x+3} \ .$$

Midt mellem kollokationspunkterne sammenlignes med f:

$$f(0.5) = 1.25 \qquad f(1.5) = 2.20 \qquad f(2.5) = 1.55$$
$$\tilde{f}(0.5) = 1.36 \qquad \tilde{f}(1.5) = 2.17 \qquad \tilde{f}(2.5) = 1.59 \ .$$

Heraf skønnes, at $|f(x) - \tilde{f}(x)| \leq 0.15$ for alle $x \in [0;3]$ (ellers bruges flere kollokationspunkter).

OPGAVER

Opgave 7.1 (Taylorudvikling)
Find i hvert af de følgende tilfælde det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt a. Vurdér fejlen for $x \in [a-0.1; a+0.1]$.

1) T $a = 0$, $f(x) = e^x$
2) $a = 2$, $f(x) = \cosh(x-2) - \frac{x^4}{16} + x^3 - 3x^2 - 2x + 8$
3) $a = 1$, $f(x) = 4\sqrt{x} - x^3 + x^2 + x - 5$
4) $a = 1$, $f(x) = \ln x - e^{x-1} + x - 3$
5) $a = 1$, $f(x) = 2\operatorname{Arctan} x + x^4 - \frac{\pi}{2}$
6) $a = 2$, $f(x) = \ln(x-1) + e^{x-2} - \frac{x^4}{16} + x^3 - 4x^2 + 5x - 3$.

Opgave 7.2 (Taylorudvikling)
Vis, at det n'te Taylorpolynomium for e^x med udviklingspunkt 0 er

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} .$$

Vis, at $|\,restleddet\,| < \frac{3}{(n+1)!}$ for alle $x \in [-1;1]$. Vurdér restleddet for n=15.

Opgave 7.3 (kollokation)
Find i hvert af de følgende tilfælde et polynomium, der stemmer med tabelværdierne.

1)

x	0	1	2
f(x)	0	2	1

2)

x	0	2	4
f(x)	0	2	3

3)

x	0	2	3
f(x)	1	0	0

4)

x	0	1	2	3
f(x)	1	0	0	2

5) T

x	-2	0	2	4
f(x)	3	1	0	0

6)

x	-1	0	1	3
f(x)	1	0	0	1

7)

x	0	1	3	4
f(x)	1	2	2	13/5

8)

x	-1	0	1	2
f(x)	3	4	0	-3

9)

x	0	1	3	4
f(x)	2	0	-1	1

.

Opgave 7.4 (kollokation)

Det ønskes, at en kubisk splinefunktion $\tilde{f}$ skal stemme med måleværdierne

x	0	1	2	3
f (x)	1	0	0	2

og opfylde endepunktsbetingelserne $\tilde{f}''(0) = 0$ og $\tilde{f}''(3) = 0$.
Det oplyses (skal ikke vises), at $\tilde{f}(x)$ er lig med

$$p_0(x) = \frac{1}{4}x^3 + A_1 x + 1 \qquad \text{for} \quad x \in [0;1]$$

$$p_1(x) = B_3 x^3 + \frac{3}{2}x^2 + B_1 x + \frac{3}{2} \qquad \text{for} \quad x \in [1;2]$$

$$p_2(x) = C_3 x^3 + 2x + C_0 \qquad \text{for} \quad x \in [2;3].$$

Find konstanterne A_1, B_3, B_1, C_3 og C_0.

Opgave 7.5 (kollokation)

Det ønskes, at en kubisk splinefunktion $\tilde{f}$ skal stemme med måleværdierne

x	- 2	0	2	4
f (x)	3	1	0	0

og opfylde endepunktsbetingelserne $\tilde{f}''(-2) = 0$ og $\tilde{f}''(4) = 0$.
Det oplyses (skal ikke vises), at $\tilde{f}(x)$ er lig med

$$p_0(x) = A_3 x^3 + \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x + A_0 \qquad \text{for} \quad x \in [-2;0]$$

$$p_1(x) = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{16}x^2 - B_1 x + B_0 \qquad \text{for} \quad x \in [0;2]$$

$$p_2(x) = 0 \qquad \text{for} \quad x \in [2;4].$$

Find konstanterne A_3, A_0, B_1 og B_0.

Opgave 7.A1 (Taylorudvikling via kendte rækker)

Find i hvert af de følgende tilfælde et polynomium af højst 4. grad, som tilnærmer f(t) for t-værdier nær 0. (Vink: Benyt kendte Taylorrækker).

1) $f(t) = \sqrt{\cos t}$

2) $f(t) = \frac{1+t}{1+t^3} + \frac{t}{1+t^2}$

3) $f(t) = \ln(1+t) + \frac{\sin(2t)}{t\sqrt{1+t^2}}$

4) $f(t) = \sqrt{1+t} + \cos(\sqrt{t})$

5) $f(t) = \ln(\cos(\sqrt{t} \cdot \sin\sqrt{t}))$

6) $f(t) = \cos\left(\frac{e^{2t} - 2t - 2t^2}{1+t^3} \right)$.

Opgave 7.A2 (Taylors grænseformel)

Benyt Taylors grænseformel til at undersøge 1) $\sqrt{x^4+x^2}-x^2$ *for* $x\to\infty$, 2) $\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ *for* $x\to 0$.

Opgave 7.Exam15a (Taylorudvikling, 20 point)

Lad en funktion f være givet ved $f(x) = x^2\cdot(\ln x - 1)$, $\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$.

Lad $\tilde{f}(x)$ være det n'te Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt 1.

Bestem den mindste værdi af n således, at det til $\tilde{f}(x)$ svarende restled er numerisk mindre end 10^{-2} (altså $|\,restled\,| < 10^{-2}$).

Opgave 7.Exam21a (Taylorudvikling, 25 point)

Lad en funktion f være givet ved $f(x) = \ln(\cosh x) + (1+x)\cdot\ln(1+x) + 1$.

Lad $\tilde{f}(x)$ være det 2. Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt 0.

1) Find $\tilde{f}(x)$.
2) Undersøg om uligheden $|f(x) - \tilde{f}(x)| < 5\cdot 10^{-4}$ er opfyldt for enhver x-værdi i intervallet $[-\frac{1}{10}\,;\frac{1}{10}]$.
3) Undersøg, om udtrykket $\frac{x-\sin x}{f(x)-e^x}$ har en grænseværdi for $x\to 0$, og find i bekræftende fald grænseværdien.

Opgave 7.Exam66 (Kollokation, 15 point)

Fire laboratorieforsøg har givet følgende sammenhørende værdier af en størrelse x og en størrelse y:

x	0	2	4	7
y	0.0	3.0	2.0	2.0

Beregn den til x = 3 svarende værdi y med 3 betydende cifre:

1) Ved lineær interpolation.
2) Ved kvadratisk interpolation (polynomial kollokation med benyttelse af tre værdier af (x,y)).
3) Ved kubisk interpolation (polynomial kollokation med benyttelse af alle fire værdier af (x,y)).

Opgave 7.Exam67 (Taylorudvikling, 15 point)

Lad en funktion f være givet ved $f(x) = \ln(3+2x)$, $x > -1.5$.

Lad $\tilde{f}(x)$ være det 2. Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt 2.

1) Find $\tilde{f}(x)$ (det er ikke nødvendigt at reducere det opstillede polynomium).
2) Bestem for x = 1.5 den begåede fejl $f(x) - \tilde{f}(x)$ med fire decimaler.
3) Undersøg om uligheden $|f(x) - \tilde{f}(x)| < 2\cdot 10^{-3}$
   er opfyldt for enhver x-værdi i intervallet $|x-2| \le 0.5$.

Opgave 7.Exam112 (Taylorudvikling, 20 point)

1) Find det 2. Taylorpolynomium $\tilde{f}(x)$ for $f(x) = e^{\sin x - 1}$ med udviklingspunkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

2) Kontrollér, at $|f(x) - \tilde{f}(x)| < 6 \cdot 10^{-2}$ for alle x i intervallet $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Opgave 7.Exam141 (Taylorudvikling, 20 point)

Lad en funktion f være givet ved $f(x) = \int_1^x \frac{1}{1 + \ln t}\, dt$ *for* $x > e^{-1}$.

(Prøv ikke at udregne integralet !)

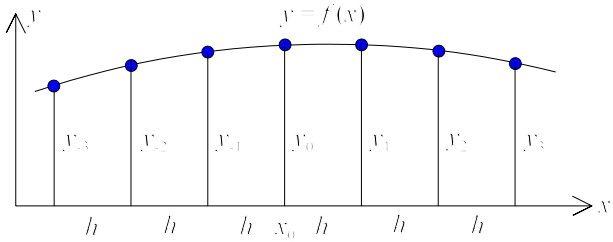
a) Find det 2. Taylorpolynomium $\tilde{f}(x)$ for f med udviklingspunkt a = 1.

b) Brug nu Taylors formel med Lagranges restled til at vise, at
$|f(x) - \tilde{f}(x)| < 10^{-3}$ for $|x - 1| \le 0.1$.

c) Find derpå f(1.1) med en fejl, hvis numeriske værdi er mindre end 10^{-3}.

APPENDIX 1.1.
NUMERISK DIFFERENTIATION

ÆKVIDISTANTE *X*-VÆRDIER



1. Symmetriske formler

$$f'(x_0) \approx (y_1 - y_{-1})\frac{1}{2h}$$ fejl: $O(h^2)$ [1]

$$f'(x_0) \approx (-y_2 + 8y_1 - 8y_{-1} + y_{-2})\frac{1}{12h}$$ fejl: $O(h^4)$

$$f'(x_0) \approx (y_3 - 9y_2 + 45y_1 - 45y_{-1} + 9y_{-2} - y_{-3})\frac{1}{60h}$$ fejl: $O(h^6)$

$$f''(x_0) \approx (y_1 - 2y_0 + y_{-1})\frac{1}{h^2}$$ fejl: $O(h^2)$

$$f''(x_0) \approx (-y_2 + 16y_1 - 30y_0 + 16y_{-1} - y_{-2})\frac{1}{12h^2}$$ fejl: $O(h^4)$

$$f''(x_0) \approx (2y_3 - 27y_2 + 270y_1 - 490y_0 + 270y_{-1} - 27y_{-2} + 2y_{-3})\frac{1}{180h^2}$$ fejl: $O(h^6)$

$$f^{(3)}(x_0) \approx (y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2})\frac{1}{2h^3}$$ fejl: $O(h^2)$

$$f^{(4)}(x_0) \approx (y_2 - 4y_1 + 6y_0 - 4y_{-1} + y_{-2})\frac{1}{h^4}$$ fejl: $O(h^2)$

2. Usymmetriske formler

Disse formler kan bruges, hvis kun $y_0, y_1, y_2, \ldots$ kendes.
(Formlerne kan også bruges, hvis kun $y_0, y_{-1}, y_{-2}, \ldots$ kendes,
men så skal man overalt erstatte y_i med y_{-i} og h med -h).

$$f'(x_0) \approx (y_1 - y_0)\frac{1}{h}$$ fejl: $O(h)$

$$f'(x_0) \approx (-y_2 + 4y_1 - 3y_0)\frac{1}{2h}$$ fejl: $O(h^2)$

$$f'(x_0) \approx (-3y_4 + 16y_3 - 36y_2 + 48y_1 - 25y_0)\frac{1}{12h}$$ fejl: $O(h^4)$

$$f'(x_0) \approx (-10y_6 + 72y_5 - 225y_4 + 400y_3 - 450y_2 + 360y_1 - 147y_0)\frac{1}{60h}$$ fejl: $O(h^6)$

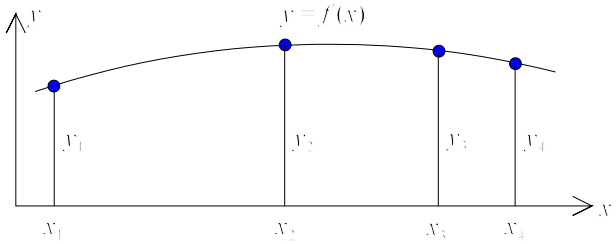
$$f''(x_0) \approx (-y_3 + 4y_2 - 5y_1 + 2y_0)\frac{1}{h^2}$$ fejl: $O(h^2)$

$$f''(x_0) \approx (-10y_5 + 61y_4 - 156y_3 + 214y_2 - 154y_1 + 45y_0)\frac{1}{12h^2}$$ fejl: $O(h^4)$

---

[1] Der gælder $O(h^n) \approx \text{konstant} \cdot h^n$ for små værdier af h. (Mere præcist: $\frac{O(h^n)}{h^n} \to \text{konstant}$ for $h \to 0$.)

VILKÅRLIGE *X*-VÆRDIER



$$f'(x) \approx K_1$$ fejl: K_2-leddet i næste formel

$$f'(x) \approx K_1 + (2x - x_1 - x_2)K_2$$ fejl: K_3-leddet i næste formel

$$f'(x) \approx K_1 + (2x - x_1 - x_2)K_2 + [3x^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3)x + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1]K_3$$

$$f''(x) \approx 2K_2$$ fejl: K_3-leddet i næste formel

$$f''(x) \approx 2K_2 + [6x - 2(x_1 + x_2 + x_3)]K_3$$

$$f^{(3)}(x) \approx 6K_3$$

hvor

$$K_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad K_2 = \frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - K_1}{x_3 - x_1}$$

$$K_3 = \frac{\frac{\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}}{x_4 - x_2} - K_2}{x_4 - x_1}$$

APPENDIX 1.2
NUMERISK INTEGRATION

Midtpunktsformel $I = \int_a^b f(x)dx \approx h\left[f\left(a+\frac{1}{2}h\right)+f\left(a+\frac{3}{2}h\right)+\ldots+f\left(a+(n-\frac{1}{2})h\right)\right]$

$$= h\sum_{j=1}^{n} f\left(a+(j-\frac{1}{2})h\right), \quad \text{hvor} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Algoritme:	**Kommentarer:**
$h \leftarrow \frac{b-a}{n}$	Det forudsættes, at antallet n af delintervaller i $[a;b]$ er givet. Beregn længden h af hvert delinterval i $[a;b]$.
$I \leftarrow 0$	Initialisér summen I til 0.
Gentag for $j = 1, 2, \ldots, n$ { $I \leftarrow I+f\left(a+(j-\frac{1}{2})h\right)$	Addér funktionsværdien i delintervallets midtpunkt til summen I.
$I \leftarrow h \cdot I$	Multiplicér til sidst I med h.

Trapezformel $I = \int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+(n-1)h)\right]$

$$= h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{j=1}^{n-1} f(a+jh)\right], \quad \text{hvor} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Algoritme:	**Kommentarer:**
$h \leftarrow \frac{b-a}{n}$	Det forudsættes, at antallet n af delintervaller i $[a;b]$ er givet. Beregn længden h af hvert delinterval i $[a;b]$.
$I \leftarrow \frac{f(a)+f(b)}{2}$	Initialisér summen I til $\frac{f(a)+f(b)}{2}$.
Gentag for $j = 1, 2, \ldots, n-1$ { $I \leftarrow I+f(a+jh)$	Addér funktionsværdien i endepunkt af delinterval til summen I.
$I \leftarrow h \cdot I$	Multiplicér til sidst I med h.

Simpsons formel $I = \int_a^b f(x)\,dx$

$$\approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + \ldots + 4f\left(a+(n-1)h\right) + f(b)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(a+h) + f(b) + \sum_{j=1}^{p-1}\left(2f(a+2jh) + 4f\left(a+(2j+1)h\right)\right)\right],$$

hvor $h = \frac{b-a}{n}$, $n = 2p$ og p er hel.

Algoritme:

$h \leftarrow \frac{b-a}{2p}$

$I \leftarrow f(a) + 4f(a+h) + f(b)$

Gentag for $j = 1, 2, \ldots, p-1$:

$I \leftarrow I + 2f(a+2jh) + 4f\left(a+(2j+1)h\right)$

$I \leftarrow \frac{h}{3} I$

Kommentarer:

Det forudsættes, at antallet $2p$ af delintervaller i $[a;b]$ er givet.

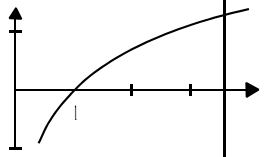
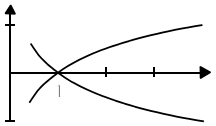
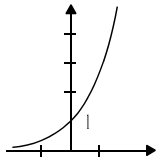
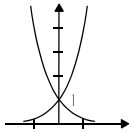
Beregn længden h af hvert delinterval i $[a;b]$.

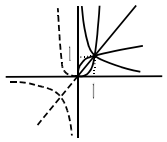
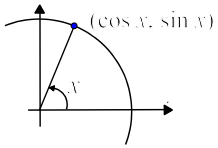
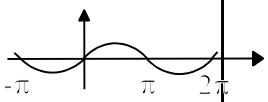
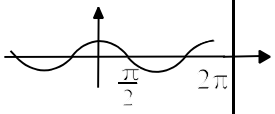
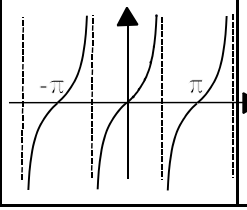
Initialisér summen I til $f(a) + 4f(a+h) + f(b)$.

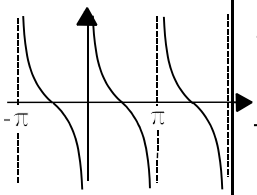
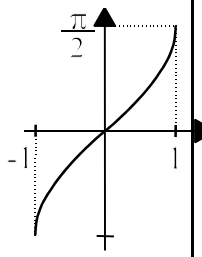
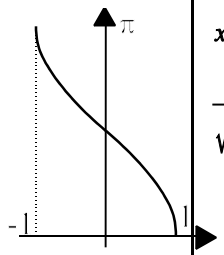
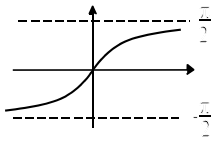
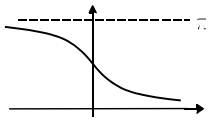
Addér to punkters bidrag til summen I.

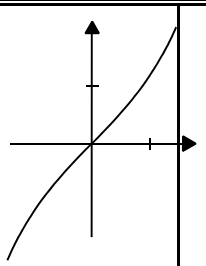
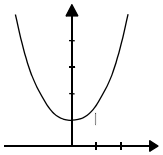
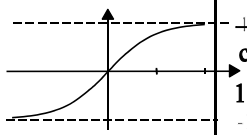
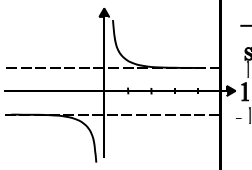
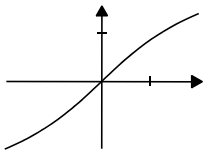
Multiplicér til sidst I med $\frac{h}{3}$.

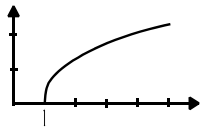
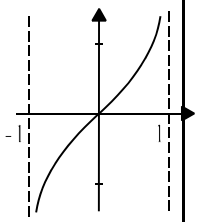
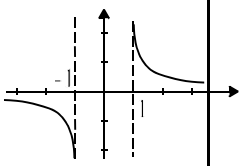
APPENDIX 2.1 STANDARDFUNKTIONER

$f(x)$	Definition	x Def. mængde	y Værdi-mængde	Graf $y=f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)dx$	Formler
$\ln x$	$\int_1^x \frac{1}{t}dt$	$x>0$	$\mathbb{R}$		$\frac{1}{x}$	$x\cdot\ln x - x$	$ln(xy) = \ln x + \ln y$ $ln(x^y) = y\cdot\ln x$ $ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$ for $x\in\,]-1;1]$
$\log_a(x)$ $a>0,\ a\neq 1$	$\frac{\ln x}{\ln a}$	$x>0$	$\mathbb{R}$		$\frac{1}{x\cdot\ln a}$	$x\cdot\log_a(x)-\frac{x}{\ln a}$	$\log_a(xy) = \log_a(x)+\log_a(y)$ $\log_a(x^y) = y\cdot\log_a(x)$
$e^x = \exp(x)$	$e^x = \ln^{-1}x$, dvs. $e^x = y \iff x = \ln y$	$\mathbb{R}$	$y>0$		e^x	e^x	$e^x e^y = e^{x+y}$ $(e^x)^y = e^{xy}$ $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots,\ x\in\mathbb{R}$
$a^x = \exp_a(x)$ $a>0$	$e^{x\cdot\ln a}$	$\mathbb{R}$	$y>0$		$a^x\ln a$	$\begin{cases}\frac{a^x}{\ln a} & (a\neq 1)\\ x & (a=1)\end{cases}$	$a^x = e^{x\cdot\ln a}$ $a^x a^y = a^{x+y}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

$f(x)$	**Definition**	x Def. mængde	y Værdi-mængde	Graf $y = f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)dx$	Formler
x^a $a \in \mathbb{R}$	$e^{a \cdot \ln x}$ + udvidelse	$x > 0$ + udvidelse	$y > 0$ + udvidelse		$a \cdot x^{a-1}$	$\begin{cases} \frac{1}{a+1} x^{a+1} & (a \neq -1) \\ \ln\lvert x \rvert & (a = -1) \end{cases}$	$x^a x^b = x^{a+b}$ $(x^a)^b = x^{ab}$ $(1+x)^a = \binom{a}{0} + \binom{a}{1} x + \binom{a}{2} x^2 + \ldots$ *) for $x \in]-1;1[$, hvor $\binom{a}{n} \equiv \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}$
$\sin x$ +		$\mathbb{R}$	$[-1;1]$		$\cos x$	$-\cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, x \in \mathbb{R}$
$\cos x$ +		$\mathbb{R}$	$[-1;1]$		$-\sin x$	$\sin x$	$\cos(-x) = \cos x$ $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{\sin x}{\cos x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + p\pi$ (p hel)	$\mathbb{R}$		$\frac{1}{\cos^2 x} =$ $1 + \tan^2 x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\tan(-x) = -\tan x$ $\tan x = \frac{1}{\cot x}$

$f(x)$	Definition	x Def. mængde	y Værdi-mængde	Graf $y = f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)dx$	Formler
$\cot x$	$\frac{\cos x}{\sin x}$	$x \neq p\pi$ (p hel)	$\mathbb{R}$		$\frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$\cot(-x) = -\cot x$ $\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$\operatorname{Arcsin} x$	$\sin^{-1} x$	$[-1;1]$	$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$		$x \neq \pm 1$ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \cdot \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2}$	$\operatorname{Arcsin}(-x) = -\operatorname{Arcsin} x$
$\operatorname{Arccos} x$	$\cos^{-1} x$	$[-1;1]$	$[0;\pi]$		$x \neq \pm 1$ $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \cdot \operatorname{Arccos} x - \sqrt{1-x^2}$	$\operatorname{Arccos}(-x) = \pi - \operatorname{Arccos} x$
$\operatorname{Arctan} x$	$\tan^{-1} x$	$\mathbb{R}$	$\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$		$\frac{1}{1+x^2}$	$x \cdot \operatorname{Arctan} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$	$\operatorname{Arctan}(-x) = -\operatorname{Arctan} x$
$\operatorname{Arccot} x$	$\cot^{-1} x$	$\mathbb{R}$	$]0;\pi[$		$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \cdot \operatorname{Arccot} x + \frac{\ln(1+x^2)}{2}$	$\operatorname{Arccot} x = \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} \quad (x > 0)$

$f(x)$	Definition	x Def. mængde	y Værdi-mængde	Graf $y = f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)dx$	Formler
$\sinh x$	$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$		$\cosh x$	$\cosh x$	$\sinh(-x) = -\sinh x$ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
$\cosh x$	$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$[1;\infty[$		$\sinh x$	$\sinh x$	$\cosh(-x) = \cosh x$
$\tanh x$	$\frac{\sinh x}{\cosh x}$	$\mathbb{R}$	$]-1;1[$		$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	$\ln(\cosh x)$	$\tanh(-x) = -\tanh x$ $\tanh x = \frac{1}{\coth x}$
$\coth x$	$\frac{\cosh x}{\sinh x}$	$x \neq 0$	$\lvert y \rvert > 1$		$\frac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$	$\ln\lvert\sinh x\rvert$	$\coth(-x) = -\coth x$
$\operatorname{Arsinh} x$	$\sinh^{-1} x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$		$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$x \cdot \operatorname{Arsinh} x - \sqrt{x^2+1}$	$\operatorname{Arsinh}(-x) = -\operatorname{Arsinh} x$ $\operatorname{Arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$f(x)$	Definition	x Def. mængde	y Værdi-mængde	Graf $y = f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)dx$	Formler
$\operatorname{Arcosh} x$	$\cosh^{-1} x$	$[1;\infty[$	$[0;\infty[$		$x \neq 1$ $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \cdot \operatorname{Arcosh} x - \sqrt{x^2-1}$	$\operatorname{Arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$
$\operatorname{Artanh} x$	$\tanh^{-1} x$	$]-1;1[$	$\mathbb{R}$		$\frac{1}{1-x^2}$	$x \cdot \operatorname{Artanh} x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$	$\operatorname{Artanh}(-x) = -\operatorname{Artanh} x$ $\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
$\operatorname{Arcoth} x$	$\coth^{-1} x$	$\lvert x \rvert > 1$	$y \neq 0$		$\frac{1}{1-x^2}$	$x \cdot \operatorname{Arcoth} x + \frac{1}{2}\ln(x^2-1)$	$\operatorname{Arcoth}(-x) = -\operatorname{Arcoth} x$ $\operatorname{Arcoth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

*) $\binom{a}{n} \equiv \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \{1,2,3,\ldots\}$, $\binom{a}{0} \equiv 1$.

+) I udenlandsk litteratur defineres $\csc(x) \equiv \frac{1}{\sin x}$, $\sec(x) \equiv \frac{1}{\cos x}$.

APPENDIX 4.1
NUMERISK LØSNING AF 1. ORDENS DIFFERENTIALLIGNING

RUNGE-KUTTA METODE AF 4. ORDEN

Tabellerer løsningen $y(t)$ til differentialligningsproblemet

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \qquad y(a) = y_0, \qquad t \in [a;b].$$

Metodefejlen på et enkelt skridt er $O(h^5) \approx \text{konstant} \cdot h^5$.

Algoritme:

Kommentar:

Det forudsættes, at a, b, y_0 samt antallet n af delintervaller er givet.

$$h \leftarrow \frac{b-a}{n}$$

Skridtstørrelse $\Delta t = h$.

$$t_0 \leftarrow a$$

Startværdi for t.

Gentag for $i = 0, 1, \ldots, n-1$

$$k_1 \leftarrow h \cdot f(t_i, y_i)$$

$$k_2 \leftarrow h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 \leftarrow h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 \leftarrow h \cdot f(t_i + h,\ y_i + k_3)$$

$$t_{i+1} \leftarrow t_i + h$$

Næste t-værdi.

$$y_{i+1} \leftarrow y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right)$$

Næste y-værdi.

APPENDIX 4.2
OVERSIGT OVER DIFFERENTIALLIGNINGER AF 1. ORDEN

Differentialligning	Vigtigste forudsætninger, betegnelser m.m.	Løsning
Adskille de variable: $\frac{dy}{dt} = f(t)\,g(y)$	Ligningen $g(y) = 0$ har rødderne $y_1, y_2, \ldots, y_n$.	$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(t)\,dt + C$. Desuden retlinede løsninger $y = y_1,\ y = y_2,\ \ldots,\ y = y_n$.
Homogen lineær diff.ligning: $\frac{dy}{dt} + p(t)\,y = 0$	$P(t) = \int p(t)\,dt$	$y(t) = C\mathrm{e}^{-P(t)}$
Inhomogen lineær diff.ligning: $\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$	$P(t) = \int p(t)\,dt$	$y(t) = \mathrm{e}^{-P(t)}\left(\int q(t)\mathrm{e}^{P(t)}\,dt + C\right)$
"Eksakt" diff.ligning: $\frac{dy}{dt} = -\frac{F_1(t,y)}{F_2(t,y)}$	I et "rektangel" K gælder $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial t}$	$u(t,y) = C$, hvor $u(t,y) = \int_{t_0}^{t} F_1(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} F_2(t,y)\,dy$ og $(t_0,y_0) \in K$
Bernoullis diff.ligning: $\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)\cdot y^a$	$a \neq 0 \ \wedge\ a \neq 1$ $P(t) = (1-a)\int p(t)\,dt$	$y(t) = \left[\mathrm{e}^{-P(t)}\left((1-a)\int q(t)\mathrm{e}^{P(t)}\,dt + C\right)\right]^{\frac{1}{1-a}}$ (Hvis $a = \frac{p}{q}$, hvor p og q er ulige hele tal, fås endnu en løsning ved at skifte fortegn på $y(t)$.) (Hvis $a > 0$, er $y(t) = 0$ [for alle t] også en løsning.)
$\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right)$	$t \neq 0, \quad z = \frac{y}{t}$ Ligningen $f(z) - z = 0$ har rødderne $z_1, z_2, \ldots, z_n$.	$t = C\mathrm{e}^{g(z)}$, hvor $g(z) = \int \frac{dz}{f(z)-z}$ og $z = \frac{y}{t}$. Desuden retlinede løsninger: $y = z_1 t,\ y = z_2 t,\ \ldots,\ y = z_n t$.
$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t}\cdot f(y\cdot t)$	$t \neq 0, \quad z = yt$ Ligningen $f(z) + 1 = 0$ har rødderne $z_1, z_2, \ldots, z_n$.	$t = C\mathrm{e}^{g(z)}$, hvor $g(z) = \int \frac{dz}{z[1+f(z)]}$ og $z = yt$. Desuden andre løsninger: $y = 0,\ y = \frac{z_1}{t},\ y = \frac{z_2}{t},\ \ldots,\ y = \frac{z_n}{t}$.

Eksempel	Løsning af eksempel
$\frac{dy}{dt} = 2t(y-1)^2$	$\int \frac{dy}{(y-1)^2} = \int 2t\,dt + C.$ Desuden en retlinet løsning: $y = 1.$
$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t^2}y = 0, \quad t > 0$	$y(t) = Ce^{\left(\frac{1}{t}\right)}$, idet $P(t) = \int \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{t}$
$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t}y = 3t, \quad t > 0$	$y(t) = e^{-\ln t}\int 3te^{\ln t}dt + Ce^{-\ln t}$, idet $P(t) = \int \frac{1}{t}dt = \ln t.$
$\frac{dy}{dt} = -\frac{t^2+y}{y^2+t}, \quad t > 0$	$F_1(t,y) = t^2 + y$ og $F_2(t,y) = y^2 + t$ I "rektanglet" $t > 0$ gælder $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 = \frac{\partial F_2}{\partial t}$ $u(t,y) = C \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^t (t^2+0)dt + \int_0^y (y^2+t)dy = C.$
$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}ty^3$	$y(t) = \pm\left[e^t\left(-2\int \frac{1}{2}te^{-t}dt + C\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$ og $y(t) = 0$, idet $P(t) = (1-3)\int \frac{1}{2}dt = -t.$
$\frac{dy}{dt} = \frac{3\frac{y}{t} - 4}{\frac{y}{t} - 2}$	$t = Ce^{g(z)}$, hvor $g(z) = \int \frac{dz}{\frac{3z-4}{z-2} - z}$ og $z = \frac{y}{t}.$ Desuden retlinede løsninger: $y = t$ og $y = 4t$, da $\frac{3z-4}{z-2} - z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1 \ \vee \ z = 4$
$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t}\frac{3ty-4}{ty-2}$	$t = Ce^{g(z)}$, hvor $g(z) = \int \frac{dz}{z\left(1 + \frac{3z-4}{z-2}\right)}$ og $z = y \cdot t.$ Desuden løsningerne: $y = 0$ og $y = \frac{3}{2t}$, da $1 + \frac{3z-4}{z-2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{3}{2}$

APPENDIX 5.1 KOMPLEKSE STANDARDFUNKTIONER

Betegnelser: z og a er komplekse tal, p og n er hele tal.

$f(z)$	Definition	Definitionsmængde	Værdimængde	$f'(z)$	Formler
$e^z = \exp(z)$	$e^x(\cos y + i\cdot\sin y)$ hvor $z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}\setminus\{0\}$	e^z	Periode 2Bi $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$, $(e^a)^b = e^{ab}$
Ln z (hovedværdi)	$\ln\lvert z\rvert + i\cdot\mathrm{Arg}(z)$ (Omvendt funktion til $e^w = z$)	$z \neq 0$	Im(Ln z) $\in]-\pi;\pi[$	$\frac{1}{z}$	$\mathrm{Ln}(ab) = \mathrm{Ln}(a) + \mathrm{Ln}(b) + n\cdot 2\pi i$ $\mathrm{Ln}(a^b) = b\cdot \mathrm{Ln}\, a + n\cdot 2\pi i$
$\ln z$	$\ln\lvert z\rvert + i\cdot\arg(z)$ $(= \mathrm{Ln}\, z + 2p\pi i)$ (Omvendt funktion til $e^w = z$)	$z \neq 0$	Im(ln z) $\in$ $]-\pi+2p\pi;\pi+2p\pi]$	$\frac{1}{z}$	Værdien ln z er **ikke** entydig, da $e^w = e^{w+2p\pi i}$. Regneregler som ovenfor.
$\log_a(z)$ $(a \neq 0, \quad a \neq 1)$	$\frac{\ln z}{\ln a}$	$z \neq 0$	mellem to parallel- le linier	$\frac{1}{z\cdot \ln a}$	**Ikke** entydig på grund af ln z og ln a.
$a^z \quad (a \neq 0)$	$e^{z\cdot \ln a}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (når $a \neq 1$)	$a^z \ln a$	**Ikke** entydig på grund af ln a. Potensreglerne gælder **ikke** altid.
z^a	$e^{a\cdot \ln z}$	$z \neq 0$	$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (når $a \neq 0$)	$a\cdot z^{a-1}$	**Ikke** entydig på grund af ln z. Potensreglerne gælder **ikke** altid.
sin z	$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	cos z	Periode 2π
cos z	$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	$-\sin z$	Periode 2π
tan z	$\frac{\sin z}{\cos z}$	$z \neq \frac{\pi}{2} + p\pi$	$\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$	$\frac{1}{\cos^2 z}$	Periode π
cot z	$\frac{\cos z}{\sin z}$	$z \neq p\pi$	$\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$	$\frac{-1}{\sin^2 z}$	Periode π

$f(z)$	Definition	Definitionsmængde	Værdimængde	$f'(z)$	Formler
arcsin$z$	$\sin^{-1} z$	$\mathbb{C}$		$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, $z \neq \pm 1$	$\arcsin z = \frac{1}{i}\ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$, **ikke** entydig
arccos z	$\cos^{-1} z$	$\mathbb{C}$		$\frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$, $z \neq \pm 1$	$\arccos z = \frac{1}{i}\ln\left(iz+\sqrt{z^2-1}\right)$, **ikke** entydig
arctan z	$\tan^{-1} z$	$\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$		$\frac{1}{1+z^2}$	$\arctan z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$, **ikke** entydig
arccot z	$\cot^{-1} z$	$\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$		$-\frac{1}{1+z^2}$	$\operatorname{arccot} z = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{1+iz}{-1+iz}\right)$, **ikke** entydig
sinh z	$\frac{e^z - e^{-z}}{2}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	$\cosh z$	Periode 2π i
cosh z	$\frac{e^z + e^{-z}}{2}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	$\sinh z$	Periode 2π i
tanh z	$\frac{\sinh z}{\cosh z}$	$z \neq i\cdot(\frac{\pi}{2} + p\pi)$	$\mathbb{C}\setminus\{\pm 1\}$	$\frac{1}{\cosh^2 z}$	Periode π i
coth z	$\frac{\cosh z}{\sinh z}$	$z \neq p\pi i$	$\mathbb{C}\setminus\{\pm 1\}$	$\frac{-1}{\sinh^2 z}$	Periode π i
arsinh z	$\sinh^{-1} z$	$\mathbb{C}$		$\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$, $z \neq \pm i$	$\operatorname{arsinh} z = \ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)$, **ikke** entydig
arcosh z	$\cosh^{-1} z$	$\mathbb{C}$		$\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$, $z \neq \pm 1$	$\operatorname{arcosh} z = \ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$, **ikke** entydig
artanh z	$\tanh^{-1} z$	$\mathbb{C}\setminus\{\pm 1\}$		$\frac{1}{1-z^2}$	$\operatorname{artanh} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$, **ikke** entydig
arcoth z	$\coth^{-1} z$	$\mathbb{C}\setminus\{\pm 1\}$		$\frac{1}{1-z^2}$	$\operatorname{arcoth} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{-1+z}\right)$, **ikke** entydig

APPENDIX 5.2 LØSNING AF ANDEN- OG TREDIE-GRADSLIGNING.

I: $Az^2 + Bz + C = 0 \qquad (A \neq 0)$

Diskriminant $D = B^2 - 4AC$.

1. Koefficienterne A, B, C er reelle.

a) $D > 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}$

b) $D = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{-B}{2A}$ (dobbeltrod)

c) $D < 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{-B \pm i\sqrt{|D|}}{2A}$.

2. Koefficienterne A, B, C er komplekse.

$$z = \frac{-B \pm Q}{2A}, \qquad \text{hvor} \quad Q = \begin{cases} \sqrt{\frac{|D| + \mathrm{Re}(D)}{2}} + i\sqrt{\frac{|D| - \mathrm{Re}(D)}{2}} & \text{for} \quad \mathrm{Im}(D) \geq 0 \\ \sqrt{\frac{|D| + \mathrm{Re}(D)}{2}} - i\sqrt{\frac{|D| - \mathrm{Re}(D)}{2}} & \text{for} \quad \mathrm{Im}(D) < 0 \end{cases} .$$

II: $az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \qquad (a \neq 0)$

Beregn $Q = \frac{3ac - b^2}{9a^2}$, $R = \frac{bc - 3ad}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3}$ samt diskriminanten $D = Q^3 + R^2$.

De søgte rødder kaldes z_1, z_2, z_3.

1. **Koefficienterne a, b, c, d er reelle.**

a) $D>0$ Beregn $S = \sqrt[3]{R + \sqrt{D}}$ og $T = \sqrt[3]{R - \sqrt{D}}$.

$$z_1 = S + T - \frac{b}{3a} \quad , \quad z_2 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} + \frac{i\sqrt{3}(S-T)}{2} \quad , \quad z_3 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} - \frac{i\sqrt{3}(S-T)}{2} \quad .$$

b) $D=0$ $z_1 = 2\sqrt[3]{R} - \frac{b}{3a}$, $z_2 = z_3 = -\sqrt[3]{R} - \frac{b}{3a}$.

c) $D<0$ Beregn $\theta = \operatorname{Arccos}\frac{R}{\sqrt{-Q^3}}$.

$$z_1 = 2\sqrt{-Q}\cos\frac{\theta}{3} - \frac{b}{3a} \quad , \quad z_2 = 2\sqrt{-Q}\cos\frac{\theta+2\pi}{3} - \frac{b}{3a} \quad , \quad z_3 = 2\sqrt{-Q}\cos\frac{\theta+4\pi}{3} - \frac{b}{3a} \quad .$$

2. **Koefficienterne a, b, c, d er komplekse.**

Beregn $U = R + \sqrt{|D|}\, e^{i\frac{\operatorname{Arg}(D)}{2}}$, $S = \sqrt[3]{|U|}\, e^{i\frac{\operatorname{Arg}(U)}{3}}$,

$V = R - \sqrt{|D|}\, e^{i\frac{\operatorname{Arg}(D)}{2}}$, $T = \sqrt[3]{|V|}\, e^{i(\operatorname{Arg}(-Q) - \operatorname{Arg}(S))}$.

Rødderne z_1, z_2, z_3 vil da for enhver værdi af D være de under punkt 1a) nævnte.

APPENDIX 5.3
LØSNING AF n'TE GRADSLIGNING
$a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$

I. KOEFFICIENTERNE $a_n, \ldots, a_1, a_0$ ER REELLE ELLER KOMPLEKSE

Rødderne $q_n, \ldots, q_2, q_1$ bestemmes én ad gangen ved Newtons rodsøgningsmetode tilpasset komplekse polynomier (algoritme nedenfor): Hver gang en rod q_k er fundet, divideres med $z - q_k$ (gøres af algoritmen).

Algoritme:

Gentag for $k = n, n-1, \ldots, 1$

- Vælg (gæt) startværdi for q
- Gentag indtil $r \approx 0$, (opnås aldrig $r \approx 0$, så prøv ny startværdi for q)
  - $r \leftarrow 0, \quad u \leftarrow 0$
  - Gentag for $i = k \ldots 0$
    - $u \leftarrow r + qu$
    - $r \leftarrow a_i + qr$
  - Skriv k, q, r
  - $q_k \leftarrow q$
  - $q \leftarrow q - \frac{r}{u}$
- $r \leftarrow 0$
- Gentag for $i = k \ldots 0$
  - $u \leftarrow r$
  - $r \leftarrow a_i + q_k r$
  - $a_i \leftarrow u$

Kommentarer:

Der skal benyttes komplekse variable

$q, q_k, r, u, a_n, \ldots, a_1, a_0$.

Start f. eks. med $q = 1 + i$.

Find $r = f(q)$ og $u = f'(q)$, hvor $f(z) = a_k z^k + \ldots + a_0$.

Gem q i q_k .

Find ny tilnærmelse $q \leftarrow \frac{f(q)}{f'(q)}$ ved Newtons metode.

Dividér $a_k z^k + \ldots + a_0$ med $z - q_k$.

II. KOEFFICIENTERNE $a_n, \ldots, a_1, a_0$ ER REELLE

Polynomiet $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ opløses først i andengradsfaktorer med reelle koefficienter

$$P(z) = \left(z^2 + p_n z + q_n\right)\left(z^2 + p_{n-2} z + q_{n-2}\right) \ldots \left(b_2 z^2 + b_1 z + b_0\right)$$

(er n ulige, bliver sidste faktor dog af første grad, dvs. $b_2 = 0$).

De reelle talpar p_k, q_k bestemmes ét ad gangen ved Bairstows iterative metode (algoritme ses nedenfor). Hver gang et talpar p_k, q_k er helt bestemt, divideres med faktoren $z^2 + p_k z + q_k$ (gøres af algoritmen).

Til sidst kan man selv beregne rødderne i de enkelte fundne faktorer i $P(z)$, f.eks. ved hjælp af appendix 5.2.

Algoritme (Bairstows metode):

Kommentar:

Der benyttes kun reelle variable.

Vælg (gæt) startværdi for p og q — Start f. eks. med $p = 0$ og $q = 0$.

Gentag for $k = n, n-2, n-4, \ldots$ til og med 4 eller 3:

Gentag indtil $r \approx 0$ og $s \approx 0$ (opnås aldrig $r \approx 0$ og $s \approx 0$, så prøv nye startværdier for p og q):

$r \leftarrow 0,\ t \leftarrow 0,\ v \leftarrow 0,\ w \leftarrow 0$ — Dividér $a_k z^k + \ldots + a_0$ med $(z^2 + pz + q)^2$ for at finde divisionsresten $(tz + u)(z^2 + pz + q) + rz + s$.

Gentag for $i = k \ldots 1$:

$s \leftarrow a_i - pr - qv$

$u \leftarrow v - pt - qw$

$v \leftarrow r,\ r \leftarrow s,\ w \leftarrow t,\ t \leftarrow u$

$s \leftarrow a_0 - qv$

$u \leftarrow v - qw$

Skriv k, p, q, r, s

$p_k \leftarrow p,\quad q_k \leftarrow q$ — Gem (p,q) i (p_k, q_k).

$p \leftarrow p + (ru - st)/\left((u - pt)u + qt^2\right)$

$q \leftarrow q + \left((u - pt)s + qtr\right)/\left((u - pt)u + qt^2\right)$

Tving r og s mod 0 ved at ændre p og q med Δp og Δq, hvor

$$-\frac{\partial r}{\partial p}\Delta p - \frac{\partial r}{\partial q}\Delta q = r$$

$$-\frac{\partial s}{\partial p}\Delta p - \frac{\partial s}{\partial q}\Delta q = s.$$

$r \leftarrow 0,\quad v \leftarrow 0$ — Dividér $a_k z^k + \ldots + a_0$ med $z^2 + p_k z + q_k$.

Gentag for $i = k \ldots 0$:

$s \leftarrow a_i - p_k r - q_k v$

$a_i \leftarrow v,\quad v \leftarrow r,\quad r \leftarrow s$

Skriv a_2, a_1 og a_0 — Skriv b_2, b_1 og b_0.

APPENDIX 6.1
NUMERISK LØSNING AF 2. ORDENS DIFFERENTIALLIGNING

RUNGE-KUTTA METODE AF 4. ORDEN

Tabellerer løsningen $y(t)$ til differentialligningsproblemet

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right), \quad y(a) = y_0, \quad y'(a) = y_0', \quad t \in [a;b].$$

Metodefejlen på et enkelt skridt er $O(h^5) \approx \text{konstant} \cdot h^5$.

Algoritme:

Kommentar:

Det forudsættes, at a, b, y_0, y_0' samt antallet n af delintervaller er givet.

$$h \leftarrow \frac{b-a}{n}$$ Skridtstørrelse $\Delta t = h$.

$$t_0 \leftarrow a$$ Startværdi for t.

Gentag for $i = 0, 1, \ldots, n-1$

$$k_1 \leftarrow h \cdot f(t_i,\ y_i,\ y_i')$$

$$k_2 \leftarrow h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2} \cdot y_i' + \frac{h}{8}k_1,\ y_i' + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 \leftarrow h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2} \cdot y_i' + \frac{h}{8}k_1,\ y_i' + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 \leftarrow h \cdot f\left(t_i + h,\ y_i + h \cdot y_i' + \frac{h}{2}k_3,\ y_i' + k_3\right)$$

$$t_{i+1} \leftarrow t_i + h$$ Næste t-værdi.

$$y_{i+1} \leftarrow y_i + h \cdot \left(y_i' + (k_1 + k_2 + k_3)/6\right)$$ Næste y-værdi.

$$y_{i+1}' \leftarrow y_i' + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$ Næste y'-værdi.

APPENDIX 6.2
OMREGNING AF SVINGNINGER

Lad $a, b, \phi, \psi, \omega, t \in \mathbb{R}$ og $A \in [0;\infty[$.

1) For omregningen $\boxed{a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi)}$ gælder

$$a - ib = A\,e^{i\phi}, \quad \text{dvs.} \quad a = A \cdot \cos\phi, \quad b = -A \cdot \sin\phi$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \phi = \begin{cases} -\operatorname{Arctan}\dfrac{b}{a} & \text{for} \quad a > 0 \\ -\pi - \operatorname{Arctan}\dfrac{b}{a} & \text{for} \quad a < 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn} b \;^{*)} & \text{for} \quad a = 0 \end{cases}$$

2) For omregningen $\boxed{a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t) = A \cdot \sin(\omega t + \psi)}$ gælder

$$b + ia = A\,e^{i\psi}, \quad \text{dvs.} \quad b = A \cdot \cos\psi, \quad a = A \cdot \sin\psi$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \psi = \begin{cases} \operatorname{Arctan}\dfrac{a}{b} & \text{for} \quad b > 0 \\ -\pi + \operatorname{Arctan}\dfrac{a}{b} & \text{for} \quad b < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn} a \;^{*)} & \text{for} \quad b = 0 \end{cases}$$

*)

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad x > 0 \\ 0 & \text{for} \quad x = 0 \\ -1 & \text{for} \quad x < 0 \end{cases}$$

APPENDIX 6.3 GÆTTEMETODE. PARTIKULÆR LØSNING TIL DEN LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNING

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = q(t).$$

K'er og *L*'er er ukendte konstanter, som bestemmes ved indsættelse i differentialligningen.

$q(t)$	Er nedenstående forudsætning ikke opfyldt for en af rødderne, og er denne netop p gange rod i karakterligningen $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$, så skal skemaets gæt multipliceres med t^p.	Et gæt på $y_p(t)$
k	rødder $\neq 0$	K
$k\mathrm{e}^{rt}$	rødder $\neq r$	$K\mathrm{e}^{rt}$
$k\cdot\cos(\omega t)$	rødder $\neq i\omega$	$K\cdot\cos(\omega t) + L\cdot\sin(\omega t)$
$k\cdot\sin(\omega t)$	rødder $\neq i\omega$	$K\cdot\cos(\omega t) + L\cdot\sin(\omega t)$
$k\cdot t^m$	rødder $\neq 0$	$K_m t^m + K_{m-1} t^{m-1} + \ldots + K_1 t + K_0$
$k_m t^m + k_{m-1} t^{m-1} + \ldots + k_1 t + k_0$	rødder $\neq 0$	$K_m t^m + K_{m-1} t^{m-1} + \ldots + K_1 t + K_0$
$k\,\mathrm{e}^{rt}\cos(\omega t)$	rødder $\neq r + i\omega$	$\mathrm{e}^{rt}\left(K\cdot\cos(\omega t) + L\cdot\sin(\omega t)\right)$
$k\,\mathrm{e}^{rt}\sin(\omega t)$	rødder $\neq r + i\omega$	$\mathrm{e}^{rt}\left(K\cdot\cos(\omega t) + L\cdot\sin(\omega t)\right)$
$\left(k_m t^m + k_{m-1} t^{m-1} + \ldots + k_1 t + k_0\right)\mathrm{e}^{rt}$	rødder $\neq r$	$\left(K_m t^m + K_{m-1} t^{m-1} + \ldots + K_1 t + K_0\right)\mathrm{e}^{rt}$
$\left(k_m t^m + \ldots + k_0\right)\cos(\omega t)$	rødder $\neq i\omega$	$\left(K_m t^m + \ldots + K_0\right)\cos(\omega t) + \left(L_m t^m + \ldots + L_0\right)\sin(\omega t)$
$\left(k_m t^m + \ldots + k_0\right)\sin(\omega t)$	rødder $\neq i\omega$	$\left(K_m t^m + \ldots + K_0\right)\cos(\omega t) + \left(L_m t^m + \ldots + L_0\right)\sin(\omega t)$
$\left(k_m t^m + \ldots + k_0\right)\mathrm{e}^{rt}\cos(\omega t)$	rødder $\neq r + i\omega$	$\left(K_m t^m + \ldots + K_0\right)\mathrm{e}^{rt}\cos(\omega t) + \left(L_m t^m + \ldots + L_0\right)\mathrm{e}^{rt}\sin(\omega t)$
$\left(k_m t^m + \ldots + k_0\right) e^{rt}\sin(\omega t)$	rødder $\neq r + i\omega$	$\left(K_m t^m + \ldots + K_0\right) e^{rt}\cos(\omega t) + \left(L_m t^m + \ldots + L_0\right) e^{rt}\sin(\omega t)$

Eksempel 6.4 Tabelmetode. Partikulær løsning til den lineære differentialligning

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}(y)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = q(t)$$

a_i : Differentialligningens ukendte koefficienter $a_0, a_{1,\ldots,a_{n-1},1}$. er reelle tal. **Bemærk, at** $a_n = 1$.

$H(\lambda)$: Differentialligningens karakteristiske olynomium $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$. $H^{(p)}(\lambda)$ er den p'te afledede.

λ_1, λ_2: De to rødder i karakterligningen $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$

m, n: m = graden af polynomiet P(t), *n* er differentialligningens orden.

P(t): Polynomiet $k_m t^m + k_{m-1}t^{m-1} + \ldots + k_1 t + k_0$. $P^{(j)}(t)$ er den j'te afledede.

q(t): Højresiden af differentialligningen. Hvis q(t) er en sum af forskellige typer funktioner, kan tabellen benyttes for hvert enkelt led (se afsnit 6.4).

q(t)		**Forudsætninger**	**Partikulær løsning $y_p(t)$**
k	1	0 er ikke rod i $H(\lambda)$	$\frac{k}{a_0}$
	2	0 er p gange rod i $H(\lambda)$	$\frac{k}{p! \cdot a_p}t^p \quad p! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot p$
$k \cdot e^{rt}$	3	r er ikke rod i $H(\lambda)$	$\frac{k}{H(r)}e^{rt}$
	4	r er p gange rod i $H(\lambda)$	$\frac{k}{H^{(p)}(r)}t^p e^{rt}$
$k \cdot \cos(\omega t + \varphi)$	5	$i \cdot \omega$ er ikke rod i $H(\lambda)$	$\frac{k}{h}\cos(\omega t + \varphi - \theta)$, hvor $h = \lvert H(i\cdot\omega)\rvert$ og $\theta = Arg(H(i\cdot\omega))$ (polære koordinater)
	6	$i \cdot \omega$ er p gange rod i $H(\lambda)$	$\frac{k}{h}t^p\cos(\omega t + \varphi - \theta)$, hvor $h = \lvert H^{(p)}(i\cdot\omega)\rvert$ og $\theta = Arg(H^{(p)}(i\cdot\omega))$ (polære koordinater)

q(t)		Forudsætninger	Partikulær løsning $y_p(t)$
$k \cdot \sin(\omega t + \varphi)$	7	$i \cdot \omega$ er ikke rod i $H(\lambda)$	$\frac{k}{h}\sin(\omega t + \varphi - \theta)$, hvor $h = \lvert H(i \cdot \omega)\rvert$ og $\theta = Arg(H(i \cdot \omega))$ (polære koordinater)
	8	$i \cdot \omega$ er p gange rod i $H(\lambda)$	$\frac{k}{h}t^p \sin(\omega t + \varphi - \theta)$, hvor $h = \lvert H^{(p)}(i \cdot \omega)\rvert$ og $\theta = Arg(H(i \cdot \omega))$ (polære koordinater)
$k \cdot \cos(\omega \cdot t)$	9		Benyt formel 5 eller 6 for θ=0
	10	n = 2: $a_1 \neq 0 \vee a_0 \neq \omega^2$	$k \cdot \frac{\left(a_0 - \omega^2\right)\cos(\omega t) + a_1 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)}{\left(a_0 - \omega^2\right)^2 + a_1^2 \cdot \omega^2}$
	11	n = 2: $a_1, = 0 \wedge a_0 = \omega^2$	$\frac{k}{2\omega} \cdot t \cdot \sin(\omega t)$
	12	n = 1	$k \cdot \frac{a_0 \cos(\omega t) + \omega \cdot \sin(\omega t)}{{a_0}^2 + \omega^2}$
$k \cdot \sin(\omega \cdot t)$	13		Benyt formel 7 eller 8 for θ=0
	14	n = 2: $a_1 \neq 0 \vee a_0 \neq \omega^2$	$k \cdot \frac{\left(a_0 - \omega^2\right)\sin(\omega t) - a_1 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)}{\left(a_0 - \omega^2\right)^2 + a_1^2 \cdot \omega^2}$
	15	n = 2: $a_1, = 0 \wedge a_0 = \omega^2$	$-\frac{k}{2\omega} \cdot t \cdot \cos(\omega t)$
	16	n = 1	$k \cdot \frac{a_0 \sin(\omega t) - \omega \cdot \cos(\omega t)}{{a_0}^2 + \omega^2}$

q(t)		Forudsætninger	Partikulær løsning $y_p(t)$
P(t)	17	n = 2: $a_0 \neq 0$	$\frac{1}{a_0}\left[P(t)-\frac{a_1}{a_0}\cdot P'(t)+\frac{a_1^2-a_0}{a_0^2}P''(t)+\ldots+(-1)^m\frac{a_1^m-\binom{m-1}{1}a_1^{m-2}\cdot a_0+\binom{m-2}{2}a_1^{m-4}\cdot a_0^2+\ldots}{a_0^m}P^{(m)}(t)\right]$
	18	n = 2: $a_0 = 0 \wedge a_1 \neq 0$	$\frac{1}{a_1}\left[\int p(t)dt-\frac{P(t)}{a_1}+\frac{P'(t)}{a_1^2}-\frac{P''(t)}{a_1^3}+\ldots+(-1)^{m+1}\frac{P^{(m)}(t)}{a_1^{m+1}}\right]$
	19	n = 2: $a_0 = 0 \wedge a_1 = 0$	$\int\left(\int P(t)dt\right)dt$
	20	n = 1: $a_0 \neq 0$	$\frac{1}{a_0}\left[P(t)-\frac{P'(t)}{a_0}+\frac{P''(t)}{a_0^2}-\frac{P'''(t)}{a_0^3}+\ldots+(-1)^m\frac{P^{(m)}(t)}{a_0^m}\right]$
	21	n = 1: $a_0 = 0$	$\int P(t)dt$
$k\cdot e^{rt}\cdot\cos(\omega t+\varphi)$	22	$r+i\cdot\omega$ er ikke rod i $H(\lambda)$	$\frac{k}{h}e^{rt}\cos(\omega t+\varphi-\theta)$, hvor $h=\lvert H(r+i\cdot\omega)\rvert$ og $\theta=Arg(H(r+i\cdot\omega))$ (polære koordinater)
	23	$r+i\cdot\omega$ er p gange rod i $H(\lambda)$	$\frac{k}{h}t^p e^{rt}\cos(\omega t+\varphi-\theta)$, hvor $h=\left\lvert H^{(p)}(r+i\cdot\omega)\right\rvert$ og $\theta=Arg(H(r+i\cdot\omega))$ (polære koordinater)
$k\cdot e^{rt}\cdot\sin(\omega t+\varphi)$	24	$r+i\cdot\omega$ er ikke rod i $H(\lambda)$	$\frac{k}{h}e^{rt}\sin(\omega t+\varphi-\theta)$, hvor $h=\lvert H(r+i\cdot\omega)\rvert$ og $\theta=Arg(H(r+i\cdot\omega))$ (polære koordinater)
	25	$r+i\cdot\omega$ er p gange rod i $H(\lambda)$	$\frac{k}{h}t^p e^{rt}\sin(\omega t+\varphi-\theta)$, hvor $h=\left\lvert H^{(p)}(r+i\cdot\omega)\right\rvert$ og $\theta=Arg(H(r+i\cdot\omega))$ (polære koordinater)

q(t)		Forudsætninger	Partikulær løsning $y_p(t)$
$k \cdot e^{rt} \cdot \cos(\omega \cdot t)$	26		Benyt formel 22 eller 23 for $\theta = 0$
	27	n = 2: $a_1 \neq -2r \vee a_0 \neq r^2 + \omega^2$	$k \cdot e^{rt} \frac{\left(r^2 + a_1 r + a_0 - \omega^2\right)\cos(\omega t) + (a_1 + 2r) \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)}{\left(r^2 + a_1 r + a_0 - \omega^2\right)^2 + \left(a_1 + 2r\right)^2 \cdot \omega^2}$
	28	n = 2: $a_1 = -2r \wedge a_0 = r^2 + \omega^2$	$\frac{k}{2\omega} \cdot t \cdot e^{rt} \sin(\omega t)$
	29	n = 1	$k \cdot e^{rt} \frac{(a_0 + r)\cos(\omega t) + \omega \cdot \sin(\omega t)}{(a_0 + r)^2 + \omega^2}$
$k \cdot e^{rt} \cdot \sin(\omega \cdot t)$	30		Benyt formel 24 eller 25 for $\theta = 0$
	31	n = 2: $a_1 \neq -2r \vee a_0 \neq r^2 + \omega^2$	$k \cdot e^{rt} \frac{\left(r^2 + a_1 r + a_0 - \omega^2\right)\sin(\omega t) - (a_1 + 2r) \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)}{\left(r^2 + a_1 r + a_0 - \omega^2\right)^2 + \left(a_1 + 2r\right)^2 \cdot \omega^2}$
	32	n = 2: $a_1 = -2r \wedge a_0 = r^2 + \omega^2$	$-\frac{k}{2\omega} \cdot t \cdot e^{rt} \cos(\omega t)$
	33	n = 1	$k \cdot e^{rt} \frac{(a_0 + r)\sin(\omega t) - \omega \cdot \cos(\omega t)}{(a_0 + r)^2 + \omega^2}$

q(t)		Forudsætninger	Partikulær løsning $y_p(t)$
$P(t)\cdot e^{rt}$	34	n = 2: $H(r)=r^2+a_1r+a_0\neq 0$	$\frac{e^{rt}}{H(r)}\left[P(t)-\frac{a_1+2r}{H(r)}\cdot P'(t)+\frac{(a_1+2r)^2-H(r)}{(H(r))^2}P''(t)-\frac{(a_1+2r)^3-2(a_1+2r)H(r)}{(H(r))^3}P'''(t)+\ldots+(-1)^m\frac{(a_1+2r)^m-\binom{m-1}{1}(a_1+2r)^{m-2}\cdot H(r)+\binom{m-2}{2}(a_1+2r)^{m-4}\cdot(H(r))^2+\ldots}{a_0^m}P^{(m)}(t)\right]$
	35	n = 2: $r=\lambda_1\wedge r\neq\lambda_2$	$\frac{1}{r-\lambda_2}\left[\int P(t)dt+\frac{P(t)}{\lambda_2-r}+\frac{P'(t)}{(\lambda_2-r)^2}+\frac{P''(t)}{(\lambda_2-r)^3}+\ldots+\frac{P^{(m)}(t)}{(\lambda_2-r)^{m+1}}\right]$
	36	n = 2: $r=\lambda_1=\lambda_2$	$e^{rt}\cdot\int\left(\int P(t)dt\right)dt$
	37	n = 1: $a_0\neq -r$	$\frac{e^{rt}1}{a_0+r}\left[P(t)-\frac{P'(t)}{a_0+r}+\frac{P''(t)}{(a_0+r)^2}-\frac{P'''(t)}{(a_0+r)^3}+\ldots+(-1)^m\frac{P^{(m)}(t)}{(a_0+r)^m}\right]$
	38	n = 1: $a_0=-r$	$e^{rt}\int P(t)dt$
$P(t)\cdot\cos(\omega t)$		Benyt en af formlerne 39 til 43 for r = 0 $\left(e^{rt}=1\right)$	
$P(t)\cdot\sin(\omega t)$		Benyt en af formlerne 44 til 48 for r = 0 $\left(e^{rt}=1\right)$	
$P(t)\cdot e^{rt}\cdot\cos(\omega t)$	39	n=2: λ_1 og λ_2 er forskellige reelle tal	$\frac{e^{rt}}{\lambda_2-\lambda_1}\left(A\cdot\cos(\omega t)-B\sin(\omega t)\right)$ (se de næste sider)
	40	n=2: λ_1 og λ_2 er samme reelle tal	$e^{rt}\left(C\cdot\cos(\omega t)-D\sin(\omega t)\right)$ (se de næste sider)
	41	n=2: λ_1 og λ_2 er komplekse tal $\neq r\pm i\omega$	$\frac{e^{rt}}{s_1-s_2}\left(B\cdot\cos(\omega t)+A\sin(\omega t)\right)$ (se de næste sider)

q(t)		Forudsætninger	Partikulær løsning $y_p(t)$
	42	n=2: $\lambda_1 = r + i\omega \quad \lambda_2 = r - i\omega$	$\frac{e^{rt}\cos(\omega t)}{(2\omega)^2}\left[P(t) - \frac{P''(t)}{(2\omega)^2} + \frac{P^{(4)}(t)}{(2\omega)^4} - \ldots\right] + \frac{e^{rt}\sin(\omega t)}{2\omega}\int\left[P(t) - \frac{P''(t)}{(2\omega)^2} + \frac{P^{(4)}(t)}{(2\omega)^4} - \ldots\right]dt$
	43	n = 1	$e^{rt}\left(-E\cdot\cos(\omega t) + F\sin(\omega t)\right)$ (se de næste sider)
$P(t)\cdot e^{rt}\cdot\sin(\omega t)$	44	n=2: λ_1 og λ_2 er forskellige reelle tal	$\frac{e^{rt}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(A\cdot\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\right)$ (se de næste sider)
	45	n=2: λ_1 og λ_2 er samme reelle tal	$e^{rt}\left(C\cdot\sin(\omega t) - D\cos(\omega t)\right)$ (se de næste sider)
	46	n=2: λ_1 og λ_2 er komplekse tal $\neq r \pm i\omega$	$\frac{e^{rt}}{s_1 - s_2}\left(B\cdot\sin(\omega t) - A\cos(\omega t)\right)$ (se de næste sider)
	47	n=2: $\lambda_1 = r + i\omega \quad \lambda_2 = r - i\omega$	$\frac{e^{rt}\sin(\omega t)}{(2\omega)^2}\left[P(t) - \frac{P''(t)}{(2\omega)^2} + \frac{P^{(4)}(t)}{(2\omega)^4} - \ldots\right] + \frac{e^{rt}\cos(\omega t)}{2\omega}\int\left[P(t) - \frac{P''(t)}{(2\omega)^2} + \frac{P^{(4)}(t)}{(2\omega)^4} - \ldots\right]dt$
	48	n = 1	$-e^{rt}\left(E\cdot\sin(\omega t) + F\cos(\omega t)\right)$ (se de næste sider)

$$l_1 = \mathrm{Re}(\lambda_1) - r, \quad l_2 = \mathrm{Re}(\lambda_2) - r \qquad s_1 = \mathrm{Im}(\lambda_1) + \omega, \quad s_2 = \mathrm{Im}(\lambda_2) + \omega, \qquad \binom{j}{k} = \frac{j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot \ldots \cdot (j-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \vdots \cdot k}$$

$$\mathrm{A} = \left(\frac{l_1}{l_1^2 + s_1^2} - \frac{l_2}{l_2^2 + s_2^2} \right) P(t) + \left(\frac{l_1^2 - s_1^2}{\left(l_1^2 + s_1^2\right)^2} - \frac{l_2^2 - s_2^2}{\left(l_2^2 + s_2^2\right)^2} \right) P'(t) + \left(\frac{l_1^3 - 3l_1 s_1^2}{\left(l_1^2 + s_1^2\right)^3} - \frac{l_2^3 - 3l_2 s_2^2}{\left(l_2^2 + s_2^2\right)^3} \right) P''(t) + \ldots + \left(\frac{l_1^j - \binom{j}{2} l_1^{j-2} s_1^2 + \binom{j}{4} l_1^{j-4} s_1^4 - \ldots}{\left(l_1^2 + s_1^2\right)^j} - \frac{l_2^j - \binom{j}{2} l_2^{j-2} s_2^2 + \binom{j}{4} l_2^{j-4} s_2^4 - \ldots}{\left(l_1^2 + s_1^2\right)^j} \right) P^{(j-1)}(t) + \ldots$$

$$\mathrm{B} = \left(\frac{s_1}{l_1^2 + s_1^2} - \frac{s_2}{l_2^2 + s_2^2} \right) P(t) + \left(\frac{2l_1 s_1}{\left(l_1^2 + s_1^2\right)^2} - \frac{2l_2 s_2}{\left(l_2^2 + s_2^2\right)^2} \right) P'(t) + \left(\frac{3l_1^2 s_1 - s_1^3}{\left(l_1^2 + s_1^2\right)^3} - \frac{3l_2^2 s_2 - s_2^3}{\left(l_2^2 + s_2^2\right)^3} \right) P''(t) + \ldots + \left(\frac{\binom{j}{1} l_1^{j-1} s_1 - \binom{j}{3} l_1^{j-3} s_1^3 + \binom{j}{5} l_1^{j-5} s_1^5 - \ldots}{\left(l_1^2 + s_1^2\right)^j} - \frac{\binom{j}{1} l_2^{j-1} s_2 - \binom{j}{3} l_2^{j-3} s_2^3 + \binom{j}{5} l_2^{j-5} s_2^5 - \ldots}{\left(l_2^2 + s_2^2\right)^j} \right) P^{(j-1)}(t) + \ldots$$

$$\mathrm{C} = \left(\frac{l_1^2 - s_1^2}{\left(l_1^2 + s_1^2\right)^2} \right) P(t) + 2 \left(\frac{l_1^3 - 3l_1 s_1^2}{\left(l_1^2 + s_1^2\right)^3} \right) P'(t) + \ldots + (j-1) \left(\frac{l_1^j - \binom{j}{2} l_1^{j-2} s_1^2 + \binom{j}{4} l_1^{j-4} s_1^4 - \ldots}{\left(l_1^2 + s_1^2\right)^j} \right) P^{(j-2)}(t)$$

$$\mathrm{D} = \left(\frac{2l_1 s_1}{\left(l_1^2 + s_1^2\right)^2} \right) P(t) + 2 \left(\frac{3l_1^2 s_1 - s_1^3}{\left(l_1^2 + s_1^2\right)^3} \right) P'(t) + \ldots + (j-1) \left(\frac{\binom{j}{1} l_1^{j-1} s_1 - \binom{j}{3} l_1^{j-3} s_1^3 + \binom{j}{5} l_1^{j-5} s_1^5 - \ldots}{\left(l_1^2 + s_1^2\right)^j} \right) P^{(j-2)}(t)$$

$$\mathrm{E} = \frac{l_1}{l_1^2 + s_1^2} P(t) + \frac{l_1^2 - s_1^2}{\left(l_1^2 + s_1^2\right)^2} P'(t) + \frac{l_1^3 - 3l_1 s_1^2}{\left(l_1^2 + s_1^2\right)^3} P''(t) + \ldots + \frac{l_1^j - \binom{j}{2} l_1^{j-2} s_1^2 + \binom{j}{4} l_1^{j-4} s_1^4 - \ldots}{\left(l_1^2 + s_1^2\right)^j} P^{(j-1)}(t) + \ldots$$

$$\mathrm{F} = \frac{s_1}{l_1^2 + s_1^2} P(t) + \frac{2l_1 s_1}{\left(l_1^2 + s_1^2\right)^2} P'(t) + \frac{3l_1^2 s_1 - s_1^3}{\left(l_1^2 + s_1^2\right)^3} P''(t) + \ldots + \frac{\binom{j}{1} l_1^{j-1} s_1 - \binom{j}{3} l_1^{j-3} s_1^3 + \binom{j}{5} l_1^{j-5} s_1^5 - \ldots}{\left(l_1^2 + s_1^2\right)^j} P^{(j-1)}(t) + \ldots$$

APPENDIX 6.5
INTEGRALMETODEN FOR DIFFERENTIALLIGNINGEN

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = q(t)$$

Lad $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, og lad karakterligningen $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ have n forskellige rødder $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. En partikulær løsning $y_p(t)$ til differentialligningen er da givet ved

$\boxed{n = 1}$:
$$y_p(t) = \frac{e^{\lambda_1 t}}{a_1} \int q(t) e^{-\lambda_1 t} dt$$

$\boxed{n = 2}$:
$$y_p(t) = \frac{e^{\lambda_1 t}}{a_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \int q(t) e^{-\lambda_1 t} dt + \frac{e^{\lambda_2 t}}{a_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \int q(t) e^{-\lambda_2 t} dt$$

$\boxed{n = 3}$:
$$y_p(t) = \frac{e^{\lambda_1 t}}{a_3(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} \int q(t) e^{-\lambda_1 t} dt + \frac{e^{\lambda_2 t}}{a_3(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} \int q(t) e^{-\lambda_2 t} dt + \frac{e^{\lambda_3 t}}{a_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \int q(t) e^{-\lambda_3 t} dt$$

$\boxed{n = 4}$:
$$y_p(t) = \frac{e^{\lambda_1 t}}{a_4(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} \int q(t) e^{-\lambda_1 t} dt + \frac{e^{\lambda_2 t}}{a_4(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} \int q(t) e^{-\lambda_2 t} dt + \frac{e^{\lambda_3 t}}{a_4(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)} \int q(t) e^{-\lambda_3 t} dt + \frac{e^{\lambda_4 t}}{a_4(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \int q(t) e^{-\lambda_4 t} dt$$

osv.

APPENDIX 6.6 NUMERISK LØSNING AF SYSTEM AF DIFFERENTIALLIGNINGER

Metoderne vises her for et system af 3 differentialligninger.
Metoderne tabellerer løsningen $y(t), z(t), w(t)$ til differentialligningsproblemet

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f_1(t,y,z,w), \quad y(a) = y_0 \\ \frac{dz}{dt} &= f_2(t,y,z,w), \quad z(a) = z_0 \\ \frac{dw}{dt} &= f_3(t,y,z,w), \quad w(a) = w_0 \end{aligned}\right\} \quad t \in [a;b].$$

RUNGE-KUTTA METODE AF 2. ORDEN

Metodefejlen på et enkelt skridt er $O(h^3) \approx \text{konstant} \cdot h^3$.

Algoritme:

Kommentarer:

Det forudsættes, at a, b, y_0, z_0, w_0 samt antallet n af delintervaller er givet.

$h \leftarrow \dfrac{b-a}{n}$ Skridtstørrelse $\Delta t =$

$t_0 \leftarrow a$ Startværdi for t.

Gentag for $i = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned}
k_1 &\leftarrow h \cdot f_1(t_i,\ y_i,\ z_i,\ w_i) \\
\ell_1 &\leftarrow h \cdot f_2(t_i,\ y_i,\ z_i,\ w_i) \\
m_1 &\leftarrow h \cdot f_3(t_i,\ y_i,\ z_i,\ w_i) \\
k_2 &\leftarrow h \cdot f_1\left(t_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{1}{2}k_1,\ z_i + \frac{1}{2}\ell_1,\ w_i + \frac{1}{2}m_1\right) \\
\ell_2 &\leftarrow h \cdot f_2\left(t_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{1}{2}k_1,\ z_i + \frac{1}{2}\ell_1,\ w_i + \frac{1}{2}m_1\right) \\
m_2 &\leftarrow h \cdot f_3\left(t_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{1}{2}k_1,\ z_i + \frac{1}{2}\ell_1,\ w_i + \frac{1}{2}m_1\right) \\
t_{i+1} &\leftarrow t_i + h && \text{Næste } t\text{-værdi.} \\
y_{i+1} &\leftarrow y_i + k_2 && \text{Næste } y\text{-værdi.} \\
z_{i+1} &\leftarrow z_i + \ell_2 && \text{Næste } z\text{-værdi.} \\
w_{i+1} &\leftarrow w_i + m_2 && \text{Næste } w\text{-værdi.}
\end{aligned}$$

RUNGE-KUTTA METODE AF 4. ORDEN

Metodefejlen på et enkelt skridt er $O(h^5) \approx \text{konstant} \cdot h^5$.

Algoritme:

Kommentarer:

Det forudsættes, at $a, b,$ y_0, z_0, w_0 samt antallet n af delintervaller er givet.

$$h \leftarrow \frac{b-a}{n} \qquad \text{Skridtstørrelse } \Delta t =$$

$$t_0 \leftarrow a \qquad \text{Startværdi for } t.$$

Gentag for $i = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned}
k_1 &\leftarrow h \cdot f_1(t_i,\ y_i,\ z_i,\ w_i) \\
\ell_1 &\leftarrow h \cdot f_2(t_i,\ y_i,\ z_i,\ w_i) \\
m_1 &\leftarrow h \cdot f_3(t_i,\ y_i,\ z_i,\ w_i) \\
k_2 &\leftarrow h \cdot f_1\left(t_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{1}{2}k_1,\ z_i + \frac{1}{2}\ell_1,\ w_i + \frac{1}{2}m_1\right) \\
\ell_2 &\leftarrow h \cdot f_2\left(t_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{1}{2}k_1,\ z_i + \frac{1}{2}\ell_1,\ w_i + \frac{1}{2}m_1\right) \\
m_2 &\leftarrow h \cdot f_3\left(t_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{1}{2}k_1,\ z_i + \frac{1}{2}\ell_1,\ w_i + \frac{1}{2}m_1\right) \\
k_3 &\leftarrow h \cdot f_1\left(t_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{1}{2}k_2,\ z_i + \frac{1}{2}\ell_2,\ w_i + \frac{1}{2}m_2\right) \\
\ell_3 &\leftarrow h \cdot f_2\left(t_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{1}{2}k_2,\ z_i + \frac{1}{2}\ell_2,\ w_i + \frac{1}{2}m_2\right) \\
m_3 &\leftarrow h \cdot f_3\left(t_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{1}{2}k_2,\ z_i + \frac{1}{2}\ell_2,\ w_i + \frac{1}{2}m_2\right) \\
k_4 &\leftarrow h \cdot f_1(t_i + h,\ y_i + k_3,\ z_i + \ell_3,\ w_i + m_3) \\
\ell_4 &\leftarrow h \cdot f_2(t_i + h,\ y_i + k_3,\ z_i + \ell_3,\ w_i + m_3) \\
m_4 &\leftarrow h \cdot f_3(t_i + h,\ y_i + k_3,\ z_i + \ell_3,\ w_i + m_3) \\
t_{i+1} &\leftarrow t_i + h && \text{Næste } t\text{-værdi.} \\
y_{i+1} &\leftarrow y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 && \text{Næste } y\text{-værdi.} \\
z_{i+1} &\leftarrow z_i + (\ell_1 + 2\ell_2 + 2\ell_3 + \ell_4)/6 && \text{Næste } z\text{-værdi.} \\
w_{i+1} &\leftarrow w_i + (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)/6 && \text{Næste } w\text{-værdi.}
\end{aligned}$$

APPENDIX 6.7 OVERSIGT OVER DIFFERENTIALLIGNINGER AF 2. ORDEN

Differentialligning	Vigtigste forudsætninger, betegnelser m.m.	Løsning
Homogen lineær diff.ligning med konstante koefficienter: $A\frac{d^2y}{dt^2}+B\frac{dy}{dt}+Cy=0,\quad A\neq 0$	Karakterligning $A\lambda^2+B\lambda+C=0$ med rødder λ_1 og λ_2: $\lambda_1\neq\lambda_2$ (reelle)	$y(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$
	$\lambda_1=\lambda_2$ (reelle)	$y(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2te^{\lambda_1 t}$
	$\lambda_1=r_0+i\omega_0$ $\lambda_2=r_0-i\omega_0$ (komplekse)	$y(t)=e^{r_0 t}\left(C_1\cos(\omega_0 t)+C_2\sin(\omega_0 t)\right)$
Inhomogen lineær diff.ligning med konstante koefficienter: $A\frac{d^2y}{dt^2}+B\frac{dy}{dt}+Cy=q(t),\quad A\neq 0$	Lad $C_1y_1(t)+C_2y_2(t)$ være den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene diff.ligning (se ovenfor).	$y(t)=y_p(t)+C_1y_1(t)+C_2y_2(t)$, hvor $y_p(t)$ kan bestemmes på en af de følgende måder: 1) Gættemetoden (se appendix 6.3) 2) Tabelmetoden (se appendix 6.4) 3) Integralmetoden (se appendix 6.5)
Eulers diff.ligning: $At^2\frac{d^2y}{dt^2}+Bt\frac{dy}{dt}+Cy=q(t),\ A\neq 0$	$t\neq 0$	Omformes til en diff.ligning med konstante koefficienter ved hjælp af substitutionen $t=\pm e^u$: $A\frac{d^2y}{du^2}+(B-A)\frac{dy}{du}+Cy=q(\pm e^u)$
$\frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}=0$	$P(t)=\int p(t)\,dt$	$y(t)=C_1\int e^{-P(t)}dt+C_2$
$\frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}=q(t)$	$P(t)=\int p(t)\,dt$ $R(t)=\int q(t)e^{P(t)}dt$	$y(t)=\int R(t)e^{-P(t)}dt+C_1\int e^{-P(t)}dt+C_2$
Homogen lineær diff.ligning: $\frac{d^2y}{dt^2}+p_1(t)\frac{dy}{dt}+p_0(t)y=0$	$P_1(t)=\int p_1(t)\,dt$ $y_1(t)$ er en kendt løsning	$y(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)$, hvor $y_2(t)=y_1(t)\int\frac{1}{(y_1(t))^2}e^{-P_1(t)}dt$
Inhomogen lineær diff.ligning: $\frac{d^2y}{dt^2}+p_1(t)\frac{dy}{dt}+p_0(t)y=q(t)$	Lad $y_1(t)$ og $y_2(t)$ være to ikke-proportionale løsninger til den tilsvarende homogene diff.ligning (se ovenfor).	$y(t)=y_p(t)+C_1y_1(t)+C_2y_2(t)$, hvor $y_p(t)=y_2(t)\int\frac{y_1(t)q(t)}{W(t)}dt-y_1(t)\int\frac{y_2(t)q(t)}{W(t)}dt$ og $W(t)=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'$

Eksempel	Løsning af eksempel
$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0$	$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}$, da $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \iff \lambda = 2 \vee \lambda = -3$
$\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 9y = 0$	$y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}$, da $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \iff \lambda = 3$
$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 20y = 0$	$y(t) = e^{2t}\left(C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t)\right)$, da $\lambda^2 - 4\lambda + 20 = 0 \iff \lambda = 2 \pm 4i$
$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 2e^{-4t}$	$y(t) = y_p(t) + C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}$, hvor $y_p(t)$ kan bestemmes på en af de følgende måder: 1) Gættemetoden: $y_p(t) = ae^{-4t}$, hvor a bestemmes ved indsættelse af $y_p(t)$ i diff.ligningen. 2) Tabelmetoden: Af formel (3) i appendix 6.4 fås $y_p(t) = \frac{2}{(-4)^2 + (-4) - 6} e^{-4t}$ 3) Integralmetoden: Af appendix 6.5 fås for n=2: $y_p(t) = \frac{e^{2t}}{1 \cdot (2-(-3))} \int 2e^{-4t} e^{-2t} dt + \frac{e^{-3t}}{1 \cdot (-3-2)} \int 2e^{-4t} e^{-(-3)t} dt$
$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2t\frac{dy}{dt} - 6y = \frac{2}{t^4}, \quad t > 0$	Substitueres $t = e^u$, fås $\frac{d^2y}{du^2} + (2-1)\frac{dy}{du} - 6y = 2e^{-4u}$, der løses som ovenfor.
$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} = 0, \quad t > 0$	$y(t) = C_1 \int e^{\ln t} dt + C_2$, idet $P(t) = \int \left(-\frac{1}{t}\right) dt = -\ln t$
$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} = 6t^3, \quad t > 0$	$y(t) = \int 2t^3 e^{\ln t} dt + C_1 \int e^{\ln t} dt + C_2$, idet $P(t) = \int \left(-\frac{1}{t}\right) dt = -\ln t$ og $R(t) = \int 6t^3 e^{-\ln t} dt = 2t^3$
$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} - 4t^2 y(t) = 0, \quad t > 0$ Det oplyses, at $y_1(t) = e^{(t^2)}$ er en løsning.	$y(t) = C_1 e^{(t^2)} + C_2 e^{-(t^2)}$, idet $y_2(t) = e^{(t^2)} \int \frac{1}{\left(e^{(t^2)}\right)^2} e^{\ln t} dt = -\frac{1}{4} e^{(-t^2)}$ og $P_1(t) = \int \left(-\frac{1}{t}\right) dt = -\ln t$
$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} - 4t^2 y(t) = t^2, \quad t > 0$	$y_1(t) = e^{(t^2)}$ og $y_2(t) = e^{-(t^2)}$ (se ovenfor) $y(t) = -\frac{1}{4} + C_1 e^{(t^2)} + C_2 e^{-(t^2)}$, idet $y_p(t) = e^{-(t^2)} \int \frac{e^{(t^2)} \cdot t^2}{-4t} dt - e^{(t^2)} \int \frac{e^{-(t^2)} \cdot t^2}{-4t} dt = -\frac{1}{4}$ og $W(t) = \begin{vmatrix} e^{(t^2)} & e^{-(t^2)} \\ 2te^{(t^2)} & -2te^{-(t^2)} \end{vmatrix} = -4t$

APPENDIX 7.1 APPROKSIMATION AF $f(x)$

Taylorpolynomium for f(x) med udviklingspunkt x_0

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Taylorrække for f(x) med udviklingspunkt x_0

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

Kollokationspolynomium for f(x)

Kendes f(x) i to punkter:

x	x_0	x_0+h
f(x)	a	b

er kollokationspolynomiet $a+\frac{b-a}{h}(x-x_0)$

Kendes f(x) i tre ækvidistante punkter:

x	x_0-h	x_0	x_0+h
f(x)	e	a	b

er kollokationspolynomiet $a+\frac{b-e}{2h}(x-x_0)+\frac{b+e-2a}{2h^2}(x-x_0)^2$

Kendes f(x) i fire ækvidistante punkter:

x	x_0-h	x_0	x_0+h	x_0+2h
f(x)	e	a	b	k

er kollokationspolynomiet $a+\frac{-2e-3a+6b-k}{6h}(x-x_0)+\frac{e-2a+b}{2h^2}(x-x_0)^2+\frac{-e+3a-3b+k}{6h^3}(x-x_0)^3$

Kendes f(x) i fem ækvidistante punkter:

x	x_0-2h	x_0-h	x_0	x_0+h	x_0+2h
f(x)	p	e	a	b	k

er kollokationspolynomiet

$$a+\frac{p-8e+8b-k}{12h}(x-x_0)+\frac{-p+16e-30a+16b-k}{24h^2}(x-x_0)^2+\frac{-p+2e-2b+k}{12h^3}(x-x_0)^3+\frac{p-4e+6a-4b+k}{24h^4}(x-x_0)^4$$

Generelt kollokationspolynomium for f(x):

$$a+(x-x_0)\cdot\left[a_1+(x-x_1)\cdot\left[a_2+(x-x_2)\cdot\left[a_3+\ldots+(x-x_{n-1})\cdot\left[a_n\right]\ldots\right]\right]\right]$$

LITTERATUR

1) Helge Elbrønd Jensen et al.: "Matematisk Analyse", BIND 1-4, Matematisk Institut, DTU Lyngby.
En mere dybtgående og teoretisk fremstilling. Dækker omtrent de samme emner som vores bind 1-3.

2) E. Kreyszig: "Advanced Engineering Mathematics" 7. udgave, 1993, Wiley & Sons, ca. 1400 sider.
En bred fremstilling, der er velegnet til selvstudium.

3) S.I. Grosman, W.R: Derrick: "Advanced Engineering Mathematics", 1988, Harper & Row, ca. 1000 sider.
En grundig fremstilling, der er velegnet til selvstudium.

4) A.C. Bajpai, L.R. Mustoe, D. Walker: "Engineering Mathematics", 1989 og "Advanced Engineering Mathematics", 1990, Wiley & Sons, ca. 800+600 sider.
Tilsammen giver de to bøger en righoldig, anvendelsespræget fremstilling. De dækker et lidt større område af matematikken end vores bind 1-3, og de er velegnede som håndbøger.

5) M.R. Spiegel: "Theory and Problems of Advanced Calculus", 1990, Schaum Publishing Co., ca. 400 sider.
Kortfattet fremstilling med mange gennemregnede eksempler. Dækker delvis de samme emner som vores bind 1-3.

6) W.H. Press et al.: "Numerical Recipes in Pascal", 1989, Cambridge University Press, ca. ca. 750 sider.
Indeholder mange færdige programmer og praktiske beskrivelser af numeriske metoder. Diskette med programmerne.

7) Stephen Wolfram: "Mathematica, A System for Doing Mathematics by Computer", 1991, Addison-Wesley, ca. 1000 sider.

8) M.R. Spiegel and J. Liu: "Mathematical Handbook of Formulas and Tables" Second Edition, 1999, Schaum, McGraw-Hill, 278 sider.

9) M. Abramowitz, I.A. Stegun: "Handbook of Mathematical Functions" 1992, Dover, ca. 1050 sider.
En klassiker, der giver formler, grafer og tabeller for mange funktioner fra den anvendte matematik.

10) I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik: "Table of Integrals, Series and Products", Academic Press, 1965, 1086 sider.
En klassiker, der er en af de største eksisterende integraltabeller.

11) M.R. Spiegel: "Complex variables", Schaum Publishing Company, 1964, 313 sider.
Repeterer udførligt den grundlæggende teori for komplekse tal og giver dernæst en udførlig forklaring af teorien for komplekse funktioner.

12) Mogens Esrom Larsen: "Komplekse tal og funktioner", Gyldendal, 1973, 92 sider.
En noget abstrakt indføring i de komplekse tal. Bogen er skrevet med henblik på det valgfrie emne i gymnasiet.

13) Inger Larsen: "Kompleks Analyse", Den private ingeniørfond, 1983, 286 sider.
Repeterer kort den grundlæggende teori for komplekse tal, og giver dernæst en udførlig forklaring af teorien for komplekse funktioner.

14) W.D. Morris: “Differential equations for engineers and applied scientists”, McGraw-Hill, 1974, 191 sider.
En praktisk orienteret bog om differentialligninger.

15) T.M. Creese and R.M. Haralick: “Differential equations for engineers”, McGraw-Hill, 1978, 552 sider.
En righoldig bog om differentialligninger med særdeles mange eksempler på ingeniørmæssige anvendelser.

16) Preben Alsholm: “Maple V”, IFAK, DTU Juni 1998, 150 sider (forhandles af sekretariatet på IFAK, bygning 376 stuen, telefon 45 25 54 01).
Ved hjælp af eksempler introduceres alle de kommandoer og begreber fra edb-programmet Maple, som kan være til størst nytte for en ingeniør.

FACITLISTE

KAPITEL 1

1.1a (1) $4x,\quad x+\frac{1}{12},\quad \frac{2}{3}x,\quad \frac{3}{x+3}$

(2) $x^{10},\quad x^{10},\quad x^{10},\quad e^{10},\quad e^{10x},\quad 24^x,\quad x^6,\quad e^{6x},\quad 3^x$

(3) $e^3x,\quad 4x^8,\quad 3x^{10},\quad \frac{3x^2-2x}{3x+9},\quad -3x^{10}+x^9+6x^6$

(4) $\frac{8x}{15},\quad \frac{3}{2}x,\quad 15^x,\quad \frac{17x}{12},\quad x^2-4,\quad x\cdot(x+1)^2$

(5) $\frac{x}{4},\quad \frac{5}{9}x,\quad \frac{29x}{42},\quad \frac{2x}{3},\quad \frac{x^2}{10},\quad \frac{3x+1}{x^2},\quad x+1$

(6) $\frac{1}{2x},\quad \frac{x^2+x}{x+2},\quad x+1,\quad \frac{x}{35},\quad (x+1)^2,\quad 27^x,\quad x^2$

(7) $4x^3,\quad x^{28},\quad 4^x,\quad \frac{15\ln x}{28},\quad e^{3x},\quad x^8,\quad 4^x$

1.1b (1) a, i, i, i, v, v, v, a (2) v, a, a, a, v, i, i, i

1.1c (1) $\frac{1-y}{3},\ y\in\mathbb{R};\quad y^2,\ 0\le y;\quad e^y,\ y\in\mathbb{R};\quad e^{-y},\ y\in\mathbb{R};\quad (y-1)^2,\ 1\le y$

(2) $\frac{e^y}{2},\ y\in\mathbb{R};\quad -\sqrt[3]{y},\ y\in\mathbb{R};\quad e^{-2y},\ y\in\mathbb{R};\quad \ln(-y),\ y<0;\quad y^3,\ y\in\mathbb{R};$

$\ln\left(\frac{1}{y}-1\right),\ 0<y<1$

1.1 $-;\quad 1,\ \frac{2}{5\cdot\ln 2};\quad -;\quad \frac{\ln\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}}{\ln 2}$

1.2 $-;\quad 3,\ \frac{5}{2};\quad 2+\frac{1}{x-2};\quad -$

1.3 $-;\quad 0,\ 1;\quad -;\quad 2-2\sqrt{4-x}$

1.4a (1) $1-,-\infty;\quad 1-,0+;\quad \frac{3}{5},\frac{1}{2};\quad -\infty,\infty;\quad 1+,\infty;\quad 1-,0+;\quad 0+,\infty$

(2) $\frac{3}{2},0+;\quad 1-,0+;\quad 0-,-\infty;\quad 0+,\infty;\quad \frac{1}{2}-,0+;\quad -\frac{3}{5},3$

1.4 $\infty,\ 0,\ \infty,\ 0;\quad 0,\ \frac{1}{2};\quad 0$

1.5 $[-c;c];\quad 0$

1.6 $\{x \mid |x|>2\}$; $y=3x+2$, $x=2$, $x=-2$

1.7 ja, ja, nej

1.8 $\{x \mid x\geq 0\}$, $\{x \mid x>0\}$, $\dfrac{\cos x - 2x\cdot\sin x}{2\sqrt{x}}$

1.9a (1) $7x^6$, $\dfrac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}}$, $2e^{2x}$, $(1+2x)e^{2x}$, $\dfrac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2}$, $\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $\dfrac{-2}{(4x+5)^2}$

(2) $\dfrac{2x}{1+x^2}$, $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{x}}$, $\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$, $(1-x)e^{-x}$, $\dfrac{-1}{2\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}$

(3) $\dfrac{-x^2-6x+2}{(x^2+2)^2}$, $-e^{-x}$, $3x^2$, $\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $\dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2}$, $\dfrac{\cos x+x\cdot\sin x}{\cos^2 x}$

1.9 $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$, $\dfrac{2x^2+2x-2}{(2x+1)^2}$, $\dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$, $[x^2+x+1]^2\cdot(6x+3)$, $\dfrac{1}{2(x+1)\sqrt{x(x+1)}}$, $-2\cdot\sin(2x+1)$, $\dfrac{2}{x}\ln x$, $e^{\sin x}\cdot\cos x$

1.10 aftagende i $[-1;3]$, voksende i $[3;4]$;

aftagende i $[-2;-1]$, voksende i $[-1;1]$;

voksende i $\left[0;\dfrac{4}{9}\right]$, aftagende i $\left[\dfrac{4}{9};1\right]$;

voksende i $[0;4]$, aftagende i $[4;\infty[$

1.11 0.023, 1.03, 0.102, 0.90

1.12 8.543820, −0.027260248, −0.477511

1.13 $1.0\cdot10^6$; $0.2\cdot10^6$, $0.6\cdot10^6$, $1.4\cdot10^6$, $1.8\cdot10^6$

1.14a (1) 15, $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, x^2+x^5, $\dfrac{7}{12}x^{\frac{12}{7}}$, $\dfrac{7}{4}x^{\frac{4}{7}}$

(2) 2, $-\dfrac{1}{3}$, 1, 3

(3) 15, $-4\cos(2x)+2\sin(3x)$, $\dfrac{1}{8}\sin^8 x$, $-\cos(\ln x)$

(4) 0, -4, $\dfrac{1}{3}\ln^3 x$

(5) $\dfrac{1}{2}e^{2x}$, $\dfrac{7^x}{\ln 7}$, $e^{(x^2)}$, $\dfrac{e^{2x}}{2}+\dfrac{3^{2x}}{2\ln 3}$

1.14 $\ln 4-\ln(2\sqrt{5}-2)+2\cdot(\cos 2+2\cdot\sin 2-\cos 1-\sin 1)\approx 0.52256$

1.15 $\frac{5}{2}\ln 2 - \ln 2 - \frac{3}{2} \approx 1.8304$;

$\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{18\sqrt{10}} - \frac{1}{27}\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2(3+\sqrt{8})} + \frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{3(2-\sqrt{2})} \approx 0.3721$

1.16 $\frac{3}{\sqrt[3]{2}} \approx 2.3811$, $\tan 1 + \ln(\cos 1) - \frac{22}{3} + 6\sqrt{3} \approx 4.001$

1.17 (1) 17.1.12 (2) 17.3.8 og 17.3.7 (3) 17.26.5 (4) 17.7.15 og 17.7.8
(5) 17.12.3 og 17.12.1 (6) 17.5.3 og 17.5.1 (7) 17.11.2
(8) 17.25.6 og 17.25.5 (9) 17.13.1 (10) 17.19.2

1.18 (1) 17.25.11 (2) 17.13.13 og 17.13.1 (3) 17.18.7 (4) 17.5.1 (5) 17.19.2
(6) 17.1.5 (7) 17.7.8, eller 17.12.8 og 17.12.1

1.19 (1) $4+\sqrt{15}\ln\frac{17+4\sqrt{15}}{7} \approx 9.9453$ (2) $\frac{1}{18}\ln\frac{2}{5} \approx -0.0509$

(3) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.4388$ (4) $\frac{5}{3} - \frac{3}{2}\ln 3 \approx 0.0187$

1.20 (1) $\frac{\sqrt[4]{2}}{3} \approx 0.3964$ (2) $-1 + 2\ln\left(\frac{1+e}{2}\right) \approx 0.2402$
(3) $-1 - \ln 2 \cdot \ln(\ln 2) + \ln 2 \approx -0.05281$ (4) $\frac{1}{3}(\ln 2)^3 \approx 0.11101$ (5) $2e^2$

1.21 $\ln(3+2\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1.06$

1.22 (1) 1.61 (eksakt $\ln 5 = 1.6094379\ldots$),

(2) $10.740 \approx 11$ (3) $18.9671 \approx 19$ (4) $1.92242 \approx 1.9$

1.Eksam51b 33.3

1.Eksam63b 5.55

1.Eksam69 $\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$, $\frac{10}{3}\ln\left(\frac{1+2^{0.3}}{2}\right) \approx 0.364558$

1.Eksam78 $\approx$ 2.1 Mwh

1.Eksam84b $\approx$ 11.7 eller 668°

KAPITEL 2

2.1a (1) $0,\ 1,\ \ln x,\ \ln x,\ \ln x;\ \infty,\ -\infty$

(2) $2,\ \frac{1}{4},\ \ln y,\ 2,\ 2\ln x;\ \infty,\ -\infty$

(3) $-1,\ 0,\ 0,\ \ln x;\ \infty,\ -\infty$

(4) $-\frac{1}{2},\ \ln x,\ \frac{x}{2},\ 9,\ \frac{\ln 2}{\ln x}+1;\ 1,\ 1$

(5) $2\ln z,\ -\ln(x^4 y),\ \ln\frac{x}{4};\ \infty,\ -\infty$

(6) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ 2x,\ \frac{x}{y},\ 7\ln x;\ \infty,\ -\infty$

(7) $\ln x,\ \frac{1}{3}\ln x,\ \ln 2;\ \ln 2,\ \ln 2$

(8) $-2,\ 1,\ 2;\ 2,\ 2$

2.1b (1) $0,\ 1,\ \log_2 x,\ \log_{10} x;\ \infty,\ -\infty$

(2) $0,\ \log_{10} x,\ 0,\ 2,\ \log_{10} x;\ \infty,\ -\infty$

(3) $2,\ 3,\ \frac{1}{2},\ 2x,\ a,\ 2x,\ -6\log_2 x;\ -\infty,\ \infty$

(4) $3x,\ \ln 2,\ 4,\ \ln x,\ \ln x;\ \infty,\ -\infty$

(5) $4,\ x,\ x,\ 0,\ 0;\ 0,\ 0$

(6) $2\ln x,\ x,\ 12,\ \log_{10} x;\ \infty,\ -\infty$

(7) $\frac{1}{2},\ 0,\ 1,\ \frac{1}{\frac{1}{\log_{10} x}+1};\ 1,\ 1$

(8) $-\frac{1}{2}\log_{10} x,\ \log_{10} x;\ \infty,\ -\infty$

(9) $\log_2 x,\ \log_2(xy),\ \frac{\ln(3x)}{\ln(5x)} = \frac{\frac{\ln 3}{\ln x}+1}{\frac{\ln 5}{\ln x}+1};\ 1,\ 1$

(10) $1,\ \log_{10}(xy),\ \log_{10}(2x);\ \infty,\ -\infty$

2.1 (1) $D =]0;e[\cup]e;\infty[$, positiv for $0<x<e$, negativ for $x>e$, asymptote $x=e$
voksende i $]0;e[$ og $]e;e^2]$, aftagende i $]e^2;\infty[$

(2) 0 (3) $V = \{y \mid y>0 \vee y \le -e^2\}$

2.2 $\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9} \approx 1.0706$, $8\ln 2 - \frac{7}{3} \approx 3.2118$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$

2.3a (1) 1, 2, 1, $\frac{1}{3}$, e^{7x}, $2e^{2x}$, $\frac{1}{2}e^{2x}$

(2) 1, 5, e^{-1}, e^{6x}, $2e^{2x}$, $-\frac{1}{2}e^{-2x}$

(3) 2, 9, $\frac{1}{2}$, e^{23x}, $\frac{9}{2}e^{\frac{9}{2}x}$, $\frac{1}{3}e^{3x+3}$

(4) 8, -3, 2, e^{15x}, $\frac{1}{7}$, $8e^{8x}$, $-e^{-3x}$

(5) -3, 3^9, 2, $e^{-\frac{25}{2}x}$, e^x, $9e^{9x}$, $\frac{1}{6}e^{6x}$

(6) 25, 3, x, e^{16x}, e^x, $3e^{3x}$

(7) 125, $\frac{1}{3}$, e^{2x}, e^{5x}, $\frac{2}{25}e^{\frac{25}{2}x}$

(8) 9, 7, 1, $e^{\frac{1}{2}x^2}$, e^x, $\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$, $\frac{1}{24}e^{24x}$

(9) e^{4x}, 1, $-\frac{3}{2}$, e^{2x}, $\frac{11}{2}e^{\frac{11}{2}x}$, $\frac{1}{6}e^{6x}$

(10) e^{6x}, e^{18x}, $18x$, e, e^x, $-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$, $\frac{1}{8}e^{8x+2}$

(11) $-x$, e^{-x}, e^{13x}, $(2x+1)e^{2x}$, $\frac{1}{2}e^{2x}$

(12) 2, $e^{-\frac{1}{2}x^2}$, e, e^{2x}, $\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x}$, $\frac{1}{18}e^{18x}$

2.3 (1) $7, \frac{1}{7}, -7, 49, 8$ (2) $x^{(x^2+1)}(2\cdot\ln x+1)$, $x^{(x^x)}x^x\left((\ln x)^2+\ln x+\frac{1}{x}\right)$

2.4 sande: 2, 10, 11, 13

2.5a (1) 1, 3, 2^{3x}, 5^x, 9^x, $2^x\ln 2$, $\frac{1}{\ln 8}2^{3x}$

(2) 3, 9^{x+1}, 4^x, $\frac{1}{6}5^x$, $14^x\ln 14$, $-\frac{1}{\ln 4}2^{-2x}$

(3) 2^{x+3}, 107, 9^x, $3^x\ln 3$, $\frac{1}{\ln 4}2^{2x+6}$

(4) 6^x, 3^x, 2, $\frac{1}{28}2^x$, $3^x\ln 3$, $\frac{-3}{\ln 8}2^{-3x}$

(5) 1, 3^x, $\frac{1}{12}7^x$, $3^{x+2}\ln 3$, $\frac{1}{\ln 5}5^x$

(6) 2^{x-3}, $\frac{1}{24}5^x$, 6^{-x}, $(1+x\cdot\ln 2)2^x$, $\frac{1}{\ln 2}2^x$

(7) 6^{2x}, 5^x, 2^x, 3^x, $\frac{1}{15}2^{x+1}$, $2^{4x}\cdot\ln 16$, $\frac{1}{\ln 4}2^{2x}$

(8) 25^{x-1}, 10^{x+2}, 0, 12^x, $2^x\cdot\ln 2$, $\frac{1}{\ln 3}3^{x+1}$

(9) 2^{-4x}, $\frac{1}{3}$, 2^{4x}, $2^{x+2}\cdot\ln 2 = 2^x\cdot\ln 16$, $\frac{-1}{\ln 3}3^{-x}$

2.5 (1) $\mathbb{R}$, 0 for $x=0$ og $x=1$, positiv for $x<0$ og $x>1$, negativ for $0<x<$ asymptote $y=4$, aftagende i $\left]-\infty;\frac{\ln\frac{5}{2}}{\ln 4}\right]$, voksende i $\left[\frac{\ln\frac{5}{2}}{\ln 4};\infty\right[$.

(2) $\frac{15}{\ln 16}-4 \approx 1.4101$

2.6 $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^8}\right) \approx 0.12251$, $\frac{2}{3\cdot\ln 3} \approx 0.60683$, $\frac{36-\frac{1}{36}}{\ln 6} \approx 20.076$

2.7a (1) x^{12}, $\sqrt[15]{x}$, x^2, $x^{\frac{23}{20}}$, $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$, $-\frac{5}{2}x^{-\frac{2}{5}}$

(2) x^{22}, $x^{\frac{1}{12}}$, $x^{-\frac{1}{10}}$, $x^{\frac{2}{7}}$, $9x^8$, $\ln|x|$

(3) x^6, x^{-6}, $2^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{4}$, $x^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{7}{6}x^{\frac{1}{6}}$, $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$

(4) x^{10}, $x^{\frac{2}{15}}$, $x^{\frac{3}{35}}$, 3, $\frac{19}{15}x^{\frac{4}{15}}$, $\frac{20}{27}x^{\frac{27}{20}}$

(5) x^{12}, $5^{\frac{1}{8}}$, $x^{\frac{29}{30}}$, $11x^{10}$, $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}$

2.7 definerede: 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9

2.8 (1) $[0;\infty[$ (2) $[0;\infty[$

(3)

x	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
$f(x)$	0	0.3940	0.7300	0.9415	1.0000	0.8857	0.5831	0.0791	-0.6375

(4) 0, 1.782 (5) 0.9636 (7) 1.002, −0.6375 (9) 1.165

2.9 $\frac{-4\sqrt{2}}{3} \approx -1.8856,\quad \frac{32}{3},\quad \frac{3}{4}\left(2\cdot\sqrt[3]{2}-1\right) \approx 1.1399,\quad \frac{3}{10}\left(8\cdot\sqrt[3]{2}-1\right) \approx 2.7238$

2.10 (1) $]0;\infty[$, $]0;\infty[$, $e^x + 3^x\ln 3 + x^x(\ln x + 1)$

(2) $]0;\infty[$, $]0;\infty[$, $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$

(3) $\{x \mid x \neq 0 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -2\}$, $D' = D$, $\frac{-17x}{(x^2-4)^2}$

(4) $]0;10[$, $]0;10[$, $\frac{1}{x} + \log x + \frac{1}{\ln 10} + \frac{1-\ln x}{x^2} - \frac{1}{(11-x)\log(11-x)\ln 1}$

(5) $[0;1[$, $]0;1[$,

$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 2x(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^3(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(3^x-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^x\ln 3$

2.11 1.09 , 0.0673

2.12 −, 76.7°C (ca.), $p = 5.19\cdot 10^7\cdot 10^{-\frac{1688}{T}} = 5.19\cdot 10^7\cdot e^{-\frac{3887}{T}}$ (ca.)

2.13 −; 3950; 1.68 , 3.15; 0 , 7216 (alle unøjagtige)

2.14 $0.20\sqrt{x}$

2.15 $f(x) = 0$ for $x = \pi$ og ellers positiv, voksende i $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ og i $\left[\pi;\frac{5\pi}{3}\right]$,

aftagende i $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$ og i $\left[\frac{5\pi}{3};2\pi\right]$; areal $= \pi + \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 4.4406$

2.16 (1) $f(x)=0$ for $x=0$, $x=\frac{3\pi}{4}$ og $x=\pi$, positiv i $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ og i $\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right[$,

negativ i $\left]\frac{3\pi}{4};\pi\right[$, voksende i $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ og i $[\pi - \text{Arctan}\frac{1}{2};\pi]$,

aftagende i $\left]\frac{\pi}{2};\pi - \text{Arctan}\frac{1}{2}\right]$, $x = \frac{\pi}{2}$ er en asymptote,

(2) areal $= \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2} - 1 \approx 0.13197$

2.17 $\frac{-\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{-\pi}{4}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\frac{-1}{2}$, 0

2.18 Korrekte: 2, 4, 5, 7, 8

2.19 (1) $[0;4]$

(2)

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	0.3623	1.1416	2.4567	6.2832

(4) $\to 0, \quad \to \infty$

2.20 (1) $]-1;1]$, $]-1;1[$, $\dfrac{-\sin x}{\sqrt{1+x}} + \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}} - \dfrac{\cos x + \operatorname{Arcsin} x}{2(1+x)\sqrt{1+x}}$

(2) $]0;\infty[$, $]0;\infty[$, $\dfrac{1}{1+(\ln x)^2} \cdot \dfrac{1}{x}$

(3) $[-1;1]$, $[-1;1[$, $\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$

(4) $D = \left]\dfrac{-\pi}{2} + p2\pi\,;\dfrac{\pi}{2} + p2\pi\right[$ $(p \text{ hel})$, $D' = D$,

$\cos x - \dfrac{\sin x}{\cos x} + e^{\tan x}\left(1 + (x+1)(1+\tan^2 x)\right)$

(5) $\{x \mid -1 \le x < 0 \vee 0 < x \le 1\}$, $\{x \mid -1 < x < 0 \vee 0 < x < 1\}$,

$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{x}{|x|} + \dfrac{1}{\operatorname{Arctan} x} - \dfrac{x}{(\operatorname{Arctan} x)^2(1+x^2)}$

(6) $]0;1] \setminus \left\{\dfrac{1}{e}\right\}$, $]0;1[\setminus \left\{\dfrac{1}{e}\right\}$,

$$\frac{(1+\ln x)\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) - 1 - \dfrac{\operatorname{Arcsin} x}{x}}{(1+\ln x)^2} + (\sin x)^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\ln \sin x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} \cdot \cos x}{\sin x}\right)$$

2.21 $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}\tan x)$, $\dfrac{x}{4(x^2+2)} + \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{\sqrt{2}}$,

$-\dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x$

2.22 $\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{4}{5}$, e, e^{-1}, 1, $2\dfrac{e^4+1}{e^4-1}$, 0, $-\ln 2$

2.23 (1) 2.209 (2) 0.2475, 1.444, 1.946, −2.113 (5) 2.250

2.24 3, 3, 1, 5, 4, 2, 5, 5, 2 (og 3)

2.25 $e^{\sqrt{\ln x}}$

2.26 (1) $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$, $-\sin(\sinh x)\cdot\sinh x+\dfrac{\cos(\sinh x)}{\cosh^2 x}$

(2) $\{x\mid x\neq 0\}$, $\{x\mid x\neq 0\}$, $\dfrac{\sinh x\cdot\cos x-\sin x\cdot\cosh x}{\sinh^2 x}$

(3) $]0;\infty[$, $]0;\infty[$, $(\cosh x)^{\sinh(\ln x)}\cdot\left(\sinh(\ln x)\cdot\tanh x+\dfrac{1}{x}\cdot\cosh(\ln x)\cdot\ln(\cosh x)\right)$

(4) $]0;\infty[$, $]0;\infty[$, $\sinh(\sinh(x\cdot\ln x))\cdot\cosh(x\cdot\ln x)\cdot(\ln x+1)$

(5) $\left[\dfrac{3}{2};\infty\right[$, $\left]\dfrac{3}{2};\infty\right[$, $\dfrac{1}{\cosh^2\left(\ln(x-\sqrt{2x-3})\right)}\cdot\dfrac{1}{x-\sqrt{2x-3}}\cdot\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}\right)$

(6) $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$, $\cos\left(\sinh(4x+3)\right)\cdot\cosh(4x+3)\cdot 4$

(7) $[1;\infty[$, $]1;\infty[$, $\cosh x+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

2.27 7, 4, e^{12}, e^4, e^{10}, $10\ln 2$, 2, $\dfrac{e^4-1}{2}$, nej, $3^{\frac{1}{14}}$, cos v, 2^{-9}

2.28 2^9, 2^7, $7\ln 2$, 7, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{2}$, nej, 1, nej, $2^{\frac{1}{15}}\cdot 3^{-\frac{3}{5}}$, $\dfrac{1}{49}$, nej

2.29 $\dfrac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}x^{\sqrt{x}}$, $\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x\ln x}-4\tan x$, $\dfrac{4}{5}$, 1, 1, 2^{-6}, $y-1$, $\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}$

2.Eksam64b $\dfrac{49\pi}{8}-100\cdot e^{-\sqrt{\ln 24}}+100\cdot e^{-\sqrt{\ln 7}}\approx 27.208$

KAPITEL 3

3.1 $\frac{7}{5}$

3.2 $2,\ \frac{1}{3},\ 1,\ \infty,\ 0,\ 1,\ \infty,\ \infty,\ \frac{1}{840},\ 0$

3.3 $e^2,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \begin{cases} +\infty & \text{for } x \to 0+ \\ -\infty & \text{for } x \to 0- \end{cases},\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ \ln\frac{3}{2}$

3.4 $-1,\ \sqrt{6},\ \frac{-2}{\pi},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ \infty,\ \infty$

3.5 $e,\ -\infty,\ 0,\ \ln 2,\ 0,\ 1,\ 1,\ -\infty,\ 0,\ \infty$

3.6 $10,\ \frac{1}{4},$ divergent, divergent, $\frac{\pi}{4},\ 20\sqrt{3} + \frac{15(2^{\frac{4}{5}} - 1)}{4} \approx 37.420,$

$\frac{\pi}{\sqrt{7}} + \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{7}} \approx 1.461,$ divergent, $3\pi,\ 5 - 6\ln 2$

3.7 (1) $1 + \frac{32}{15(x-2)} - \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{12(x+1)} + \frac{2x-1}{10(x^2+1)}$

(2) $\frac{41\ln 3 + 2\ln 5}{20} - \frac{62\ln 2}{15} - \frac{1}{10}\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \approx 0.001726$

3.8 (1) $1 + 2x + \frac{2}{(x+1)} - \frac{3}{(x-1)} + \frac{4x-2}{x^2+4},$ (2) -12.82

3.9 $\frac{1}{2} - \frac{\ln 3}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0.47710$

3.10 $-1 + \ln\frac{512}{2187} \approx 2.4520$

3.Eksam40b $\ln 4,$ divergent

3.Eksam49b $e-1,$ divergent

3.Eksam51a $-\infty,\ e$

3.Eksam70b $\left(\frac{49}{2} + \ln\frac{16}{\sqrt{53}} + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\frac{7}{2}\right)$ ton ≈ 25.93 ton

3.Eksam71a $e^{-\frac{4}{3}},\ 0$

3.Eksam76b $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$

3Eksam85b (1) $\dfrac{1}{(x+1)} - \dfrac{1}{(x-1)} + \dfrac{1}{x^2-2x+2}$, (2) $\dfrac{\pi}{4} - \ln 3$

3.Eksam91b $\dfrac{\sin(\ln 2)+\cos(\ln 2)}{4} \approx 0.35205$

3.Eksam96b $\dfrac{3}{10(x+1)} - \dfrac{1}{10(x-1)} + \dfrac{2-x}{5(x^2+4)}$, $\dfrac{\pi}{20} - \dfrac{1}{10}\ln\dfrac{27}{8} \approx 0.0354$

3.Eksam134 $-$, $g(t) = \dfrac{2t^2}{\ln(t^2+1)}$ for $t>0$ og $g(0) = 2$,

$S_2 = 6.1707$ og $S_4 = 6.1627$

3.Eksam135 1, 0, 2

3.Eksam156 ∞

3.Eksam159 $2\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{a}}-1\right)$, $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x+3}{x^2+2x+5}$

3.Eksam169 $\ln\dfrac{x^2+1}{|x+1|}$

3.Eksam173 -1, 0, $-\dfrac{1}{4}$

3.Eksam178 $\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x+4}$, ja, $\ln\dfrac{4}{3}$

3.Eksam181 $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{x}{x^2+2x+2}$

3.Eksam185 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{4}{2+\sqrt{10}}$

3.Eksam190 0, 1

3.Eksam192 $\dfrac{4}{x+1} + \dfrac{2x-4}{x^2-4x+5}$, $\ln\left((x+1)^4\cdot(x^2-4x+5)\right) + C$

3.Eksam198 -4

3.Eksam206 $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{x+1}{x^2-4x+5}$

3.Eksam210 $\frac{2}{9}$

3.Eksam226 0

3.Eksam227 $\frac{1}{x-3} - \frac{x+1}{x^2-2x+2}$

3.Eksam235 $-\frac{3}{x-1} + \frac{x+2}{x^2+1}$, $\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{(x-1)^3} + 2\,\mathrm{Arctan}\,x$

KAPITEL 4

4.1

(1)	h	t	0	0.0625	0.1250	0.1875	0.25
	0.125	y	0.5		0.5313		0.5723
	0.0625	y	0.5	0.5156	0.5337	0.5543	0.5775
	Resultat	y	0.5	0.52	0.53	0.55	0.58

(2)	h	t	0	0.0625	0.1250	0.1875	0.25
	0.125	y	0		0.1250		0.2224
	0.0625	y	0	0.0625	0.1177	0.1667	0.2105
	0.0313	y	0	0.0606	0.1143	0.1622	0.2051
	Resultat	y	0	0.061	0.11	0.16	0.20

(3)	h	t	2	2.0625	2.125	2.1875	2.25
	0.125	y	1.2		1.2456		1.3039
	0.0625	y	1.2	1.2228	1.2487	1.2782	1.3118
	Resultat	y	1.2	1.2	1.3	1.3	1.3

4.2 (1) $y = 3 + C\,e^{(t^2)}$, (2) $y = 3 - e^{(t^2)}$

4.3 (1) $y = C\sqrt{\left|\frac{t-1}{t+1}\right|}$, (2) $y = \sqrt{\frac{1-t}{t+1}}$

4.4 (1) $y = 0, y = \frac{t}{1-Ct}$, (2) $y = t \quad t > 0$, $y = \frac{t}{1+t} \quad t > 0$, $y = 0 \quad t > 0$

4.5 (1) $y = 1, y = 1 - \frac{1}{t^2+C}$, (2) $y = 1$, $y = 1 - \frac{1}{t^2+1}$

4.6 (1) $y^2 = 1 + C\ln t$, (2) $y = \sqrt{1-\frac{3}{4}\ln t} \quad 1 < t < e^{\frac{4}{3}}$, $y = 1 \quad t > 1$

4.7 (1) $c_A = 2\frac{(t+1)^2 + e^{2t}}{(t+1)^2 + 3\,e^{2t}}$

4.8 (1) $h = \begin{cases} (2-t)^2 & \text{for } 0<t<2 \\ 0 & \text{for } t\geq 2 \end{cases}$, $h = \begin{cases} (32-30t)^{\frac{2}{5}} & \text{for } t<\frac{16}{15} \\ 0 & \text{for } t\geq\frac{16}{15} \end{cases}$

4.9 $N = \frac{1.7\cdot 10^4}{1 + 169\cdot e^{-3.4t}}$

4.10 (1) $y = t^2 + \frac{C}{t}$, (2) $y = t^2 + \frac{1}{t}$

4.10a (1) Ce^{-2t}, (2) Ct^{-2}, (3) Ct^{-3}, (4) Ce^{-t}, (5) Ct, (6) $\frac{2}{3}t - \frac{14}{9} + Ce^{-3t}$,
(7) $e^{4t} + Ce^{-3t}$, (8) $2\cos t - \sin t + Ce^{-3t}$, (9) $\frac{2}{3}t - \frac{14}{9} + e^{4t} + Ce^{-3t}$
(10) $-e^t + Ce^{2t}$, (11) $t^2 + Ct^{-2}$, (12) $-\frac{1}{3}t^{-2} + Ct$

4.11 (1) $y = -1 + Ce^{(\frac{t^2}{4})}$, (2) $y = -1 + e^{(\frac{t^2}{4})}$

4.12 (1) $y = \frac{1}{3}(4 - 9t^2)\text{Arcsin}(\frac{3t}{2}) + C(4 - 9t^2)$,
(2) $y = \frac{1}{3}(4 - 9t^2)\text{Arcsin}(\frac{3t}{2}) + (4 - 9t^2)$

4.13 (1) $y = -1 + C\sqrt{1 + 2t}$, (2) $y = -1 + \sqrt{1 + 2t}$

4.14 (1) $y = 2t + Cte^{-(\frac{t^2}{2})}$, (2) $y = 2t$, $t > 0$

4.15 $-3\,\frac{\ln 7}{\ln 4 - \ln 7}$ min $\approx$ 10.43 min

4.16 $y = \sqrt[3]{t}$

4.17 $I = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2}\left(R\cdot\sin(\omega t) - \omega L\cdot\cos(\omega t)\right)$

4.18 $5700\frac{\ln 10}{\ln 2}$ år $\approx$ 18935 år

4.Eksam6b $-1 + \frac{C}{\sqrt{t-2}}$, $-1 + \frac{1}{\sqrt{t-2}}$

4.Eksam52b (1) $y = \sqrt{1 + C(t-1)}$, $C\in\mathbb{R}$, (2) $y = 1$, $y = \sqrt{15t - 14}$

4.Eksam86b (1) $y = \sqrt[3]{K\cdot(\ln t)^3 - 1}$, (2) -

4.Eksam92b (1) $2\sqrt{y - 1} = \sqrt{t - 1} + C$, $y = 1$, (2) $y = \frac{1}{4}t + \frac{3}{2}\sqrt{t-1} + 3$

4.Eksam122b 2.00, 3.25

4.Eksam129b (1) $y = \dfrac{\frac{2}{3}(1 + \sin t)^{\frac{3}{2}} + C}{t + \pi}$, (2) ingen

4.Eksam158 $y = 8e^{(t^3)} - 1$

4.Eksam182 $y = 1 - \dfrac{1}{\ln(t+1) + C}$, $y = 1 - \dfrac{1}{\ln(t+1) - 1}$

4.Eksam202 $y = \dfrac{t^2}{3} - \dfrac{2}{3} + \dfrac{C}{\sqrt{t^2+1}}$, $y = \dfrac{t^2}{3} - \dfrac{2}{3}$

4.Eksam205 $y = \sqrt[3]{1+ke^{(\frac{3}{2}t^2 - 3t)}}$, $k>0$, $t>1$, $y = \sqrt[3]{1+7e^{(\frac{3}{2}t^2 - 3t)}}$, $t>1$

4.Eksam217 $y = \dfrac{1}{3(2-t)} + \dfrac{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{2-t}$

4.Eksam239 (1) $y = e^{-t}\tan(e^t + C)$, (2) $y = e^{-t}\tan(e^t - 1)$, $t < \ln(\frac{\pi}{2} + 1)$

4B.1 (1) $y = -t + \tan(t + C)$, (2) $y = -t - \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{e^{C-2t}-1}}\right)$ og $y = -t$,

(3) $y = 7 - t + \tan(t + C)$

4B.2 (1) $y = \sqrt{10t - t^2}$, (2) $y = \pm t\sqrt{2\sin(t^2)}$

4B.3 (1) $y = t$, (2) $y = t \cdot \tan(\frac{\pi}{4} + \ln t)$, (3) $y = 1 + 2t - \sqrt{6t^2 + 2t + 1}$

4B.4 $y = \dfrac{5t^4}{C - 2t^5}$ og $y = 0$

4B.5 (1) $y = \pm\sqrt{t^2 + C \cdot t}$, (2) $y = t$

4B.6 (1) $y = \dfrac{t}{t - t \cdot \ln t + C}$ og $y = 0$, (2) $y = \pm\sqrt{t - \frac{1}{2} + Ce^{-2t}}$

(3) $y = \dfrac{-1}{(1 + 2t + Ce^t)^{\frac{1}{3}}}$ og $y = 0$, (4) $y = \dfrac{\pm\sqrt{\pm t}}{(C - 4t^5)^{\frac{1}{4}}}$ og $y = 0$

4B.7 (1) $y = t - \dfrac{5t}{t^5 + C}$ og $y = t$, (2) $y = e^t \cdot \tanh(e^t + C)$, $y = -e^t$ og $y = e^t$

(3) $y = 1 + \dfrac{t^2}{1 + t + Ce^t}$ og $y = 1$

KAPITEL 5

5.1 – **5.1a** $15+i,\ 8+7i,\ 43-11i,\ 11+2i,\ -7+i,\ -1-2i,$
$\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i,\ \frac{3}{25}+\frac{4}{25}i,\ -\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i,\ -\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$

5.2 $1-3i,\ \frac{1}{5}-\frac{2}{5}i,\ 1+i,\ 1,\ \frac{1}{10}+\frac{3}{10}i$

5.3 $-9-46i,\ 1,\ -2,\ 0,\ 8-3i,\ \frac{2}{5}-\frac{4}{5}i$

5.3a $-6e^{5i},\ 12,\ Re^{i(\omega t+\phi)},\ Re^{i(\omega t-\frac{\pi}{4})}$

5.4 $1e^{i\cdot 0},\ 1e^{i\cdot\frac{\pi}{2}},\ 5e^{-i\cdot\frac{\pi}{2}},\ \sqrt{2}e^{-i\cdot\frac{3\pi}{4}},\ 2e^{-i\cdot\frac{2\pi}{3}},\ 2e^{-i\cdot\frac{\pi}{6}},\ 4\sqrt{2}e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}},\ 2\sqrt{5}e^{i\cdot\frac{\pi}{3}},$
$2.2361e^{i\cdot 1.1071},\ 2.2361e^{-i\cdot 1.1071},\ 3.6056e^{i\cdot 0.9828},\ e^{i\frac{\pi}{6}}$

5.5 $-1,\ i\cdot e,\ \frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}i,\ -1-i\sqrt{3},\ 1.0261-i2.8191,\ -2.0807+i4.5465,$
$0.2829+i\,3.9900,\ 0.2829-i\,3.9900,\ 2\cos(100t)+i2\sin(100t),\ V\cos(\omega t)+iV\sin(\omega t)$

5.5a $-10.838+i16.809,\ -0.9822+i1.1322,\ -0.6154-i0.0769,$
$1.3333e^{i50t},\ 6.6667e^{i(50t+0.6435)},\ 4.2815+i6.9920$

5.6 $\frac{1}{\sqrt{LC}}$

5.7 $\frac{R+i(\omega L-\omega CR^2-\omega^3L^2C)}{(1-\omega^2LC)^2+(\omega CR)^2}$, $600\ \sec^{-1}$

5.8 (1) $1+i,\ -1-i$ (2) $2e^{i\cdot\frac{\pi}{8}},\ 2e^{i\cdot\frac{5\pi}{8}},\ 2e^{i\cdot\frac{9\pi}{8}},\ 2e^{i\cdot\frac{13\pi}{8}}$

(3) $\sqrt[3]{e}\,e^{i\cdot\frac{\pi}{12}},\ \sqrt[3]{e}\,e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}},\ \sqrt[3]{e}\,e^{i\cdot\frac{17\pi}{12}}$

(4) $1,\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\ 2,\ -1+i\sqrt{3},\ -1-i\sqrt{3}$

(5) $i\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}+i\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}-i\sqrt{2},\ -i\sqrt{2}$

(6) $\frac{\ln 2}{6}+i(\frac{\pi}{12}-\frac{1}{3}+\frac{2p\pi}{3})$ p hel

5.9 (1) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2},\ \sqrt{2}-i\sqrt{2}$, (2) $4\pm 3i$, (3) $-\frac{1}{6}\pm i\frac{\sqrt{23}}{6}$

(4) $\pm\sqrt{2},\pm i$, (5) $\pm\sqrt[4]{2},\ \pm i\sqrt[4]{2},\ \pm(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}),\ \pm(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}})$

(6) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2}$

5.10 $-i\cdot\ln(2\pm\sqrt{3}) + 2p\pi$ (p hel)

5.11 $(1+i)a+2\overline{a}$, $-i(2+\sin x)$, 0 , $ia-1$, $-\frac{1}{13}-i\frac{9}{13}$

5.12 $(z-1)(z^2-4z+5)^2$

5.13 1 , $-i$, $\pm 2i$, $1\pm i$

5.Eksam39b $1.58\cdot e^{2.82i}$, $0.85+0.73i$, $-0.85-0.73i$, $-0.73+0.85i$, $0.73-0.85i$

5.Eksam48b $1.22\pm 0.47i$, $-1.02\pm 0.82i$, $-0.20\pm 1.29i$

5.Eksam62b $(z-i)(z+i)(z+1-2i)(z+1+2i)(z+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2})(z+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})$

5.Eksam79b $\sqrt{3}$

5.Eksam90b $\frac{\sqrt{10}}{5}$, $2.1763 = 124.70°$,
$1.18+0.71i$, $-1.18-0.71i$, $-0.71+1.18i$, $0.71-1.18i$

5.Eksam137b $2e^{i\pi}$

5.Eksam171 $1-\sqrt{3}+i$

5.Eksam187 $e^{\frac{5\pi}{6}i}$, $\pm(1.37+0.37i)$, $\pm(0.37+1.37i)$, $\pm(1-i)$

5.Eksam197 $0.794\pm 0.794i$, $-1.084\pm 0.291i$, $0.291\pm 1.084i$

5.Eksam199 $2e^{\frac{\pi}{6}i}$, $2-i$

5.Eksam214 $2e^{\frac{2\pi}{3}i}$, $\frac{27}{5}(3-i)$

5.Eksam234 $\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{i3\sqrt{2}}{2}$, $\frac{-\sqrt{6}}{2}+\frac{i\sqrt{6}}{2}$, $\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{i\sqrt{6}}{2}$

5.B.1 (1) $2x+2+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{3}{x-1}$

(2) $x^2+2x+\ln|x+1|-\frac{2}{x-1}+3\ln|x-1|$

5.B.2 $\ln(|x-2|\sqrt{x^2+1})-\frac{1}{x^2+1}+2\operatorname{Arctan}x$

5.B.3 (1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$, (2) $\ln 3+\frac{53}{72}\approx 1.8347$

5.B.4 $-\ln(|x-1|)+\frac{6x+5}{2(x^2-2x+2)}+\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)-8\,\mathrm{Arctan}(x-1)$

5.B.5 $x^2+2x-\frac{1}{x-1}+\frac{4x-3}{4(x^2+1)}+\frac{3}{8}\ln(|x+1|)-\frac{17}{8}\ln(|x-1|)+\frac{7}{8}\ln(x^2+1)$
$+\frac{5}{2}\mathrm{Arctan}x$

5.Eksam33b $-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}+1+\mathrm{Arctan}2\approx 0.2809$

5.Eksam35b 12 , $\frac{3}{x-1}-\frac{6}{(x+3)^2}-\frac{1}{x+3}-\frac{2x+6}{x^2+9}$

5.Eksam50b $-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}$, $\frac{1}{x-1}+\ln\left|\frac{(x-1)(x-3)}{x+3}\right|$

5.Eksam216 $-\frac{3}{t-2}+\frac{2}{(t-2)^2}-\frac{3t}{t^2+1}$

KAPITEL 6

6.1 (1) $y = C_1e^{2t} + C_2te^{2t}$, (2) $y = C_1e^{t}\cos(3t) + C_2e^{t}\sin(3t)$
$y = C_1e^{t} + C_2e^{-t}$

6.2 $y = \sqrt{2}e^{4t}\cos(2t) - \sqrt{2}e^{4t}\sin(2t)$, $y = 2e^{4t}\cos(2t + \frac{\pi}{4})$

6.3 (1) $y = C_1e^{t} + C_2te^{t} + C_3t^2e^{t}$
(2) $y = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} + C_3e^{-3t} + C_4te^{-3t}$
(3) $y = C_1 + C_2t + C_3e^{t} + C_4te^{t} + C_5t^2e^{t}$

6.4 (1) $y = \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t + t - \frac{2}{5} + C_1e^{-t}\cos(2t) + C_2e^{-t}\sin(2t)$

(2) $y = \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t + t - \frac{2}{5} + \frac{1}{10}e^{-t}\cos(2t) - \frac{2}{5}e^{-t}\sin(2t)$

6.5 (1) $y = 2te^{t} + 2t + 1 + C_1e^{t} + C_2e^{-2t}$

(2) $y = 2te^{t} + 2t + 1 - \frac{2}{3}e^{t} + \frac{2}{3}e^{-2t}$

6.6 (1) $y = \frac{1}{8}e^{t}\cos t + e^{5t}(-\frac{1}{3}\cos(2t) + C_1\cos t + C_2\sin t)$

(2) $y = \frac{1}{8}e^{t}\cos t + e^{5t}(-\frac{1}{3}\cos(2t) + \frac{1}{3}\cos t)$

6.7 (1) $y = e^{3t}(\frac{1}{2}t^2 - t + 1) + C_1e^{t} + C_2e^{2t}$

(2) $y = e^{3t}(\frac{1}{2}t^2 - t + 1) + 3e^{t} - 3e^{2t}$

6.8 (1) $y = -\frac{5}{17}e^{3t}$, (2) $-\frac{5}{52}e^{-t}[(5t + \frac{4}{13})\cos 2t + (t - \frac{53}{26})\sin(2t)]$

(3) $y = (\frac{1}{8}t + \frac{5}{16})e^{-t}$, (4) $\frac{1}{2}t^2 + t - 1$, (5) $\frac{t}{16}\cos(2t) + \frac{t^2}{8}\sin(2t)$

6.9 $y = t\sin t + \cos t\ln|\cos t| + C_1\cos t + C_2\sin t$

6.10 $y = \frac{e^{t}}{t} + C_1e^{t} + C_2te^{t}$

6.11 (1) $y = \frac{1}{8}e^{2t} - \frac{17}{8}e^{-2t} + e^{-2t}(C_1\cos t + C_2\sin t)$

(2) $y = \frac{1}{8}e^{2t} - \frac{17}{8}e^{-2t} + e^{-2t}(2\cos t - \frac{1}{2}\sin t)$

6.12 $y = -e^{-t} + \cos t + \sin t + C_1e^{3t} + C_2e^{t}\cos(2t) + C_3e^{t}\sin(2t)$

6.13 $y = \frac{1}{3}t^4 + C_1t + C_2\frac{1}{t}$

6.14 (1) $y = te^{t}(\frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}t\ln t + 1) + C_1e^{t} + C_2t^2e^{t}$

(2) $y = te^{t}(\frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}t\ln t + 1) + \frac{11}{12}e^{t} - t^2e^{t}$

6.15 $y = t + C_1t\cos t + C_2t\sin t$

6.16

(1)	h	t	0	0.0625	0.1250	0.1875	0.25
	0.125	y	0		0.0741		0.1489
	0.0625	y	0	0.0371	0.0743	0.1117	0.1494
	0.125	z	1		1.0125		1.0341
	0.0625	z	1	1.0063	1.0148	1.0256	1.0387
	Resultat	y	0	0.03(7)	0.07(4)	0.1(1)	0.1(5)
		z	1	1.0(1)	1.0(2)	1.0(3)	1.0(4)

(2)	h	t	0	0.0625	0.1250	0.1875	0.25
	0.125	y	0		0.1250		0.2207
	0.0625	y	0	0.0625	0.1174	0.1661	0.2095
	0.125	z	-1		-0.750		-0.526
	0.0625	z	-1	-0.875	-0.757	-0.645	-0.538
	Resultat	y	0	0.06(2)	0.1(2)	0.1(6)	0.2(1)
		z	-1	-0.8(8)	-0.7(6)	-0.6(5)	-0.5(4)

(3)	*h*	*t*	1	1.0625	1.1250	1.1875	1.25
	0.125	*y*	1		0.875		0.7656
	0.0625	*y*	1	0.9375	0.8789	0.8240	0.7725
	0.125	*z*	2		2.0000		2.0156
	0.0625	*z*	2	2.0000	2.0039	2.0115	2.0225
	Resultat	*y*	1	0.9(4)	0.8(8)	0.8(2)	0.7(7)
		z	2	2.0(0)	2.0(0)	2.0(1)	2.0(2)

6.17

Der benyttes Eulers metode (for h=1/64 er af pladshensyn kun angivet hveranden værdi)

(1)	*h*	*t*	1	1.313	1.0625	1.0938	1.1250	1.1563	1.1875	1.2188	1.25
	1/16	*y*	0		0.0625		0.1133		0.1543		0.1872
	1/32	*y*	0	0.0313	0.0596	0.0852	0.1084	0.1293	0.1482	0.1652	0.1804
	1/64	*y*	0	0.0305	0.0582	0.0834	0.1061	0.1267	0.1453	0.1621	0.1773
	Facit	*y*	0	0.03	0.05(8)	0.08(3)	0.1(1)	0.1(2)	0.1(4)	0.1(6)	0.1(7)

(2)	*h*	*t*	3	3.0625	3.1250	3.1875	3.2500	3.3125	3.3750	3.4375	3.5
	1/8	*y*	2		2.0313		2.0615		2.0909		2.1194
	1/16	*y*	2	2.0156	2.0310	2.0461	2.0611	2.0758	2.0902	2.1045	2.1186
	1/32	*y*	2	2.0156	2.0309	2.0460	2.0608	2.0755	2.0899	2.1041	2.1182
	Facit	*y*	2	2.0(1)	2.0(3)	2.0(4)	2.0(6)	2.0(7)	2.0(9)	2.1(0)	2.1(2)

(3)	*h*	*t*	0	0.313	0.0625	0.0938	0.1250	0.1563	0.1875	0.2188	0.25
	1/16	*y*	0		0.0625		0.1211		0.1760		0.2275
	1/32	*y*	0	0.0313	0.0615	0.0909	0.1193	0.1468	0.1734	0.1993	0.2243
	1/64	*y*	0	0.0310	0.0611	0.0902	0.1184	0.1457	0.1722	0.1979	0.2227
	Facit	*y*	0	0.03(1)	0.06(1)	0.09(0)	0.1(2)	0.1(4)	0.1(7)	0.1(9)	0.2(2)

6.Eksam2b (1) $y = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)$,

(2) $y = \frac{1}{17}e^t\cos(2t) + \frac{4}{17}e^t\sin(2t) + C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)$,

(3) $y = \frac{1}{4}\sin(2t)\cdot\ln|\sin(2t)| - \frac{t}{2}\cdot\cos(2t) + C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)$,

$\frac{1}{2}\sin(2t)$

6.Eksam31b (1) 0, (2) $-\frac{1}{2}$, $-1\pm i$, (3) $y = C_1e^{-\frac{1}{2}t} + C_2e^{-t}\cos t + C_3e^{-t}\sin t$

(4) $y = -(t+2)e^{-t} + C_1e^{-\frac{1}{2}t} + C_2e^{-t}\cos t + C_3e^{-t}\sin t$

6.Eksam36b (1) $y = C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t} - \frac{1}{5}\cos(2t) + \frac{3}{20}\sin(2t) + \frac{3}{2}t^2\cdot e^{-4t}$

(2) $I = \frac{11}{10}(\sin(5t) - \cos(5t)) + Ce^{-5t}$, $I = \frac{11}{10}(\sin(5t) - \cos(5t) + e^{-5t})$

6.Eksam44b (1) $y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 2 + C_1e^t + C_2te^t + C_3e^{-2t}$,

(2) $y = \frac{1}{3}\cos^3t - \sin^3t - 3\sin t - 4\cos t + C_1 + C_2e^{-t}$

6.Eksam53b (1) $y = C_1e^{\frac{3}{2}\ell} + C_2e^{-\frac{1}{2}\ell} + 16e^{-\frac{1}{4}\ell} + 3\ell e^{-\frac{1}{2}\ell}$,

(2) $y = -14e^{-\frac{1}{2}\ell} + 16e^{-\frac{1}{4}\ell} + 3\ell e^{-\frac{1}{2}\ell}$

6.Eksam56b (1) $y = C_1 + C_2e^{3t} + C_3te^{3t}$, $y = -2t^2e^{3t} + C_1 + C_2e^{3t} + C_3te^{3t}$

6.Eksam57b (1) - , (2) $y = C_1\cos(\ln t) + C_2\sin(\ln t)$, (3) $y = 2\cos(\ln t) - \sin(\ln t)$

6.Eksam65b $y = \frac{1}{10}e^t + C_1e^{-t} + C_2e^{-4t}$, $y = \frac{1}{3}te^{-t} + C_1e^{-t} + C_2e^{-4t}$

6.Eksam66b $y = \frac{1}{3}(t+2)^3\left(\ln(t+2) - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}(t+2)^2\left(\ln(t+2) - \frac{1}{2}\right)$
$+ C_1(\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 2t) + C_2$

6.Eksam71b (1) $-1\pm i$ (2) - (3) $y = C_1e^{-t} + C_2\cos t + C_3\sin t +$
$C_4t\cos t + C_5t\sin t + C_6e^{-t}\cos t + C_7e^{-t}\sin t$

6.Eksam77b $y = -\frac{4}{3}t^{\frac{5}{2}} + C_1t^2 + C_2t^4$

6.Eksam87b $y = \frac{t}{3}e^{-3t} + C_1 + C_2 t + C_3 e^{-3t}$

6.Eksam93b (1) $y = 2e^{-3t} + C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$

(2) $y = 4e^{-\frac{1}{2}t}\text{Arctan}(e^{\frac{t}{2}}) - 2e^{-t}\ln|e^t+1| + C_1 e^{-t} + C_2 e^{-\frac{1}{2}t}$

6.Eksam97b $y = -\frac{4}{39}t^{\frac{5}{2}} + C_1 t^{-4} + C_2 t^4$

6.Eksam98b (1) $0.7937 \pm 0.7937i$, $-1.0842 \pm 0.2905i$, $0.2905 \pm 1.0842i$

(2) $y = e^{0.7937t}(C_1\cos(0.7937t) + C_2\sin(0.7937t))$
$+ e^{0.7937t}\left(C_1\cos(0.7937t) + C_2\sin(0.7937t)\right) + e^{-1.0842t}\left(C_3\cos(0.2905$
$+ C_4\sin(0.2905t)\right) + e^{0.2905t}\left(C_5\cos(1.0842t) + C_6\sin(1.0842t)\right)$

6.Eksam107 (1) 2.6

(2) $y = -\frac{111}{125}\sin(2t) + \frac{2}{125}\cos(2t) + C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + C_3 t^2 e^{-t}$

6.Eksam115 (1) -2 , $4 \pm 5i$, (2) $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}\cos(5t) + C_3 e^{4t}\sin(5t)$

(3) $y = e^{-2t} - e^{4t}\cos(5t)$

(4) $y = \frac{1}{8}e^{6t} - 2t + \frac{25}{41} + C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}\cos(5t) + C_3 e^{4t}\sin(5t)$

6.Eksam119 $y = -3e^{-3t}\ln|t| + 3e^{-t}\cos(t - 1.9273) + C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-3t}$

6.Eksam121 (*a*) 4 , (*b*) $y = \frac{1}{5}e^{3t} + C_1 e^{2t}\cos(3t) + C_2 e^{2t}\sin(3t)$

6.Eksam132 (*b*) $y = e^{2t}t(\ln t - 2) + C_1 e^{2t}\ln t + C_2 e^{2t}$

(*c*) $y = e^{2t}(t\ln t - 2t + 1)$

6.Eksam140 (*b*) $y = C_1 t^2 + C_2\frac{1}{t}$ (*c*) $y = -\frac{k}{2}t + C_1 t^2 + C_2\frac{1}{t}$

6.Eksam144 $y = \frac{1}{32}t - \frac{1}{64} + \frac{1}{4}t^2 e^{-4t} + C_1 e^{-4t} + C_2 t e^{-4t}$

6.Eksam150 $y = -\frac{20}{41}\cos t + \frac{25}{41}\sin t + C_1 e^{-2t}\cos(\sqrt{2}t) + C_2 e^{-2t}\sin(\sqrt{2}t)$

6.Eksam152 (*a*) $\frac{2}{t-1} + \frac{1}{t+1} - \frac{3}{t+2}$ (*b*) $y = \frac{(t+2)^3}{(t-1)^2(t+1)}(C - \frac{2}{t+2})$

6.Eksam160 $(a)\ -3\ ,\ \frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i \qquad (c)\ y = \frac{1}{28}e^{t} + \frac{27}{730}\sin t + \frac{1}{730}\cos t$

$$+ C_1 e^{-3t} + C_2 e^{\frac{3}{2}t}\cos(\frac{3\sqrt{3}}{2}t) + C_3 e^{\frac{3}{2}t}\sin(\frac{3\sqrt{3}}{2}t)$$

6.Eksam166 $y = (\frac{1}{4}t + \frac{1}{4})e^{-t} + C_1 e^{t} + C_2 t e^{t}$

6.Eksam179
$$\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} y \\ p \\ z \\ q \\ r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \\ -2p - 3y - 4\sqrt{z} + 5\sin t \\ q \\ r \\ -6r - 7q^2 - 8p - 9z + e^{-t} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} y(2) \\ p(2) \\ z(2) \\ q(2) \\ r(2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \\ 8 \\ 9 \end{Bmatrix}$$

6.Eksam180 $y = -\frac{1}{80}e^{-t} - \frac{1}{9}t^2 + C_1 + C_2 t + C_3 e^{3t} + C_4 e^{-3t}$

$$+ C_5\cos(3t) + C_6\sin(3t)$$

6.Eksam189 $y = \frac{1}{2}t^2 e^{-2t} + 2t^2 - 4t + 3 + C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$

6.Eksam191 $y = -t\cos(2t) + C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)$

6.Eksam200 $y = t^2 - \frac{8}{13}t + \frac{6}{169} + C_1 e^{-2t}\cos(3t) + C_2 e^{-2t}\sin(3t)$

6.Eksam211 $(a)\ y = C_1 e^{t} + C_2 t e^{t},\ y = Ce^{t} \qquad (b)\ y = \frac{2}{3}t^3 e^{t} + C_1 e^{t} + C_2 t^2 e^{t}$

6.Eksam213 $y = \frac{2}{9}e^{-2t} + C_1 e^{-2t}\cos(3t) + C_2 e^{-2t}\sin(3t)$

6.Eksam221 $y = \frac{1}{2}t^2 e^{-3t} + C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-3t}$

6.Eksam222 $y = -t^2 + C_1 t e^{-t} + C_2 t e^{t}$

6.Eksam232 $y = -te^{-2t} + 2e^{3t} + C_1 e^{-2t} + C_2 e^{t}$

6.Eksam240 $(a)\ y = \frac{1}{32}(t-1) - 7e^{-3t} + C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-4t} + C_3 t e^{-4t}$

$(b)\ y = At^2 e^{-4t}$

KAPITEL 7

7.1 (1) $1+x+\frac{1}{2}x^2$, f.eks. $1.84\cdot 10^{-4}$, (2) $-4(x-2)+2(x-2)^2$, f.eks. $5.42\cdot 10^{-4}$

(3) $2(x-1)-\frac{5}{2}(x-1)^2$, f.eks. $8.03\cdot 10^{-4}$,

(4) $-3+(x-1)-(x-1)^2$, f.eks. $6.5\cdot 10^{-4}$

(5) $1+5(x-1)+\frac{11}{2}(x-1)^2$, f.eks. $4.8\cdot 10^{-3}$,

(6) $-1+(x-2)+\frac{1}{2}(x-2)^2$, f.eks. $2.12\cdot 10^{-3}$

7.2 –, –, $< 1.434\cdot 10^{-13}$

7.3 (1) $\frac{7}{2}x-\frac{3}{2}x^2$ (2) $\frac{5}{4}x-\frac{1}{8}x^2$ (3) $1-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}x^2$ (4) $1-\frac{7}{6}x+\frac{1}{6}x^3$

(5) $1-\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}x^2$ (6) $-\frac{5}{12}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^3$ (7) $1+\frac{26}{15}x-\frac{13}{15}x^2+\frac{2}{15}x^3$

(8) $4-\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}x^2+x^3$ (9) $2-\frac{9}{4}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{12}x^3$

7.4 $A_1=-\frac{5}{4}$, $B_3=-\frac{1}{4}$, $B_1=-\frac{11}{4}$, $C_3=0$, $C_0=-4$

7.5 $A_3=\frac{1}{32}$, $A_0=1$, $B_1=-\frac{3}{4}$, $B_0=1$

7.A1 (1) $-1-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{96}x^4$, (2) $1+2t-2t^3-t^4$

(3) $2+t-\frac{17}{6}t^2+\frac{1}{3}t^3+\frac{43}{30}t^4$ (4) $2-\frac{1}{12}t^2+\frac{11}{180}t^3+\frac{787}{20160}t^4$

(5) $-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3-\frac{19}{180}t^4$ (6) $\cos 1-\frac{\sin 1}{3}t^3-\frac{2\sin 1}{3}t^4$

7.A2 $\frac{1}{2}$, 2

7.C1 (1) $\frac{11}{4}x-\frac{3}{4}x^3$, $-\frac{3}{2}+\frac{29}{4}x-\frac{9}{2}x^2+\frac{3}{4}x^3$

(2) $-\frac{1}{32}x^3+\frac{9}{8}x$, $-\frac{1}{2}+\frac{15}{8}x-\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{32}x^3$ (3) $x+x^2-2x^3$

(4) $-7+12x-6x^2+x^3$ (5) $-\frac{1}{2}x+\frac{5}{8}x^2-\frac{1}{8}x^3$, $-\frac{1}{2}+x-\frac{7}{8}x^2+\frac{3}{8}x^3$

(6) $1+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{16}x^3$, $1+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{16}x^3$

7.Eksam15a 4

7.Eksam21a (1) $1 + x + x^2$, (2) JA, (3) 0

7.Eksam66 (1) 2.50, (2) 3 (eller 2.40), (3) 2.74

7.Eksam67 (1) $\ln 7 + \frac{2}{7}(x-2) - \frac{2}{49}(x-2)^2$, (2) -0.0011, (3) JA

7.Eksam112 (1) $1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$, (2) -

7.Eksam141 (*a*) $(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$ $\left[= -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}\right]$

(*b*) $\frac{3 + \ln 1.1}{6 \cdot 0.9^2 (1 + \ln 0.9)^3} \cdot 10^{-3} \approx 0.89 \cdot 10^{-3} < 10^{-3}$, (*c*) 0.095

SYMBOLLISTE

SYMBOL	BETYDNING	BEMÆRKNINGER
$\frac{\partial f}{\partial x}$	partiel afledet af funktionen $f(x,y,z,..)$ med hensyn til x	Se afsnit 1.4 . Hvis $f(x,y) = x^2y^3$, fås $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3$.
Δx Δf	Δx er en tilvækst for en variabel x: $\Delta x = x - x_0$ Δf er en tilvækst for en funktion f: $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$	Se afsnit 1.4 .
$f \circ g$	den af f og g sammensatte funktion $f \circ g(x) = f(g(x))$	Hvis $f(x) = \sin x$ og $g(x) = 2x^2+1$, så er $f \circ g(x) = \sin(2x^2 + 1)$.
f^{-1}	den omvendte funktion til f: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$	$e^x = \ln^{-1}(x)$
$\tilde{f}(x)$	en funktion der approksimerer $f(x)$	Se kapitel 7. Hvis $f(x) = e^x$, f.eks. $\tilde{f}(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ for x nær 0.
$n!$	n fakultet: $n\,(n\text{-}1)\,(n\text{-}2)\,....\,2 \cdot 1$	$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	summen $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$	
$\in$	"er element i", "tilhører"	$a \in M$ (a tilhører M)
$\{a_1, a_2, \ldots\}$	mængde hvis enkelte elementer a_1, a_2, . . . opregnes	$\{1, 5, \frac{1}{2}\}$
$\{x \in M \mid p(x)\}$	mængden af de elementer x tilhørende M, for hvilke udsagnet $p(x)$ er sandt	Hvis $M = \{1,2,3,4,5,6\}$, gælder $\{x \in M \mid x \text{ er et lige tal}\} = \{2,4,6\}$.
$\{x \mid p(x)\}$	afkortet symbol, der anvendes når det af sammenhængen fremgår, hvilken mængde M der lægges til grund	$\{x \mid x \text{ er et lige tal}\} = \{2,4,6\}$, hvis det er underforstået, at $x \in M$.
R	mængden af reelle tal	
R^n	mængden af alle ordnede sæt af n reelle tal: $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in \mathbb{R}$ og $a_2 \in \mathbb{R}$ og … og $a_n \in \mathbb{R}\}$	$\{1, \pi\} \in \mathbb{R}^2$, $\{2, \frac{1}{2}, \sqrt{2}\} \in \mathbb{R}^3$
$[a\,;\,b]$	lukket interval: $\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	$[1;5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 5\}$
$[a\,;\,b[$	halvåbent interval: $\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	$[1;5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x < 5\}$
$]a\,;\,b\,]$	halvåbent interval: $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	$[1;5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \le 5\}$
$]a\,;\,b\,[$	åbent interval: $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	$[1;5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$
Ø	den tomme mængde	$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\} = Ø$

SYMBOL	BETYDNING	BEMÆRKNINGER
max M	det største element i mængden M	$\max\{1,5,\frac{1}{2}\} = 5$
min M	det mindste element i mængden M	$\min\{1,5,\frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$
$\bar{x}$	vektor eller punkt med koordinaterne $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$	$\bar{x} = (1,2,6,\sqrt{3},\pi)$
$\perp$	"er vinkelret på", "er ortogonal på"	$\bar{a} \perp \bar{c}$: vektor $\bar{a}$ er vinkelret på $\bar{c}$
$\bar{x}\cdot\bar{y}$	skalarproduktet: $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$	Hvis $\bar{x}=(2,3,-4)$ og $\bar{y}=(-1,5,-2)$, er $\bar{x}\cdot\bar{y} = 2\cdot(-1)+3\cdot 5+(-4)\cdot(-2) = 21$.
$\bar{r}(t)$	vektorfunktionen $(x(t),y(t),z(t))$	
$\frac{d\bar{r}}{dt}$	vektorfunktionen $\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)$	
$\approx$	"tilnærmelsesvis lig med"	
$\rightarrow$	"konvergerer imod", "går imod"	$\frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$ for $x \rightarrow 0$
$\lim_{x\to a} f(x)$	grænseværdi af $f(x)$ for $x \rightarrow a$	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
∞	uendelig	
$\leftarrow$	udtrykket på højre side af pilen udregnes, og værdien gemmes i variablen, der står på venstre side af pilen	$a \leftarrow x^2$ betyder, at for en given x-værdi udregnes kvadratet x^2 og gemmes i a.
$\Rightarrow$	implikation: **hvis** udsagnet på venstre side af pilen er sandt, **så** er udsagnet på højre side også sandt	$p \Rightarrow q$: hvis p er sand, så er q sand p **medfører** q
$\Leftarrow$	**hvis** udsagnet på højre side af pilen er sandt, **så** er udsagnet på venstre side også sandt	$p \Leftarrow q$: hvis q er sand, så er p sand
$\Leftrightarrow$	biimplikation: udsagnet på venstre side af dobbeltpilen er sandt, **hvis og kun hvis** udsagnet på højre er sandt (de to udsagn er ensbetydende).	$p \Leftrightarrow q$: p **ensbetydende** med q, dvs. p og q er enten begge sande eller begge falske.
$\wedge$	" og ": udsagnet $p \wedge q$ er kun sandt, hvis både p og q er sande	

SYMBOL	BETYDNING	BEMÆRKNINGER
$\vee$	" eller ": udsagnet $p \vee q$ er sandt, hvis **mindst** ét af udsagnene *p* og *q* er sande	
$A \cap B$	fællesmængde: $\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ (de elementer der tilhører både *A* og *B*)	$\{1,2,3,4,5\} \cap \{3,4,5,6,7\} = \{3,4,5\}$
$A \cup B$	foreningsmængde: $\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ (de elementer der tilhører mindst én af mængderne *A* og *B*)	$\{1,2,3,4,5\} \cup \{3,4,5,6,7\} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
$A \setminus B$	mængdedifferens: $\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ (de elementer i *A*, der ikke tilhører *B*)	$\{1,2,3,4,5\} \setminus \{3,4,5,6,7\} = \{1,2\}$
$A \times B$	mængdeprodukt: $\{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ (alle ordnede par (*a*,*b*), hvor *a* tilhører *A* og *b* tilhører *B*)	$\{1,2,3\} \times \{0,-1\} = (1,0),(1,-1),(2,0),(2,-1),(3,0),(3,-1)$
$A \subseteq B$	*A* er en delmængde af *B*: alle elementer i *A* er også elementer i *B*	$\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$
$A \subset B$	*A* er en ægte delmængde af *B*: *A* er en delmængde af *B*, men der findes mindst ét element i *B* som ikke tilhører *A*	$\{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4,5\}$
$\forall$	"for alle" $\forall x \in N: \ldots$ **For alle** elementer *x* i mængden *N* gælder . . .	$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$
$\exists$	"der eksisterer" $\exists x \in M: \ldots$ **Der eksisterer** (mindst) et element *x* i mængden *M*, så ...	$\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = 2$
$\int_a^b f(x)\,dx$	det bestemte integral af funktionen *f* fra *a* til *b*	Se afsnit 1.5 .
$\int f(x)\,dx$	det ubestemte integral fra *a* til *b*	Se afsnit 1.5 .
$[F(x)]_a^b$	$F(b) - F(a)$	Se afsnit 1.5 .
$[F(x)]_{x \to a}^{x \to b}$	$\lim_{x \to b} F(x) - \lim_{x \to a} F(x)$	Se afsnit 3.4 .

SYMBOL	BETYDNING	BEMÆRKNINGER
$O(h^n)$	$\approx$ konstant $\cdot h^n$ for små værdier af h (mere præcist $\frac{O(h^n)}{h^n} \to$ konstant for $h \to 0$)	
i	den "imaginære enhed" for komplekse tal	Se afsnit 5.2 .
$\|a\|$	a reel:den numeriske værdi $\sqrt{a^2}$ a kompleks: modulus af a, dvs. a's afstand fra 0	$\|5\| = 5$, $\|-5\| = 5$ Hvis $a = 3 + 4i$, er $\|a\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
arg (a)	argument af komplekst tal a, dvs. vinkel fra reelle tals akse til sted-vektoren	Se afsnit 5.2 . Hvis $a = 1 + i$, er $\arg(a) = \frac{\pi}{4} + p \cdot 2\pi$, hvor p er et helt tal.
Arg (a)	hovedværdien af arg (a), dvs. $\mathrm{Arg}(a) \in]-\pi;\pi]$	Se afsnit 5.2 . Hvis $a = 1 + i$, er $\mathrm{Arg}(a) = \frac{\pi}{4}$.
Re (a)	realdel af komplekst tal a, dvs. ab-scissen til a	Se afsnit 5.2 . Hvis $a = 2 + 3i$, er Re(a) = 2 .
Im (a)	imaginærdel af komplekst tal a, dvs. ordinaten til a	Se afsnit 5.2 . Hvis $a = 2 + 3i$, er Im(a) = 3 .
$\bar{a}$	komplekst konjugeret til a, dvs. Re (a) - i Im (a)	Se afsnit 5.9 . Hvis $a = 2 + 3i$, er $\bar{a} = 2 - 3i$.

STIKORDSREGISTER

addition af komplekse tal 139
additionsformler 52, 62
afhængig variabel 1
aftagende funktion 3
algebraens fundamentalsætning 157, 161
andengradsligning 154, 264
approksimation af funktion 228
  ved Taylormetoden 228
  via kendte Taylorpolynomier 241
arbitrær konstant 18
Arccos 54, 257, 263
Arccot 54, 257, 263
Arcosh 59, 258, 263
Arcoth 59, 258, 263
Arcsin 54, 256, 263
Arctan 54, 257, 263
arcusfunktioner 53, 256, 263
areafunktioner 59, 258, 263
areal 20
arg, Arg 137
argument 137
Arsinh 59, 258, 263
Artanh 59, 258, 263
associativ lov 141
begyndelsesbetingelse 111, 175
Bernoulli's differentialligning 125
Bairstows metode 267
bestemt integral 18
binom ligning 152
Cauchy's hovedværdi 93
Chebychev punkter 233
cosecant 52, 258
cosh 57, 257, 263
cosinus 51, 147, 256, 262
cotangens 53, 256, 262
coth 57, 258, 263
definitionsmængde 1
dekomposition 88, 163
differentialkvotient 9, 47, 55, 57
  partiel 11
differentialligning af 1. orden 103, 260
  begyndelsesbetingelse 111
  Bernoulli 125
  eksistens og entydighed 104
  Eulers metode 106
  fuldstændig løsning 104
  geometrisk tolkning 106
  homogen 117
  integralkurve 103
  lineær 116
  løsning 103
  løsningskurve 103, 104
  Maple løsning 109, 114
  normeret lineær 116
  numerisk løsning 105, 107, 109, 259
  panserformel 116
  partikulær løsning 111
  retlinet løsning 112
  Ricatti 125
  Runge-Kutta metode 107, 109, 259
  separabel 110, 122
differentialligning af 2. orden 177, 201, 213, 281
  begyndelsesbetingelser 175
  eksistens og entydighed 176
  Eulers differentialligning 281
  gættemetoden 188, 270
  integralmetoden 193, 278
  karakterligning 177
  lineær med konstante koefficienter 177
  lineær, homogen 177
  Maple 182, 198
  numerisk løsning 177, 268
  omformning 210
  programmetoden 198
  Runge-Kutta metode 268
  svingninger 179, 180, 183, 269
  tabelmetoden 197, 271
  Wronski determinant 203, 213
differentialligning af n'te orden 175
  begyndelsesbetingelser 175
  eksistens og entydighed 176
  gættemetoden 188, 270
  integralmetoden 278
  karakterligning 177, 185
  konstante koefficienter 177, 184, 187
  lineær, homogen 177, 184
  lineær, inhomogen 187
  numerisk løsning 268
  omformning 210
  partikulær løsning 175, 188
  randværdibetingelser 175
  tabelmetoden 197, 271
differentialligningssystem 204
  Maple 209
  numerisk løsning 204, 279
    omformning 210
    Eulers metode 205

Runge-Kutta metode 279, 280
differentiation 9, 47, 55, 57
Maple 14
middelværdisætning 14, 92
numerisk 16, 250
regneregler 12
distributiv lov 141
divergent uegentligt integral 85
division af komplekse tal 140
eksponentialfunktion 42, 49, 143, 146, 255, 262
Eulers differentialligning 281
Eulers metode 106, 205
Eulers formler 147
exp 42, 49, 143, 146, 255, 262
facitliste 292
forstærkning 148
funktion
af én variabel 1
afhængig variabel 1
aftagende 3
approksimerende 228
Arccos 54, 257, 263
Arccot 54, 257, 263
Arcosh 59, 258, 263
Arcoth 59, 258, 263
Arcsin 54, 256, 263
Arctan 54, 257, 263
arcus 55
area 59
Arsinh 59, 258, 263
Artanh 59, 258, 263
cosecant 52, 258
cosh 57, 257, 263
cos 51, 147, 256, 262
cot 53, 256, 262
coth 57, 258, 263
definitionsmængde 1
differentiabel 9
eksponentialfunktionen 42, 49, 143, 146, 255, 262
exp 42, 49, 143, 146, 255, 262
funktionsbegrebet 1
grafisk fremstilling, én variabel 17
grænseværdi 5, 26, 78
hyperbolsk 57, 263
integrabel 20
kontinuert 7, 28
ln 39, 255, 262
log 41, 255, 262
logaritme 39, 255, 262
monoton 2
monotoniforhold 57
nulpunkter 57
omvendt 4, 12
potensfunktion 46, 49, 61, 255, 262
sammensat 12
secant 52, 258
sekant 10, 16
sgn 269
sinh 57, 257, 263
sin 51, 147, 256, 262
stykkevis kontinuert 19
symmetri 58
tabellering 17
tan 53, 256, 262
tangent 9
tanh 57, 257, 263
Taylor-approksimation 228
trigonometrisk 51, 256, 262
uafhængig variabel 1
uniformt kontinuert 28
voksende 3
værdimængde 1
graf for funktion af 1 variabel *17*, 57
grænseværdi 5, 26, 78, 242
l'Hospitals regel 79
regneregler 6
størrelsesforhold 84
ved Taylors grænseformel 242
gættemetoden for diff.ligninger 188, 270
hele tal 135
hovedværdi 137
hyperbolske funktioner 57, 147, 257, 263
i 138
imaginære enhed "*i*" 138
imaginære tals akse 137
integralmetoden for diff. lign. 193, 176
integral
bestemt 18
middelsum 18
omformning 210
ubestemt 20
uegentligt 85
integralkurve 103
integralmetoden for diff. lign. 278
integraltabel 21
integrand 19
integration 18
indskudsregel 21
integrand 19
integrationsprøve 18
integrationsregler 21
linearitet 21

Maple 24, 25, 86, 93
middelværdisætning 21
midtpunktsformel 252
numerisk 24, 252
partiel integration 21
Simpsons formel 24, 253
stamfunktion 18, 47
substitution 21
trapezformel 252
inverst element 141
karakteristisk polynomium 177, 185
karakterligning 177, 185
kollokation 232
Maple 235, 238
polynomium 232, 233, 283
rational 244, 284
spline 235, 246, 285
kommutativ lov 141
kompleks konjuget 142, 157
komplekse tal 135
addition 139
andengradsligning 154
arg, Arg 137
argument 137
binom ligning 152
division 140
eksponentialfunktion 143, 146
Eulers formler 147
forstærkning 148
hovedværdi 137
i 138
Im 137
imaginære enhed "*i*" 138
imaginærdel 137
imaginære tals akse 137
konjugeret tal 142, 157
Maple 143, 145, 154
modulus 137
multiplikation 140
neutralt element 139, 140, 141
omregning mellem polær og rektangulær form 144
polynomier 156, 158
polær form 143
Re 137
realdel 137
reelle tals akse 137
rektangulær form 141
rektangulære koordinater 137
standardfunktioner 262
subtraktion 139
tallegeme 141
talplan 137
konstant, arbitrær 18
kontinuitet 7
definition 7
geometrisk betydning 8
uniform 28
kontinuitetssætning 9
konvergent, uegentligt integral 85
kubisk spline 236, 285
kædelinie 58
l'Hospitals regel 78, 92
lineær differentialligning af 1. orden 116
homogen 117
litteratur 284
ln 39, 255, 262
log 41, 255, 262
logaritmefunktion 39
naturlig logaritme ln 39, 255, 262
vilkårligt grundtal 41, 255, 262
logaritmisk koordinatsystem 49
enkelt-logaritmisk 49
dobbelt-logaritmisk 49
Maple
binom ligning 153
differentiation 14
differentialligning 109, 114, 182, 198
differentialligningssystem 209
grænseværdi 81
integration 24, 86, 93
kollokation 235, 238
komplekse tal 143, 145, 154
numerisk integration 25
optimering, én variabel 15
potensregler 47
rektangulær til polær form 145
rod i polynomium 159, 160
separabel differentialligning 112
Taylor approksimation 232
tegning af funktion af én variabel 17
middelsum 18
middelværdisætning (diff.regn) 14
udvidet 92
middelværdisætning (integralregning) 21
midtpunktsformel til num. integration 252
minimax princip 50
modsat element 141
modulus 137
monoton funktion 3
monotonisætning 14
multiplikation af komplekse tal 140
naturlige tal 135
naturlig logaritme 39

neutralt element 139, 140, 141
Newtons rodsøgningsmetode 266
n'te grads ligning 266
nulpunkter 57
numerisk differentiation 16, 250
numerisk integration 24, 252
omregning af svingninger 179
omvendt funktion 4
optimering med én variabel 15
partiel differentialkvotient 11
partiel integration 21
partikulær løsning 111, 175
polynomiedivision 160
polynomier 156
  algebraens fundamentalsætning 157, 161
  division 160
  Maple 160
  reelle koefficienter 158
polynomie-kollokation 232
  fejl 233
polær form 143
polære koordinater 137
potensfunktioner 46, 49, 61, 255, 262
potensregler 44, 47
radian 51
randværdibetingelse 175
rational kollokation 244, 284
rationale tal 135
reelle tal 135
regneregler
  for differentiable funktioner 12
  grænseværdi 6
  logaritmeregler 40, 41
  potensregler 44, 47
regning
  med differentiable funktioner 11
  med kontinuerte funktioner 8
rektangulære koordinater 137
rektangulær form af komplekst tal 141
restled 230
Ricatti's differentialligning 125
rod 9, 152, 157, 160, 161, 264, 266
Runge-Kutta's metode 107, 109, 259, 268, 279, 280
secant 52, 258
separabel differentialligning 110, 122
sgn 269
Simpsons formel 24, 253
sinh 57, 257, 263
sinus 51, 147, 256, 262
spline-kollokation 235
  Maple 238
  ved tabel 246, 285
stamfunktion *18*, 47
standardfunktioner 39, 254, 262
stykkevis kontinuert funktion 19
størrelsesforhold for log-, potens- og eksponentialfunktioner 84
substitution *21*, 56
subtraktion af komplekse tal 139
svingning
  med luftmodstand 183
  omregning af 179, 269
  resonans 199
  tvungen 199
symbolliste 313
symmetri 58
tabellering 17
tabelmetoden for diff.ligninger 197, 271
tallegeme 141
tangens 53, 256, 262
tangent 9
tanh 57, 257, 263
Taylor-approksimation 228
Taylormetoden 228
  fejl 230
  restled 230
Taylorpolynomium 229, 239, 283
  Maple 232
Taylorpolynomier, kendte 240
Taylorrækker 242
Taylors formel 239
Taylors grænseformel 240
trapezformel til numerisk integration 252
trediegradsligning 265
trigonom. funktioner 51, 147, 256, 262
trigonometriske formler 51, 52, 62
uafhængig variabel 1
ubestemt integral 20
uegentligt integral 85
  divergens 85
  konvergens 85
uniform kontinuitet 28
voksende funktion 3
værdimængde 1
Wronski-determinant 203, 213
ækvidistante punkter 233