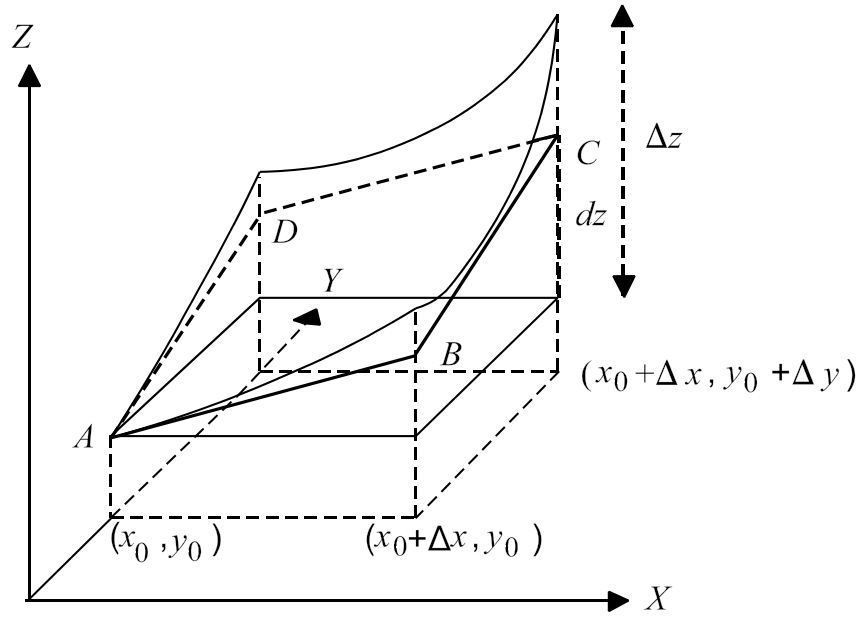
BJARNE HELLESEN og
MOGENS ODDERSHEDE LARSEN

MATEMATIK FOR INGENIØRER

BIND 2

6. UDGAVE



DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
INSTITUT FOR ANVENDT KEMI
2000

FORORD

Læserens forudsætninger. Bind 2 forudsætter blot kendskab til kapitel 1 og 2 fra bind 1. Dog forudsætter afsnittene 8.10-8.12 også kendskab til afsnittene 7.1-7.3 i bind 1.

Indhold. Bind 2 omhandler funktioner af flere variable.
Hovedemnerne er:

- Grundlæggende begreber for funktion af flere variable.
- Kurveintegral. Stamfunktion.
- Optimering.
- Implicit given funktion.
- Plan- , rum- og fladeintegral. Vektoranalyse.

Læsning. Når man i bind 2 har læst kapitel 8, kan man læse de øvrige kapitler uafhængigt af hinanden, bortset fra, at

kapitel 13 forudsætter kapitel 12, og
kapitel 14 forudsætter kapitel 9, 12, og 13.

Yderligere bemærkninger. Vi vil være taknemmelige for alle forslag til forbedringer, det gælder også forslag til rettelse af småfejl. Foreløbig siger vi tak til kolleger og studerende for inspirerende kritik gennem årene. En særlig tak rettes til lektor Preben Alsholm, som har givet inspiration til mange forbedringer. Endvidere bringer vi en tak til fru Annette Karlsson for den omhu og tålmodighed hun gennem årene har udvist ved skrivningen af de mange forskellige udgaver, ligesom vi takker teknisk tegner Pernille Zeiler Nielsen for med stor dygtighed at have tegnet en stor del af bogens figurer. Endelig takker vi Den Private Ingeniørfond for stor imødekommenhed ved udgivelsen.

Lyngby
December 1996

Bjarne Hellesen
Mogens Oddershede Larsen

5. og 6. udgave. Der er kun foretaget mindre ændringer samt tilføjet eksempler og opgaver. I den forbindelse takkes kolleger og studerende ved DTU's diplomuddannelser og levnedsmiddeluddannelse varmt. Forslag til forbedringer modtages med taknemmelighed på email-adressen ifakbh@pop.dtu.dk, fax 45 88 17 70 eller telefon 45 25 54 87.

Lyngby, juni 1998, juni 2000

Bjarne Hellesen
Mogens Oddershede Larsen

INDHOLD

8 FUNKTION AF FLERE VARIABLE

8.1 GRUNDLÆGGENDE BEGREBER 1
8.2 GRAFISK FREMSTILLING AF FUNKTION AF FLERE VARIABLE 4
8.3 GRÆNSEVÆRDI 10
8.4 KONTINUITET 11
8.5 PARTIEL DIFFERENTIATION 13
8.6 DIFFERENTIABILITET 18
8.7 DIFFERENTIALER 19
8.8 DIFFERENTION AF SAMMENSATTE FUNKTINER M.M. 23
8.9 RETNINGSAFLEDET. GRADIENTENS GEOMETRISKE BETYDNING 29
8.10 TAYLORPOLYNOMIUM I 2 VARIABLE 32
8.11 TAYLORPOLYNOMIUM I 3 OG FLERE VARIABLE 36
8.12 POLYNOMIEKOLLOKATION I 2 VARIABLE 37
8A PRÆCISE DEFINITIONER FOR MÆNGDER 39
8B GRÆNSEVÆRDI FOR $f(x,y)$ 41
8C PARTIEL DIFFERENTIATION I *N* VARIABLE 42
8D DIFFERENTIATIONERS RÆKKEFØLGE 43
8E PRAKTISK BETINGELSE FOR DIFFERENTIATIBILITET 45
8F UDDYBNING AF KÆDEREGLEN 46
8G VARIABELSKIFT I DIFFERENTIALLIGNING 47
8H VARIABELSKIFT I DIFFERENTIAL 48
8I DIFFERENTIATION UNDER INTEGRALTEGN 49
OPGAVER 51

9 KURVER, KURVEINTEGRAL OG STAMFUNKTION

9.1 KURVE I PLANEN 62
9.2 KURVE I RUMMET 64
9.3 KURVEINTEGRALET $\int_k F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz$ . . 65
9.4 STAMFUNKTION AF 2 VARIABLE 69
9.5 STAMFUNKTION AF 3 ELLER *N* VARIABLE 76
9A MERE OM $\bar{r}'(t)$ 80
9B KURVELÆNGDE OG KRUMNING 81
9C KURVEINTEGRALET $\int_k f(x,y,z)ds$ 85
9D DIFFERENTIALLIGNINGEN $F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy = 0$ 88
OPGAVER 90

10 OPTIMERING

10.1 PROBLEMSTILLING 101
10.2 OPTIMERING I LUKKET, BEGRÆNSET MÆNGDE 104
10.3 ANDRE OPTIMERINGSPROBLEMER 107
10.4 MINDSTE KVADRATERS METODE 107
10.5 LOKALE EKSTREMA 109
10A OPTIMERING I MÆNGDE, DER IKKE ER LUKKET OG BEGRÆNSET . . 114
10B LAGRANGES METODE 115
10C LINEÆR PROGRAMMERING 117
10D NUMERISKE METODER 119
10E LOKALE EKSTREMA FOR FUNKTION AF *N* VARIABLE 122
OPGAVER 123

11 LØSNING AF LIGNINGER, IMPLICIT GIVEN FUNKTION

11.1 ÉN LIGNING MED ÉN UBEKENDT 134
11.2 NEWTONS METODE FOR 2 LIGNINGER MED 2 UBEKENDTE 138
11.3 LIGNINGEN $f(x, y) = 0$ 140
11.4 LIGNINGEN $f(x, y, z) = 0$ 146
11A NÆRMERE OM FIXPUNKTMETODEN 150
OPGAVER 151

12 PLANINTEGRAL OG RUMINTEGRAL

12.1 DEFINITION, NUMERISK METODE 162
12.2 PLANINTEGRAL OPLØST I RETVINKLEDE KOORDINATER 166
12.3 PLANINTEGRAL OPLØST I POLÆRE KOORDINATER 171
12.4 BEREGNING AF RUMINTEGRAL 176
12A KUGLEKOORDINATER 179
OPGAVER 181

13 FLADER, FLADEAREAL OG FLADEINTEGRAL

13.1 FLADER 197
13.2 FLADEINTEGRAL 205
OPGAVER 211

14 VEKTORANALYSE

14.1 SKALARFELT, VEKTORFELT 217
14.2 GRADIENT-, DIVERGENS- OG ROTATIONSFELTER 220
14.3 ET VEKTORFELTS STRØM 225
14.4 GAUSS'S SÆTNING 229
14.5 STOKES'S SÆTNING 232
OPGAVER 235

APPENDIX

8.1 APPROKSIMATION AF $f(x, y)$ 243
11.2 IMPLICIT DIFFERENTIATION FOR $f(x, y) = 0$ 245
11.3 IMPLICIT DIFFERENTIATION FOR $f(x, y, z) = 0$ 246
11.4 IMPLICIT DIFFERENTIATION FOR $f(x, y, z, w) = 0$ 248

FACITLISTE 250

SYMBOLLISTE 265

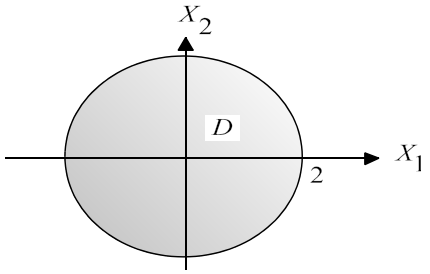
STIKORD 267

8 FUNKTION AF FLERE VARIABLE

8.1 GRUNDLÆGGENDE BEGREBER

Man siger, at der foreligger en (reel) funktion f af n variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$, hvis der til ethvert talsæt $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i en definitionsmængde D er tilordnet netop ét reelt tal $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i en mængde $M \subseteq \mathbb{R}$.

Eksempelvis er $f(x_1, x_2) = \sqrt{4 - x_1^2 - x_2^2}$ en funktion af 2 variable x_1, x_2 med definitionsmængden $D = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$ (cirkelskive med radius 2, se figuren).



For kortheds skyld vil vi ofte skrive $f(\bar{x})$ i stedet for $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, idet $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Nogle praktiske anvendelser. Eksempelvis kan nævnes:

1) Trykket P af en bestemt gas afhænger af temperaturen T, rumfanget V og mol-antallet n. Derfor skriver man $P = f(T, V, n)$ eller $P = P(T, V, n)$.

2) Hastigheden $\frac{-d[H]}{dt}$ af en kemisk proces $2H \rightleftarrows H_2$ er en funktion af temperaturen T og koncentrationerne $[H]$ og $[H_2]$. Man kan så skrive

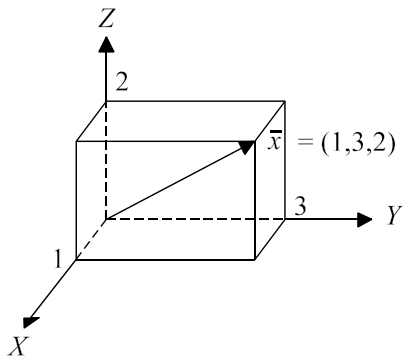
$$\frac{-d[H]}{dt} = f(T, [H], [H_2]) .$$

3) En fabriks udgift U til en pasteurisering afhænger af den krævede temperatur T og af den tid t, som temperaturen T skal opretholdes. Dette udtrykkes ved $U = f(T, t)$ eller $U = U(T, t)$.

Mængden $\mathbb{R}^n$

Mængden af ordnede sæt af *n* reelle tal $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kaldes $\mathbb{R}^n$. Elementerne i $\mathbb{R}^n$ kaldes **punkter**, **stedvektorer** eller **vektorer**, og vi skriver kort $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Tallene $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kaldes **koordinaterne**. Eksempelvis er (1,3,2) et element i $\mathbb{R}^3$, og tallet 1 er førstekoordinaten (se figuren).



Regneoperationer i $\mathbb{R}^n$. Nogle regneoperationer med elementerne i $\mathbb{R}^n$ vil blive benyttet. Lad $\bar{x}, \bar{t} \in \mathbb{R}^n$ og $k \in \mathbb{R}$. Regneoperationerne defineres da således:

$k\bar{x} = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$ er **produktet** af $\bar{x}$ og det reelle tal k.

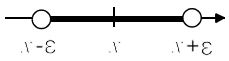
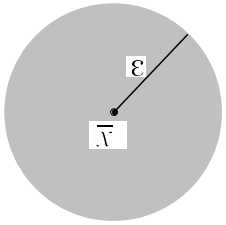
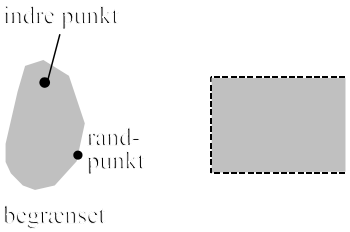
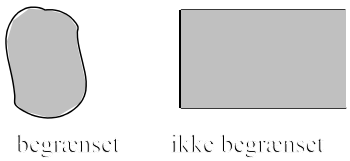
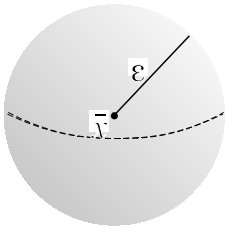
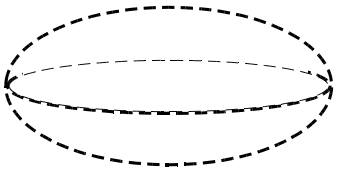
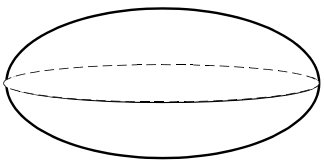
$\bar{x} + \bar{t} = (x_1 + t_1, x_2 + t_2, \ldots, x_n + t_n)$ er **summen** af $\bar{x}$ og $\bar{t}$.

$\bar{x} \cdot \bar{t} = x_1 \cdot t_1 + x_2 \cdot t_2 + \ldots + x_n \cdot t_n$ er **skalarproduktet** af $\bar{x}$ og $\bar{t}$.

$|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ kaldes **normen** (eller "længden") af $\bar{x}$.

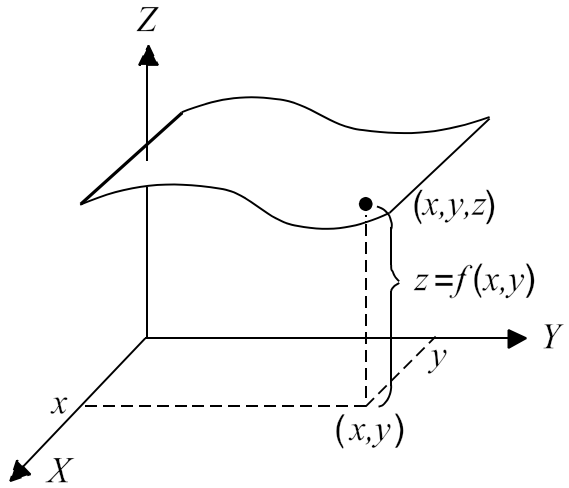
Karakterisering af mængder

Det er bekendt, at et interval kan karakteriseres som "en omegn af et punkt", "åbent", "lukket", "begrænset" osv. Begreberne generaliseres intuitivt let til delmængder af $\mathbb{R}^n$, som det fremgår af det følgende skema. Præcise definitioner findes i supplement 8A.

	omegn (afstand < ε)	åben mængde (lutter indre punkter)	lukket mængde (indeholder alle randpunkter)
$\mathbb{R}$			
$\mathbb{R}^2$			
$\mathbb{R}^3$			

8.2 GRAFISK FREMSTILLING AF FUNKTION AF FLERE VARIABLE

Funktion af 2 variable



Grafen for en funktion f af 2 variable defineres som punktmængden

$$\{(x,y,z) \mid z = f(x,y)\}.$$

Den vil typisk være en flade og kan sammenlignes med en landskabsoverflade med bakker og fordybninger.

En **niveaukurve** er en punktmængde $\{(x,y) \mid f(x,y) = k\}$, hvor $f(x,y)$ har en konstant værdi k. Niveaukurver svarer til højdekurver på geodætiske kort. På figur 8.1 er der vist **niveaukurvediagrammer** for en funktion med et lokalt maksimum samt den samme funktions 3-dimensionale udseende. På figur 8.2 er de tilsvarende figurer tegnet for et lokalt minimum, og på figur 8.3 er der tegnet en funktion med et saddelpunkt (et punkt hvor f har minimum i én retning og maksimum i en anden retning - som siddepunktet på rygfladen af en hest: her har højden minimum i hestens længderetning og maksimum på tværs af hesten).

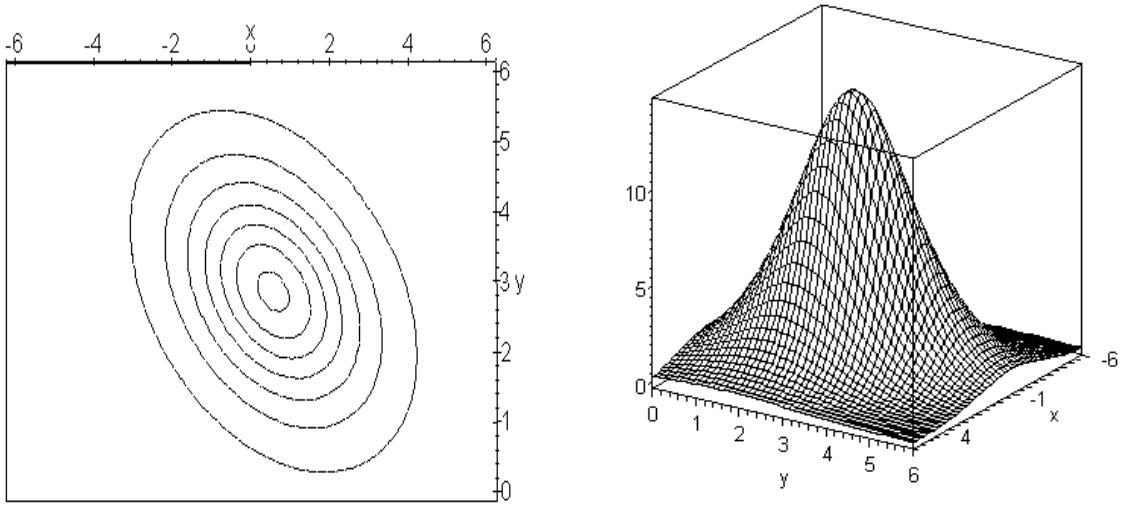


Fig. 8.1. *Niveaukurvediagram og tredimensional graf for en funktion*

$$f(x,y) = 100\, e^{-\sqrt{(x-2)^2 + 2(y-3)^2 + xy}}$$ *med maksimum.*

De to billeder på figur 8.1 fremkommer i Maple ved følgende kommandoer: $z := 100 \cdot e^{-\sqrt{(x-2)^2+2\cdot(y-3)^2+x\cdot y}}$

Cursor på udskrift, højre musetast, Vælg "3D-plot" , "x,y"

Cursor på figur, højre musetast, Vælg "Axes", "Boxed"

Cursor på figur, højre musetast, Vælg "Axes", "Range" sæt x fra -6 til 6, y fra 0 til 6.

Cursor på figur og drej figur passende.

```
with( plots ) :   contourplot( z,x=-6..6, y=0..6, grid=[49,49], contours=7, axes=boxed ) ;
```

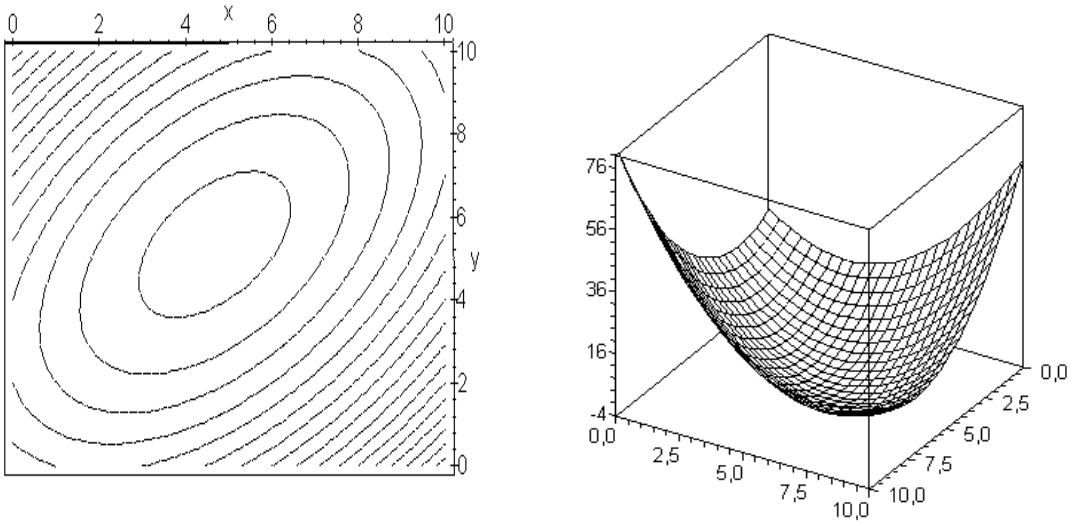


Fig. 8.2. *Niveaukurvediagram og tredimensional graf for en funktion* $g(x,y) = (x-2)^2+(y-3)^2-x\cdot y+10$ *med minimum.*

De to billeder på figur 8.2 fremkommer i Maple ved følgende kommandoer: $z:=(x-2)^2+(y-3)^2-x\cdot y+10$

Cursor på udskrift, højre musetast, Vælg "3D-plot" , "x,y" Cursor på figur, højre musetast, Vælg "Axes", "Boxed"

Cursor på figur, højre musetast, Vælg "Axes", "Range" sæt x fra 0 til 10, y fra 0 til10. Cursor på figur og drej figur passende.

with(plots) : contourplot(z,x=0..10, y=0..10, grid=[49,49], contours=10, axes=boxed) ;

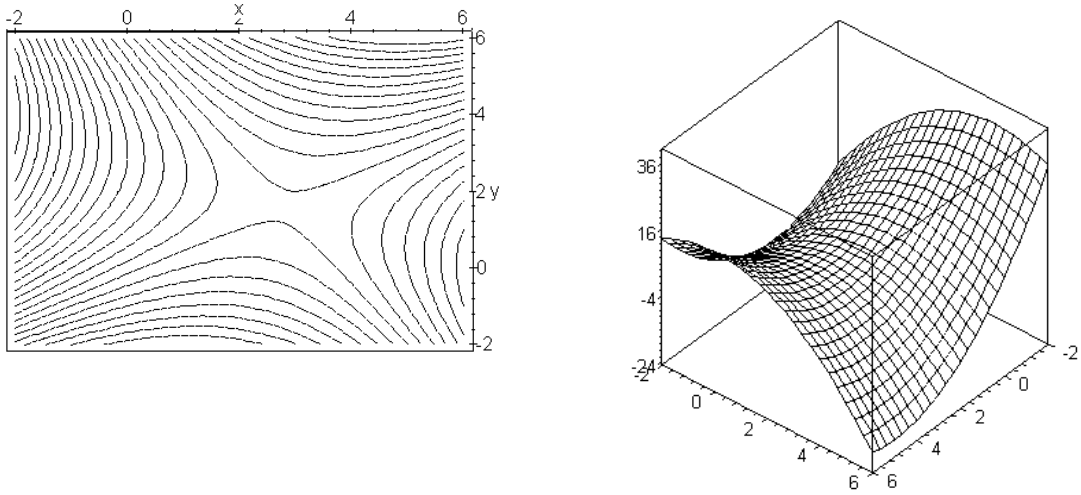


Fig. 8.3. *Niveaukurvediagram og tredimensional graf for en funktion* $h(x,y) = (x-2)^2-(y-3)^2-x\cdot y+10$ *med saddelpunkt.*

De to billeder på figur 8.3 fremkommer i Maple ved følgende kommandoer: $z:=(x-2)^2-(y-3)^2-x\cdot y+10$

Cursor på udskrift, højre musetast, Vælg "3D-plot" , "x,y" Cursor på figur, højre musetast, Vælg "Axes", "Boxed"

Cursor på figur, højre musetast, Vælg "Axes", "Range" sæt x fra -2 til 6, y fra -2 til 6. Cursor på figur og drej figur passende.

with(plots) : contourplot(z,x=-2..6, y=-2..6, grid=[49,49], contours=20, axes=boxed) ;

Funktion af 3 variable

Grafen for $f(x,y,z)$ defineres som punktmængden $\{(x,y,z,u) \mid u = f(x,y,z)\}$. Ved en **niveauflade** forstås en punktmængde $\{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = k\}$, hvor $f(x,y,z)$ har en konstant værdi *k*. Der kan ikke laves tegninger af selve grafen, men godt af en niveauflade. Eksempelvis er en såkaldt orbital eller bølgefunktion $\psi(x,y,z)$ for et atom anskueliggjort ved en niveauflade for $|\psi|$ på figur 8.4. (Orbitaler spiller en stor rolle for forståelsen af atomers og molekylers egenskaber).

Som et andet eksempel er nogle kugleformede niveauflader for tyngdepotentialet $\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ omkring jorden vist på figur 8.5.

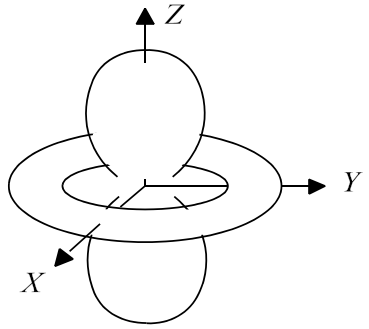


Fig. 8.4. *Anskueliggørelse af en atomorbital* $\psi(x,y,z)$ *ved hjælp af en niveauflade for* $|\psi|$.

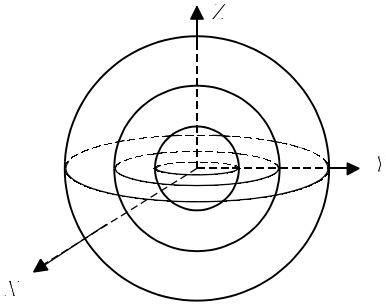


Fig. 8.5. *Niveauflader for tyngdepotentialet omkring jorden*.

Funktion af *n* variable

Grafen for en funktion *f* af *n* variable defineres som punktmængden

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \mid u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}.$$

Eksempel 8.1. Grafisk fremstilling af enkel funktion af to variable.

Der ønskes en grafisk fremstilling af funktionen

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

LØSNING:

Lad $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

1) Niveaukurver. For niveauet $z=a$ ($a>0$) fås

$$\sqrt{x^2+y^2} = a \iff x^2+y^2 = a^2$$

(cirkel, se fig. 8.6).

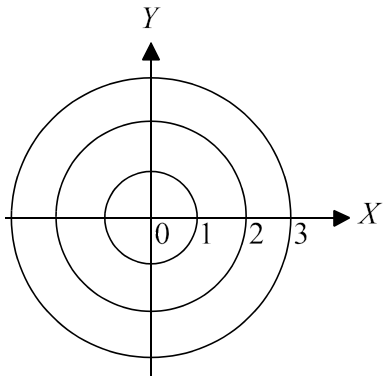


Fig. 8.6.

2) Slutninger ud fra niveaukurver. Fladen må være af form som en "rund skål". Minimum 0 indtræffer i punktet (0,0).

3) Fladens skæringskurve med lodrette planer.

For at få et "tværsnit" af "skålen" skæres fladen med *xz*-planen ved at indsætte $y=0$ i ligningen $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

Vi får da: $z = \sqrt{x^2} \iff z = |x|$ (se fig. 8.7).

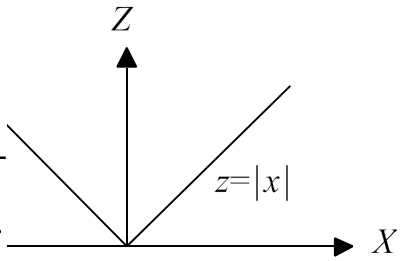


Fig. 8.7.

4) Tredimensional tegning. Af punkt 3) ses, at "skålen" er en kegle (se fig. 8.8).

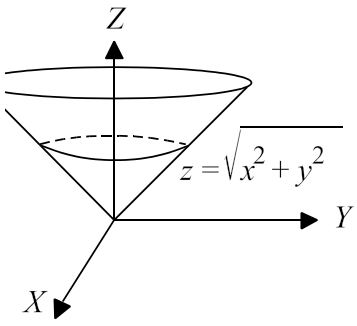


Fig. 8.8.

Eksempel 8.2. Grafisk fremstilling af kompliceret funktion af to variable.

Lad $t = f(\mathrm{v},p) = \frac{3}{8}\left(p+\frac{3}{\mathrm{v}^2}\right)\left(\mathrm{v}-\frac{1}{3}\right)$, hvor $p \in [0;2]$ og $\mathrm{v} \in [0.5;2]$. Der ønskes en grafisk fremstilling af funktionen *f*.

(Den givne ligning mellem *t*, v og *p* er van der Waals' tilstandsligning for reale gasser. Variablene *t*, v og *p* er "reducerede" variable for temperatur, volumen og tryk).

LØSNING:

I. Niveaukurve-diagram for *f*

Sædvanligvis vil man foretrække i et *p*v-koordinatsystem at tegne niveaukurver - i dette tilfælde "isotermer", dvs. kurver gennem punkter med samme temperatur. Efter lidt eksperimenteren finder man i dette tilfælde en god fremstilling ved at tegne de isotermer (niveaukurver), der svarer til temperaturerne *t*=0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1,3 og 1.4, se figur 8.9.

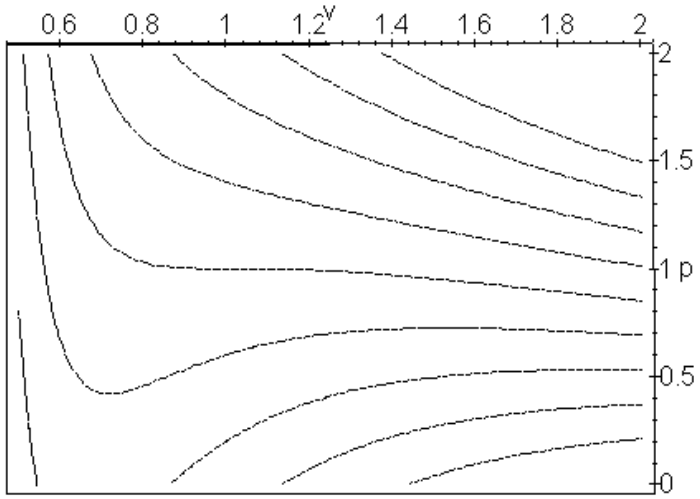


Fig. 8.9. *Niveaukurver (isotermer).*

I Maple fremkommer figur 8.9 ved følgende kommandoer:

with(plots) : $t := \frac{3}{8}\cdot\left(p+\frac{3}{v^2}\right)\cdot\left(v-\frac{1}{3}\right)$

contourplot(t,, v=0.5..2, p=0..2, grid=[49,49],contours = [0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4], axes=boxed)

II. Tredimensional tegning

I visse tilfælde kan det være af betydning at anskueliggøre grafens udseende i et tredimensionalt koordinatsystem. Det er væsentligt, hvorfra man ser fladen, så man må eksperimentere med forskellige ståsteder ("viewpoints").

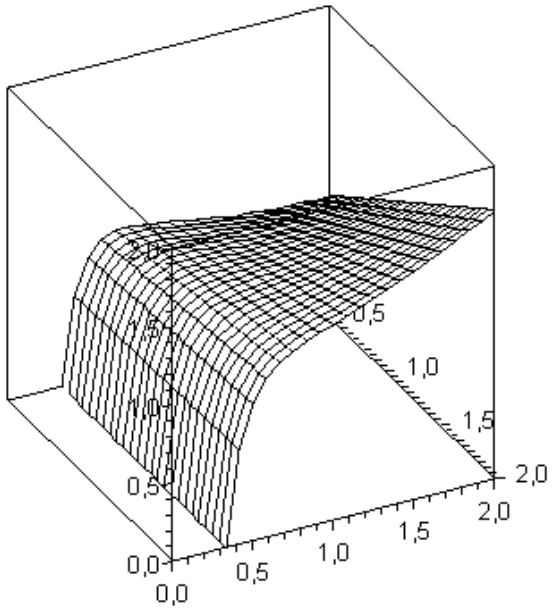


Fig 8.10. $t = f(\mathrm{v},p) = \frac{3}{8}\left(p+\frac{3}{\mathrm{v}^2}\right)\left(\mathrm{v}-\frac{1}{3}\right)$, hvor $p \in [0;2]$ og $\mathrm{v} \in [0.5;2]$.

I Maple:

Figur 8.10 fremkommer i Maple ved følgende kommandoer: $t := \frac{3}{8}\left(p+\frac{3}{v^2}\right)\cdot\left(v-\frac{1}{3}\right)$

Cursor på udskrift, højre musetast, Vælg "3D-plot" , "x,y" Cursor på figur, højre musetast, Vælg "Axes", "Boxed"

Cursor på figur, højre musetast, Vælg "Axes", "Range" sæt x fra 0.5 til 2, y fra 0 til 26.

Cursor på figur og drej figur til der fremkommer en god tredimensional figur.

8.3 GRÆNSEVÆRDI

Grænseværdi for en funktion af flere variable defineres analogt til grænseværdi for en funktion af én variabel. Lad $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ være en reel funktion af n reelle variable, og lad f have definitionsmængden D. Lad endvidere a være et reelt tal, og lad $\bar{x}_0 = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ være et punkt i $\mathbb{R}^n$. Hvis $f(\bar{x})$ er vilkårlig tæt på a, blot $\bar{x}$ er tilstrækkelig tæt på $\bar{x}_0$ (og $\bar{x} \in D$), siger vi, at $f(\bar{x})$ har grænseværdien a for $\bar{x}$ gående mod $\bar{x}_0$. Vi skriver da

$$f(\bar{x}) \to a \quad \text{for} \quad \bar{x} \to \bar{x}_0 \qquad \text{eller} \qquad \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = a \ .$$

Præcis definition af grænseværdi. Vi siger, at $f(\bar{x}) \to a$ for $\bar{x} \to \bar{x}_0$, hvis og kun hvis følgende gælder:
For ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $\delta > 0$, således at det for alle $\bar{x} \in D$ gælder, at

$$0 < |\bar{x} - \bar{x}_0| < \delta \implies |f(\bar{x}) - a| < \varepsilon \ .$$

For regning med grænseværdier gælder følgende regler:

SÆTNING 8.1 *(regning med grænseværdier). Lad der være givet to funktioner f og g, og antag, at* $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = a$ *og* $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} g(\bar{x}) = b$.

Så gælder

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \left(f(\bar{x}) + g(\bar{x}) \right) = a + b \qquad \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \left(f(\bar{x}) - g(\bar{x}) \right) = a - b$$

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \left(f(\bar{x})\, g(\bar{x}) \right) = ab \qquad \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = \frac{a}{b}, \quad \text{hvis} \quad b \neq 0 \ .$$

Sætningen anvendes i det følgende eksempel.

Eksempel 8.3. Regning med grænseværdier.

Undersøg $\dfrac{x-y}{xy}$ for $(x,y) \to (2,1)$.

LØSNING:

Af reglerne for regning med grænseværdi fås

$$\frac{x-y}{x \cdot y} \to \frac{2-1}{2 \cdot 1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \quad \text{for } (x,y) \to (2,1) \ .$$

8.4 KONTINUITET

DEFINITION af kontinuitet. *Lad* $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *være en reel funktion af* n *reelle variable, og lad* $\bar{x}_0$ *være et punkt i definitionsmængden D. Vi siger da, at* f *er kontinuert i* $\bar{x}_0$, *hvis*

$$f(\bar{x}) \to f(\bar{x}_0) \quad for \quad \bar{x} \to \bar{x}_0 .$$

Eksempelvis vil funktionen $f(x,y) = \frac{x-y}{xy}$ være kontinuert i punktet $(x_0, y_0) = (2,1)$, idet $f(2,1) = \frac{1}{2}$ og $f(x,y) \to \frac{2-1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$ for $(x,y) \to (2,1)$.

Hvis f er kontinuert i hele sin definitionsmængde, siger vi kort, at f er kontinuert.

Geometrisk betydning af kontinuitet.

Intuitivt kan man forestille sig kontinuerte funktioner som funktioner, hvis graf er "ubrudt". På figur 8.11 er vist nogle ikke-kontinuerte funktioners grafer.

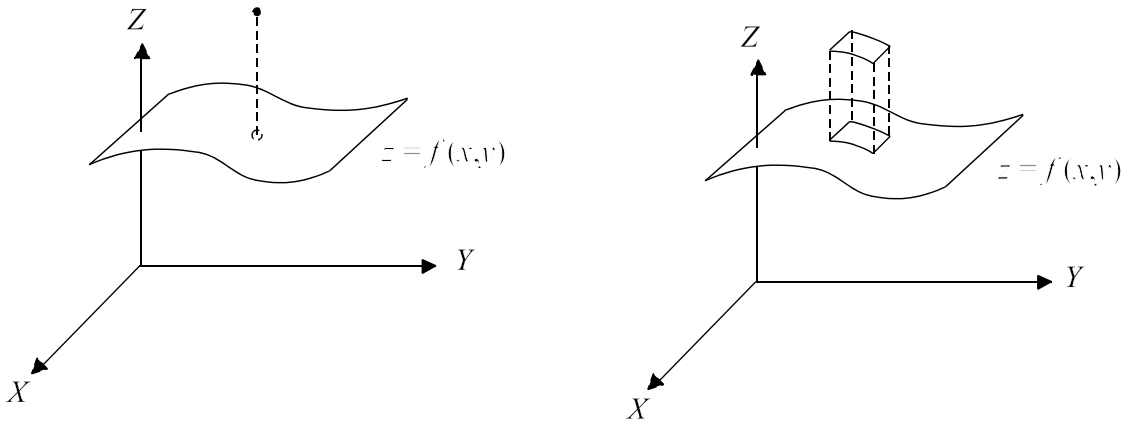


Fig. 8.11. *Nogle ikke-kontinuerte funktioners grafer.*

Regning med kontinuerte funktioner.

Ved "sædvanlig regning" $(f+g,\ f-g,\ f \cdot g,\ \frac{f}{g},\ f \circ \bar{g},$ se eventuelt den følgende sætning 8.2) med kontinuerte funktioner fås atter kontinuerte funktioner, og da alle "standard-funktioner" (exp, ln, potens, sin, cos, osv.) er kontinuerte i deres definitionsmængde, vil også enhver funktion, der ved "sædvanlig regning" kan dannes ud fra standardfunktionerne, blive kontinuert i sin definitionsmængde. Eksempelvis vil funktionen

$$f(x,y) = \sin(x^2 y) + \frac{\ln(y-x)}{y+x}$$

være kontinuert i sin definitionsmængde

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x \wedge y \neq -x\},$$

se figur 8.12, hvor *D* er vist skraveret.

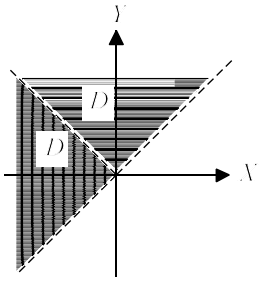


Fig. 8.12. *Kontinuitetsmængden vist skraveret.*

SÆTNING 8.2 *(regning med kontinuerte funktioner).*

a) Hvis f og g er to funktioner (af n variable), der er kontinuerte i $\bar{x}_0$, *så er funktionerne f+g, f-g og f·g også kontinuerte i* $\bar{x}_0$. *Hvis* $g(\bar{x}_0) \neq 0$, *så er også* $\frac{f}{g}$ *kontinuert i* $\bar{x}_0$.

b) Lad funktionerne $g_1, g_2, \ldots, g_k$ *(af n variable) være kontinuerte i* $\bar{x}_0 = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, *og lad funktionen f (af k variable) være kontinuert i punktet*

$$\bar{y}_0 = \bar{g}(\bar{x}_0) = \left(g_1(\bar{x}_0), g_2(\bar{x}_0), \ldots, g_k(\bar{x}_0)\right).$$

Så er $f \circ \bar{g}$, *dvs.* $f(g_1(\bar{x}), g_2(\bar{x}), \ldots, g_k(\bar{x}))$, *kontinuert i* $\bar{x}_0$.

Beviset for sætningen udelades.

SÆTNING 8.3 *(kontinuitetssætning). Lad en funktion f være kontinuert og have definitionsmængden D. Så gælder:*

a) Er D en sammenhængende mængde, så er værdimængden et interval.

b) Er D en lukket og begrænset mængde, så har f både et globalt minimum m [1] *og et globalt maksimum M.*

c) Er D en sammenhængende, lukket, begrænset mængde, så er værdimængden lig med intervallet $[m; M]$.

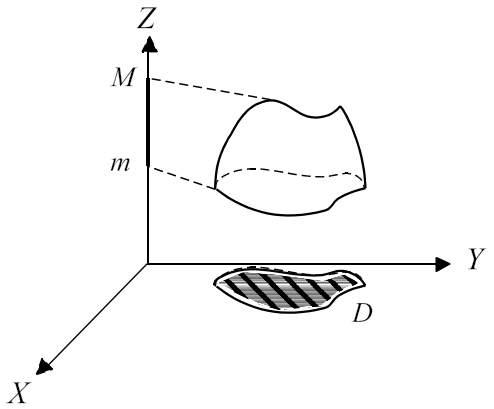


Fig. 8.13. *Er D sammenhængende, lukket og begrænset, bliver værdimængden et lukket interval.*

Beviset for sætningen udelades.

[1] dvs. $f(\bar{x}) \geq m$ for alle $\bar{x} \in D$.

8.5 PARTIEL DIFFERENTIATION

Indledning

Partielle afledede kendes på tegnet ∂. De dukker op næsten overalt, hvor der arbejdes med funktioner af flere variable, f.eks.

1) i fysisk kemi: $C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$, $C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V$, $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -1$,

2) ved tilnærmelse af $f(x,y)$ med et polynomium $P(x,y)$ (Taylorpolynomium),

3) ved bestemmelse af maksimum og minimum for $f(x,y)$.

Emnet vil først blive illustreret på en bestemt funktion af 2 variable, derefter angives de generelle definitioner og sætninger.

Partiel differentiation i 2 variable

Vi betragter funktionen givet ved

$$f(x,y) = \frac{1}{4}x^2y^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{x}{2}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Opfattes y som en konstant (f.eks. $y=1$), er f en funktion af x alene. Denne funktion af x har differentialkvotienten

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}xy^2 + 0 + \frac{1}{2},$$

som kaldes f's **partielle differentialkvotient (eller partielle afledede) med hensyn til *x*.**

Hvis vi i stedet i $f(x,y)$ opfatter x som en konstant (f.eks $x=0$), er f en funktion af y alene. Denne funktion af y har differentialkvotienten

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}x^2y + y,$$

som kaldes f's **partielle differentialkvotient (eller partielle afledede) med hensyn til *y*.**

De partielle afledede i punktet $(x,y)=(0,1)$ er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \frac{1}{2} \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 1.$$

Såfremt det af sammenhængen klart fremgår, hvilket punkt (x,y) der er tale om, udelades det ofte af betegnelserne, således at man kun skriver $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Af de partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ kan dannes en vektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, som kaldes **gradienten af *f*.** Eksempelvis vil f i punktet $(x,y)=(0,1)$ have gradienten $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Tegnet ∂ læses "blødt d" og markerer, at funktionen har flere variable. Det indebærer nemlig, at $\frac{\partial f}{\partial x}$ **ikke uden videre kan opfattes som en brøk** i beregninger.

Andre skrivemåder. I stedet for $\frac{\partial f}{\partial x}$ skrives ofte f_x', eller $\frac{\partial z}{\partial x}$ når $z = f(x,y)$. Undertiden skrives $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ og $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$, hvor der forneden er angivet, hvad de andre variable er. Eksempelvis kan energien E af en gas enten opfattes som en funktion af tryk og rumfang eller som en funktion af tryk og temperatur. Derfor ville $\frac{\partial E}{\partial P}$ være et tvetydigt symbol, mens $\left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_V$ og $\left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_T$ er entydige.

Geometrisk tolkning. De partielle afledede kan geometrisk tolkes som hældningskoefficienter til tangenter. På fig. 8.14 er tegnet grafen for

$$f(x,y) = \frac{1}{4}x^2y^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{x}{2} \quad \text{for} \quad x \in [0;1] \quad \text{og} \quad y \in [1;2].$$

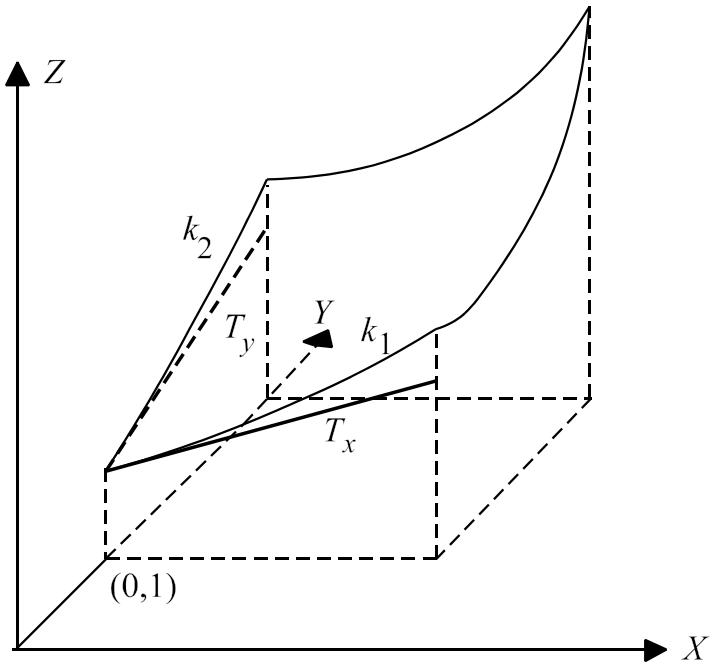


Fig. 8.14. *De to partielle differentialkvotienter i* (0,1) *er hældningskoefficienterne for de to tangenter* T_x *og* T_y.

På figuren er k_1 skæringskurven mellem planen y=1 og grafen for f, mens k_2 er skæringskurven mellem planen x=0 og grafen for f. Den plan, som er bestemt ved tangenterne T_x og T_y kaldes **tangentplanen** for grafen for f i punktet (0,1).

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \frac{1}{2}$ er hældningskoefficienten af tangenten T_x til kurven k_1 for $(x,y) = (0,1)$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 1$ er hældningskoefficienten af tangenten T_y til kurven k_2 for $(x,y) = (0,1)$.

Den geometriske betydning af gradienten omtales senere.

Partielle afledede af højere orden. Har f partielle afledede af første orden i definitionsmængden D, kan $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ igen opfattes som funktioner af to variable i D. Hvis disse nye funktioner selv har partielle afledede, siges f at have **partielle afledede af anden orden** i D. Vi har

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}x^2y + y\right) = xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{2}\right) = xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x^2y + y\right) = \frac{1}{2}x^2 + 1\,.$$

Heraf fås, at de partielle afledede af anden orden i punktet $(x,y) = (0,1)$ er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,1) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = 1.$$

For ovennævnte funktion f var de såkaldte "blandede afledede" $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$ ens [1].

Dette vil praktisk taget altid være tilfældet for ingeniørmæssige problemer, jævnfør sætning 8.4.

Analogt defineres partielle afledede af højere end anden orden, og også for disse kan differentiationernes rækkefølge normalt vælges vilkårligt, f.eks.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}\,.$$

[1] Symbolet $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ betyder, at der først differentieres med hensyn til y og derefter med hensyn til x. Visse lærebøger definerer dog den modsatte rækkefølge af differentiationerne.

Maple:

Skriv $\frac{1}{4}\cdot x^2\cdot y^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{x}{2}$

Cursor på udskrift, højre musetast, Vælg "Differentiate"

Vælges "x" fås $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{2}$

Vælges "y" fås $\frac{\partial f}{\partial y}$ $\frac{1}{2}x^2y+y$

Sæt cursor på udskriften fra $\frac{\partial f}{\partial x}$, højre musetast,

Vælges "x" fås $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $\frac{1}{2}y^2$

Vælges "y" fås $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ xy

Sæt cursor på udskriften fra $\frac{\partial f}{\partial y}$, højre musetast,

Vælges "y" fås $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ $\frac{1}{2}x^2+1$

Partiel differentiation i n variable

For en funktion f af n variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forløber partiel differentiation efter ganske de samme retningslinier som for 2 variable (jævnfør det følgende eksempel 8.4). En præcis definition findes i supplement 8C.

For de "blandede" partielle afledede kan differentiationernes rækkefølge normalt vælges vilkårligt:

SÆTNING 8.4 *(differentiationernes rækkefølge). Hvis*

1) f har "blandede" partielle afledede $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *og* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *i en åben mængde D, og*

2) disse er kontinuerte i D,

da er de ens i D, dvs. $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.}$

Et bevis findes i supplement 8D.

Analogt med sætning 8.4 gælder for de partielle afledede af højere orden: Hvis f har kontinuerte partielle afledede af p'te orden (og dermed af lavere orden), så kan differentiationernes rækkefølge vælges vilkårligt til og med p'te orden.

Eksempel 8.4. Partielle afledede.

Find de partielle differentialkvotienter af første, anden og tredie orden i punktet $\bar{a} = (1,1,3)$ for $f(x,y,z) = x^2 e^{3y-z}$.

LØSNING:

Afledet	i (1,1,3)
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{3y-z}$	2
$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2e^{3y-z}$	3
$\frac{\partial f}{\partial z} = -x^2e^{3y-z}$	-1
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{3y-z}$	2
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 9x^2e^{3y-z}$	9
$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = x^2e^{3y-z}$	1
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 6xe^{3y-z}$	6
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = -2xe^{3y-z}$	-2
$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} = -3x^2e^{3y-z}$	-3

Afledet	i (1,1,3)
$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0$	0
$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 27x^2e^{3y-z}$	27
$\frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = -x^2e^{3y-z}$	-1
$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} = 6e^{3y-z}$	6
$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial z} = -2e^{3y-z}$	-2
$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x} = 18xe^{3y-z}$	18
$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial z} = -9x^2e^{3y-z}$	-9
$\frac{\partial^3 f}{\partial z^2\partial x} = 2xe^{3y-z}$	2
$\frac{\partial^3 f}{\partial z^2\partial y} = 3x^2e^{3y-z}$	3
$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = -6xe^{3y-z}$	-6

Partiel differentiation af vektorfunktion. Man differentierer en vektorfunktion $\bar{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$ partielt, ved at differentiere hver af koordinatfunktionerne $g_1, g_2, \ldots, g_m$ partielt, f.eks.

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial y} = \left(\frac{\partial g_1}{\partial y}, \frac{\partial g_2}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial g_m}{\partial y} \right) .$$

For vektorfunktion $\bar{g}(x,y) = (2x + 3y,\ xy,\ x^2 + y^2)$ fås altså $\frac{\partial \bar{g}}{\partial x} = (2, y, 2x)$ og $\frac{\partial \bar{g}}{\partial y} = (3, x, 2y)$.

8.6 DIFFERENTIABILITET

En funktion f af én variabel siges som bekendt at være differentiabel i x_0, hvis der findes et reelt tal α, sådan at

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \to \alpha \quad \text{for} \quad \Delta x \to 0.$$

Dette kan skrives

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-\alpha\cdot\Delta x}{\Delta x} \to 0 \quad \text{for} \quad \Delta x \to 0.$$

Den sidste skrivemåde vil vi generalisere til funktioner af flere variable.

Lad f være en funktion af n variable med definitionsmængden D, lad $\bar{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) \in D$, og lad $\bar{x}_0 + \Delta\bar{x} \in D$, hvor $\Delta\bar{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$.

DEFINITION af differentiabilitet. *Funktionen f siges at være **differentiabel** i $\bar{x}_0$, hvis der findes en vektor $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, sådan at*

$$\frac{f(\bar{x}_0+\Delta\bar{x})-f(\bar{x}_0)-\bar{\alpha}\cdot\Delta\bar{x}}{|\Delta\bar{x}|} \to 0 \quad \textit{for} \quad \Delta\bar{x} \to \bar{0}.$$

I så fald må der gælde $\alpha_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0)$ (det ses ved at vælge alle Δx_i på nær Δx_j lig med nul). Vektoren $\bar{\alpha}$ må derfor være gradienten af f. Vi ser altså, at hvis f er differentiabel i $\bar{x}_0$, medfører det, at f har partielle afledede i $\bar{x}_0$. Det omvendte er ikke altid tilfældet, men der gælder dog følgende

SÆTNING 8.5 *(praktisk betingelse for differentiabilitet). Har en funktion f kontinuerte partielle afledede i en åben mængde D, da er f differentiabel i D (og dermed også kontinuert).*

Et bevis findes i supplement 8E.

Af sætning 8.5 i forbindelse med sætning 1.3 i kapitel 1 følger, at alle de funktioner, der "på sædvanlig vis" (dvs. ved anvendelse af regneoperationerne $f+g, f-g, f\cdot g, \frac{f}{g}, f\circ\bar{g}$) kan dannes ud fra standardfunktionerne, er differentiable i det indre af deres definitionsmængde - højst med undtagelse af de punkter, hvor de benyttede standardfunktioner ikke er differentiable.

Eksempel 8.5. Differentiabilitetsmængde.

Funktionen f givet ved $f(x,y) = \frac{\cos(x-y)}{x^2+y^2} + e^{xy}$ har definitionsmængden $D = \{(x,y) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$.

Ifølge sætning 1.3 i kapitel 1 har f kontinuerte partielle afledede i D.

Af sætning 8.5 fås derfor, at f er differentiabel i D.

8.7 DIFFERENTIALER

Differential for funktion af 1 variabel

Følger vi grafen for en differentiabel funktion $y = f(x)$ fra et punkt med abscissen x_0 til et punkt med abscissen $x_0 + \Delta x$, bliver funktionstilvæksten $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, jævnførfigur 8.15.

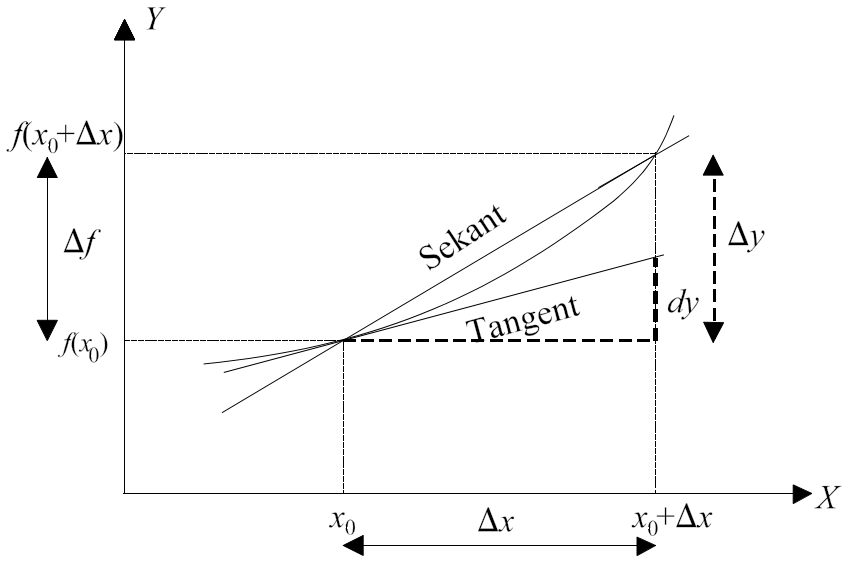


Fig. 8.15.

I stedet for at følge grafen fra x_0 til $x_0 + \Delta x$, kunne vi som en tilnærmelse følge tangenten i x_0. I så fald bliver y-tilvæksten $f'(x_0) \cdot \Delta x$, som kaldes differentialet.

DEFINITION af differential (1 variabel). *Differentialet* $df(x_0, \Delta x)$ *af funktionen* f *i et punkt* x_0 *for tilvæksten* Δx *defineres ved*

$$df(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x .$$

Man skriver ofte blot df i stedet for $df(x_0, \Delta x)$. For den uafhængige variabel x, gælder $\Delta x = dx$ (betragtes den identiske funktion $f(x) = x$, får vi nemlig $df(x, \Delta x) = dx(x_0, \Delta x) = 1 \cdot \Delta x$, dvs. $dx = \Delta x$). Vi har derfor

$$\boxed{df = f'(x_0)dx} .$$

Divideres med *dx*, fås den kendte sammenhæng $\frac{df}{dx} = f'$. Bemærk, at man altid gerne må dividere med *dx*, når blot $dx \neq 0$. Navnet differentialkvotient betyder netop en kvotient mellem differentialer. Ofte skelnes ikke mellem variabelnavnet *y* og funktionsnavnet *f*, så man

møder også skrivemåden $dy = \frac{dy}{dx}\,dx$.

Som et eksempel på et differential kan nævnes, at funktionen $f(x) = x^3$ har differentialet $df(x_0, dx) = 3x_0^2\,dx$ eller kort $df = 3x_0^2\,dx$.

Differential for funktion af 2 variable

Lad $z = f(x,y)$ have kontinuerte partielle afledede i punktet (x_0, y_0). Går vi fra punktet (x_0, y_0) til punktet $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, bliver funktionstilvæksten $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, jævnfør figur 8.16. I stedet for af følge grafen for *f*, kunne vi som en tilnærmelse følge tangentplanen i (x_0, y_0), d.v.s. den plan der udspændes af tangenterne AB og AD på figur 8.16. I så fald bliver *z*-tilvæksten

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\Delta y \ .$$

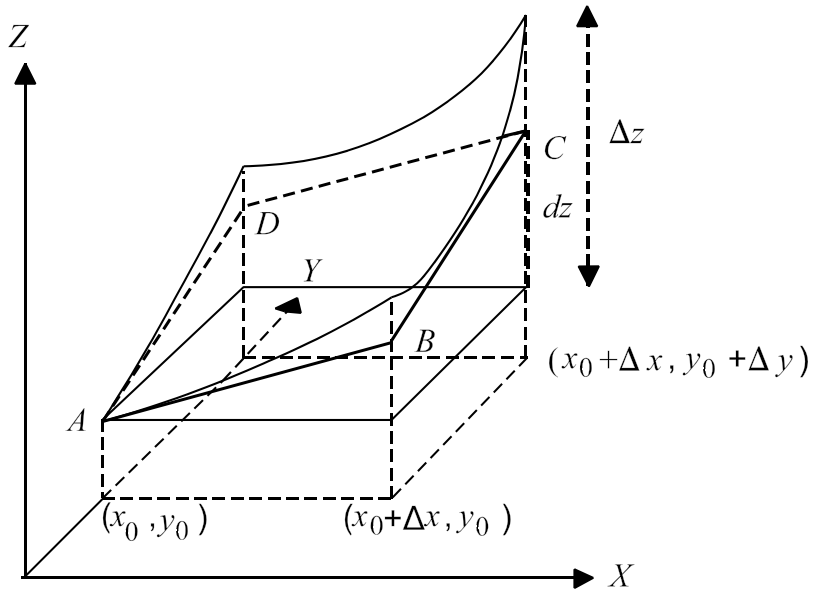


Fig. 8.16.

Bevis. Af figur 8.16 fås

$$\begin{aligned}\vec{AC} &= \vec{AB}+\vec{BC} = \vec{AB}+\vec{AD}\\ &= \left(\Delta x,\ 0,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\Delta x\right) + \left(0,\ \Delta y,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\Delta y\right)\\ &= \left(\Delta x,\ \Delta y,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\Delta y\right),\end{aligned}$$

dvs. z-tilvæksten er $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\Delta y$.

Denne z-tilvækst, som fås ved at følge tangentplanen, kaldes differentialet. Sættes $\bar{r} = (x,y)$, $\bar{r}_0 = (x_0,y_0)$, $\Delta\bar{r} = (\Delta x,\Delta y)$, kan definitionen udtrykkes på følgende måde:

DEFINITION af differential (2 variable). *Differentialet* $df(\bar{r}_0,\Delta\bar{r})$ *af funktionen* f *i punktet* $\bar{r}_0$ *for tilvæksten* $\Delta\bar{r}$ *defineres ved*

$$df(\bar{r}_0,\Delta\bar{r}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{r}_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{r}_0)\Delta y .$$

Man skriver ofte blot df eller dz i stedet for $df(\bar{r}_0,\Delta\bar{r})$. Ligesom for funktioner af 1 variabel gælder, at man kan erstatte Δx med dx og Δy med dy, hvorved differentialet kan skrives

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy\ .}$$

Som et eksempel på et differential kan nævnes, at funktionen $f(x,y) = \frac{1}{4}x^2y^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x$ i punktet (x_0,y_0) har differentialet

$$df = \left(\frac{1}{2}x_0y_0^2 + \frac{1}{2}\right)dx + \left(\frac{1}{2}x_0^2y_0 + y_0\right)dy\ .$$

Edb-løsning. I programmet Maple kan differentialet findes på følgende måde:

```
with(difforms):
defform(x=0,y=0); d(1/4*x^2*y^2+1/2*
```

$$\left(\frac{1}{2}x^2y+y\right)\mathrm{d}(y)+\left(\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}(x)$$

Differential for funktion af *n* variable

Lad $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ have kontinuerte partielle afledede, og lad $\bar{r}_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ og $\Delta\bar{r} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$.

DEFINITION af differential (*n* variable). *Differentialet* $df(\bar{r}_0, \Delta\bar{r})$ *af funktionen* f *i punktet* $\bar{r}_0$ *for tilvæksten* $\Delta\bar{r}$ *defineres ved*

$$df(\bar{r}_0, \Delta\bar{r}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{r}_0)\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{r}_0)\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{r}_0)\Delta x_n .$$

Ligesom før kan man erstatte Δx_1 med dx_1, Δx_2 med dx_2 osv., hvorved formlen for differentialet kan skrives

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n .}$$

Ofte skelnes ikke mellem variabelnavn og funktionsnavn, så man skriver

for 1 variabel: $y = y(x)$ og $dy = \frac{dy}{dx}dx$

for 2 variable: $z = z(x,y)$ og $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

for *n* variable: $= u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ og $du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$

Eksempel 8.6. Fejlvurdering.

Teori. Lad $z = f(x,y)$, hvor de uafhængige variable *x* og *y* har absolutte[1] fejl *dx* og *dy*. Den absolutte fejl Δz på z er da tilnærmelsesvis $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$.

(Vi har her forudsat, at *dx* og *dy* numerisk er så små, at man kan erstatte grafen for f med tangentplanen). Koefficienterne $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ kaldes *z's* **følsomhed** over for fejl på henholdsvis *x* og *y*.

---

[1] Den absolutte fejl Δx på en talværdi *x* defineres ved $\Delta x = x_0 - x$, hvor x_0 betegner den sande værdi. I modsætning hertil defineres den relative fejl ved $\frac{\Delta x}{x_0} \approx \frac{\Delta x}{x}$.

Praktisk problem. Et cylindrisk hul med radius r og højde h bores i en metalblok. Lad de absolutte fejl på r og h være dr og dh. Den absolutte fejl på hullets volumen $V = \pi r^2 h$ er da tilnærmelsesvis $dV = \pi r^2 dh + 2\pi r h dr$.

Er $r = 2\,\text{cm}$ og $h = 5\,\text{cm}$, bliver $dV = 12.57\,dh + 62.83\,dr$. Heraf ses, at V har størst følsomhed over for fejl på r.

Regneregler for differentialer

Lad der være givet to funktioner f og g, som begge har kontinuerte partielle afledede i punktet $\bar{r}_0$. Der gælder da regnereglerne

$$d(f+g) = df+dg \qquad d(fg) = g\cdot df+f\cdot dg$$

$$d(f-g) = df-dg \qquad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\cdot df-f\cdot dg}{g^2}$$

Bevis. Da beviserne for de fire regler er ganske analoge, gennemføres beviset kun for differentialet af et produkt. Ifølge definitionen på differentialer fås

$$\begin{aligned} d(fg) &= \frac{\partial(fg)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial(fg)}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial(fg)}{\partial x_n}dx_n \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}g + f\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}g + f\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)dx_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}g + f\frac{\partial g}{\partial x_n}\right)dx_n \\ &= g\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right) + f\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x_n}dx_n\right) \\ &= g\cdot df + f\cdot dg\ . \end{aligned}$$

8.8 DIFFERENTIATION AF SAMMENSATTE FUNKTIONER M.M.

Differentialkvotienten af en sammensat funktion $y = f(g(t))$, er $f'(g(t))\,g'(t)$, som nævnt i kapitel 1. Sættes $x = g(t)$, bliver differentiationsreglen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\ .$$

Lad os eksempelvis betragte funktionen $y = \sin x$, hvor $x = 3t^2$. Vi har da

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{d(\sin x)}{dx}\cdot\frac{d(3t^2)}{dt} = \cos x\cdot(6t) = 6t\cdot\cos(3t^2)\ .$$

For en funktion af to variable gælder

SÆTNING 8.6a *(kæderegel). Lad* $f(x_1,x_2)$ *have kontinuerte partielle afledede, og lad* $x_1(t),x_2(t)$ *være differentiable. Så vil den sammensatte funktion*

$$u(t) = f(x_1(t),x_2(t))$$

være differentiabel med differentialkvotienten

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}.$$

I anvendelsesfag benyttes normalt samme betegnelse for u og f:

$$\boxed{\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}}.$$

Formlen fremkommer formelt ud fra differentialet

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2$$

ved division med *dt*. I supplement 8F uddybes og bevises kædereglen.

Kædereglen kan generaliseres til et vilkårligt antal variable:

SÆTNING 8.6b *(kæderegel). Lad* $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *have kontinuerte partielle afledede, og lad* $x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)$ *være differentiable. Så vil den sammensatte funktion*

$$u(t) = f\big(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)\big)$$

være differentiabel med differentialkvotienten

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

I anvendelsesfag benyttes normalt samme betegnelse for u og f:

$$\boxed{\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}}.$$

Formlen fremkommer formelt ud fra differentialet

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$$

ved division med *dt*.

Partiel afledet og "total afledet". Lad $c(x,y,z,t)$ betegne koncentrationen af et stof *A* i punktet (x,y,z) til tiden *t*. Hvis en flue sidder stille i punktet (x,y,z), vil den opleve, at koncentrationen ændres med en hastighed, der er givet ved den **partielle tidsafledede:**

$$\frac{\partial c}{\partial t}\ .$$

Hvis fluen derimod flyver langs en banekurve givet ved $(x(t),y(t),z(t))$, vil den ifølge kædereglen opleve, at koncentrationen $c(x(t),y(t),z(t),t)$ ændres med en hastighed givet ved den **"totale" tidsafledede:**

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial c}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial c}{\partial t}\ .$$

Symbolerne $\frac{\partial c}{\partial t}$ og $\frac{dc}{dt}$ har altså helt forskellig betydning.

Eksempel 8.7a. Differentiation af sammensat funktion (kæderegel).

Lad $u = x_1^3 x_2^2$, hvor

$x_1 = \cos t + 1$, $x_2 = 2\sin t + 1$.

Vi ønsker at finde $\frac{du}{dt}$ for *t*=0.

LØSNING:

Indsættes *t*=0, fås $(x_1,x_2) = (2,1)$. Idet

$$\frac{dx_1}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dx_2}{dt} = 2\cos t,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 3x_1^2 x_2^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 2x_1^3 x_2,$$

fås ved indsættelse af *t*=0 og $(x_1,x_2) = (2,1)$

$$\frac{dx_1}{dt} = 0, \qquad \frac{dx_2}{dt} = 2 \quad \text{og}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 3\cdot 4\cdot 1 = 12, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 2\cdot 8\cdot 1 = 16.$$

Ved indsættelse i kædereglen fås nu for *t*=0

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} = 12\cdot 0 + 16\cdot 2 = \underline{\underline{32}}\ .$$

Eksempel 8.7b. Differentiation af sammensat funktion (kæderegel).

Lad $u = x_2 x_3^3 x_4^2 + x_1 x_2^2 x_3 + x_2 x_3 x_4^2$, hvor

$x_1 = \cos t + 1$, $x_2 = 2\sin t + 1$, $x_3 = \tan t + \cos t$ og $x_4 = t^3 - t + 1$.

Vi ønsker at finde $\frac{du}{dt}$ for t=0.

LØSNING:

Indsættes t=0, fås $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2,1,1,1)$. Idet

$$\frac{dx_1}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dx_2}{dt} = 2\cos t, \quad \frac{dx_3}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t} - \sin t, \quad \frac{dx_4}{dt} = 3t^2 - 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = x_2^2 x_3, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_3^3 x_4^2 + 2x_1 x_2 x_3 + x_3 x_4^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = 3x_2 x_3^2 x_4^2 + x_1 x_2^2 + x_2 x_4^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_4} = 2x_2 x_3^3 x_4 + 2x_2 x_3 x_4,$$

fås ved indsættelse af t=0 og $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2,1,1,1)$

$$\frac{dx_1}{dt} = 0, \quad \frac{dx_2}{dt} = 2, \quad \frac{dx_3}{dt} = 1, \quad \frac{dx_4}{dt} = -1 \quad \text{og}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 6, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = 6, \quad \frac{\partial u}{\partial x_4} = 4.$$

Ved indsættelse i kædereglen fås nu for t=0

$$\frac{du}{dt} = 1\cdot 0 + 6\cdot 2 + 6\cdot 1 + 4\cdot(-1) = \underline{\underline{14}}.$$

Sætning 8.6a om kædereglen kan umiddelbart udvides til at behandle sådanne tilfælde, hvor x_1, x_2 er funktioner af flere variable, f.eks. af 3 variable t_1, t_2, t_3. Vi har da

SÆTNING 8.7a *(kæderegel). Lad* $f(x_1, x_2)$ *have kontinuerte partielle afledede, og lad*

$$x_1(t_1, t_2, t_3), \quad x_2(t_1, t_2, t_3)$$

have partielle afledede. Så vil den sammensatte funktion

$$u(t_1, t_2, t_3) = f\big(x_1(t_1, t_2, t_3), x_2(t_1, t_2, t_3)\big)$$

have partielle afledede:

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_3} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_3} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_3} .$$

I anvendelsesfag benyttes normalt samme betegnelse for u og f:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i}, \quad i = 1,2,3 .}$$

Sætning 8.6b om kædereglen kan umiddelbart udvides til at behandle de tilfælde, hvor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er funktioner af q variable $t_1, t_2, \ldots, t_q$. Vi har da

SÆTNING 8.7b *(kæderegel). Lad* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *have kontinuerte partielle afledede, og lad*

$$x_1(t_1, t_2, \ldots, t_q), \quad x_2(t_1, t_2, \ldots, t_q), \quad \ldots, \quad x_n(t_1, t_2, \ldots, t_q)$$

have partielle afledede. Så vil den sammensatte funktion

$$u(t_1, t_2, \ldots, t_q) = f\big(x_1(t_1, t_2, \ldots, t_q), x_2(t_1, t_2, \ldots, t_q), \ldots, x_n(t_1, t_2, \ldots, t_q)\big)$$

have partielle afledede:

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}, \quad i = 1,2,\ldots,q .$$

I anvendelsesfag benyttes normalt samme betegnelse for u og f:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}, \quad i = 1,2,\ldots,q .}$$

Eksempel 8.8. Differentiation af sammensat funktion (kæderegel).

Lad $u = x_1^3 x_2^2 - 21 x_1 x_2$, hvor

$$x_1 = t_1^3 t_2^2 t_3 - 6, \qquad x_2 = t_1^2 + t_1 t_2 t_3 - 5 .$$

Vi ønsker at finde $\dfrac{\partial u}{\partial t_2}$ for $(t_1, t_2, t_3) = (2,1,1)$.

LØSNING:

Indsættes $(t_1, t_2, t_3) = (2,1,1)$, fås $(x_1, x_2) = (2,1)$. Idet

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 3x_1^2 x_2^2 - 21 x_2, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 2x_1^3 x_2 - 21 x_1,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial t_2} = 2t_1^3 t_2 t_3, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial t_2} = t_1 t_3,$$

fås ved indsættelse af $(t_1, t_2, t_3) = (2,1,1)$ og $(x_1, x_2) = (2,1)$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 3 \cdot 4 \cdot 1 - 21 \cdot 1 = -9, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 2 \cdot 8 \cdot 1 - 21 \cdot 2 = -26,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial t_2} = 2 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 1 = 16, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial t_2} = 2 \cdot 1 = 2 .$$

Kædereglen giver nu

$$\frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} = (-9) \cdot 16 + (-26) \cdot 2 = \underline{\underline{-196}} .$$

Benyttes Maple, bliver de tilsvarende beregninger:

x1 := t1^3*t2^2*t3 - 6 : x2 := t1^2 + t1*t2*t3 - 5 :

u := x1^3*x2^2-21*x1*x2

cursor på udskrift, højre musetast, Differentiate" Vælg t2

Cursor på udskrift "Evaluate at a point", Indsæt 2, 2 og 1 Resultat -196

I supplement 8G og 8H er kædereglen anvendt til henholdsvis variabelskift i en differentialligning og variabelskift i et differential.

8.9 RETNINGSAFLEDET. GRADIENTENS GEOMETRISKE BETYDNING

Som det fremgår af kædereglen (sætning 8.6) har den sammensatte funktion $u(s) = u\left(x_1(s), x_2(s), \ldots, x_n(s)\right)$ differentialkvotienten

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{ds} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{ds} \ . \tag{1}$$

Idet gradienten er $\overline{\text{grad}}\, u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m} \right)$, [2] og vi sætter

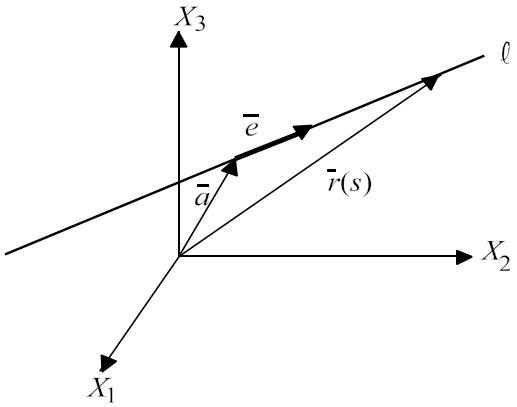
$\bar{r}(s) = \left(x_1(s), x_2(s), \ldots, x_n(s)\right)$, kan (1) omformes til

$$\frac{du}{ds} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{dx_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \cdot \left(\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \ldots, \frac{dx_n}{ds} \right)$$

$$\frac{du}{ds} = \overline{\text{grad}}\, u \cdot \frac{d\bar{r}}{ds} \ . \tag{2}$$

Lad nu $\bar{r}(s)$ være en parameterfremstilling for en ret linie l (se figuren):

$$\bar{r}(s) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R},$$



hvor $\bar{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{pmatrix}$ er en enhedsvektor, dvs. $|\bar{e}| = 1$, således at s bliver "vejlængden".

---

[2] I stedet for skrivemåden $\overline{\text{grad}}\, u$ benyttes ofte skrivemåden $\bar{\nabla} u$, der læses "nabla u".
Nabla-symbolet $\bar{\nabla}$ kan opfattes som "differentialoperatoren" $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$.

Idet $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{e},$ fås ved indsættelse i (2), at

$$\boxed{\frac{du}{ds} = \overline{\text{grad}}\, u \cdot \bar{e}\ .} \qquad (3)$$

Differentialkvotienten $\frac{du}{ds}$ i punktet med stedvektor $\bar{r}(s)$ kaldes den **retningsafledede** af u i retningen $\bar{e}.$ I et givet punkt P angiver den retningsafledede af u, "hvor stærkt" funktionen u ændrer sig i vektoren $\bar{e}$'s retning, f.eks. tilvæksten pr. meter. Specielt ses, at hvis $\bar{e}$ er parallel med en af koordinatakserne, så er $\frac{du}{ds}$ den tilsvarende partielle afledede. Er eksempelvis $\bar{e} = (1,0,0,\ldots 0),$ bliver $\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x_1}.$

Eksempel 8.9. Retningsafledet.

Find i punktet $P = (2,1,-1)$ den retningsafledede af funktionen $u(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3xyz$ i retningen $\bar{v} = (2,1,-2).$

LØSNING:

I punktet P er $\overline{\text{grad}}\, u = (1,-2,6).$ En enhedsvektor i $\bar{v}$'s retning er

$$\bar{e} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{(2,1,-2)}{3}.$$

Den retningsafledede er da $\frac{du}{ds} = \overline{\text{grad}}\, u \cdot \bar{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = -4.$

Fortegnet angiver, at i punktet P "falder" u i den angivne retning.

I Maple bliver de tilsvarende beregninger:

```
with( linalg ) :      v := vector([2,1,-2]) :      u := x^2+2*y^2+3*x*y*z :
w := unapply( dotprod( grad( u, [x,y,z] ), v/norm(v,2) ), x, y, z ) :
w(2,1,-1) ;
```

-4

SÆTNING 8.8 *(gradientens geometriske betydning). I et punkt P, hvor gradienten* $\overline{\text{grad}}\, u(P)$ *ikke er* $\bar{0}$, *gælder*

1) gradienten er normalvektor til u's niveaukurve (niveauflade) gennem P,

2) gradienten peger i den retning, hvor u vokser mest.

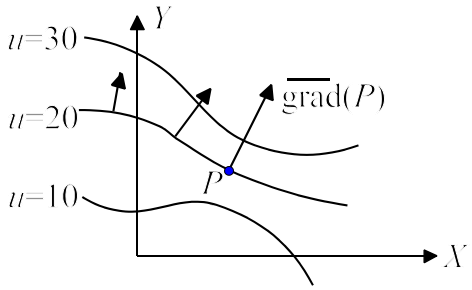


Fig. 8.17. *Niveaukurver og gradientvektorer for funktion u af to variable.*

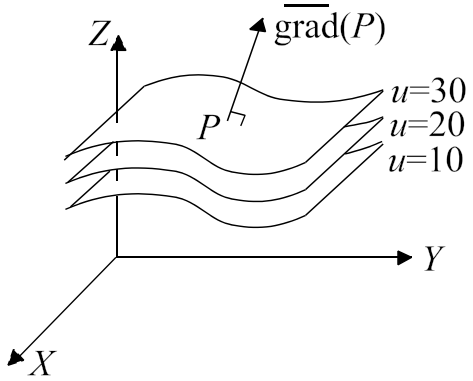


Fig. 8.18. *Niveauflader og gradientvektorer for funktion u af tre variable.*

Nogle anvendelser.

1) Temperaturgradienten $\bar{\nabla} T = \overline{\text{grad}}\, T$ står vinkelret på isotermerne og peger modsat den retning varmen vil vandre (varme vandrer fra højere temperatur mod lavere).

2) Er den potentielle energi E_p, vil $\bar{F} = \bar{\nabla}(-E_p) = -\overline{\text{grad}}\, E_p$ være den dertil svarende kraft, og stå vinkelret på ækvipotentialfladerne.

Bevis. For kortheds skyld bevises sætning 8.8 kun i det tilfælde, hvor *u* er en funktion af 2 variable.

1) Lad $\bar{r}(s) = (x(s), y(s))$ være parameterfremstillingen for en niveaukurve *k* til *u*, dvs.
$u(x(s), y(s)) = c$ for alle værdier af *s*. Vi har da, at $\frac{du}{ds} = 0$ (en konstant differentieret er 0).
Af (2): $\frac{du}{ds} = \overline{\text{grad}}\, u \cdot \frac{d\bar{r}}{ds}$ fås nu

$$0 = \overline{\text{grad}}\, u \cdot \frac{d\bar{r}}{ds}.$$

Da skalarproduktet er nul, må gradientvektoren $\overline{\text{grad}}\, u$ stå vinkelret på niveaukurven *k's* tangentvektor $\frac{d\bar{r}}{ds}$. Altså er $\overline{\text{grad}}\, u$ normalvektor til niveaukurven.

2) Af formel (3): $\frac{du}{ds} = \overline{\text{grad}}\, u \cdot \bar{e}$ ses, at det skalære produkt er størst, når enhedsvektoren $\bar{e}$ er parallel med $\overline{\text{grad}}\, u$. Gradienten peger altså netop i den retning, hvor *u* vokser mest.

Eksempel 8.10. Gradientens geometriske betydning.

En punktladning er placeret i begyndelsespunktet O. Lad det elektriske potential i et punkt P være givet ved

$$u(P) = \frac{1}{|\overline{OP}|} \qquad \text{eller} \qquad u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \ .$$

Niveaufladerne for u er bestemt ved

$$u(P)=c \ (c>0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = c \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{c^2},$$

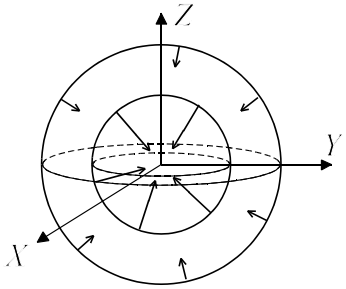
dvs. fladerne er kugler med centrum i (0,0,0).

Vi har

$$\overline{\text{grad}}\, u = \left(\frac{-x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}, \frac{-y}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}, \frac{-z}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} \right)$$

$$= \frac{(-x,-y,-z)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} = -\frac{\overline{OP}}{|\overline{OP}|^3}.$$

Ifølge sætning 8.8.1 er $\overline{OP}$ derfor en normalvektor til niveaufladen gennem P, og ifølge sætning 8.8.2 vokser det elektriske potential stærkest i retningen $\overline{\text{grad}}\, u$, dvs. ind mod begyndelsespunktet.



8.10 TAYLORPOLYNOMIUM I 2 VARIABLE

Det 2. Taylorpolynomium $\tilde{f}(x,y)$. For en funktion $f(x,y)$ ønsker man ofte at finde et andengradspolynomium $\tilde{f}(x,y)$, som tilnærmer $f(x,y)$ godt nær et punkt (x_0,y_0). Ligesom for en funktion af 1 variabel er det nærliggende at kræve, at f og $\tilde{f}$ skal have samme værdi $\tilde{f}(x_0,y_0) = f(x_0,y_0)$ og samme partielle afledede til og med 2. orden i punktet (x_0,y_0). Ved at opstille kravene i ligninger og løse dem, findes følgende sætning.

SÆTNING 8.9 *(2. Taylorpolynomium). Lad* f *have partielle afledede af 1. og 2. orden i punktet* (x_0,y_0). *Så findes der netop ét polynomium* $\tilde{f}$ *af højst 2. grad, der i punktet* (x_0,y_0) *har samme værdi og samme partielle afledede af 1. og 2. orden som* f *selv. Polynomiet er givet ved*

$$\tilde{f}(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\right]$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0)\right].$$

Polynomiet kaldes det 2. Taylorpolynomium for f *med udviklingspunkt* (x_0,y_0).

Bevis. Ethvert polynomium af højst 2. grad kan skrives

$$\tilde{f}(x,y) = a_0 + b_1(x-x_0) + b_2(y-y_0) + c_1(x-x_0)^2 + c_2(y-y_0)^2 + c_3(x-x_0)(y-y_0).$$

Ved differentiation fås

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = b_1 + 2c_1(x-x_0) + c_3(y-y_0)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = b_2 + 2c_2(y-y_0) + c_3(x-x_0)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2} = 2c_1$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2} = 2c_2$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x\,\partial y} = c_3.$$

Kravene $\tilde{f}(x_0,y_0) = f(x_0,y_0)$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, osv. giver nu ved indsættelse i ligningerne ovenfor

$$\tilde{f}(x_0,y_0) = f(x_0,y_0) \quad\Leftrightarrow\quad a_0 = f(x_0,y_0)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \quad\Leftrightarrow\quad b_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \quad\Leftrightarrow\quad b_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \quad\Leftrightarrow\quad 2c_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \quad\Leftrightarrow\quad c_1 = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \quad\Leftrightarrow\quad 2c_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \quad\Leftrightarrow\quad c_2 = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0) \quad\Leftrightarrow\quad c_3 = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0) \quad\Leftrightarrow\quad c_3 = \frac{1}{2!}2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0).$$

Kravene opfyldes altså af netop ét polynomium:

$$\tilde{f}(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0)\right].$$

Eksempel 8.11. Taylorudvikling i 2 variable.

Lad den optimale temperatur T i en bestemt reaktor være bestemt ved $T = 3e^{x-y+1} - \ln(x+y-2)$, hvor x og y er to koncentrationer. I et rektangel omkring driftspunktet $(x_0,y_0) = (1,2)$ ønskes funktionen tilnærmet ved et polynomium. Problemet kan formuleres:

Find det 2. Taylorpolynomium $\tilde{f}$ for $f(x,y) = 3e^{x-y+1} - \ln(x+y-2)$ med udviklingspunkt $(x_0,y_0) = (1,2)$.

LØSNING:

Vi finder		for $(x,y) = (1,2)$
$f(x,y) = 3e^{x-y+1} - \ln(x+y-2)$		$= 3 - 0 = 3$
$\frac{\partial f}{\partial x} = 3e^{x-y+1} - \frac{1}{x+y-2}$		$= 3 - 1 = 2$
$\frac{\partial f}{\partial y} = -3e^{x-y+1} - \frac{1}{x+y-2}$		$= -3 - 1 = -4$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 3e^{x-y+1} + \frac{1}{(x+y-2)^2}$		$= 3 + 1 = 4$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3e^{x-y+1} + \frac{1}{(x+y-2)^2}$		$= 3 + 1 = 4$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -3e^{x-y+1} + \frac{1}{(x+y-2)^2}$		$= -3 + 1 = -2$.

Ifølge sætning 8.9 bliver polynomiet da

$$\tilde{f}(x,y) = 3 + \frac{1}{1!}\left[2(x-1) - 4(y-2)\right]$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[4(x-1)^2 + 4(y-2)^2 + 2\cdot(-2)(x-1)(y-2)\right]$$
$$= \underline{\underline{3 + 2(x-1) - 4(y-2) + 2(x-1)^2 + 2(y-2)^2 - 2(x-1)(y-2)}}.$$

Det n'te Taylorpolynomium $\tilde{f}(x,y)$. Den forrige sætning om det 2. Taylorpolynomium kan generaliseres til følgende sætning.

SÆTNING 8.10 *(n'te Taylorpolynomium). Lad f have partielle afledede til og med n'te orden i punktet (x_0,y_0). Så findes der netop ét polynomium $\tilde{f}$ af højst n'te grad, der i punktet (x_0,y_0) har samme værd i og samme partielle afledede til og med n'te orden som f selv. Det er givet ved*

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\right)\\ &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\right)^{(2)}\\ &+ \ldots\ldots\\ &+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\right)^{(n)},\end{aligned}$$

som kaldes det n'te Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt (x_0,y_0).

NB. I formlen indgår "**symbolsk potensopløftning**" $(\sim\sim)^{(p)}$. Den udføres ganske som en sædvanlig potensopløftning, bortset fra at potenser og produkter af de afledede erstattes med den tilsvarende afledede af *p'te* orden.

Af $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ fås eksempelvis

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\cdot(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot(y-1)\right]^{(2)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot(x-2)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot(y-1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot(x-2)(y-1),$$

og af $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$ fås

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot(x-2) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot(y-1)\right]^{(3)} =$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\cdot(x-2)^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\cdot(y-1)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\cdot(x-2)^2(y-1) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\cdot(x-2)(y-1)^2\ .$$

For fejlen $f(x,y) - \tilde{f}(x,y)$ gælder følgende sætning.

SÆTNING 8.11 *(Taylors formel). Lad $f(x,y)$ have kontinuerte partielle afledede af $(n+1)$´te orden i en åben mængde, der indeholder forbindelseslinien mellem punktet (x_0,y_0) og punktet (x,y), og lad $\tilde{f}$ være det n'te Taylorpolynomium med udviklingspunkt (x_0,y_0). Der findes da et punkt (ξ,η) på forbindelseslinien mellem (x_0,y_0) og (x,y), så*

$$f(x,y) - \tilde{f}(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)\cdot(y-y_0)\right]^{(n+1)}.$$

8.11 TAYLORPOLYNOMIUM I 3 OG FLERE VARIABLE

Med de samme forudsætninger som for Taylorpolynomium af 2 variable gælder tilsvarende resultater.

Det **2. Taylorpolynomium** $\tilde{f}(x,y,z)$ er

$$f(x_0,y_0,z_0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)\right]$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)^2\right.$$

$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0)(z-z_0)$$

$$\left.+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)(x-x_0)\right].$$

Det **n'te Taylorpolynomium** $\tilde{f}(x,y,z)$ er:

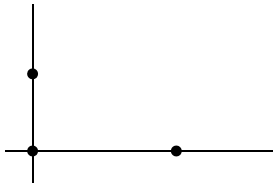
$$\begin{aligned}\tilde{f}(x,y,z) &= f(x_0,y_0,z_0)\\ &+ \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)\right)\\ &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)\right)^{(2)}\\ &+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)\right)^{(3)}\\ &+ \ldots\ldots\ldots\\ &+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)\right)^{(n)}.\end{aligned}$$

Alt om Taylorpolynomier gælder helt analogt for funktioner af flere end 3 variable.

8.12 POLYNOMIEKOLLOKATION I 2 VARIABLE

Polynomium af 1. grad. Polynomiet $\tilde{f}(x,y)$ af 1. grad, som opfylder de 3 kollokationsbetingelser

$\tilde{f}(x_0,y_0+k)=c$	
$\tilde{f}(x_0,y_0)=a$	$\tilde{f}(x_0+h,y_0)=b$



er givet ved

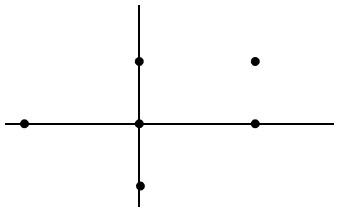
$$\tilde{f}(x,y) = a + \frac{b-a}{h}(x-x_0) + \frac{c-a}{k}(y-y_0) \ .$$

(Formlen bevises ved at indsætte de 3 givne punkter.)

Hermed kan der foretages "lineær interpolation" i en tabel med 2 variable.

Polynomium af 2. grad. Polynomiet $\tilde{f}(x,y)$ af 2. grad, som opfylder de 6 kollokationsbetingelser

	$\tilde{f}(x_0,y_0+k)=c$	$\tilde{f}(x_0+h,y_0+k)=d$
$\tilde{f}(x_0-h,y_0)=e$	$\tilde{f}(x_0,y_0)=a$	$\tilde{f}(x_0+h,y_0)=b$
	$\tilde{f}(x_0,y_0-k)=f$	



er givet ved

$$\tilde{f}(x,y) = a + \frac{b-e}{2h}(x-x_0) + \frac{c-f}{2k}(y-y_0)$$
$$+ \frac{b+e-2a}{2h^2}(x-x_0)^2 + \frac{c+f-2a}{2k^2}(y-y_0)^2 + \frac{a-b-c+d}{hk}(x-x_0)(y-y_0) \ .$$

(Formlen bevises ved at indsætte de 6 givne punkter.) Hermed kan der foretages "kvadratisk interpolation" i en ækvidistant tabel med 2 variable.

Eksempel 8.12. Interpolation med 2 variable.

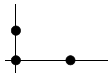
Enthalpien $H = H(T,p)$ af et stof er givet ved tabellen

p				
1	4.294	4.661	5.011	
0	4.103	4.417	4.715	
-1	3.919	4.190	4.444	
	-1	0	1	T

Find $H(0.4,0.5)$.

LØSNING:

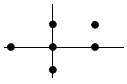
1) Ved interpolation med et lineært kollokationspolynomium fås



$$H(0.4,0.5) \approx 4.417 + \frac{4.715-4.417}{1}(0.4-0) + \frac{4.661-4.417}{1}(0.5-0$$

$$= 4.417 + 0.1192 + 0.122 = 4.6582 \approx \underline{\underline{4.658}}$$

2) Ved interpolation med et kvadratisk kollokationspolynomium fås et nøjagtigere resultat:



$$H(0.4,0.5) \approx 4.417 + \frac{4.715-4.103}{2\times 1}(0.4-0) + \frac{4.661-4.190}{2\times 1}(0.5-0$$

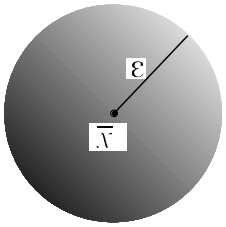
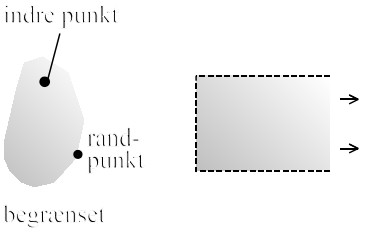
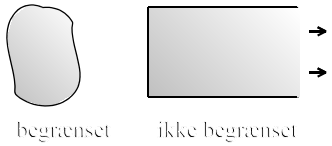
$$+ \frac{4.715+4.103-2\times 4.417}{2\times 1^2}(0.4-0)^2 + \frac{4.661+4.190-2\times 4.417}{2\times 1^2}(0.5-0)$$

$$- \frac{4.417-4.715-4.661+5.011}{1\times 1}(0.4-0)(0.5-0$$

$$= 4.417 + 0.1224 + 0.1178 - 0.0013 + 0.0021 + 0.0104 = 4.6684 \approx \underline{\underline{4.668}}$$

Fejlvurdering: se opgave 8.13.

SUPPLEMENT: 8A PRÆCISE DEFINITIONER FOR MÆNGDER

	omegn (afstand < ε)	åben mængde (lutter indre punkter)	lukket mængde (indeholder alle randpunkter)
$\mathbb{R}^2$			

Lad $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ og lad $S \sqsubseteq \mathbb{R}^n$. Vi definerer da:

1) **(Kugle)omegn** af $\bar{x}$ med radius ϵ: $\{\bar{t} \in \mathbb{R}^n \mid |\bar{t} - \bar{x}| < \epsilon\}$ (se figurer i skemaet under omegn).

2) **Udprikket omegn** af $\bar{x}$: $\{\bar{t} \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |\bar{t} - \bar{x}| < \epsilon\}$ samme figurer som før, men nu tilhører $\bar{x}$ (centrum) ikke omegnen.

3) **Indre punkt** $\bar{x}$ i *S*: der findes en omegn af $\bar{x}$, hvori alle punkter tilhører *S*.

4) **Randpunkt** $\bar{x}$ for *S*: enhver omegn af $\bar{x}$ indeholder både punkter, som tilhører *S,* og som ikke tilhører *S*.

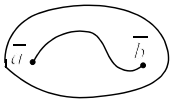
5) **Rand** af *S*: mængden af randpunkter for *S*.

6) **Åben** mængde *S*: ethvert punkt i *S* er et indre punkt.

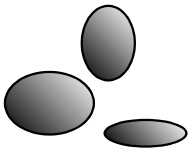
7) **Lukket** mængde *S*: randen af *S* er en delmængde af *S* (specielt kan randen være hele *S*).

8) **Begrænset** mængde *S*: der findes et positivt tal *M*, således at $|\bar{x}| < M$ for alle $\bar{x} \in S$.

9) **Sammenhængende** mængde *S*: der findes til ethvert par af punkter $\bar{a}, \bar{b} \in S$ en kurve [1] i *S*, som går gennem $\bar{a}$ og $\bar{b}$.



10) **Kompakt** mængde *S*: *S* er lukket og begrænset.



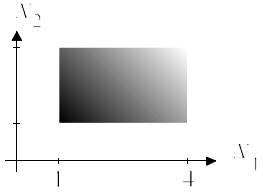
11) **Åbent interval** *I*: *I* er en sammenhængende, åben delmængde af $\mathbb{R}$, f.eks.

$$]-\pi;8[\qquad]\sqrt{2};\infty[\qquad]-\infty;\frac{2}{3}[\qquad \mathbb{R}\ .$$

12) **Åbent n-dimensionalt interval** $K = \left\{\bar{x} \,\middle|\, x_1 \in]a_1;b_1[\wedge x_2 \in]a_2;b_2[\wedge \ldots \wedge x_n \in]a_n;b_n[\right\}$ (åben kasse) *K*:

f.eks. $\left\{(x_1,x_2) \,\middle|\, 1<x_1<4 \wedge 1<x_2<3\right\}$

eller $\left\{(x_1,x_2) \,\middle|\, x_1>0 \wedge x_2>0\right\}$ (første kvadrant).



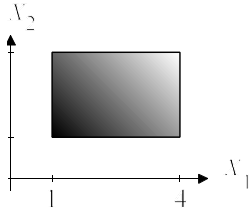
13) **Lukket** interval *I*: *I* er en sammenhængende, lukket delmængde af $\mathbb{R}$, f.eks.

$$[-\pi;8] \qquad [\sqrt{2};\infty[\qquad]-\infty;\frac{2}{3}] \qquad \mathbb{R}\ .$$

14) **Lukket n-dimensionalt interval** $K = \left\{\bar{x} \,\middle|\, x_1 \in [a_1;b_1] \wedge x_2 \in [a_2;b_2] \wedge \ldots \wedge x_n \in [a_n;b_n]\right\}$ (lukket kasse) *K*:

f.eks. $\left\{(x_1,x_2) \,\middle|\, 1 \le x_1 \le 4 \wedge 1 \le x_2 \le 3\right\}$

eller $\left\{(x_1,x_2) \,\middle|\, x_1 \ge 0 \wedge x_2 \ge 0\right\}$.



---

[1] Kurven skal være givet ved en parameterfremstilling $\bar{x} = \left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right),\ \alpha \le t \le \beta$, hvor funktionerne $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ er kontinuerte.

SUPPLEMENT: 8B GRÆNSEVÆRDI FOR $f(x,y)$

Eksempel 8B.1. Grænseværdi.

a) Undersøg $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ for $(x,y) \to (0,0)$.

b) Undersøg $g(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{y}$ for $(x,y) \to (0,0)$.

LØSNING:

a) Vi viser, at $f(x,y)$ ikke har nogen grænseværdi for $(x,y) \to (0,0)$.

Først lader vi punktet (x,y) nærme sig til (0,0) ad en bestemt kurve, f.eks. ad linien $y = x$. Så fås

$$f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \quad \text{for} \quad x \to 0.$$

Dernæst lader vi punktet (x,y) nærme sig til (0,0) ad en anden kurve, f.eks. ad linien $y = 0$. Så fås

$$f(x,0) = \frac{x^2}{x^2+0^2} = 1 \to 1 \quad \text{for} \quad x \to 0.$$

Da grænseværdierne $\frac{1}{2}$ og 1 langs de to kurver er forskellige, har $f(x,y)$

$\underline{\underline{\text{ingen grænseværdi}}}$ for $(x,y) \to (0,0)$.

b) Det er velkendt, at $\dfrac{\sin u}{u} \to 1 \quad \text{for} \quad u \to 0.$

Funktionen *h* givet ved $h(u) = \begin{cases} \dfrac{\sin u}{u} & \text{for} \quad u \neq 0 \\ 1 & \text{for} \quad u = 0 \end{cases}$ vil da være kontinuert for alle $u \in \mathbb{R}$.

For $x \neq 0$ gælder nu $g(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{y} = \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot x = h(xy) \cdot x.$

For $x = 0$ gælder $g(0,y) = \dfrac{\sin(0)}{y} = \dfrac{0}{y} = 0 = 1 \cdot 0 = h(0 \cdot y) \cdot 0.$

I hele definitionsmængden for $g(x,y)$ (dvs. for $y \neq 0$) gælder altså $g(x,y) = h(xy) \cdot x.$
Ved hjælp af reglerne for regning med grænseværdi fås, idet *h* er kontinuert:

$x \cdot y \to 0 \cdot 0 = 0$ for $(x,y) \to (0,0)$

$h(xy) \to h(0) = 1$ for $(x,y) \to (0,0)$

$g(x,y) = h(xy) \cdot x \to 1 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$ for $(x,y) \to (0,0).$

SUPPLEMENT: 8C PARTIEL DIFFERENTIATION I *N* VARIABLE

DEFINITION af partiel differentiation.

Lad $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *være en reel funktion af n variable* $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *med definitionsmængden D, og lad* $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *være et indre punkt i D. Funktionen* $g(x_i) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ *er da for en given værdi af* $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ *en funktion af* ***én*** *variabel* x_i, *defineret i en omegn af* a_i.

Hvis $g(x_i)$ *er differentiabel i* a_i, *siges* $f(\bar{x})$ ***at være differentiabel*** *med hensyn til* x_i *i punktet* $\bar{a}$, *og differentialkvotienten kaldes* ***f's partielle differentialkvotient*** *(eller partielle afledede) med* ***hensyn til*** x_i *i punktet* $\bar{a}$, *og skrives* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$.

Hvis $u = f(\bar{x})$ *er differentiabel med hensyn til* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *i ethvert punkt af D, siges f at have* ***partielle afledede af 1. orden i D.*** *Disse benævnes kort* $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Vi kan nu opfatte $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ *som n funktioner af n variable. Hvis disse funktioner har partielle afledede i D, siges f at have* ***partielle afledede af anden orden i D:***

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\} \qquad \textit{og} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Analogt defineres partielle afledede af højere end 2. orden.

SUPPLEMENT: 8D DIFFERENTIATIONERS RÆKKEFØLGE

SÆTNING 8.4 *(differentiationernes rækkefølge). Hvis*

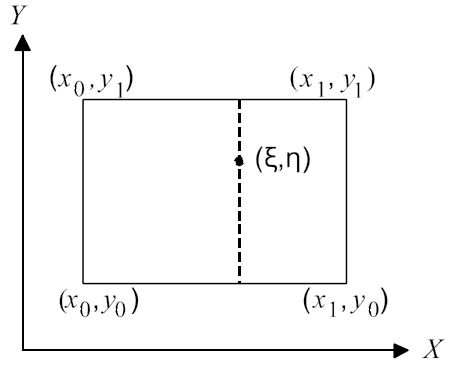
1) f har "blandede" partielle afledede $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *og* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *i en åben mængde D og*

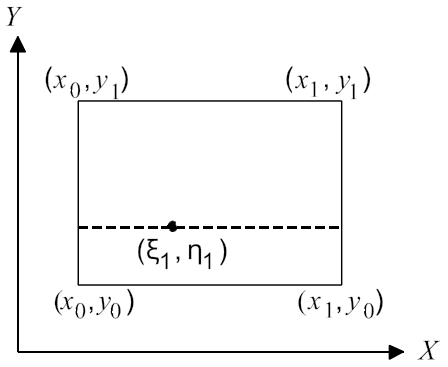
2) disse er kontinuerte i D,

da er de ens i D, dvs. $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.}$

Bevis. Da vi ved dannelsen af $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ skal holde alle variable undtagen x_i og x_j konstante, er det nok at vise sætningen for en funktion f af to variable x og y. Vi skal altså vise, at $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Lad rektanglet $\{(x,y) \mid x_0 \le x \le x_1 \wedge y_0 \le y \le y_1\}$ være indeholdt i D.





Der gælder ligningen

$$[f(x_1,y_1)-f(x_1,y_0)]-[f(x_0,y_1)-f(x_0,y_0)] = [f(x_1,y_1)-f(x_0,y_1)]-[f(x_1,y_0)-f(x_0,y_0)].$$

Indføres funktionerne $g(x) = f(x,y_1)-f(x,y_0)$ og $h(y) = f(x_1,y)-f(x_0,y)$, kan ligningen skrives

$$g(x_1)-g(x_0) = h(y_1)-h(y_0).$$

Ved at anvende differentialregningens middelværdisætning både på ligningens venstre side og højre side fås, at der eksisterer et tal $\xi \in]x_0;x_1[$ og et tal $\eta_1 \in]y_0;y_1[$, sådan at

$$(x_1-x_0)g'(\xi) = (y_1-y_0)h'(\eta_1).$$

Da $g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)$ og $h'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_1,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)$,

kan ligningen nu skrives

$$(x_1-x_0)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y_0)\right] = (y_1-y_0)\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_1,\eta_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta_1)\right].$$

Ved endnu engang at anvende middelværdisætningen både på ligningens venstre og højre side, fås, at der eksisterer et tal $\eta \in]y_0;y_1[$ og et tal $\xi_1 \in]x_0;x_1[$, sådan at

$$(x_1-x_0)(y_1-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi,\eta) = (y_1-y_0)(x_1-x_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi_1,\eta_1).$$

Heraf fås

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi_1,\eta_1),$$

hvor både (ξ,η) og (ξ_1,η_1) tilhører det indre af rektanglet. Vi betragter nu et vilkårligt punkt $(x,y) \in D$, og vælger en følge af rektangler, som indeholder (x,y), og hvis kantlængder konvergerer mod 0. Så ses - da $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ er kontinuerte - at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

SUPPLEMENT: 8E PRAKTISK BETINGELSE FOR DIFFERENTIABILITET

SÆTNING 8E *(praktisk betingelse for differentiabilitet). Har en funktion f kontinuerte partielle afledede i en åben mængde D, da er f differentiabel i D (og dermed også kontinuert).*

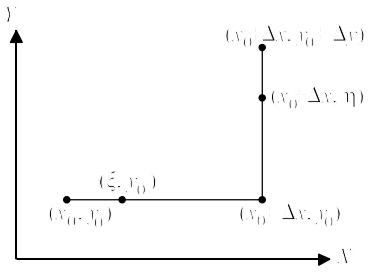
Bevis. For simpelheds skyld fører vi beviset for en funktion f af to variable x og y (beviset kan gennemføres efter de samme retningslinier, hvis f har mere end to variable).
Lad f have kontinuerte partielle afledede i en åben mængde D. Hvis vi kan vise, at brøken i definitionen på differentiabilitet

$$\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-\left(f_x'(x_0,y_0)\,,\,f_y'(x_0,y_0)\right)\cdot(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

har grænseværdien 0 for $(\Delta x\,,\Delta y)\to(0,0)$, så er sætningen bevist.
Ved at indskyde $f(x_0+\Delta x\,,y_0)$ omskrives til

$$\frac{[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)\,]+[f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)\,]-f_x'(x_0,y_0)\,\Delta x-f_y'(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

Den første parentes kan her opfattes som tilvæksten i en funktion af én variabel y (idet x er konstant $x_0+\Delta x$) og den anden parentes som tilvæksten i en funktion af én variabel x (idet y er konstant y_0), jævnfør figuren. Idet vi benytter middelværdisætningen på de to funktioner, bliver brøken



$$\frac{f_y'(x_0+\Delta x,\eta)\Delta y+f_x'(\xi,y_0)\Delta x-f_x'(x_0,y_0)\Delta x-f_y'(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

hvor ξ er et tal mellem x_0 og $x_0+\Delta x$, og η er et tal mellem y_0 og $y_0+\Delta y$.
Denne kan igen omformes til

$$[f_x'(\xi,y_0)-f_x'(x_0,y_0)\,]\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}+[f_y'(x_0+\Delta x,\eta)-f_y'(x_0,y_0)\,]\frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

Da de to brøker er begrænsede (mellem -1 og 1), og de to parenteser går mod nul for $(\Delta x\,,\Delta y)\to(0,0)$ (idet f_x' og f_y' er kontinuerte), vil hele udtrykket gå mod nul, dvs. f er differentiabel i $(x_0\,,y_0)$.
At f også er kontinuert i (x_0,y_0) ses nu således: Da f er differentiabel, følger af definitionen på differentiabilitet, at

$f(\bar{x}_0+\Delta\bar{x})-f(\bar{x}_0)-\bar{\alpha}\cdot\Delta\bar{x}\to\bar{0}$ for $\Delta\bar{x}\to\bar{0}$. Heraf ses, at

$f(\bar{x}_0+\Delta\bar{x})\to f(\bar{x}_0)$ for $\Delta\bar{x}\to\bar{0}$, dvs. f er kontinuert i (x_0,y_0).

SUPPLEMENT: 8F UDDYBNING AF KÆDEREGLEN

SÆTNING 8F *(kæderegel). Lad* $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *have kontinuerte partielle afledede, og lad* $x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)$ *være differentiable. Så vil den sammensatte funktion*

$$u(t) = f\big(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)\big)$$

være differentiabel med differentialkvotienten

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

I anvendelsesfag benyttes normalt samme betegnelse for u og f:

$$\boxed{\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}}.$$

Da *u* på venstre side i formlen opfattes som en funktion af *t*, mens den på højre side opfattes som en funktion af $x_1,x_2,\ldots,x_n$, må vi præcisere forudsætningerne og udledningen nærmere. Forudsætningerne er

1) at funktionerne
$$x_1 = g_1(t),\ x_2 = g_2(t),\ldots,\ x_n = g_n(t)$$
alle er differentiable i en delmængde *S* af de reelle tal,

2) at funktionen *f* har kontinuerte partielle afledede i en åben delmængde *T* af $\mathbb{R}^n$,

3) at for alle $t \in S$ gælder
$$\big(g_1(t),g_2(t),\ldots,g_n(t)\big) \in T.$$

Bevis. For nemheds skyld gennemføres beviset kun for *n*=2. Undervejs benyttes differentialregningens middelværdisætning, der som bekendt siger, at $F(x+\Delta x)-F(x) = F'(\xi)\cdot\Delta x$, hvor ξ ligger mellem *x* og $x+\Delta x$.

Sættes $\Delta x_1 = x_1(t+\Delta t)-x_1(t)$, $\Delta x_2 = x_2(t+\Delta t)-x_2(t)$ og $\Delta u = f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2)-f(x_1,x_2)$, fås efter omformning $\Delta u = [f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2)-f(x_1+\Delta x_1,x_2)]+[f(x_1+\Delta x_1,x_2)-f(x_1,x_2)]$.

Benyttes middelværdisætningen på hver af de kantede parenteser, fås

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1+\Delta x_1,\xi_2)\Delta x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,x_2)\Delta x_1.$$

Vi har da $$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1+\Delta x_1,\xi_2)\frac{\Delta x_2}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,x_2)\frac{\Delta x_1}{\Delta t},$$

hvoraf følger $$\frac{\Delta u}{\Delta t} \to \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)\frac{dx_1}{dt} \quad \text{for} \quad \Delta t \to 0.$$

Hermed er sætningen bevist.

SUPPLEMENT: 8G VARIABELSKIFT I DIFFERENTIALLIGNING

Eksempel 8G.1. Variabelskift i partiel differentialligning.

I differentialligningen

$$\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \ ,$$

hvor $u = f(x,y)$, ønsker man at indføre to nye variable *r* og *s* bestemt ved, at $r=y-2x$ og $s=y+2x$.

Anvendes kædereglen, fås

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot(-2) + \frac{\partial u}{\partial s}\cdot 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial s}\cdot 1 \ .$$

Indsættes dette i differentialligningen, fås den simplere differentialligning $-4\cdot\frac{\partial u}{\partial r} = 0$, dvs. $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$.

Eksempel 8G.2. Variabelskift i differentialligning.

I differentialligningen

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + 5t\frac{dy}{dt} + 6y = 0, \quad t>0$$

ønsker man at skifte uafhængig variabel fra *t* til *x*, hvor *x* er bestemt ved, at $x = \ln t \Leftrightarrow t = e^x$.

Af kædereglen for *n*=1 fås

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{t} \quad \text{og}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\cdot\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{t}\cdot\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{dt} = \left(\frac{1}{t}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{t^2}\cdot\frac{dt}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{t}$$

$$= \frac{1}{t^2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{t^2}\cdot\frac{dy}{dx} \ ,$$

som ved indsættelse i differentialligningen giver den simplere differentialligning

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 6y = 0.$$

SUPPLEMENT: 8H VARIABELSKIFT I DIFFERENTIAL

Lad $u = f\big(x_1(t_1,t_2,\ldots,t_q),\, x_2(t_1,t_2,\ldots,t_q),\ldots,\, x_n(t_1,t_2,\ldots,t_q)\big)$.

Vi kan da finde differentialet af u med hensyn til t-variablene $du = \dfrac{\partial u}{\partial t_1}dt_1 + \dfrac{\partial u}{\partial t_2}dt_2 + \ldots + \dfrac{\partial u}{\partial t_q}dt_q$

ved først at finde differentialet af u med hensyn til x-variablene $du = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$

og heri indsætte differentialerne af x'erne med hensyn til t-variablene

$$dx_j = \frac{\partial x_j}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial x_j}{\partial t_2}dt_2 + \ldots + \frac{\partial x_j}{\partial t_q}dt_q, \qquad j \in \{1,2,\ldots,n\} .$$

Bevis. For kortheds skyld sættes n=3 og q=2.

I differentialet $du = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \dfrac{\partial u}{\partial x_3}dx_3$ indsættes

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2}dt_2 \ , \quad dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2}dt_2 \ , \quad dx_3 = \frac{\partial x_3}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial x_3}{\partial t_2}dt_2 \ .$$

Så fås

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2}dt_2\right) + \frac{\partial u}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2}dt_2\right) + \frac{\partial u}{\partial x_3}\left(\frac{\partial x_3}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial x_3}{\partial t_2}dt_2\right) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t_1}\right)dt_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t_2}\right)dt_2 \\ &= \frac{\partial u}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_2}dt_2 \qquad \text{(kæderegel benyttet)} . \end{aligned}$$

Eksempel 8H.1. Variabelskift i et differential.

For et fysisk-kemisk system benyttes symbolerne E=energien, T=den absolutte temperatur, S=entropien, p=trykket og V=rumfanget. Energien E kan opfattes som en funktion af S og V, dvs. $E = E(S,V)$, og der gælder

da $dE = TdS - pdV$. (1)

Energien E kan imidlertid også opfattes som en funktion af p og T, dvs. $E = E(p,T)$.

Find differentialet af $E = E(p,T)$ med hensyn til p og T, idet der gælder

$$dS = -\alpha V dp + \frac{C_p}{T}dT \qquad (2)$$

$$dV = -\beta V dp + \alpha V dT, \qquad (3)$$

hvor α, β og C_p er kendte størrelser.

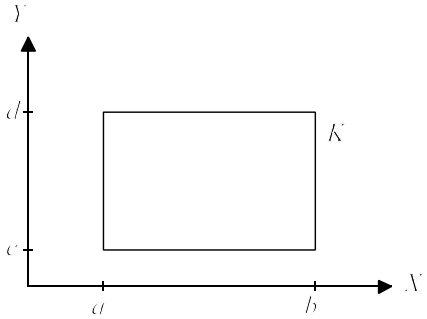
LØSNING:
Ved at indsætte differentialerne (2) og (3) i (1) fås $dE = (\beta pV - \alpha TV)dp + (C_p - \alpha pV)dT$.

SUPPLEMENT: 8I DIFFERENTIATION UNDER INTEGRALTEGN

SÆTNING 8I.1 *(differentiation under integraltegn).*

Lad funktionen $f(x,y)$ *være kontinuert i et rektangel*

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b \ \wedge \ c \le y \le d\}$$



Lad endvidere f have en kontinuert partiel afledet $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *i K.*
Lad endelig en funktion $g(x)$ *være givet ved*

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy \ ,$$

idet x er fastholdt under integrationen. Så er $g(x)$ *differentiabel i* $[a;b]$ *med differentialkvotienten*

$$g'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy \ .$$

Bevis. Man kan undersøge om $g(x)$ er differentiabel ved at undersøge $\frac{\Delta g}{h} = \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ for $h \to 0$.

Vi finder

$$\frac{\Delta g}{h} = \frac{1}{h}\left(g(x+h)-g(x)\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_c^d f(x+h,y)\,dy - \int_c^d f(x,y)\,dy \right)$$

$$= \frac{1}{h}\int_c^d \left(f(x+h,y) - f(x,y)\right)dy$$

$$= \int_c^d \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}\,dy$$

$$= \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x+th,y)\,dy \qquad t \in]0;1[\qquad \text{(differentialregningens middelværdisætning)} .$$

Heraf fås

$$\left| \frac{\Delta g}{h} - \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy \right| = \left| \int_c^d \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x+th,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right) dy \right|$$

$$\le \int_c^d \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x+th,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| dy \qquad \text{(ulighedsregel, kapitel 1)}$$

$$\le \int_c^d \epsilon(h)\,dy \qquad \left(\text{da } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ er ligelig kontinuert} \right)$$

$$= (d-c)\cdot\epsilon(h) \to 0 \quad \text{for} \quad h \to 0 \ .$$

Eksempel 8I.1. Differentiation under integraltegn.

En funktion $g(x)$ er givet ved

$$g(x) = \int_0^{10} e^{\sin(2x+y)}\,dy, \quad x \in [0,10].$$

Find $g'(x)$.

LØSNING:

I rektanglet $K = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 10 \wedge 0 \le y \le 10\}$ er funktionen $f(x,y) = e^{\sin(2x+y)}$ kontinuert med en kontinuert partiel afledet

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\sin(2x+y)} \cdot \cos(2x+y) \cdot 2 \ .$$

Ifølge sætning 8I.1 har *g* derfor en afledet:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}\int_0^{10} e^{\sin(2x+y)}\,dy \\ &= \int_0^{10} \frac{\partial}{\partial x} e^{\sin(2x+y)}\,dy \\ &= \int_0^{10} e^{\sin(2x+y)} \cdot \cos(2x+y) \cdot 2\,dy \qquad \text{substitution: } u=\sin(2x+y),\ du=2\cos(2x+y)dy \\ &= \int_{\sin(2x)}^{\sin(2x+10)} e^u\,du \quad = \quad \left[e^u\right]_{\sin(2x)}^{\sin(2x+10)} \\ &= e^{\sin(2x+10)} - e^{\sin(2x)} \ . \end{aligned}$$

OPGAVER

Opgave 8.1 *(niveaukurver)*

Lad f være en reel funktion af to variable givet ved $f(x,y) = x^2y$.

1) *Skitsér i et xy-koordinatsystem f's niveaukurver svarende til niveauerne* 0, ±½, ±1 *og* ±2.
2) *Har funktionen noget lokalt minimum? - lokalt maksimum? - saddelpunkt?*

Opgave 8.2 [T] *(grafisk fremstilling)*

Man er interesseret i grafisk fremstilling af funktionen $f(x,y) = x^2+y^2-1$. *Der ønskes hovedsageligt betragtet punkter, hvor* $f(x,y) \le 3$, *og der lægges ikke vægt på nøjagtighed, men på principielle træk. Såvel positive som negative x- og y-værdier betragtes.*

1) *Skitsér i et xy-koordinatsystem f's niveaukurver svarende til niveauerne* 0, 1, 2 *og* 3.
2) *Har funktionen noget lokalt minimum? - lokalt maksimum? - saddelpunkt?*
3) *Skitsér i et yz-koordinatsystem skæringskurven mellem f's graf* $\{(x,y,z) \mid z=f(x,y)\}$ *og planen* x=0.
4) *Lav en skitse, der giver et indtryk af grafens 3-dimensionale udseende.*

Opgave 8.3 *(grafisk fremstilling)*

Lad f være en reel funktion af to variable givet ved $f(x,y) = \frac{4}{3}\sqrt{9-x^2-y^2}$.

1) *Angiv f's definitionsmængde (skitsér den i xy-planen).*
2) *Skitsér i et xy-koordinatsystem f's niveaukurver svarende til niveauerne* 0, 1, 2, 3 *og* 4.
3) *Skitsér i et xz-koordinatsystem skæringskurven mellem f's graf* $\{(x,y,z) \mid z=f(x,y)\}$ *og planen* y=0.
4) *Skitsér grafen for f i et xyz-koordinatsystem, således at man får et indtryk af grafens* 3-*dimensionale udseende.*

Opgave 8.4 (grafisk fremstilling)

Man er interesseret i grafisk fremstilling af funktionen $f(x,y) = y^2-x^2$. Der ønskes hovedsageligt betragtet punkter, hvor $x \in [-2{:}2] \wedge y \in [-2{:}2] \wedge f(x,y) \in [-2{:}2]$, *og der lægges ikke vægt på nøjagtighed, men på principielle træk.*

1) *Skitsér i et xy-koordinatsystem f's niveaukurver svarende til niveauerne* -2, -1, 0, 1 *og* 2.
2) *Har funktionen noget lokalt maksimum? - lokalt minimum? - saddelpunkt?*
3) *Lav en skitse, der giver et indtryk af grafens* 3-*dimensionale udseende.*

Opgave 8.5 *(grafisk fremstilling)*

Man er interesseret i grafisk fremstilling af funktionen

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

1) Skitsér i et xy-koordinatsystem f's niveaukurver svarende til niveauerne ½, 1, 2, 4 *og* 16.

2) Skitsér i et xz-koordinatsystem skæringskurven mellem f's graf $\{(x,y,z) \mid z = f(x,y)\}$ *og planen* $y=0$.

3) Skitsér grafen for f i et xyz-koordinatsystem, således at man får et indtryk af grafens 3-dimensionale udseende.

4) Har funktionen noget lokalt maksimum? - lokalt minimum? - saddelpunkt?

Opgave 8.6 *(grænseværdi og kontinuitet)*

Lad en funktion f være bestemt ved

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad \textit{med en definitionsmængde D.}$$

1) Find $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$, *når* $D = \{(x,y) \mid x>0 \wedge y>0\}$.

2) Find $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, *når* $D = \{(x,y) \mid y=x\}$.

3) Find $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, *når* $D = \{(x,y) \mid y=-x\}$.

Lad funktionen g være bestemt ved

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \textit{for} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{for} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

4) Angiv den mængde, for hvilken g er kontinuert.

Opgave 8.7 *(grænseværdi)*

Undersøg, om $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *eksisterer for følgende funktioner*

1) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ *2)* $f(x,y) = \dfrac{(x^2+y^4)^2}{x^2+y^4}$ *3)* $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

4) $f(x,y) = \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$ *5)* $f(x,y) = \dfrac{(y-x^3)^2}{y^2+x^6}$ *6)* $f(x,y) = \dfrac{(x^2-y^3)^2}{x^4+y^6}$.

Opgave 8.8 *(partiel differentiation)*

Find de partielle afledede af første og anden orden for følgende funktioner

1[T]) $f(x,y) = x^3y^2 + 2x^2y + 4$

2) $f(x,y) = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} \qquad (x>y)$

3) $f(x,y) = \sqrt{e^{3x-y}}$

4) $f(x,y) = \ln\sqrt{1+x^2y^4}$

5) $f(x,y,z) = x^3y^2z^2 + xyz^3$

6) $f(x,y,z) = y\cdot\sin(xz) + 2^{xyz}$

7) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^4x_2^3x_3^2x_4 + 17x_1$.

Opgave 8.9 *(partielle afledede)*

1[T])Van der Waals' tilstandsligning for n mol gas er $P = \frac{nRT}{V-nb} - a\frac{n^2}{V^2}$, *hvor R, a og b er konstanter. Find udtryk for* $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T,n}$, $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,n}$ *og* $\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_{V,T}$.

2) Redlich-Kwong-tilstandsligningen for n mol gas er $P = \frac{nRT}{V-nb} - \frac{an^2}{\sqrt{T}\,V(V+nb)}$, *hvor R, a og b er konstanter. Find udtryk for* $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T,n}$, $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,n}$ *og* $\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_{V,T}$.

3) Idealgasligningen for n mol gas er $PV = nRT$, *hvor R er konstant.*

Find udtryk for $\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{P,V}$, $\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,n}$ *og* $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T,n}$.

Opgave 8.10 *(partielle afledede)*

Lad virkningsgraden for en motor være givet tilnærmet ved $f(x,y) = x^3 - y^3 - 3xy - 0.2$, *hvor x og y er to variable.*

1) Find de partielle afledede af 1. og 2. orden af f.

2) Find de partielle afledede af 1. og 2. orden af f i punktet (-1,1).

3) Af et senere kapitel vil det fremgå, at et punkt, hvor der gælder

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \wedge \qquad B^2 - 4AC \equiv \left(2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2 - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0,$$

er et lokalt ekstremumspunkt for f. Er dette tilfældet for punktet (-1,1)*?*

Opgave 8.11 *(differential)*

Find differentialet af funktionen

1) $f(x) = 3x^2+2x+4$ *2)* $f(x) = 2^x+x^2$ *i punktet* $x_0=3$

3) $f(x) = e^{(x^2)} + 3$ *4)* $f(x,y) = 4x^4y+y^2$

5) $f(x,y) = 2^{x+y}+4$ *i punktet* (1,0) *6)* $f(x,y,z) = (\ln x)^{(yz)}$ *i punktet* (e,1,0)

7) $f(\bar{x}) = f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2^4x_3^2x_4^3 + 5$.

Opgave 8.12 *(fejlvurdering)*

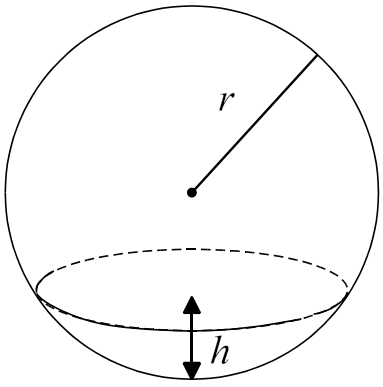
For 1 mol af en ideal gas gælder tilstandsligningen $PV=RT$, *hvor P er trykket i* N/m^2, V *er volumenet i* m^3, T *er temperaturen i grader K, og* $R=8.3143\ J/(K\cdot mol)$ *er en konstant. Af tilstandsligningen kan P beregnes, når T og V er målt.*

Angiv ved hjælp af et differential et tilnærmet udtryk for, hvor meget den beregnede P-værdi bliver for stor, hvis $T=500K$ *og* $V=0.15m^3$ *er målt henholdsvis* ΔT *og* ΔV *for store.*

Opgave 8.13 *(fejlvurdering)*

En kugleformet tank har radius r. Med en pejlestok måler man væskehøjden h for at kunne beregne væskerumfanget $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)$.

Angiv ved hjælp af et differential et tilnærmet udtryk for, hvor meget V bliver for stor, hvis $h \approx 0.1m$ *og* $r \approx 1m$ *er målt henholdsvis* Δh *og* Δr *for store.*

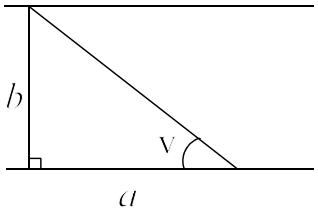


Opgave 8.14 *(fejlvurdering)*

Bredden b af en kløft beregnes, ved at man afsætter stykket a,

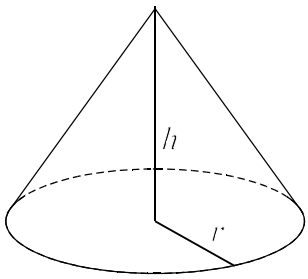
og måler vinklen v, se figuren.

Angiv ved hjælp af et differential et tilnærmet udtryk for, hvor meget b bliver for stor, hvis $a \approx 10m$ *og* $v \approx 30^\circ$ *er målt henholdsvis* Δa *og* Δv *for store.*



Opgave 8.15 [T] *(fejlvurdering)*

En bunke har form som en kegle med højde h og grundfladeradius r. Man måler h og r, for at kunne beregne rumfanget $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.



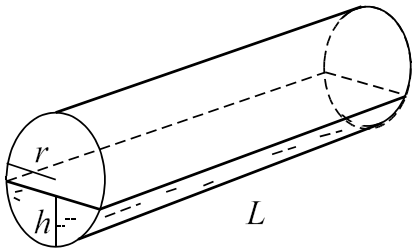
1) Angiv ved hjælp af et differential et tilnærmet udtryk for, hvor meget V bliver for stor, hvis $h \approx 10m$ *og* $r \approx 10m$ *er målt henholdsvis* Δh *og* Δr *for store.*

2) Lad $\Delta h = 0.1m$ *og* $\Delta r = 0.2m$. *Find den relative fejl på V.*

Opgave 8.16 *(fejlvurdering)*

En tank har form som en cirkulær cylinder med radius r og længde L. Idet cylinderaksen er vandret, måler man væskehøjden h med en pejlestok for at kunne beregne rumfanget

$$V = Lr^2 \operatorname{Arccos}\left(\frac{r-h}{r}\right) - L(r-h)\sqrt{2rh-h^2}.$$



Angiv ved hjælp af et differential et tilnærmet udtryk for, hvor meget V bliver for stor, hvis $r \approx 2m$, $L \approx 10m$ *og* $h \approx 1m$ *er målt henholdsvis* Δr, ΔL *og* Δh *for store.*

Opgave 8.17 *(regneregler for differentialer)*

For en funktion f(x,y) og en funktion g(x,y) har man i punktet (x_0, y_0) *fundet* $f(x_0, y_0) = 2$, $g(x_0, y_0) = 3$, $df = 3dx + 4dy$ *og* $dg = 2dx - 5dy$. *Find d(fg) i punktet* (x_0, y_0).

Opgave 8.18 *(regneregler for differentialer)*

Find differentialet af hvert af de følgende udtryk i punktet (x_0, y_0), *idet* $f(x_0, y_0) = 3$, $g(x_0, y_0) = -2$, $h(x_0, y_0) = 2$, $df = -dx + 2dy$, $dg = 3dx - dy$ *og* $dh = dx + dy$.

1) $3f + 2h$ *2)* $2f + gh$ *3)* $\frac{h}{f} + 27$ *4)* $\frac{fh}{g}$ *5)* $\frac{f+2g}{g+3h}$ *6)* $\frac{f^2+3}{h+2}$

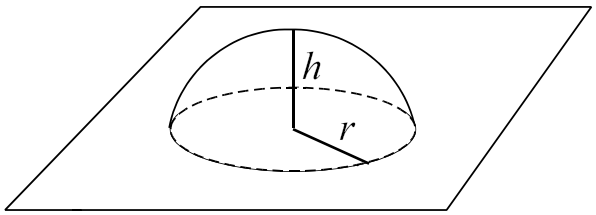
Opgave 8.19 [T] *(kæderegel)*

Lad $u = 2x^3y^2z + xyz^4$, *hvor* $x = 2t - 1$, $y = -3t + 2$ *og* $z = t^2 - 2t + 1$

Find $\frac{du}{dt}$ *for t=1.*

Opgave 8.20 *(kæderegel)*

Vi betragter en boble, der sidder på en plan flade. Boblens krumme overflade har form af en kuglekalot med arealet $A=\pi(r^2+h^2)$*, se figuren.*



1) Idet både r og h er funktioner af tiden t, skal man finde $\frac{dA}{dt}$ *udtrykt ved*

$$r,\ h,\ \frac{dr}{dt} \quad og \quad \frac{dh}{dt}.$$

2) Find $\frac{dA}{dt}$ *for t=1, idet r(1)=2, h(1)=5,*

$$\frac{dr}{dt}(1)=3 \quad og \quad \frac{dh}{dt}(1)=1\ .$$

Opgave 8.21 *(kæderegel)*

Lad $u = x^2yz^2+4xz^2+2xy^2+4y^2z$, *hvor*

$$x = t_1^2t_3t_4^2+3t_1t_2t_3t_4+t_1-2t_2+2t_4$$

$$y = 3t_1^4+t_1t_2^2+t_3t_4+4t_2+t_4-5$$

$$z = t_3t_4^4+t_2^2t_3^2+t_2+t_3+2t_4-1\ .$$

Find $\frac{\partial u}{\partial t_2}$ *for* $(t_1,t_2,t_3,t_4)=(-1,1,-1,1).$

Opgave 8.22 ^{T} *(kæderegel)*

Det årlige overskud fra en virksomhed er beregnet til

$$u = [(1+0.2x)z+(3.1+z)y+(2.1-y)x-9.0]\times 10^6,$$

$$x = 0.7+2s-0.3t$$

$$y = 0.6+0.4s-t$$

$$z = -0.3+0.5s-0.8t\ .$$

Her betegner s og t dimensionsløse variable for henholdsvis markedsprisen på produktet og arbejdslønnen ved fabrikationen.

*Idet (s,t)=(*1,1*), skal man beregne overskuddets følsomhed* $\frac{\partial u}{\partial t}$ *over for ændringer i arbejdslønnen.*

Opgave 8.23 *(Taylorpolynomium i flere variable)*
Find i hvert af de følgende tilfælde det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt i $\bar{a}$

1) $\bar{a} = (2,1)$, $f(x,y) = x^2y^3$

2) $\bar{a} = (1,1)$, $f(x,y) = x^2y - xy^2$

3) $\bar{a} = (0,0)$, $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x+y}$

4) $\bar{a} = (2,1)$, $f(x,y) = \cos(x+2y-4)$

5) $\bar{a} = (2,1,-1)$, $f(x,y,z) = x^2y^3z^3$

6) $\bar{a} = (1,1,1)$, $f(x,y,z) = x^2yz - xyz^2$

7) $\bar{a} = (0,0,0)$, $f(x,y,z) = \dfrac{1}{1+x+y+z}$

8) $\bar{a} = (1,1,1)$, $f(x,y,z) = e^{x+y-z-1}$.

Opgave 8.24 *(kollokation med 2 variable)*
Find i hvert af de følgende tilfælde et polynomium, der stemmer med tabelværdierne

1)

y			
8	*2*	*-*	
7	*3*	*5*	
	1	*2*	*x*

2)

y			
10	*10*	*-*	
7	*1*	*5*	
	2	*4*	*x*

3)

y			
2	*3*	*-*	
1	*2*	*4*	
	0	*1*	*x*

4)

y				
2	*-*	*3*	*6*	
1	*2*	*1*	*3*	
0	*-*	*0*	*-*	
	0	*1*	*2*	*x*

5)

y				
1	*-*	*1*	*2*	
0	*3*	*2*	*2*	
-1	*-*	*1*	*-*	
	-1	*0*	*1*	*x*

6)

y				
2	*-*	*3*	*2*	
1	*0*	*2*	*0*	
0	*-*	*4*	*-*	
	0	*2*	*4*	*x*

Opgave 8.25 *(interpolation med 2 variable)*
Find ved lineær interpolation:

1) f (2.4,8.3) af

y				
9	2.33	2.45	2.56	
8	2.23	2.36	2.48	
7	2.12	2.26	2.39	
	1	2	3	x

(ln (1.3x+y))

2) f (1.2,2.8) af

y				
4	2.61	2.79	2.97	
3	2.26	2.47	2.66	
2	1.84	2.10	2.32	
	0	1	2	x

$(\sqrt{x+1.7y})$

Opgave 8.26 *(interpolation med 2 variable)*
Find ved kvadratisk interpolation:

1) f (2.4,8.3) af

y				
9	2.3321	2.4510	2.5572	
8	2.2300	2.3609	2.4765	
7	2.1163	2.2618	2.3888	
	1	2	3	x

(ln (1.3x+y))

2) f (1.2,2.8) af

y				
4	2.6077	2.7928	2.9665	
3	2.2583	2.4698	2.6646	
2	1.8439	2.0976	2.3238	
	0	1	2	x

$(\sqrt{x+1.7y})$

Opgave 8.27 *(interpolation med 2 variable)*
I eksempel 8.5 blev H(0.4,0.5) beregnet med tilnærmelse. For at få et indtryk af fejlen skal man på samme måde beregne

1) H(1,1) ved den lineære interpolation
2) H(-1,-1) ved den kvadratiske interpolation

og sammenligne med de korrekte værdier.

Opgave 8.H1 *(variabelskift i differentialform)*

Lad u=f(x,y) og lad x=r·cos θ, y=r·sin θ, dvs. $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan\frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$.

1) Vis, at $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$.

2) Vis, at $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$.

Opgave 8.Eksam27a *(grænseværdi, differential, 17 point)*

1) Undersøg $(1-x^2)^{\frac{1}{\ln(1-x)}}$ *for* $x \to 1_$.

2) Undersøg $\frac{(x-1)\cdot \ln x}{(7^x-7)^2}$ *for* $x \to 1$.

3) Lad en funktion f være givet ved

$$f(\bar{x}) = x_1^{\sqrt{x_2}} + \sqrt{\frac{x_1+x_3}{x_2+x_4}} \quad (x_1>0 \ \wedge \ x_2>0 \ \wedge \ x_3>0 \ \wedge \ x_2+x_4>0) .$$

Find differentialet af 1. orden i punktet $(1,4,3,0)$.

Opgave 8.Eksam32a *(grænseværdi, kæderegel, 17 point)*

1) Undersøg $\frac{e^x - e^{-x} + 4x^2 - 2x}{x^2+x^3}$ *for* $x \to 0$.

2) Lad $u = 3xy^2z^3 + x^2y^2z^2 + yz^2 + 2x$,

hvor $x = t^2 - t + 1$, $y = 2t^2 - 2t + 1$, $z = t^2 + t - 1$.

Find $\frac{du}{dt}$ *for* $t = 1$.

Opgave 8.Eksam40a *(Taylorpolynomium, 20 point)*

Lad en funktion f være givet ved $f(x) = \text{Arctan}(x + y - \sqrt{z})$

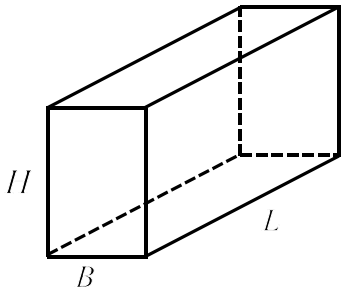
1) Find differentialet df i punktet (1,1,1)

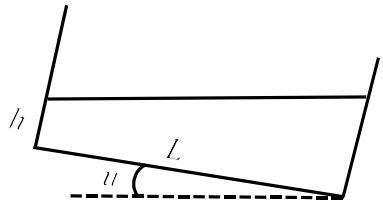
2) Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt i (1,1,1).

Opgave 8.Eksam50a *(differential, 5 point)*
Lad en funktion f være givet ved $f(x,y,z) = \operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{x-y}{z+2}}$. *Find differentialet af 1. orden i punktet* $(x_0,y_0,z_0) = (8,2,1)$.

Opgave 8.Eksam52 *(kæderegel, 10 point)*
Lad $u = (x^2+xy+y^2)2^{y^3+x-y}$ *hvor* $x = 2t^2-2t$, $y = t^3-t^2+2t-1$.
Find $\frac{du}{dt}$ *for* $t=1$.

Opgave 8.Eksam61a *(differential, 10 point)*
En olietank er kasseformet med længden $L = 3m$, *bredden* $B = 1m$ *og højden* $H = 1m$.
Tanken er nedgravet vandret, men ejeren får mistanke om, at den hælder en vinkel u (se figuren).





For at finde u, hælder han $V = 1m^3$ *olie i den tomme tank og måler oliestandens højde h til* $0{,}20\,m$. *Vinklen u kan så findes af formlen* $u = \operatorname{Arctan}\left(\frac{2V}{B\cdot L^2} - \frac{2h}{L}\right)$.
Find u, og angiv ved hjælp af et differential et tilnærmet udtryk for, hvor meget u bliver for stor, hvis $V = 1m^3$ *og* $h = 0{,}20m$ *er målt henholdsvis* ΔV *og* Δh *for store (alle resultater med 3 betydende cifre).*

Opgave 8.Eksam164 *(differential, uden hjælpemidler, 5 point)*
Find differentialet af funktionen $f(x,y) = \frac{x}{y^2} - \ln\left(\frac{x}{y^2}\right) + e^{(x-1)(y+2)}$
i punktet $(x_0,y_0) = (1,-2)$.

Opgave 8.Eksam228 *(differential, uden brug af hjælpemidler, 5 point)*

Find differentialet af funktionen $f(x,y) = 2x\mathrm{e}^{(xy-2)}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$ *i punktet* $(x_0,y_0) = (1,2)$.

Opgave 8.Eksam241 *(kæderegel, 15 point)*

Lad funktionen f være givet ved $f(x,y) = \mathrm{Arcsin}(xy) + y^2 + y \cdot \sin x$.

Lad endvidere g være en differentiabel funktion af én variabel med $g(0) = 1$ *og* $g'(0) = 7$.

Find ved hjælp af kædereglen for funktioner af flere variable $h'(0)$, *når h er givet ved forskriften*

$h(t) = f(3t, g(t))$.

Opgave 8.Eksam256 *(Taylorpolynomium, 12 point)*

Find det 2. Taylorpolynomium for $f(x,y) = \ln(xy) + \frac{x}{y}$ *med udviklingspunkt* $(x_0,y_0) = (1,1)$.

Opgave 8.Eksam280 *(Taylorpolynomium, 15 point)*

Find det 2. Taylorpolynomium for $f(x,y) = \mathrm{e}^{x-2y} - xy^2 + \sqrt{1+x+y}$

med udviklingspunkt $(x_0,y_0) = (2,1)$.

Opgave 8H.Eksam74a *(variabelskift, 20 point)*

For en funktion $u = f(x,y), \quad y > 0$ *gælder differentialligningen*

$$\left(xy + \frac{1}{y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

I denne differentialligning ønsker man at erstatte de variable x og y med to nye variable s og t, bestemt ved $x = st, \quad y = \frac{1}{2t}$. *Find den nye differentialligning.*

9 KURVER, KURVEINTEGRAL OG STAMFUNKTION

9.1 KURVE I PLANEN

Parameterfremstilling

Lad to funktioner $x(t)$ og $y(t)$ være defineret i et interval I. Når t gennemløber I, vil punktet $(x(t),y(t))$ gennemløbe en kurve k. Denne siges at have **parameterfremstillingen**

$$k: \quad (x,y) = (x(t),y(t)), \qquad t \in I$$

I praksis er t ofte tiden.

Eksempelvis kan en partikels banekurve være den på figur 9.1 viste ellipse med parameterfremstillingen

$$k: \quad (x,y) = (3\cos t, 2\sin t), \quad t \in [0;2\pi[$$

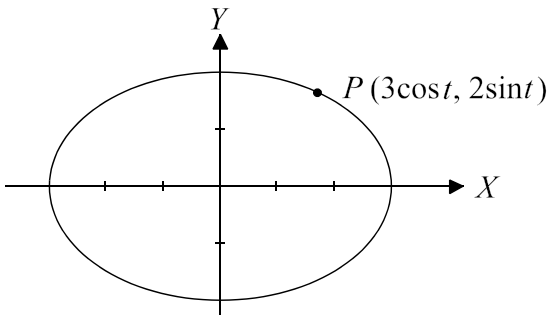
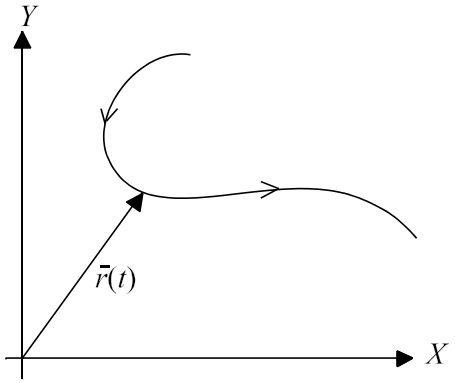


Fig 9.1. *Ellipse.*

Vektorfunktion

Stedvektoren til kurvepunktet $(x(t),y(t))$ betegnes $\bar{r}(t)$. Stedvektoren $\bar{r}(t)$ kaldes en **vektorfunktion**, fordi den er en vektor, som afhænger af t.

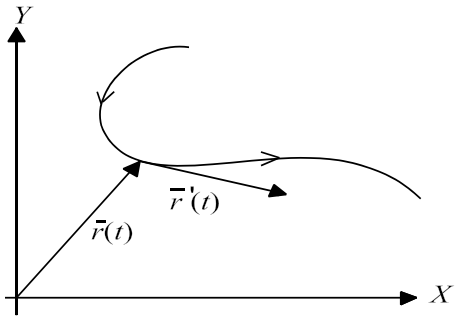


Regulær kurve og tangent

Hvis funktionerne $x(t)$ og $y(t)$ er differentiable i I, kan vi definere den afledede $\bar{r}'(t)$ ved

$$\bar{r}'(t) = (x'(t), y'(t)), \qquad t \in I.$$

Hvis der eksisterer en parameterfremstilling for kurven, sådan at $x(t)$ og $y(t)$ er differentiable i I, $\bar{r}'(t) \neq (0,0)$ overalt i I, og $x'(t)$ og $y'(t)$ er kontinuerte, kaldes k en **regulær kurve**. I ethvert punkt $P_0(x(t_0), y(t_0))$ har kurven da en **tangent**, som er den linie, der går gennem P_0 og har $\bar{r}'(t_0)$ som retningsvektor.



Hastighed og acceleration

Er t tiden, kaldes $\bar{r}'(t)$ for hastighedsvektoren og $\bar{r}''(t) = (x''(t), y''(t))$ for accelerationsvektoren. Eksempelvis vil banekurven fra figur 9.1 givet ved

$$\bar{r}(t) = (3\cos t, 2\sin t), \qquad t \in [0; 2\pi$$

have hastighedsvektoren

$$\bar{r}'(t) = (-3\sin t, 2\cos t), \qquad t \in [0; 2\pi$$

og accelerationsvektoren

$$\bar{r}''(t) = (-3\cos t, -2\sin t), \qquad t \in [0; 2\pi[$$

se figur 9.2.

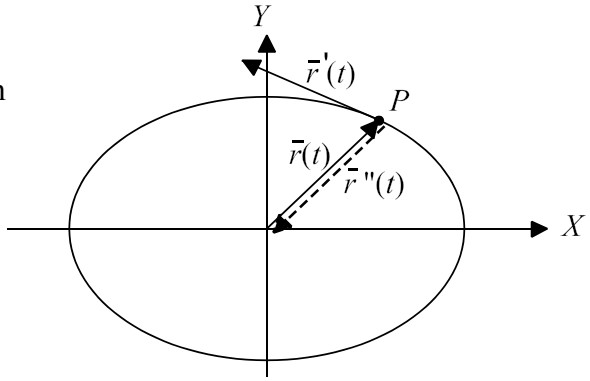


Fig. 9.2. *Hastigheds- og accelerationsvektor.*

Differentiationsregler for vektorfunktioner

Lad $\bar{r}_1(t)$ og $\bar{r}_2(t)$ være vektorfunktioner, og lad c_1 og c_2 være konstanter. Så gælder

$$\frac{d}{dt}(c_1\bar{r}_1 + c_2\bar{r}_2) = c_1\frac{d\bar{r}_1}{dt} + c_2\frac{d\bar{r}_2}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2) = \frac{d\bar{r}_1}{dt}\cdot\bar{r}_2 + \bar{r}_1\cdot\frac{d\bar{r}_2}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_1 \times \bar{r}_2) = \frac{d\bar{r}_1}{dt}\times\bar{r}_2 + \bar{r}_1\times\frac{d\bar{r}_2}{dt}$$

Bevis. Indsættes $\bar{r}_1 = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$ og $\bar{r}_2 = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$ i formlerne, finder man ved udregning, at de stemmer.

Eksempel 9.1. Differentiationsregler.

Lad der for to tidsafhængige vektorer $\bar{a} = \bar{a}(t)$ og $\bar{b} = \bar{b}(t)$ gælde $\frac{d\bar{a}}{dt} = \bar{b}$ og $\frac{d\bar{b}}{dt} = \bar{a} + 2\bar{b}$. Find $\frac{d}{dt}(\bar{a} \times \bar{b})$ udtrykt ved $\bar{a}$ og $\bar{b}$.

LØSNING:

$$\frac{d}{dt}(\bar{a} \times \bar{b}) = \frac{d\bar{a}}{dt} \times \bar{b} + \bar{a} \times \frac{d\bar{b}}{dt} = \bar{b} \times \bar{b} + \bar{a} \times (\bar{a} + 2\bar{b})$$

$$= \bar{0} + \bar{0} + 2\bar{a} \times \bar{b} = \underline{\underline{2\bar{a} \times \bar{b}}} .$$

9.2 KURVE I RUMMET

Alt hvad der er nævnt om kurver i planen, gælder på tilsvarende måde i rummet, når der tilføjes en z-koordinat.

Parameterfremstilling

For en rumkurve skrives

$$k: \quad (x,y,z) = (x(t),y(t),z(t)), \qquad t \in I.$$

Eksempelvis kan en partikels banekurve være den på figur 9.3 viste skruelinie med parameterfremstillingen

$$k: \quad (x,y,z) = (6\cos t, 6\sin t, t), \qquad t \in [0;6\pi].$$

Den tilsvarende vektorfunktion er

$$\bar{r}(t) = (6\cos t, 6\sin t, t), \qquad t \in [0;6\pi].$$

Skruelinien er regulær, da

$$\bar{r}\,'(t) = (-6\sin t, 6\cos t, 1) \neq (0,0,0)$$

for alle $t \in [0;6\pi]$.

Kurven har derfor i ethvert punkt

$P_0 = (6\cos t_0, 6\sin t_0, t_0)$ en tangent med retningsvektoren $\bar{r}\,'(t_0)$.

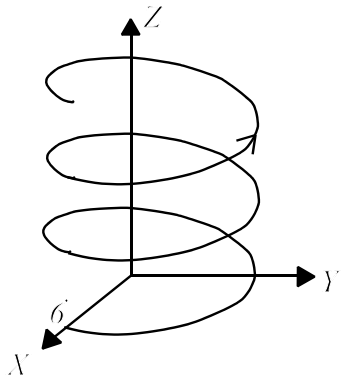


Fig. 9.3. *Skruelinie.*

Hastighedsvektoren i P_0 er
$\bar{r}\,'(t_0) = (-6\sin t_0, 6\cos t_0, 1)$,
og accelerationsvektoren i P_0 er
$\bar{r}\,''(t_0) = (-6\cos t_0, -6\sin t_0, 0)$,
se fig.9.4.

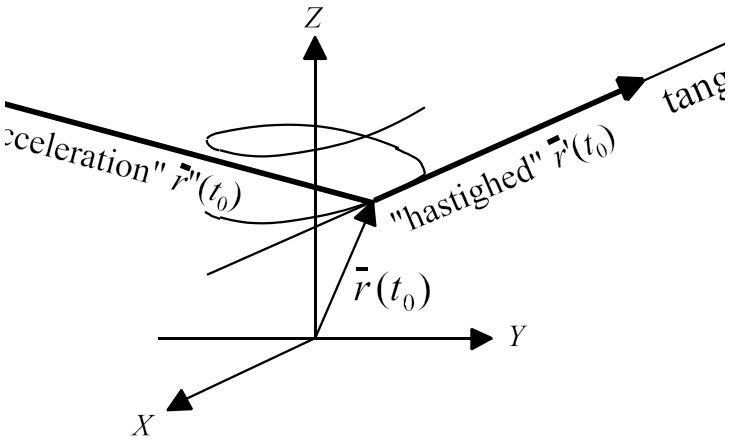


Fig. 9.4. *Hastighed og acceleration.*

9.3 KURVEINTEGRALET $\int_k F_1(x,y,z)\,dx + F_2(x,y,z)\,dy + F_3(x,y,z)\,dz$

Anskuelig indledning 1

Vi betragter en partikel og en kraft

$$\bar{F} = \big(F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)\big),$$

som påvirker partiklen, når den befinder sig i punktet (x,y,z). Vi vil prøve at finde det arbejde, som kraften $\bar{F}$ udfører, når partiklen gennemløber kurven *k*.
I en "uendelig kort" tid *dt* vil de differentielle tilvækster i partiklens koordinater være

$$(dx,dy,dz) = \left(\frac{dx}{dt}dt, \frac{dy}{dt}dt, \frac{dz}{dt}dt\right)$$

eller kort $d\bar{r} = \frac{d\bar{r}}{dt}dt$.

I tiden *dt* vil arbejdet (= kraft · vej) blive

$$\bar{F}\cdot d\bar{r} = \bar{F}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}dt \qquad \text{(se figur 9.5).}$$

Ved opsummering over hele tidsintervallet $[t_0\,;t_1]$ fås det samlede arbejde

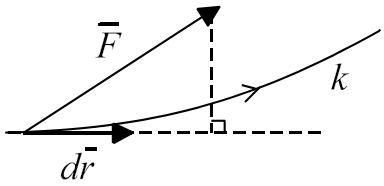


Fig. 9.5. *Arbejdet* $\bar{F}\cdot d\bar{r}$.

$$\int_k \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_{t_0}^{t_1}\left(\bar{F}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}\right)dt = \int_{t_0}^{t_1}\left(F_1\frac{dx}{dt} + F_2\frac{dy}{dt} + F_3\frac{dz}{dt}\right)dt\ .$$

Anskuelig indledning 2

Vi betragter et fysisk-kemisk system, hvis tilstand er givet ved to variable T=temperaturen og p=trykket. Systemets tilstand ændres på en sådan måde, at tilstandspunktet (T,p) gennemløber en kurve

$$k:\ (T,p) = (T(t),p(t)), \qquad \begin{cases} \text{start}: & t=t_0 \\ \text{slut}: & t=t_1 \end{cases}.$$

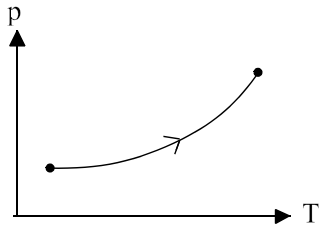


Fig. 9.6. *Kurve.*

Svarende til en "uendelig lille" ændring dt vil tilstandspunktet (T,p) få en differentiel ændring $(dT,dp) = \left(\frac{dT}{dt}dt, \frac{dp}{dt}dt\right)$.

Antag, at den tilsvarende differentielt tilførte varme kan skrives

$$F_1(T,p)dT + F_2(T,p)dp\ .$$

Ved opsummering fra t_0 til t_1 fås den i alt tilførte varme langs k

$$\int_k F_1\,dT + F_2\,dp = \int_{t_0}^{t_1}\left(F_1\frac{dT}{dt} + F_2\frac{dp}{dt}\right)dt\ .$$

DEFINITION *(kurveintegralet* $\int_k F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz)$. *Lad kurven* k *have en parameterfremstilling* $\bar{r}(t) = (x(t),y(t),z(t)),\ t\in[t_0;t_1],$ *og lad der eksistere en afledet* $\frac{d\bar{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)$ *for alle* $t\in[t_0;t_1]$.

Ved kurveintegralet

$$\int_k \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_k F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz$$

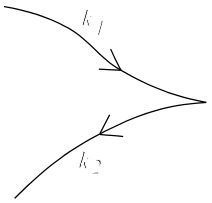
forstås da

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\bar{F}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}\right)dt = \int_{t_0}^{t_1}\Big(F_1(x(t),y(t),z(t))\frac{dx}{dt} + F_2(x(t),y(t),z(t))\frac{dy}{dt} + F_3(x(t),y(t),z(t))\frac{dz}{dt}\Big)\,dt\ .$$

Uddybning af definition. Skrivemåden $\int_k \bar{F}\cdot d\bar{r}$ eller $\int_k F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$ er berettiget, fordi man kan vise, at kurveintegralets værdi ikke afhænger af, hvilken parameterfremstilling der benyttes for kurven *k*.

Er slutpunktet for en kurve k_1 lig med startpunktet for en kurve k_2, defineres

$$\int_{k_1 \cup k_2} \bar{F}\cdot d\bar{r} \;=\; \int_{k_1} \bar{F}\cdot d\bar{r} + \int_{k_2} \bar{F}\cdot d\bar{r}\ .$$



Eksempel 9.2. Kurveintegral.

Når en partikel befinder sig i punktet (x,y,z), påvirkes den af kraften

$$\bar{F} = (2xy+z, x^2, x)\ .$$

Find det af kraften udførte arbejde, når partiklen gennemløber kurven *k* givet ved parameterfremstillingen

$$k:\quad (x,y,z) = (t,t,t^2),\quad t\in[0;1]\ .$$

LØSNING:

Arbejdet er givet ved kurveintegralet

$$A = \int_k \bar{F}\cdot d\bar{r}\ .$$

Ifølge definitionen på kurveintegralet, kan det beregnes ved at erstatte $d\bar{r}$ med $\frac{d\bar{r}}{dt}dt$, og indsætte grænserne for *t* som integralets grænser:

$$A = \int_0^1 \bar{F}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}dt = \int_0^1 (2xy+z, x^2, x)\cdot(1,1,2t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (2t\cdot t + t^2, t^2, t)\cdot(1,1,2t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (3t^2 + t^2 + 2t^2)\,dt = \int_0^1 6t^2\,dt = \left[\frac{6}{3}t^3\right]_o^1 = \underline{\underline{2}}\ .$$

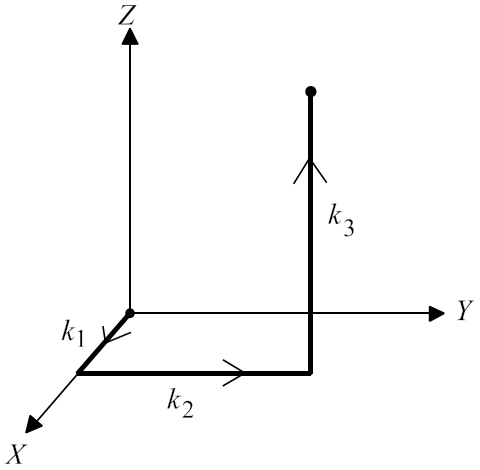
Eksempel 9.3. Kurveintegral langs stykkevis kurve.

Lad

$$\overline{F} = (xy, 2xy + z, yz), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

Find kurveintegralet $\int_k \overline{F} \cdot d\overline{r}$, hvor k er en "stykkevis akseparallel" kurve, idet k er sammenstykket af 3 retlinede delkurver k_1, k_2, k_3, som hver er parallel med en af koordinatakserne:

$$\begin{aligned} k_1&: \ (x,y,z) = (t,0,0) \ , \ t \in [0;1] \\ k_2&: \ (x,y,z) = (1,t,0) \ , \ t \in [0;2] \\ k_3&: \ (x,y,z) = (1,2,t) \ , \ t \in [0;3] . \end{aligned}$$



LØSNING:

Vi finder

$$\begin{aligned} \int_k \overline{F} \cdot d\overline{r} &= \int_{k_1} \overline{F} \cdot d\overline{r} + \int_{k_2} \overline{F} \cdot d\overline{r} + \int_{k_3} \overline{F} \cdot d\overline{r} \\ &= \int_0^1 \overline{F} \cdot \frac{d\overline{r}}{dt}\, dt + \int_0^2 \overline{F} \cdot \frac{d\overline{r}}{dt}\, dt + \int_0^3 \overline{F} \cdot \frac{d\overline{r}}{dt}\, dt \\ &= \int_0^1 \overline{F} \cdot (1,0,0)\, dt + \int_0^2 \overline{F} \cdot (0,1,0)\, dt + \int_0^3 \overline{F} \cdot (0,0,1)\, dt \\ &= \int_0^1 F_1\, dt + \int_0^2 F_2\, dt + \int_0^3 F_3\, dt \\ &= \int_0^1 xy\, dt + \int_0^2 (2xy + z)\, dt + \int_0^3 yz\, dt \\ &= \int_0^1 t \cdot 0\, dt + \int_0^2 (2 \cdot 1 \cdot t + 0)\, dt + \int_0^3 2 \cdot t\, dt \\ &= \int_0^1 0\, dt + \int_0^2 2t\, dt + \int_0^3 2t\, dt \\ &= 0 + [t^2]_0^2 + [t^2]_0^3 = (4-0) + (9-0) = \underline{\underline{13}} . \end{aligned}$$

9.4 STAMFUNKTION AF 2 VARIABLE

Ved en stamfunktion F til f i et interval I forstås som bekendt en differentiabel funktion, der opfylder betingelsen $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in I$. Eksempelvis vil en stamfunktion til $f(x) = 2x$ være $F(x) = \int 2x\,dx = x^2$.

Definitionen på stamfunktion kan også formuleres ved hjælp af differentialer (idet $dF(x) = F'(x)dx$):

$$\left.\begin{array}{l} F(x) \text{ er en} \\ \text{stamfunktion} \\ \text{til } f(x)dx \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} F(x) \text{ har differentialet} \\ dF(x) = f(x)dx \\ \text{for alle } x \in I. \end{array}\right.$$

For en funktion af 2 variable indfører vi nu en tilsvarende definition.

DEFINITION *(stamfunktion). Lad S være en åben sammenhængende mængde i planen. Så defineres*

$$\left.\begin{array}{l} u(x,y) \text{ er en stam-} \\ \text{funktion til} \\ F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy \;\; i \;\; S \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} u(x,y) \text{ har differentialet} \\ du = F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy \\ \text{for alle } (x,y) \in S. \end{array}\right.$$

Eksempelvis er $u = xy^2 + 2y$ en stamfunktion til $y^2dx + (2xy + 2)dy \;\text{ i }\; \mathbb{R}^2$, idet u har differentialet $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = y^2dx + (2xy + 2)dy \;\text{ i }\; \mathbb{R}^2$. Et udtryk af formen

$F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy$ (en "differentialform")

har i det ydre samme form som et differential, men behøver slet ikke at være et differential - behøver altså slet ikke at have nogen stamfunktion. (Men når udtrykket lige netop er et differential, bliver det for tydelighedens skyld tit kaldt: eksakt differential, totalt differential, eksakt differentialform, differentialform med stamfunktion). Differentialformer spiller blandt andet en fremtrædende rolle i den fysiske kemi, idet beregninger med funktioner (energi, enthalpi m.m.) foretages ud fra kendskab til deres differentialer.

Antagelser: I dette afsnit om stamfunktion vil vi gøre to antagelser:

a) K er et rektangel $\{(x,y) \mid a<x<b \wedge c<y<d\}$, se figur 9.7 (specielt et udartet rektangel: a og c må gerne være $-\infty$, ligesom b og d må være $+\infty$).

b) F_1 og F_2 er reelle funktioner med kontinuerte partielle afledede af 1. orden i K.

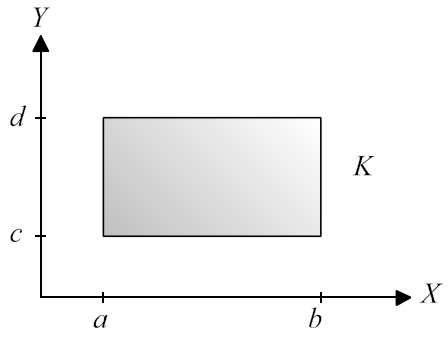


Fig. 9.7. *Rektangel K.*

SÆTNING 9.1 *(krydsdifferentiationsreglen). Med antagelserne a) og b) har man*

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy \\ \textit{er et (eksakt)} \\ \textit{differential i } K \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \textit{for alle} \quad (x,y)\in K.$$

Bevis. Først bevises implikationen $\Longrightarrow$: Vi går altså ud fra, at $F_1\,dx + F_2\,dy$ er et (eksakt) differential $\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$, dvs. $F_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$ og $F_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$. Af $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ fås nu $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ eller $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$.

Dernæst bevises implikationen $\Longleftarrow$: Vi skal altså ud fra ligningen $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ vise, at der findes en funktion u, sådan at $\frac{\partial u}{\partial x} = F_1$ og $\frac{\partial u}{\partial y} = F_2$. Vi vil prøve at lade $u(x,y)$ være kurveintegralet langs en akseparallel knæklinie fra (x_0,y_0) til (x,y), se figur 9.8:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} F_1(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} F_2(x,t)\,dt, \quad (x_0,y_0)\in K.$$

Da $\int_{x_0}^{x} F_1(t,y_0)\,dt$ er en funktion af x alene, fås

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{y_0}^{y} F_2(x,t)\,dt\right) = F_2(x,y).$$

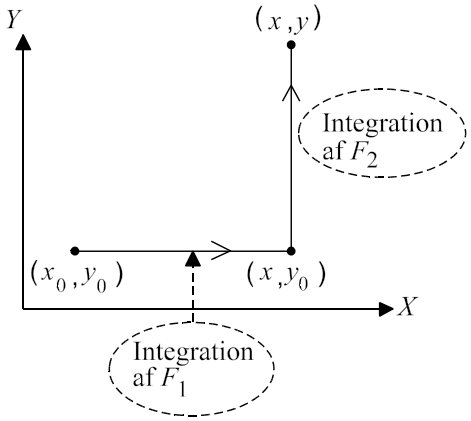


Fig. 9.8. *Akseparallel knæklinie.*

Endvidere fås

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{x_0}^{x} F_1(t,y_0)\,dt\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{y_0}^{y} F_2(x,t)\,dt\right)$$

$$= F_1(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,t)\,dt \qquad \textbf{(sætning 8I.1 om differentiation under integraltegn)}$$

$$= F_1(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,t)\,dt \qquad \left(\textbf{benyttet } \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}\right)$$

$$= F_1(x,y_0) + F_1(x,y) - F_1(x,y_0) = F_1(x,y).$$

Eksempelvis er $(2xy+2)\,dx + x^2\,dy$ et (eksakt) differential i "kassen $\mathbb{R}^2$", da F_1 og F_2 har kontinuerte partielle afledede i $\mathbb{R}^2$, og $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x = \frac{\partial F_2}{\partial x}$.

Når man, f.eks. efter brug af krydsdifferentiationsreglen, ved at $F_1\,dx + F_2\,dy$ er et (eksakt) differential i K, kan en stamfunktion $u(x,y)$ bestemmes. Herom handler den følgende sætning.

SÆTNING 9.2 *(bestemmelse af stamfunktion).*

Kurvemetode: *Lad* $(x_0,y_0)\in K$. *Er* $F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy$ *et differential i K, så er samtlige stamfunktioner u givet ved kurveintegralet langs en akseparallel knæklinie fra* (x_0,y_0) *til* (x,y):

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} F_1(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} F_2(x,t)\,dt + C, \qquad C\in\mathbb{R},$$

hvor (x_0,y_0) *kan vælges efter behag i K.* *(Knæklinien kan erstattes af en vilkårlig kurve fra* (x_0,y_0) *til* (x,y), *som vi senere vil se af sætning 9.3.)*

Integrations-differentiationsmetode: *Først integreres* $\frac{\partial u}{\partial x} = F_1(x,y)$ *med hensyn til x, hvorpå vi kræver, at resultatet* $u(x,y) = \int F_1(x,y)\,dx + h(y)$ *skal opfylde betingelsen* $\frac{\partial u}{\partial y} = F_2(x,y)$.

Bevis for kurvemetoden. Af beviset for sætning 9.1 fremgår, at hvis $F_1\,dx + F_2\,dy$ er et (eksakt) differential i K, så er funktionen $u^*(x,y) = \int_{x_0}^{x} F_1(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} F_2(x,t)\,dt$ én af stamfunktionerne. Lad u være en vilkårlig stamfunktion til $F_1\,dx + F_2\,dy$. Vi mangler da blot vise, at $u-u^*$ er en konstant. Det ses, at $u-u^*$ må have de partielle afledede 0, fordi $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u^*}{\partial x} = F_1$ og $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u^*}{\partial y} = F_2$. Heraf følger, at $u-u^*$ er konstant langs linier parallelle med akserne, og da to punkter i et rektangel altid kan forbindes med en akseparallel knæklinie, der helt ligger i rektanglet, så er $u-u^*$ konstant i hele K.

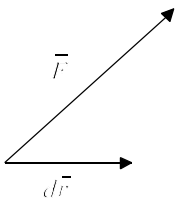
Bevis for integrations-differentiationsmetoden. Metodens rigtighed fremgår af eksempel 9.4.

Eksempel 9.4. Stamfunktion.

1) Undersøg, om arbejdet $2xy\,dx - xy\,dy$ er et (eksakt) differential i mængden $K=\mathbb{R}^2$, og find i bekræftende fald samtlige stamfunktioner.

2) Undersøg, om arbejdet $\left(x-\frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{x}+2y\right)dy$ er et (eksakt) differential i mængden $K=\{(x,y)\mid x>0 \wedge y\in\mathbb{R}\}$, og find i bekræftende fald samtlige stamfunktioner.

Anvendelse. Flyttes en partikel et infinitesimalt stykke $d\bar{r} = (dx,dy)$, udfører kraften $\bar{F}$ arbejdet $\bar{F}\cdot d\bar{r} = F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy$. Er dette et (eksakt) differential $\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$, dvs. er $\bar{F} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \overline{grad}\,u$, kan man indføre en potentiel energi $E_p = -u(x,y)$.



LØSNING:

1) Antagelserne a) og b) er opfyldt.

Idet $F_1(x,y) = 2xy$ og $F_2(x,y) = -xy$, fås $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x$ og $\frac{\partial F_2}{\partial x} = -y$. Da $\frac{\partial F_1}{\partial y} \neq \frac{\partial F_2}{\partial x}$, kan $F_1\,dx + F_2\,dy$ ifølge sætning 9.1

ikke være et (eksakt) differential i $\mathbb{R}^2$.

Derfor findes der heller ingen stamfunktion.

2) Antagelserne a) og b) er opfyldt.

Idet $F_1(x,y) = x - \frac{y}{x^2}$ og $F_2(x,y) = \frac{1}{x} + 2y$, fås $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-1}{x^2}$ og $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{-1}{x^2}$. Da $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ i K, er $F_1\,dx + F_2\,dy$ ifølge sætning 9.1 et (eksakt) differential i K.

Kurvemetode: Idet $(x_0,y_0) = (1,0) \in K$, fås

$$u(x,y) = \int_1^x \left(t - \frac{0}{t^2} \right) dt + \int_0^y \left(\frac{1}{x} + 2t \right) dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^x + \left[\frac{t}{x} + t^2 \right]_0^y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{y}{x} + y^2.$$

Samtlige stamfunktioner er da $u(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y}{x} + y^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

(Kontrol mod regnefejl: $\frac{\partial u}{\partial x} = x - \frac{y}{x^2} = F_1(x,y)$ og $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} + 2y = F_2(x,y)$.)

Integrations-differentiationsmetode: Først integreres $\frac{\partial u}{\partial x} = x - \frac{y}{x^2}$ med hensyn til x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x - \frac{y}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad u(x,y) = \int \left(x - \frac{y}{x^2} \right) dx + h(y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y}{x} + h(y).$$

Derpå kræver vi, at resultatet $u(x,y)$ ved differentiation med hensyn til y opfylder betingelsen

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} + 2y, \text{ dvs. } 0 + \frac{1}{x} + h'(y) = \frac{1}{x} + 2y \quad \Leftrightarrow \quad h'(y) = 2y \quad \Leftrightarrow \quad h(y) = y^2 + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Samtlige stamfunktioner er da $u(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y}{x} + y^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

(Kontrol mod regnefejl: $\frac{\partial u}{\partial x} = x - \frac{y}{x^2} = F_1(x,y)$ og $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} + 2y = F_2(x,y)$.)

Uafhængighed af vejen.

Kurveintegralet af $F_1\,dx + F_2\,dy$ siges at være **"uafhængigt af vejen"** i S, hvis det for vilkårlige punkter (x_0,y_0) og (x_1,y_1) i S gælder, at kurveintegralet langs alle kurver med startpunkt i (x_0,y_0) og slutpunkt i (x_1,y_1) har samme værdi. Kurveintegralet skrives i så fald $\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \bar{F}\cdot d\bar{r}$ eller $\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} F_1\,dx + F_2\,dy$. Der gælder nu følgende sætning

SÆTNING 9.3 *(uafhængighed af vejen).*

$$\left.\begin{array}{l} F_1\,dx + F_2\,dy \\ \textit{er et (eksakt)} \\ \textit{differential i } S \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \textit{kurveintegralet af} \\ F_1\,dx + F_2\,dy \quad \textit{er uafhæn-} \\ \textit{gigt af vejen i } S. \end{array}\right.$$

Bevis. 1) Først bevises implikationen $\Longrightarrow$: Vi går altså ud fra, at der eksisterer en stamfunktion u, så $du = F_1\,dx + F_2\,dy$, dvs. $\frac{\partial u}{\partial x} = F_1(x,y)$ og $\frac{\partial u}{\partial y} = F_2(x,y)$. For kurveintegralet finder vi da

$$\int_k F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \right) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{du}{dt}\,dt \qquad \text{(kædereglen)}$$

$$= \left[u(x(t),y(t)) \right]_{t_0}^{t_0} = u\big(x(t_1),y(t_1)\big) - u\big(x(t_0),y(t_0)\big)\,,$$

dvs. kurveintegralet er uafhængigt af vejen (afhænger kun af start- og slutpunkt).

2) Dernæst bevises implikationen $\Longleftarrow$: Vi går altså ud fra, at kurveintegralet $\int_k F_1\,dx + F_2\,dy$ er uafhængigt af vejen. Vi kan derfor definere en funktion u ved

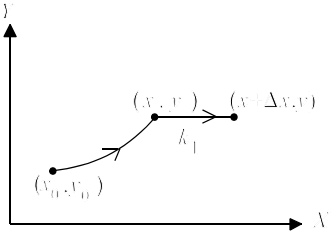
$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} F_1\,dx + F_2\,dy \qquad \big((x_0,y_0) \text{ er et vilkårligt fast punkt i } S \big)\,.$$

For at vise at $\frac{\partial u}{\partial x} = F_1(x,y)$, foretages følgende regninger:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x,y) - u(x,y)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} F_1\,dx + F_2\,dy \; - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} F_1\,dx + F_2\,dy \right)$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} F_1\,dx + F_2\,dy \qquad \text{(se tegningen)}$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{(x+\Delta x)} \left(F_1\frac{dx}{dt} + F_2\frac{dy}{dt} \right) dt$$



$$= \frac{1}{\Delta x}\int_x^{(x+\Delta x)} (F_1,F_2)\cdot(1,0)\,dt \qquad \text{(integration langs den rette linie}$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\int_x^{(x+\Delta x)} F_1(t,y)\,dt \qquad k_1:(x(t),y(t)) = (t,y),\ t_{start} = x,\ t_{slut} = x+\Delta x)$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\Delta x\cdot F_1(\xi,y) \qquad \text{(integralregningens middelværdisætning, } \xi \text{ ligger mellem } x \text{ og } x+\Delta x$$

$$\to F_1(x,y) \quad \text{for} \quad \Delta x \to 0 \qquad (F_1 \text{ er kontinuert, og } \xi \to x \text{ for } \Delta x \to 0)\ .$$

Altså har vi $\frac{\partial u}{\partial x} = F_1(x,y)$. Helt analogt fås $\frac{\partial u}{\partial y} = F_2(x,y)$, så $F_1\,dx + F_2\,dy$ er et (eksakt) differential i S.

Ifølge sætning 9.3 kan vi i stedet for at integrere langs en akseparallel knæklinie lige så godt finde $u(x,y)$ ved at integrere langs en vilkårlig anden kurve, der går fra (x_0,y_0) til (x,y). Vi har derfor $u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} F_1\,dx + F_2\,dy + C$. Idet $u(x_0,y_0) = C$, fås

$$\boxed{\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} F_1\,dx + F_2\,dy = \left[u(x,y)\right]_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} = u(x_1,y_1) - u(x_0,y_0)\ .} \qquad (9.1)$$

Anvendelse af formel (9.1). For et fysisk-kemisk system kan differentialet dH af enthalpien H være givet ved $F_1(T,p)dT + F_2(T,p)dp$. Føres systemet nu fra én tilstand (T_0,p_0) til en anden tilstand (T_1,p_1), bliver enthalpiændringen $\Delta H = \int_{(T_0,p_0)}^{(T_1,p_1)} F_1(T,p)dT + F_2(T,p)dp$.

Eksempel 9.6. Uafhængighed af vejen.

Find kurveintegralet af

$$\left(x - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{x} + 2y\right)dy$$

langs kurven k: $(x,y) = \left(\sqrt{1+3t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 1, \frac{\ln(1+t)}{\ln 2}\right)$, $t \in [0;1]$.

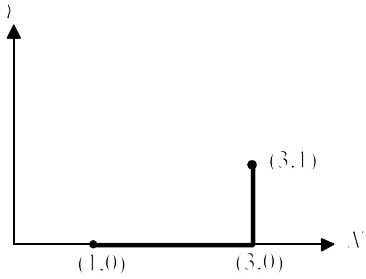
LØSNING:

Kurveintegraler kan ofte udregnes på flere måder.

Metode 1. Integration langs given kurve. Man kan altid forsøge at beregne integralet direkte langs den givne kurve, se eksempel 9.2. I vort tilfælde er kurven så kompliceret, at vi først undersøger, om andre metoder kan anvendes.

Metode 2. Integration langs akseparallel knæklinie.

I eksempel 9.4 har vi allerede vist, at $\left(x-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{x}+2y\right)dy$ er et (eksakt) differential i $\Omega=\{(x,y)\mid x>0\ \wedge\ y\in\mathbb{R}\}$ Ifølge sætning 9.3 er kurveintegralet da uafhængigt af vejen, så i stedet for at integrere langs den givne kurve k kan vi benytte en akseparallel knæklinie fra kurvens startpunkt (1,0) til dens slutpunkt (3,1):



$$\int_k \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_{(1,0)}^{(3,1)} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_1^3 F_1(t,0)\,dt + \int_0^1 F_2(3,t)\,dt$$

$$= \int_1^3 \left(t-\frac{0}{t^2}\right)dt + \int_0^1 \left(\frac{1}{3}+2t\right)dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^3 + \left[\frac{t}{3}+t^2\right]_0^1 = \frac{9}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1 = \underline{\underline{\frac{16}{3}}}$$

Metode 3. Brug af stamfunktion. I eksempel 9.4 har vi allerede vist, at $\left(x-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{x}+2y\right)dy$ er et (eksakt) differential i $\Omega=\{(x,y)\mid x>0\ \wedge\ y\in\mathbb{R}\}$ og vi fandt, at en af stamfunktionerne var $u(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{y}{x}+y^2$ Vi kan derfor udregne kurveintegralet fra kurvens startpunkt (1,0) til dens slutpunkt (3,1) ved hjælp af formel (9.1):

$$\int_k \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_{(1,0)}^{(3,1)} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \left[u(x,y)\right]_{(1,0)}^{(3,1)} = \left[\frac{x^2}{2}+\frac{y}{x}+y^2\right]_{(1,0}^{(3,1}$$

$$= \frac{3^2}{2}+\frac{1}{3}+1^2-\left(\frac{1^2}{2}+\frac{0}{1}+0^2\right) = \underline{\underline{\frac{16}{3}}}\ .$$

9.5 STAMFUNKTION AF 3 ELLER N VARIABLE

Det foregående kan næsten ordret generaliseres til funktioner af 3 variable (eller *n* variable).

DEFINITION *(stamfunktion). Lad S være en åben sammenhængende mængde i rummet. Så defineres*

$$\left.\begin{array}{l} u(x,y,z) \text{ er en stamfunktion til} \\ F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz \\ i \ S \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u(x,y,z) \text{ har differentialet} \\ du = F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz \\ \text{for alle } (x,y,z) \in S. \end{array}\right.$$

Eksempelvis er $u = x^2y + 2z$ en stamfunktion til $2xydx + x^2dy + 2dz$ i $\mathbb{R}^3$, idet *u* netop har differentialet $du = 2xydx + x^2dy + 2dz$ i $\mathbb{R}^3$.

Antagelser:

a) *K* er en "kasse" $\{(x,y,z) \mid a_1<x<b_1 \wedge a_2<y<b_2 \wedge a_3<z<b_3\}$ (specielt en udartet kasse: a_1, a_2, a_3 må gerne være $-\infty$, ligesom b_1, b_2, b_3 gerne må være $+\infty$).

b) F_1, F_2, F_3 er reelle funktioner med kontinuerte partielle afledede af 1. orden i *K*.

SÆTNING 9.4 *(krydsdifferentiationsreglen). Med antagelserne a) og b) har man*

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz \\ \text{er et (eksakt) differential i } K \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial z} = \dfrac{\partial F_3}{\partial x} \quad \text{og} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial z} = \dfrac{\partial F_3}{\partial y} \\ \text{for alle } (x,y,z) \in K. \end{array}\right.$$

Eksempelvis er $y^2z^3dx + (2xyz^3+1)dy + 3xy^2z^2dz$ et (eksakt) differential i "kassen $\mathbb{R}^3$", idet F_1, F_2, F_3 har kontinuerte partielle afledede i $\mathbb{R}^3$, og

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2yz^3 = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 3y^2z^2 = \frac{\partial F_3}{\partial x} \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 6xyz^2 = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Bevis. Vi udelader beviset for sætning 9.4, da det er ganske analogt med beviset for sætning 9.1.

Mængden K. Ifølge sætning 9.1 og 9.4 gælder krydsdifferentiationsreglen, hvis K er en "kasse". Reglen gælder dog også for mange andre mængder, f.eks. for alle åbne, **enkelt-sammenhængende** mængder.

Enkelt-sammenhængende mængde. En præcis definition gives ikke her, men løst sagt gælder:

En **plan** sammenhængende punktmængde er enkelt-sammenhængende, hvis den er uden "huller". En plan cirkelskive er således enkelt-sammenhængende, mens en cirkelskive, hvor centrum er fjernet, ikke er enkelt-sammenhængende.

En **rumlig** sammenhængende punktmængde S er enkelt-sammenhængende, hvis der til enhver lukket kurve k i S findes en kontinuert flade F, som har k som randkurve og helt tilhører S. En kugle og en kugle, hvor centrum er fjernet, er således enkelt-sammenhængende, mens en torus (en cykelslange) ikke er enkelt-sammenhængende.

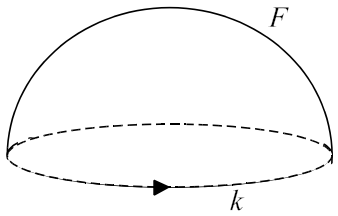


Fig. 9.9. *Flade F med randkurve k.*

SÆTNING 9.5 *(bestemmelse af stamfunktion).*

Kurvemetode. *Lad* $(x_0,y_0,z_0) \in K$. *Er* $\mathrm{F}_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz$ *et differential i K, så er samtlige stamfunktioner u givet ved kurveintegralet langs en akseparallel knæklinie fra* (x_0,y_0,z_0) *til* (x,y,z), *f.eks. (se figur 5.10)*

$$\mathrm{u}(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} F_1(t,y_0,z_0)dt + \int_{y_0}^{y} F_2(x,t,z_0)dt + \int_{z_0}^{z} F_3(x,y,t)dt + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

hvor (x_0,y_0,z_0) *kan vælges efter behag i K.* *(Knæklinien kan erstattes af en vilkårlig kurve fra* (x_0,y_0,z_0) til (x,y,z).)

Integrations-differentiationsmetode. Metoden er ganske analog til den i sætning 9.2 angivne metode, og vises i eksempel 9.7.

Bevis. Vi udelader beviset for kurvemetoden i sætning 9.5, da det forløber ganske analogt med det tilsvarende bevis for sætning 9.2.

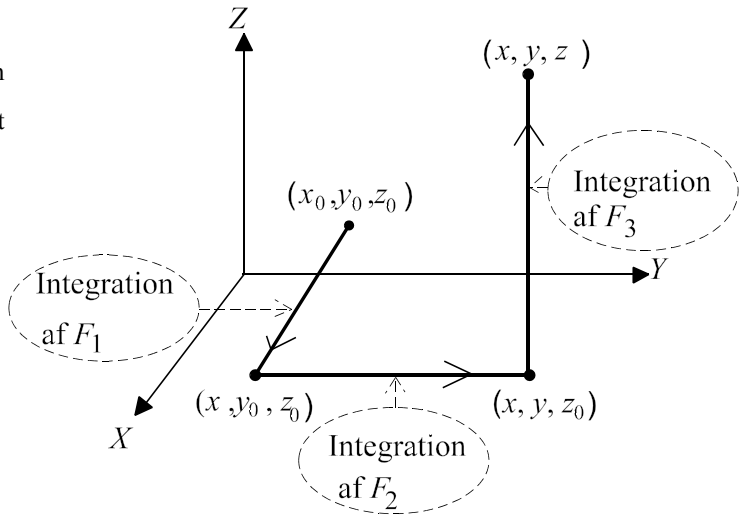


Fig. 9.10. *Akseparallel knæklinie.*

Eksempel 9.7. Stamfunktion.

Undersøg, om differentialformen $-\frac{y}{x^2}dx+\left(\frac{1}{x}+1\right)dy+2z\,dz$ er et (eksakt) differential i mængden $K=\{(x,y,z)\mid x>0\wedge y\in\mathbb{R}\wedge z\in\mathbb{R}\}$, og find i bekræftende fald samtlige stamfunktioner.

LØSNING:

Antagelserne a) og b) er opfyldte.

Idet $F_1(x,y,z)=-\frac{y}{x^2}$, $F_2(x,y,z)=\frac{1}{x}+1$ og $F_3(x,y,z)=2z$, fås

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}=-\frac{1}{x^2}=\frac{\partial F_2}{\partial x},\quad \frac{\partial F_1}{\partial z}=0=\frac{\partial F_3}{\partial x}\quad\text{og}\quad \frac{\partial F_2}{\partial z}=0=\frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Ifølge sætning 9.4 er $F_1dx+F_2dy+F_3dz$ derfor et (eksakt) differential i K.

Kurvemetode. Idet $(x_0,y_0,z_0)=(1,0,0)\in K$, fås

$$u(x,y,z)=\int_1^x\left(-\frac{0}{t^2}\right)dt+\int_0^y\left(\frac{1}{x}+1\right)dt+\int_0^z 2t\,dt$$

$$=\left[\frac{t}{x}+t\right]_0^y+\left[t^2\right]_0^z=\frac{y}{x}+y+z^2.$$

Samtlige stamfunktioner er da $\underline{\underline{u(x,y,z)=\frac{y}{x}+y+z^2+C,\quad C\in\mathbb{R}}}$.

(Kontrol mod regnefejl: $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}=F_1$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x}+1=F_2$, $\frac{\partial u}{\partial z}=2z=F_3$).

Integrations-differentiationsmetode. Først integreres $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$ med hensyn til x:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\quad\Leftrightarrow\quad u(x,y,z)=\int-\frac{y}{x^2}dx+g(y,z)=\frac{y}{x}+g(y,z).$$

Derpå differentieres $u(x,y,z)$ med hensyn til y og sættes lig $F_2=\frac{1}{x}+1$:

$$\frac{1}{x}+\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{1}{x}+1\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\partial g}{\partial y}=1\quad\Leftrightarrow\quad g(y,z)=y+h(z),$$

dvs. $u(x,y,z)=\frac{y}{x}+y+h(z)$.

Endelig differentieres $u(x,y,z)$ med hensyn til z og sættes lig $F_3=2z$:

$$0+0+\frac{\partial h}{\partial z}=2z\quad\Leftrightarrow\quad h(z)=z^2+C.$$

Samtlige stamfunktioner er da $\underline{\underline{u(x,y,z)=\frac{y}{x}+y+z^2+C,\quad C\in\mathbb{R}}}$.

Uafhængighed af vejen

Alt er helt analogt til situationen for 2 variable, eksempelvis gælder:

$$\left.\begin{array}{l} F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz \text{ er et} \\ \text{(eksakt) differential i S} \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \text{kurveintegralet af } F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz \text{ er} \\ \text{uafhængigt af vejen i S.} \end{array}\right.$$

og

$$\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x_1,y_1,z_1)} F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz \;=\; \left[u(x,y,z)\right]_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x_1,y_1,z_1)} \;=\; u(x_1,y_1,z_1) - u(x_0,y_0,z_0)\,.$$

Supplerende bemærkninger

Gradient – konservativt kraftfelt. Som nævnt i kapitel 8, afsnit 8.9 er gradienten til en funktion u defineret ved

$$\overline{\nabla} u \;=\; \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)\,.$$

Dette "gradientfelt" har ifølge det ovenstående den egenskab, at kurveintegralet (arbejdet) er uafhængigt af vejen. I fysikken kalder man også et kraftfelt af denne type for et konservativt kraftfelt.

Cirkulation. Er kurven k lukket (startpunkt = slutpunkt), skrives kurveintegralet ofte $\oint_k \overline{F}\cdot d\overline{r}$, og værdien af kurveintegralet kaldes $\overline{F}$'s cirkulation rundt langs k.

Numerisk metode til beregning af kurveintegral. Da kurveintegralet altid kan omskrives til et sædvanligt integral $\int_a^b g(t)\,dt$, henvises til numeriske metoder for sådanne integraler (f.eks. midtpunktsformlen eller Simpsons formel).

SUPPLEMENT: 9A MERE OM $\bar{r}'(t)$

Man kan vise, at differentialkvotienten $\frac{d\bar{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ også fremkommer som en grænseværdi for forholdet mellem tilvækster i $\bar{r}$ og t, dvs.

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)}{\Delta t}$$

eller kort

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} .$$

Dette betyder, at tangenten kan opfattes som grænsestillingen for den på figur 9A.1 viste sekant gennem P_0 for $\Delta t \to 0$.

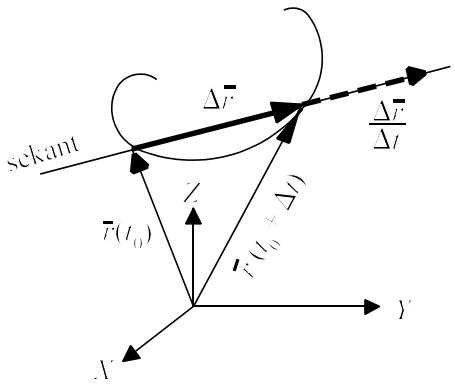


Fig. 9A.1. *Tilvækst og sekant.*

SUPPLEMENT: 9B KURVELÆNGDE OG KRUMNING

Kurvelængde

DEFINITION *(kurvelængde). Lad en kurve k have parameterfremstillingen*

$$k: \quad \bar{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big), \qquad t \in [a;b] \ .$$

Længden af kurven defineres da ved

$$\boxed{\text{længde}(k) = \int_a^b \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \ .}$$

Forklaring. Intervallet $[a;b]$ inddeles i n delintervaller. Hertil svarer en inddeling af kurven k i n delkurver. Vi betragter det $i'te$ delinterval $[t_i; t_{i+1}]$ med længden $\Delta t_i = |t_{i+1} - t_i|$. Længden af den tilsvarende delkurve kan approksimeres med kordens længde $|\bar{r}(t_{i+1}) - \bar{r}(t_i)| = |\Delta \bar{r}_i|$ Hele kurven k's samlede længde er derfor approksimativt $\sum_{i=1}^{n} |\Delta \bar{r}_i| = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\Delta \bar{r}_i}{\Delta t_i}\right| \Delta t_i$ Gøres inddelingen finere og finere, går $\frac{\Delta \bar{r}_i}{\Delta t_i}$ mod $\frac{d\bar{r}}{dt}$, og man kan vise, at $\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\Delta \bar{r}_i}{\Delta t_i}\right| \Delta t_i$ går mod $\int_a^b \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| dt$.

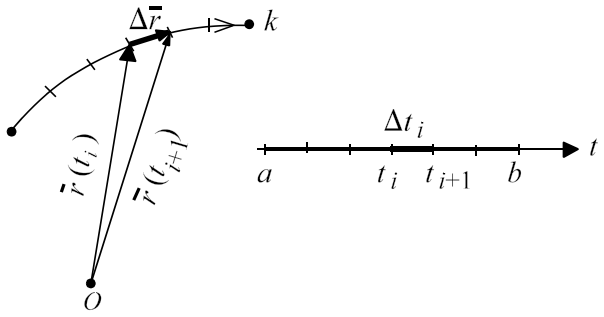


Fig. 9B.1. *Kurvelængde.*

Dette begrunder definitionen.

Eksempel 9B.1. Kurvelængde.

Find længden af skruelinien givet ved

$$(x,y,z) = (6\cdot\cos t, 6\cdot\sin t, t), \qquad t \in [0; 6\pi] \ .$$

LØSNING:

$$\text{længde} = \int_0^{6\pi} \sqrt{(-6\cdot\sin t)^2 + (6\cdot\cos t)^2 + 1^2}\, dt = \int_0^{6\pi} \sqrt{37}\, dt = \underline{\underline{6\sqrt{37}\pi}} \ .$$

Krumning

Vi ønsker at få et talmæssigt udtryk for, hvor meget en kurve krummer i et kurvepunkt P. Lad P^* være et nærliggende kurvepunkt, og lad $\Delta\theta$ være vinklen mellem retningsvektoren $\bar{v} = \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)_P$ for tangenten i P og retningsvektoren $\bar{v}^* = \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)_{P^*}$ for tangenten i P^*. Lad endvidere Δs være længden af kurven mellem P og P^* (se figur 9B.2).

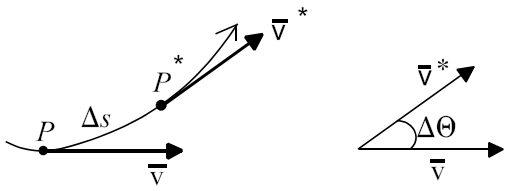


Fig.9B.2. *Krumning.*

DEFINITION *(krumning). En kurves krumning* κ *i et punkt defineres ved*

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right| \qquad (\textit{se figur } 9B.2).$$

Man ser umiddelbart, at en ret linie har krumningen 0, og at κ er desto større, jo mere en kurve krummer.

SÆTNING 9B.1 *(krumning). For en kurve med paramterfremstillingen* $\bar{r} = \bar{r}(t)$ *kan krumningen* κ *i et punkt beregnes af formlen*

$$\kappa = \frac{\left|\frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|^3} .$$

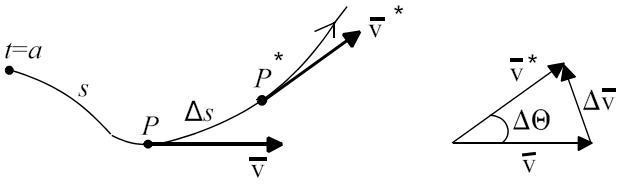
Forklaring. Vi indfører betegnelserne

$\bar{v} = \bar{v}(t) = \bar{r}\,'(t)$ ("hastigheden")

$\bar{v}^* = \bar{v}(t+\Delta t) \quad (\Delta t > 0)$

$\Delta\bar{v} = \bar{v}^* - \bar{v}$

$s(t) = \int_a^t \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| dt = \int_a^t |\bar{v}(t)|\, dt$ (den til



"tiden" t gennemløbne kurvelængde)

$\Delta\theta$ = vinklen mellem $\bar{v}$ og $\bar{v}^*$.

Vi finder $$|\sin(\Delta\theta)| = \frac{|\bar{v} \times \bar{v}^*|}{|\bar{v}| \cdot |\bar{v}^*|} = \frac{|\bar{v} \times (\bar{v} + \Delta\bar{v})|}{|\bar{v}| \cdot |\bar{v}^*|} = \frac{|\bar{v} \times \Delta\bar{v}|}{|\bar{v}| \cdot |\bar{v}^*|}$$

og dermed
$$\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\frac{\Delta\theta}{\Delta t}}{\frac{\Delta s}{\Delta t}}\right| = \left|\frac{\frac{\Delta\theta}{\sin(\Delta\theta)}\cdot\frac{\sin(\Delta\theta)}{\Delta t}}{\frac{\Delta s}{\Delta t}}\right| = \left|\frac{\frac{\Delta\theta}{\sin(\Delta\theta)}\cdot\frac{\left|\bar{v}\times\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}\right|}{|\bar{v}|\cdot|\bar{v}^*|}}{\frac{\Delta s}{\Delta t}}\right|$$

$$\xrightarrow[\Delta t\to 0]{} \left|1\cdot\frac{\frac{\left|\bar{v}\times\frac{d\bar{v}}{dt}\right|}{|\bar{v}|^2}}{\frac{ds}{dt}}\right| = \frac{\left|\bar{v}\times\frac{d\bar{v}}{dt}\right|}{|\bar{v}|^3} = \frac{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|^3}\ .$$

Krumningsradius

Til ethvert kurvepunkt P hører der en "krumningscirkel", som i en omegn af P tilnærmer kurven særlig godt. Krumningscirklen ligger i planen givet ved P, $\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)_P$ og $\left(\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)_P$. Dens radius ρ kaldes krumningsradius, og man kan vise, at $\rho = \frac{1}{\kappa}$. (En ret linie opfattes her som en cirkel med radius ∞ svarende til κ =0).

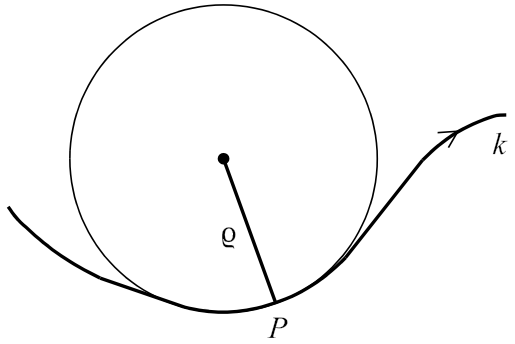


Fig. 9B.3. *Krumningscirkel.*

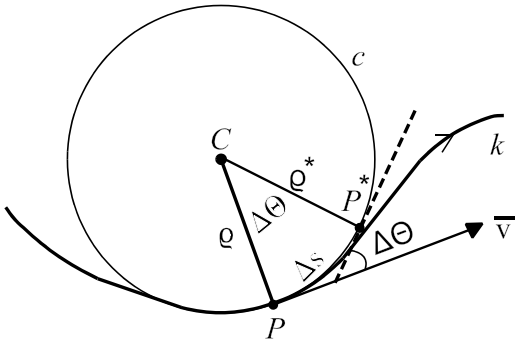


Fig. 9B.4. *Cirklen c.*

Forklaring. Gennem kurvepunkterne P og P^* går én cirkel c med et centrum C, der ligger i retningen $(\bar{v}\times\overline{PP^*})\times\bar{v}$ ud fra P. Krumningscirklen defineres som c's grænsetilling for $P^*\to P$. Når P^* er tæt ved P kan kurven mellem P og P^* approksimativt erstattes med det tilsvarende stykke af cirklen c. Af figur 9B.4 fås så $\rho \approx \rho^* \approx \left|\frac{\Delta s}{\Delta\theta}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|} \approx \frac{1}{\kappa}$, og i grænsestillingen $(P^*\to P)$ gælder eksakt $\rho = \rho^* = \frac{1}{\kappa}$.

Eksempel 9B.2. Krumning, krumningsradius.

Lad en kurve være givet ved parameterfremstillingen

$(x,y,z) = (3t, 1, 2e^{2t}), \quad t \in \mathbb{R}$.

Find krumningen κ og krumningsradius ρ for $t=0$.

LØSNING:

$$\kappa = \frac{\left|\frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|^3} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4e^{2t} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8e^{2t} \end{pmatrix}\right|}{\left[3^2 + 0^2 + (4e^{2t})^2\right]^{\frac{3}{2}}} .$$

Indsættes $t=0$, fås $\kappa = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}\right|}{\left[3^2 + 4^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -24 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{125} = \underline{\underline{\frac{24}{125}}}$

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \underline{\underline{\frac{125}{24}}} .$$

Kurve givet ved *y=f(x).*

Lad en kurve i *xy*-planen være givet ved $y = f(x), \ x \in [a;b]$. Den kan opfattes som en rumkurve med parameterfremstillingen $(x,y,z) = (t, f(t), 0), \ t \in [a;b]$, idet parameteren t vælges lig med x. Eksempelvis er grafen for sinusfunktionen givet ved $y = \sin x$, men grafen kan også opfattes som rumkurven med parameterfremstillingen $(x,y,z) = (t, \sin t, 0), \ t \in \mathbb{R}$.

Længde og krumning af kurve givet ved $y = f(x)$. Ved indsættelse af parameterfremstillingen $\bar{r}(t) = (t, f(t), 0)$ i formlerne for længde og krumning fås

$$\text{længde} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

$$\text{krumning} = \kappa = \frac{|f''(x)|}{\left[1 + \left(f'(x)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} ,$$

hvor x er genindsat for t.

SUPPLEMENT: 9C KURVEINTEGRALET $\int_k f(x,y,z)\,ds$

Vi vil nu betragte en lidt simplere type kurveintegral, som man også møder ved anvendelserne.

Anskuelig indledning. Lad der være givet en massefordeling af form som kurven k og med den 1-dimensionale massetæthed

$$f(x,y,z) = \text{massen pr. længdeenhed af kurven på stedet } (x,y,z).$$

Vi vil prøve at finde den samlede masse.
Svarende til en "uendelig lille" ændring dt vil det løbende punkts koordinater få en differentiel ændring

$$(dx,dy,dz) = \left(\frac{dx}{dt}\,dt, \frac{dy}{dt}\,dt, \frac{dz}{dt}\,dt\right)$$

eller kort

$$d\bar{r} = \frac{d\bar{r}}{dt}\,dt.$$

Punktet har altså gennemløbet den differentielle vejlængde

$$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

eller kort

$$ds = |d\bar{r}| = \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| dt,$$

se figur 9C.1.

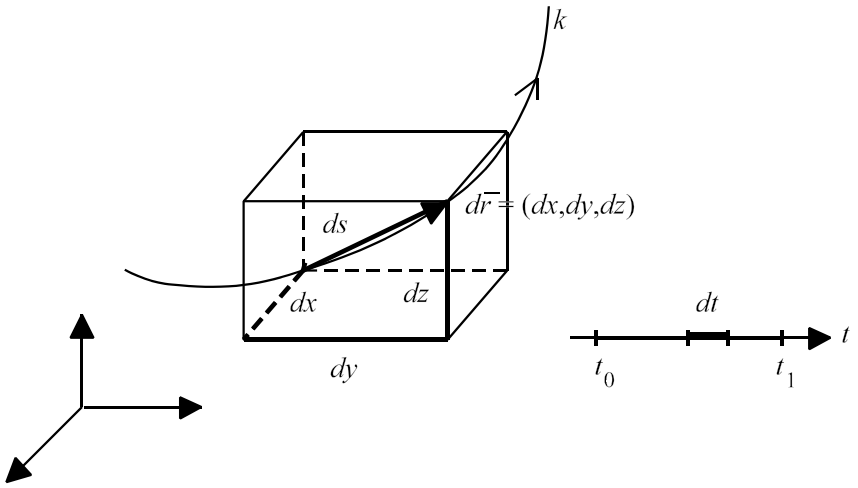


Fig. 9C.1. *Differentielle tilvækster for kurven k.*

Den tilsvarende gennemløbne masse bliver

$$f(x,y,z)ds = f(x(t),y(t),z(t))\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|dt.$$

Ved opsummering over hele tidsintervallet $[t_0;t_1]$ fås den totale gennemløbne masse

$$\int_k f(x,y,z)ds = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t),y(t),z(t))\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|dt.$$

DEFINITION *(kurveintegralet* $\int_k f(x,y,z)ds$*).* *Ved kurveintegralet* $\int_k f(x,y,z)ds$ *forstås*

$$\int_{t_0}^{t_1} f(x(t),y(t),z(t))\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|dt = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt\,.$$

Den korte skrivemåde $\int_k f(x,y,z)ds$ er berettiget, fordi man kan vise, at kurveintegralets værdi ikke afhænger af, hvilken parameterfremstilling der benyttes for kurven *k*.

Kurvelængde. Det ses, at længden af kurven *k* kan skrives

$$\text{længde}(k) = \int_k 1\,ds\,.$$

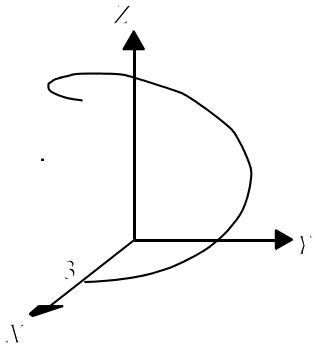
Eksempel 9C.1. Beregning af kurveintegralet $\int_k f(x,y,z)ds$**. Kurvelængde.**

1) En flyvemaskine gennemflyver skruelinien

k: $r = (x,y,z) = (3\cdot\cos t, 3\cdot\sin t, t)$, $t \in [0;2\pi]$ (længder målt i km) .

Find længden af banekurven.

2) Under turen indsamles støvet fra en tynd luftpølse med tværsnitsarealet $10^{-8}\ \text{km}^2$.
Hvor mange gram bliver det til, hvis koncentrationen af støv i lufthavet er $\dfrac{10^8}{1+x^2+y^2+z}$ $[\text{g/km}^3]$?



LØSNING:

1) Ved opsummering af den differentielle længde ds fås hele længden:

$$\text{længden}(k) = \int_k 1\,ds = \int_0^{2\pi} \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3\cdot\sin t)^2+(3\cdot\cos t)^2+1^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{10}\,dt$$

$$= \underline{\underline{2\pi\sqrt{10}}} \approx 19.9\ [\text{km}] .$$

2) Langs et kurvestykke med den differentielle længde ds indsamles massen $\dfrac{10^8}{1+x^2+y^2+z}\cdot 10^{-8}\,ds = \dfrac{1}{1+x^2+y^2+z}\,ds$. Ved opsummering fås hele massen:

$$\text{masse} \approx \int_k \frac{1}{1+x^2+y^2+z}\,ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+x(t)^2+y(t)^2+z(t)} \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+x(t)^2+y(t)^2+z(t)} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+9\cos^2 t+9\sin^2 t+t} \sqrt{(-3\sin t)^2+(3\cos t)^2+1^2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{10+t}\sqrt{10}\,dt = \sqrt{10}\left[\ln(10+t)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \sqrt{10}\ln\frac{10+2\pi}{10} = \underline{\underline{\sqrt{10}\ln(1+\frac{\pi}{5})}} \approx 1.54\ [\text{g}] .$$

SUPPLEMENT: 9D DIFFERENTIALLIGNINGEN

$F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy = 0$

SÆTNING 9D.1 *(differentialligning). Hvis* $F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy$ *er et differential med stamfunktion u i K, så vil differentialligningen*

$$F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy = 0, \quad (x,y)\in K$$

(der nu kan skrives $\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0$ *eller* $du = 0$*) have den fuldstændige løsning givet ved niveaukurverne for u:*

$$\{(x,y)\in K \mid u(x,y) = C\}, \quad C\in\mathbb{R}.$$

Hvis venstresiden af $F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy = 0$ ikke er et differential. Man kan forsøge at gange med en passende funktion $h(x,y)$, så venstresiden af

$$h(x,y)F_1(x,y)dx + h(x,y)F_2(x,y)dy = 0$$

bliver et differential. Det kan vises, at en sådan funktion $h(x,y)$ eksisterer, hvis $F_1dx + F_2dy$ ikke har såkaldte singulære punkter i K. Disse punkter omtales nedenfor.

Definition af løsning. Ved en løsning (også kaldet en løsningskurve eller en integralkurve) til differentialligningen $F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy = 0$ forstås en regulær kurve i K bestemt ved en parameterfremstilling $(x(t),y(t))$, $t\in I$, som opfylder

$$F_1(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt} + F_2(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt} = 0 \quad \text{for alle} \quad t\in I.$$

Tænker man sig parameteren t elimineret af ligningssystemet $x = x(t)$, $y = y(t)$, fremkommer en ligning i x og y, som naturligvis også siges at bestemme løsningskurven.

Bevis for sætning 9D.1. Hvis parameterfremstillingen for en regulær kurve

$$k:\ (x,y) = (x(t),y(t)), \quad t\in I$$

indsættes i $u(x,y)$, så fremkommer den sammensatte funktion $u(x(t),y(t))$. Ved benyttelse af kædereglen fås

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = F_1(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt} + F_2(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt}.$$

Heraf ses, at k er en løsningskurve (jævnfør definitionen), hvis og kun hvis der for alle $t\in I$ gælder $\frac{du}{dt} = 0$, dvs. $u(x(t),y(t)) = C$, $C\in\mathbb{R}$. En løsningskurve k er følgelig karakteriseret ved, at funktionen u er konstant langs k.

Eksistens af løsninger. Et punkt (x^*,y^*) kaldes et **singulært punkt**, hvis $F_1(x^*,y^*) = 0$ og $F_2(x^*,y^*) = 0$. Man kan vise, at der gennem ethvert ikke-singulært punkt (x,y) af K går netop 1 løsningskurve til differentialligningen $F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy = 0$. (Gennem et singulært punkt (x^*,y^*) kan der derimod gå 0, 1 eller flere løsningskurver, ligesom fortsættelsen af en løsningskurve ud over et singulært punkt ikke altid er entydigt bestemt).

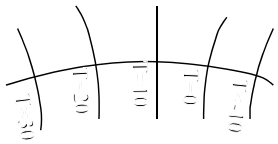
Eksempel 9D.1. Differentialligning.

1) Undersøg, om venstresiden af differentialligningen

$(3x^2y + 2xy)dx + (x^3 + x^2 + 2y)dy = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
er et (eksakt) differential i $\mathbb{R}^2$.

2) Find i bekræftende fald den fuldstændige løsning til differentialligningen.

En anvendelse. Varmestrømlinier i et homogent fast stof går parallelt med temperaturgradienten $\overrightarrow{\text{grad}}\, T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}\right)$ og dermed vinkelret på tværvektoren $\left(-\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}\right)$ Derfor er varmestrømlinier karakteriseret ved $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \cdot \left(-\frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0,$ dvs. ved en differentialligning $-\frac{\partial T}{\partial y}dx + \frac{\partial T}{\partial x}dy = 0.$



LØSNING:

1) Antagelserne a) og b) er opfyldt. Da $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 3x^2 + 2x$ og $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 3x^2 + 2x$ er ens i $\mathbb{R}^2$, er $F_1dx + F_2dy$ ifølge sætning 9.1 et (eksakt) differential i $\mathbb{R}^2$.

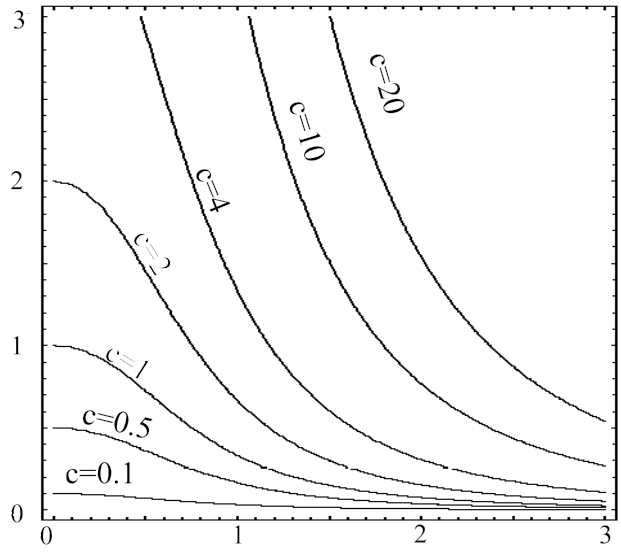
2) Idet $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, finder vi en stamfunktion

$$u(x,y) = \int_0^x (3t^2 \cdot 0 + 2t \cdot 0)dt + \int_0^y (x^3 + x^2 + 2t)dt = x^3y + x^2y + y^2 .$$

Den fuldstændige løsning til differentialligningen er niveaukurverne givet ved

$$\underline{\underline{x^3y + x^2y + y^2 = C}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

På figuren er løsningskurverne illustreret.



OPGAVER

Opgave 9.1 (plan kurve)

Lad en kurve k være givet ved parameterfremstillingen $k\colon \bar{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 - t^2 \\ t^3 - t \end{pmatrix},\ t \in R$

a) Vis, at k er en regulær kurve.

b) Find en parameterfremstilling for k's tangent i kurvepunktet P_2 svarende til $t = 2$

c) Lad t være tiden. Find hastighedsvektoren $\bar{v}$ og accelerationsvektoren $\bar{a}$ til tiden $= 1$

d) Find alle værdier af t for hvilke k's hastighedsvektor står vinkelret på accelerationsvektoren.

e) Skitsér kurven.

Opgave 9.2 (plan kurve)

Lad en kurve k være givet ved parameterfremstillingen $k\colon\ \bar{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2 \\ t^2 - 2t \end{pmatrix},\quad t \in \mathbb{R}.$

a) Vis, at k er en regulær kurve.

b) Find en parameterfremstilling for k's tangent i kurvepunktet P_2 svarende til $t = 2.$

c) Lad t være tiden. Find vinklen mellem hastighedsvektoren $\bar{v}$ og accelerationsvektoren $\bar{a}$ til tiden $t = 1.$

d) Skitsér kurven.

Opgave 9.3 (differentiationsregler for vektorer)

Den kinetiske energi for en partikel er givet ved udtrykket $E_k = \frac{1}{2} m \bar{v} \cdot \bar{v}$, hvor $\bar{v} = \bar{v}(t)$ er hastighedsvektoren til tiden t, og m er partiklens masse.

a) Udtryk $\frac{dE_k}{dt}$ ved hastigheden $\bar{v}$ og accelerationen $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$.

b) I mange situationer er den kinetiske energi $\bar{i}$ konstant i tiden. Hvad er da vinklen mellem $\bar{v}$ og $\bar{a}$?

Opgave 9.4 (differentiationsregler for vektorer)

Lad $\frac{d\bar{a}}{dt} = \bar{a} + \bar{b}$, $\frac{d\bar{b}}{dt} = 2\bar{a} - \bar{b}$ *og* $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 3$. Find $\frac{d}{dt}(\bar{a} \cdot \bar{b})$ *og* $\frac{d}{dt}(\bar{a} \times \bar{b})$.

Opgave 9.5 (rumkurve)

En partikels banekurve k er bestemt ved

$$k: \ (x,y,z) = (t^4 - t^3 + t^2 + 8t, \ \frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{2}, \ t^3 - 6t^2 - t), \quad t \in [0;\infty[\ .$$

a) Find hastigheds- og accelerationsvektoren til tiden $t = 1$.

b) Find farten til tiden $t = 1$.

Opgave 9.6 (beregning af $\int_k F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$)

Find $\int_k \bar{F} \cdot d\bar{r}$, idet $\bar{F} \cdot d\bar{r} = 2y\,dx + (z+1)\,dy + x\,dz$ og $k: \bar{r} = (t, t^2, 2t-1)$, $t \in [0;1]$.

Opgave 9.7 (beregning af $\int_k F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$)

Find $\int_k z\,dx + 3x\,dy + (z-y)\,dz$, idet $k: (x,y,z) = (t^2, t, 3t)$, $t \in [-1;0]$.

Opgave 9.8 (beregning af $\int_k F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$)

Find $\int_k n\,dp + 3n\,dT + (3p+n)\,dn$, idet $k: (p,T,n) = (t^2, t+1, t)$, $t \in [0;1]$.

Opgave 9.9 (beregning af $\int_k F_1 dx + F_2 dy$)

Find $\int_k (x+y)\,dx + (1-x)\,dy$, idet $k: (x,y) = (2t, t^2)$, $t \in [0;1]$.

Opgave 9.10 (beregning af $\int_k F_1 dx + F_2 dy$)

Find $\int_k \bar{F} \cdot d\bar{r}$, idet $\bar{F} = (x+y, y-x)$ og $k: \bar{r} = (x,y) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0;2\pi]$.

Opgave 9.11 (beregning af $\int_k F_1 dx + F_2 dy$)

Find $\int_k 4y\,dx + (x+1)\,dy$, idet

$k: y = x^2$, *startpunkt* $= (x_0, y_0) = (0,0)$, *slutpunkt* $= (x_1, y_1) = (1,1)$.

Opgave 9.12 (beregning af $\int_k F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$)

Find $\int_k 2z\,dx + 3x^2\,dy - y\,dz$, idet

$k:\ y = 1 - x,\ z = 2x,\ \textit{startpunkt} = (x_0, y_0, z_0) = (0,1,0),\ \textit{slutpunkt} = (x_1, y_1, z_1) = (2,-1,4)$.

Opgave 9.13 (beregning af $\int_k F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$)

Find $\int_k 2T\,dp + dT + 3p\,dn$, idet

$k:\ T = p,\ n = p^2,\ \textit{startpunkt} = (p_0, T_0, n_0) = (0,0,0),\ \textit{slutpunkt} = (p_1, T_1, n_1) = (1,1,1)$.

Opgave 9.14 (stamfunktion)

Undersøg, om

a) $3x^2y\,dx + x^3\,dy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) $2xy\,dx - x^2\,dy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

c) $\frac{1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy$, $y > 0$.

d) $\frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{y}\,dy$, $x > 0 \wedge y > 0$.

er (eksakte) differentialer, og find i bekræftende fald samtlige stamfunktioner til hver af disse.

Opgave 9.15 (stamfunktion)

Undersøg, om

a) $(2xy + 1)\,dx + x^2\,dy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) $\ln y\,dx + \frac{x}{y}\,dy$, $y > 0$.

c) $(e^{xy} + \sqrt{x})\,dx + (x + \ln y)\,dy$, $x > 0 \wedge y > 0$.

d) $(\operatorname{Arctan} y + 2xy)\,dx + \left(\frac{x}{1+y^2} + x^2\right)\,dy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

e) $(y2^x \ln 2 + y^2)\,dx + (2^x + 2xy)\,dy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

er (eksakte) differentialer, og find i bekræftende fald samtlige stamfunktioner til hver af disse.

Opgave 9.16 (stamfunktion)
Undersøg, om

1a) $\frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy, \qquad x>0\ .$

1b) $\frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy, \qquad x\neq 0 \wedge y\neq 0\ .$

2a) $\frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy, \qquad x>0\ .$

2b) $\frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy, \qquad x\neq 0 \wedge y\neq 0\ .$

3a) $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy, \qquad x>0 \wedge y>0\ .$

3b) $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy, \qquad x\neq 0 \wedge y\neq 0\ .$

er (eksakte) differentialer, og find i bekræftende fald samtlige stamfunktioner til hver af disse.

Opgave 9.17 (beregning af $\int_k F_1dx+F_2dy$)
En funktion $H(p,T)$ har differentialet $dH=(3p^2+2pT)dp+(4T+qp^2)dT$. Kan man finde $\int_k dH,$ når q er en ukendt konstant, og k er en ukendt kurve med startpunkt $(p_0,T_0)=(1,1)$ og slutpunkt $(p_1,T_1)=(2,3)$? Find i givet fald værdien.

Opgave 9.18 (beregning af $\int_k F_1dx+F_2dy$)
Kan man finde $\int_k\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp+\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT,$ når $\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T=T^2p,$ mens $\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$ er en ukendt funktion, og k er en ukendt kurve med startpunkt = slutpunkt = $p_0,T_0)=(2,4)$

Opgave 9.19 (beregning af $\int_k F_1dx+F_2dy$)
Kan man finde $\int_k T^2pdp+3TdT,$ når k er en ukendt kurve med startpunkt = slutpunkt = $(p_0,T_0)=(1,2)$? Find i givet fald værdien.

Opgave 9.20 (stamfunktion)

Enthalpien $H = H(T,p) = H(\textit{temperatur},\textit{tryk})$ for et system har

$$\frac{\partial H}{\partial T} = 12 + p + pT \quad og \quad \frac{\partial H}{\partial p} = T + 2p + qT^2,$$ hvor q er en konstant.

1) Find q.
2) $H(2,3) - H(1,0)$.

Opgave 9.21 (stamfunktion)

Undersøg, om

a) $x\,dx + y\,dy - z\,dz,$ $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

b) $z\,e^x\,dx + 2yz\,dy + (e^x + y^2)\,dz,$ $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

c) $z\cdot \ln y\,dx + \frac{x}{y}\,dy + y^z\,dz,$ $x>0 \wedge y>0 \wedge z>0$.

d) $e^{y-z}\,dx + (x+z)\,dy + e^{2x-z}\,dz,$ $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

e) $(2xyz + z^2)\,dx + (x^2z + 2y)\,dy + (x^2y + 2xz)\,dz,$ $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

f) $\frac{1}{x+y^2z}\,dx + \frac{2yz}{x+y^2z}\,dy + \frac{y^2}{x+y^2z}\,dz,$ $x>0 \wedge y>0 \wedge z>0$.

er (eksakte) differentialer, og find i bekræftende fald samtlige stamfunktioner til hver af disse.

Opgave 9.22 (beregning af $\int_k F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$)

a) Kan man finde $\int_k T^2 n\,dp + 2pTn\,dT + pT^2\,dn,$ når k er en ukendt kurve med startpunkt $(p_0,T_0,n_0) = (0,1,2)$ og slutpunkt $(p_1,T_1,n_1) = (1,2,3)$? Find i givet fald værdien.

b) Kan man finde $\int_k T\,dp + p\,dT + T\,dn,$ når k er en ukendt kurve med startpunkt $(p_0,T_0,n_0) = (1,1,0)$ og slutpunkt $(p_1,T_1,n_1) = (2,0,1)$? Find i givet fald værdien.

c) Find $\int_k 2xy\,dx + x^2\,dy + 2z\,dz,$ idet
$k:\ (x,y,z) = \left(\sin(\frac{\pi}{2}t^{37}),\ \sqrt[7]{t},\ \frac{8}{\pi}\operatorname{Arctan}(t^9)\right),\quad t\in[0;1]$.

d) Find $\int_k \overline{F}\cdot d\overline{r},$ idet $\overline{F} = (2x+y+z,\ x+4y+z,\ x+y+2z)$ og
$k:\ \overline{r} = (x,y,z) = \left(\sqrt[3]{t},\ \sin(\pi\sqrt{1+t}),\ \cos(\pi\frac{t}{16})\right),\quad t\in[0;8]$.

e) En funktion $H(p,T,n)$ har differentialet
$dH = n(T^2+2p)\,dp + n(apT+1)\,dT + (epT^2 + bp^2 + cT)\,dn$. Kan man finde $\int_k dH,$ når a, b, c, e er ukendte konstanter, og k er en ukendt kurve med startpunkt $(p_0,T_0,n_0) = (0,1,2)$ og slutpunkt $(p_1,T_1,n_1) = (1,2,3)$? Find i givet fald værdien.

Opgave 9.Exam53a (stamfunktion, kurveintegral, 10 point)
Lad en partikel bevæge sig i et kraftfelt $\bar{F}$ givet ved

$$\bar{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x + y - 2z + 2 \\ -4y + x + 2z \\ 2y - 2x + 1 \end{pmatrix}, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

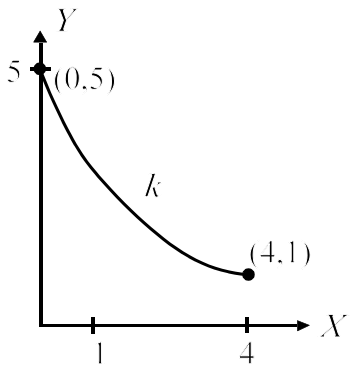
1) Undersøg, om $\bar{F}$ har en stamfunktion i $\mathbb{R}^3$, og angiv i bekræftende fald en stamfunktion.

2) Partiklen gennemløber en kurve k givet ved $k: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{14} \\ \sqrt{t} \\ t+1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0;1].$

Det af kraftfeltet udførte arbejde er da lig med $\int_k \bar{F} \cdot d\bar{r}$.
Find værdien af dette kurveintegral.

Opgave 9.Exam57a (kurveintegral, 20 point)

En kurve k, der fører fra punktet $(0,5)$ til punktet $(4,1)$ er bestemt ved ligningen $y = \frac{10 - x}{2 + x}$ (se figuren) . Beregn følgende kurveintegraler



1) $\int_k (2xy^2 + 3x^2)dx + (2x^2y + 4y)dy$

2) $\int_k (x+2)ydx + (x+2)dy$.

Opgave 9.Exam68a (stamfunktion, 20 point)

1) Vis, at $\frac{1 + yz}{(x-1)^2 z^2}dx + \frac{1}{(1-x)z}dy + \frac{2x + yz}{(x-1)z^3}dz$, x >1 , z>0
er et (eksakt) differential.

2) Find samtlige stamfunktioner til dette differential.

Opgave 9.Exam81a (kurveintegral, 15 point)

En partikel gennemløber en kurve k givet ved $k: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{-t} \\ \sqrt[5]{t} \\ \ln(t+1) \end{pmatrix}, \quad t \in [0;1].$

i et kraftfelt $\bar{F} = (F_1, F_2, F_3)$ givet ved $\bar{F} = \begin{pmatrix} y^{10} \\ 6\ln x \\ z^2 \ln(y^5+1) \end{pmatrix}$.

1) Undersøg, om $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ er et (eksakt) differential for x > 0, y > 0 (d.v.s. om $\bar{F}$ er et konservativt kraftfelt).
2) Find det af kraftfeltet udførte arbejde $\int_k \bar{F} \cdot d\bar{r}$.

Opgave 9.Exam142 (stamfunktion,uden brug af hjælpemidler, 8 point)

Vis, at differentialformen $(2xe^y + \sin y + 3x^2)dx + (x^2 e^y + x\cos y + 2y)dy$ er eksakt i $\mathbb{R}$, og bestem samtlige stamfunktioner .

Opgave 9.Exam161 (kurveintegral, 15 point)

a) Undersøg, om udtrykket $(3x^2y + e^y + 2)dx + (x^3 + xe^y + 3y^2)dy$ er en eksakt differentialform i $\mathbb{R}^2$.

b) Find kurveintegralet $\int_k (3x^2y + e^y + 2)dx + (x^3 + xe^y + 3y^2)dy$,
hvor kurven k er givet ved parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cos^2 t \\ 2\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}].$

Opgave 9.Exam167 (stamfunktion, 15 point)

a) Vis, at udtrykket $\left(\frac{-1}{1+(y-x)^2} + 2xy\right)dx + \left(\frac{1}{1+(y-x)^2} + x^2\right)dy$ er et (eksakt) differential i $\mathbb{R}^2$.

b) Lad $H(x,y)$ betegne en af stamfunktionerne til differentialet i spørgsmål a.
Find $H(3,2) - H(1,1)$.

Opgave 9.Exam175 (kurveintegral, uden brug af hjælpemidler, 6 point)

a) Vis, at $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + yx + \frac{1}{3}y$ er stamfunktion til differentialet $x + y)dx + (x + y^2)dy$

b) Find kurveintegralet $\int_k (x+y)dx + (x+y^2)dy$ hvor kurven k er givet ved parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\pi}\text{Arcsin}\, t \\ t\sqrt{8+t^2} \end{pmatrix}, \quad t \in [0;1].$

Opgave 9.Exam207 (kurveintegral, uden brug af hjælpemidler, 10 point)

Differentialformen $\sin y\,dx + x\,h(y)\,dy$ (hvor h er en ukendt funktion) vides at være eksakt i $\mathbb{R}^2$.

a) Find $h(y)$ for alle $y \in \mathbb{R}$, og bestem dernæst en stamfunktion til differentialformen.

b) Find værdien af kurveintegralet $\int_k \sin y\,dx + x\,h(y)\,dy$, når kurven k er givet ved parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{7t^2+1} \\ \frac{\pi}{2}\cos(t^2 - t) \end{pmatrix}$, $t \in [0;1]$.

Opgave 9.Exam223 (stamfunktion, 15 point)

a) Vis, at $\left(\frac{y}{1+x^2y^2} + 4x\right)dx + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} + 3y^2\right)dy$ er et (eksakt) differential i $\mathbb{R}^2$.

b) Find samtlige stamfunktioner.

Opgave 9.Exam236 (stamfunktion, uden hjælpemidler, 8 point)

a) Vis, at differentialformen $(2x + \ln y)dx + \left(\frac{x}{y} + 2y^y\right)dy$ er eksakt for y > 0, og find samtlige stamfunktioner.

Opgave 9.B1 ^{T} (hastighed, acceleration, kurvelængde, krumning)

Lad en banekurve k for en partikel være bestemt ved parameterfremstillingen

$$(x,y,z) = \left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right) \quad , \quad t \in [0;2]$$

a) Find hastigheds- og accelerationsvektoren til tiden t=1.

b) Find kurvelængden.

c) Find krumning og krumningsradius til tiden t=1.

Opgave 9.B2 (kurvelængde, krumning).

Lad en banekurve k være bestemt ved parameterfremstillingen

$$(x,y,z) = (e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t) \quad , \quad t \in [-2\pi;2\pi] \ .$$

a) Vis, at k livver på keglen med ligningen $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

b) Find kurvelængden.

c) Find hastigheds- og accelerationsvektoren til tiden t=0.

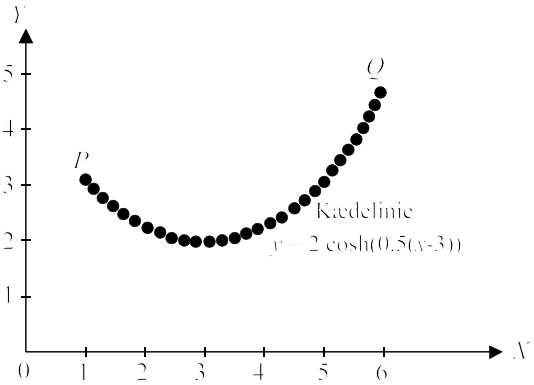
d) Find kurvens krumningsradius i det til t=0 svarende punkt.

Opgave 9.B3 (kædelinie)

Grafen for funktionen

$$f(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a} + b\right) + c \ ,$$

hvor a, b og c er konstanter (a>0) kaldes en **kædelinie.** Man kan nemlig vise, at en fuldstændig bøjelig homogen snor (kæde) mellem ophængningspunkterne vil have et stykke af kædelinien som ligevægtsstilling. Lad en kæde med længden 8m være ophængt i to punkter P_1 og P_2, der er beliggende i en højde af 4m over jorden, og har en indbyrdes afstand på 6m.



a) Vis, at i et koordinatsystem, hvor $P_1 = (-3,4)$ og $P_2 = (3,4)$, vil der gælde følgende ligning til bestemmelse af a: $a \cdot \sinh\left(\frac{3}{a}\right) = 4$.

b) Beregn a med 4 betydende cifre, og find afstanden mellem kædens laveste punkt og jordoverfladen.

Opgave 9.B4 (rumkurve)

En partikels banekurve k er bestemt ved

$$k: \ (x,y,z) = (t^4 - t^3 + t^2 + 8t, \ \frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{2}, \ t^3 - 6t^2 - t), \qquad t \in [0;\infty[\ .$$

a) Find hastigheds- og accelerationsvektoren til tiden $t = 1$.

b) Find farten til tiden $t = 1$.

c) Find krumningsradius til tiden $t = 1$.

Opgave 9.B5 (rumkurve)

En partikels banekurve k er bestemt ved $k: \ (x,y,z) = \left(\frac{1}{t}, \ \ln t, \ \sqrt{\frac{8}{t}}\right), \qquad t \in]0;\infty[\ .$

a) Find hastighedsvektoren og farten til tiden t.

b) Find længden af kurven mellem det til $t = 1$ svarende kurvepunkt og det til $t = e$ svarende kurvepunkt.

c) Find krumningsradius til tiden $t = 1$.

Opgave 9.B6 (plan kurve)

Vi betragter ellipsen med ligningen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

a) Find krumningsradius i punktet $(x,y) = (0,b)$.

b) Find krumningsradius i punktet $(x,y) = (a,0)$.

Opgave 9.C1 (kurveintegralet $\int_k f(x,y,z)ds$)

Find i hvert af de følgende tilfælde, hvor stor en stråledosis målt i røntgen, der modtages af en person, som bevæger sig langs kurven k med farten 2 m/sec. Det vides, at en person på stedet (x,y) modtager strålingen g(x,y) målt i røntgen/sec.

a) $k:\ (x,y) = (t,t^2)$, $t\in[0;10]$; $g(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4y}}$.

b) $k:\ (x,y) = (3t,4t)$, $t\in[0;10]$; $g(x,y) = \dfrac{1}{9+x^2}$.

c) $k:\ y = \ln x$, $t\in[1;10]$; $g(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

d) $k:\ (x,y) = (\cos t,\sin t)$, $t\in[0;\dfrac{\pi}{2}]$; $g(x,y) = 2xe^y$.

Opgave 9.C2 (kurveintegralet $\int_k f(x,y,z)ds$)

Find i hvert af de følgende tilfælde længden og massen af et legeme af form som kurven k og med den 1-dimensionale massetæthed f(x,y,z) målt i kg/m.

a) $k:\ (x,y) = (t,2t)$, $t\in[0;1]$; $f(x,y) = y$.

b) $k:\ (x,y) = (\cosh t,t)$, $t\in[0;1]$; $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$.

c) $k:\ (x,y,z) = (3t,4t,5\cdot\cosh t)$, $t\in[0;1]$; $f(x,y,z) = \dfrac{xy}{z}$.

d) $k:\ (x,y,z) = (t,t^2,\dfrac{2}{3}t^3)$, $t\in[0;1]$; $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{1+2y}$.

Opgave 9.D1 (differentialligning)

Find den fuldstændige løsning til hver af differentialligningerne

a) $(x^2+y^2)dx + 2xydy = 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

b) $xdx + ydy = 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

c) $(y+2xy)dx + (x+x^2-y^2)dy = 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Opgave 9.D2 (differentialligning)

Find den fuldstændige løsning til hver af differentialligningerne og skitsér løsningskurverne.

a) $2x\,dx + 2y\,dy = 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

b) $10x^9\,dx + 10y^9\,dy = 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

c) $x\,dx + y\,dy = 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

d) $y\,dx + x\,dy = 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

e) $dx + dy = 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

f) $dx = 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

g) $(2xy+1)\,dx + (x^2+2)\,dy = 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *(ingen skitse)*

h) $-2x\,dx + dy = 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

i) $(3y^2+y+1)\,dx + (6xy+x+1)\,dy = 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *(ingen skitse)*

j) $dx - \frac{y}{x}\,dy = 0$, $x>0 \wedge y>0$

k) $(x^2+1)\,dx - (x^2+1)\,dy = 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

l) $e^x\,dy = 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

m) $(-y+x^2e^x)\,dx + x\,dy = 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *(ingen skitse)*

n) $(6x^2+3y^2-4x-2)\,dx + (6xy-6y)\,dy = 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *(ingen skitse)*

o) $(3x^2y^2+4x^3)\,dx + (2x^3y+3y^2)\,dy = 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *(ingen skitse)*

p) $(27x^2+4y^2-36x-36)\,dx + (16y-8xy)\,dy = 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *(ingen skitse)*

q) $(3x^2+3y^2+6xy)\,dx + (3x^2+6xy+2y^2-1)\,dy = 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *(ingen skitse)*

r) $(4x^3+8x^2y+4xy^2)\,dx - \frac{1}{3}(8x^3+1-12x^2-y)\,dy = 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *(ingen skitse)*

10 OPTIMERING

10.1 PROBLEMSTILLING

I det følgende betegner f en reel funktion af n variable. I eksemplerne er n som regel 2 eller 3. Ved optimering søges den "bedst"mulige løsning i en given situation. Først må man udtrykke, hvad der menes med "bedst", dvs. opstille en funktion f af én eller flere variable

$x_1, x_2, \ldots, x_n$, sådan at f's største eller mindste værdi i definitionsmængden S angiver den bedste løsning på et problem.

Optimal produktionsplan. Skal man f.eks. finde en produktionsplan for en fabrik, således at man får den største fortjeneste f, må man først udtrykke, hvordan fortjenesten afhænger af de variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i produktionsplanen. Dernæst må man udtrykke de begrænsninger i produktionsforholdene, som skal overholdes (begrænset arbejdsstyrke, begrænset kapacitet af produktionsapparatet, visse kvalitetskrav til produktet osv.). Disse begrænsninger giver visse ligninger eller uligheder, som de variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$ skal opfylde, og derved er definitionsmængden S fastlagt.

DEFINITION *(globalt minimum). Hvis funktionen f har en funktionsværdi, der er mindre end eller lig alle andre funktionsværdier i S, så kaldes denne værdi for f's* ***globale minimum*** *og skrives kort* $\min_{\bar{x} \in S} f(\bar{x})$. *Ethvert punkt* $\bar{\mathbf{x}}^*$ *i S med denne funktionsværdi kaldes et* ***globalt minimumspunkt*** *for f.*

Analogt defineres globalt maksimum og globalt maksimumspunkt. Som en fællesbetegnelse for globalt minimum og globalt maksimum anvendes udtrykket **globalt ekstremum.** Er misforståelser udelukket, stryges ofte ordet globalt, ligesom man tit ser betegnelserne mindsteværdi og størsteværdi. Begrebet **lokalt ekstremum** omtales i afsnit 10.8. Da maksimumspunkter for $f(\bar{x})$ er minimumspunkter for $\left(-f(\bar{x})\right)$, kan minimums- og maksimumsproblemer behandles helt parallelt. Funktionen f kaldes for **objektfunktionen**. Figur 10.1 leder os ind på, at det som et led i ekstremumsbestemmelser kan være nyttigt at se på punkter, hvor grafen har "vandret tangent(plan)" - såkaldte stationære punkter.

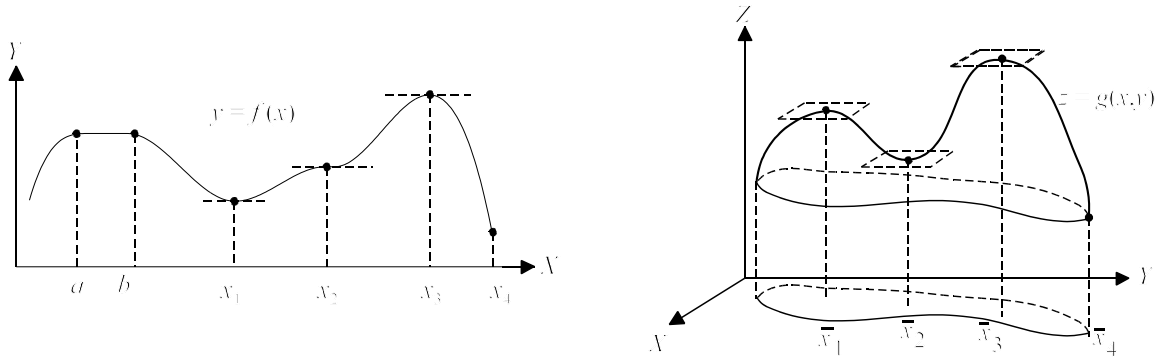


Fig. 10.1. *f (og g) har stationære punkter i* $\mathbf{x}_1\,(\bar{x}_1)$, $x_2\,(\bar{x}_2)$ *og* $\mathbf{x}_3\,(\bar{x}_3)$, *globalt maksimum i* $\mathbf{x}_3\,(\bar{x}_3)$ *og globalt minimum i* $\mathbf{x}_4\,(\bar{x}_4)$. *Endvidere er alle punkter mellem a og b stationære punkter for f.*

DEFINITION *(stationært punkt). Lad f være kontinuert i S. Et indre punkt* $\bar{\mathbf{x}}^*$ *i S kaldes et stationært punkt for f, hvis* $\overline{\mathbf{grad}}\, f(\bar{x}^*)$ *eksisterer og*

$$\overline{\mathbf{grad}}\, f(\bar{x}^*) = 0,$$

dvs.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}^*) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}^*) = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}^*) = 0.$$

Eksempel 10.1. Stationære punkter.

En funktion f er givet ved

$$f(x,y) = x^2y - x^3 - 2x^2 + 3y^2 + 8y - 2, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Find de stationære punkter for f.

LØSNING:

De stationære punkter for f findes af ligningssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 2xy - 3x^2 - 4x = 0 & (1) \\ x^2 + 6y + 8 = 0 & (2). \end{cases}$$

For at finde alle løsninger omskrives venstresiden i den ene ligning (1) til et produkt af faktorer, så vi får

$$x\cdot(2y-3x-4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ y = \frac{3}{2}x+2 \ .$$

Tilfælde 1: indsættes $x = 0$ i ligning (2), fås

$$0 + 6y + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{4}{3}, \ \ (x,y) = \underline{\underline{\left(0, -\frac{4}{3}\right)}} \ .$$

Tilfælde 2: indsættes $y = \frac{3}{2}x + 2$ i ligning (2), fås

$$\begin{aligned} x^2 + 6\left(\frac{3}{2}x+2\right) + 8 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + 9x + 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -4 \ \vee \ x = -5 \\ &\Leftrightarrow \quad (x,y) = \underline{\underline{(-4,-4)}} \ \vee \ (x,y) = \underline{\underline{\left(-5, -\frac{11}{2}\right)}} \end{aligned}$$

Funktionen har altså 3 stationære punkter.

Edb-løsning. I Maple kan de ønskede stationære punkter fås ved følgende ordre:

```
> f := x^2*y - x^3 - 2*x^2 + 3*y^2 + 8*y - 2 :
> solve( { diff(f,x) =0, diff(f,y) =0 } ) ;
```

$$\left\{x = 0, y = \frac{-4}{3}\right\}, \left\{x = -5, y = \frac{-11}{2}\right\}, \{x = -4, y = -4\}$$

SÆTNING 10.1 *(de mulige globale ekstrema). Lad f være kontinuert i S. Globale ekstremumspunkter for f skal søges blandt*

a) stationære punkter for f,

b) randpunkter for S og

c) punkter, hvor $\overline{\text{grad}}\, f$ ikke eksisterer.

Bevis. Lad $\bar{x}^*$ være et globalt ekstremumspunkt for f. Det er så muligt at gradienten ikke eksisterer i $\bar{x}^*$ (tilfælde c). Det er også muligt, at $\bar{x}^*$ er et randpunkt (tilfælde b). Endelig er det muligt, at $\bar{x}^*$ er et indre punkt, hvor gradienten $\overline{\text{grad}}\, f$ eksisterer, og vi vil vise, at $\bar{x}^*$ da er et stationært punkt (tilfælde a): - For en funktion af 1 variabel er det velkendt, at $f'(\bar{x}^*) = 0$ i et indre globalt ekstremumspunkt $\bar{x}^*$ (vandret tangent). Er f en funktion af n variable og $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, vil koordinatfunktionerne

$$f(x_1, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_n^*), \ \ f(x_1^*, x_2, x_3^*, \ldots, x_n^*), \ \ldots, \ \ f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{n-1}^*, x_n)$$

være funktioner af 1 variabel med globalt ekstremum i $\bar{x}^*$. Heraf følger, at

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}^*) = 0, \ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}^*) = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}^*) = 0,$$

dvs. $\bar{x}^*$ er et stationært punkt.

10.2 OPTIMERING I LUKKET, BEGRÆNSET MÆNGDE

I dette afsnit betragtes problemet

> Søg globalt minimum for en kontinuert funktion $f(\bar{x})$ i en lukket, begrænset mængde S.

Af sætning 8.3 punkt b) følger, at f har et globalt minimum (og et globalt maksimum).
Det følgende eksempel 10.2 viser, hvordan det globale minimum findes.

Eksempel 10.2. Optimering i lukket begrænset mængde.

En retvinklet kasse uden låg skal have et rumfang på 32m^3. Kassen skal konstrueres således, at dens overflade bliver mindst (mindst materialeforbrug), idet dog ingen af kassens kanter må overstige 10m. Find kassens optimale dimensioner.

LØSNING:

1) Optimeringsproblemet opstilles. Lad længde, bredde og højde af kassen være x, y og z. Vi har da

> Søg globalt minimum for $g(x,y,z) = 2xz + 2yz + xy$ i mængden S givet ved begrænsningerne
> $xyz = 32$
> $x \le 10, \quad y \le 10, \quad z \le 10, \quad 0 < x, \quad 0 < y, \quad 0 < z.$

2) Problemet reduceres. For at fjerne begrænsningsligningen $xyz = 32$ og reducere antallet af variable, indsættes $z = \frac{32}{xy}$ i $g(x,y,z)$ og de øvrige begrænsninger. Herved bliver problemet reduceret til

> Søg globalt minimum for
> $$f(x,y) = \frac{64}{y} + \frac{64}{x} + xy$$
> i mængden
> $$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \le 10 \wedge \frac{3.2}{x} \le y \le$$

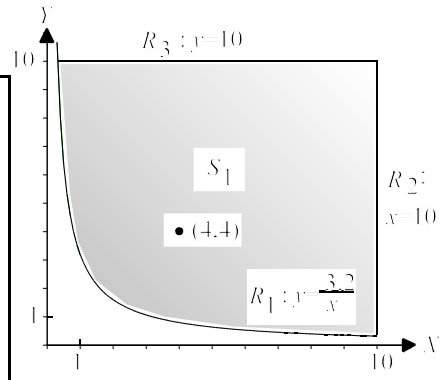


Fig.10.2. *Mængden S_1.*

3) De mulige globale ekstremumspunkter bestemmes. På figur 10.2 ses mængden S_1, som er lukket og begrænset. Fra sætning 4.3 ved vi derfor, at den kontinuerte funktion $f(x,y)$ har et globalt minimum. Ifølge sætning 10.1 er der 3 muligheder:

3a) **Stationære punkter:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{64}{x^2} + y = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{64}{y^2} + x = 0 \qquad (2) .$$

Af ligning (1) fås $y = \frac{64}{x^2}$, som indsat i (2) giver

$$-\frac{64x^4}{64^2} + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(1 - \frac{x^3}{64}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = 4 .$$

Tilfældet $x = 0$ giver os ingen stationære punkter, da ingen punkter i S_1 kan have $x = 0$, se figur 10.2.

Tilfældet $x = 4$ giver ved indsættelse i (1) $y = 4$. Af figuren ses, at det fundne punkt $(x,y) = (4,4)$ er et indre punkt i S_1. Samlet har vi altså fundet 1 stationært punkt (4,4). Funktionsværdien i dette punkt er $f(4,4) = \underline{\underline{48}}$.

3b) **Randpunkter:** Randen af S_1 opdeles i 3 dele R_1, R_2 og R_3.

R_1: Randdel R_1´s ligning $y = \frac{3.2}{x}$ benyttes til at eliminere y (eller x). Først indsættes $y = \frac{3.2}{x}$ i $f(x,y)$, så vi får en funktion $f_1(x)$:

$$f_1(x) = f\left(x, \frac{3.2}{x}\right) = 20x + \frac{64}{x} + 3.2 .$$

Dernæst ses af figuren, at når vi gennemløber rand R_1, vil x gennemløbe intervallet $[0.32;10]$. Vi kan altså undersøge randdel R_1 ved at finde globalt minimum for funktionen

$$f_1(x) = 20x + \frac{64}{x} + 3.2, \qquad x \in [0.32;10] .$$

Vi finder $f_1'(x) = 20 - \frac{64}{x^2} = 0$ for $x = \frac{-4}{\sqrt{5}} \ \vee \ x = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Tilfældet $x = \frac{-4}{\sqrt{5}}$ falder udenfor intervallet $[0.32;10]$.

Vi sammenligner nu

$$f_1\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right) = 32\sqrt{5} + 3.2 \approx 74.8 \quad \text{og}$$

$$\left.\begin{aligned} f_1(0.32) &= 209.6 \\ f_1(10) &= 209.6 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{værdi i intervalendepunkterne} \\ &x = 0.32 \text{ og } x = 10 . \end{aligned}$$

Heraf ses, at på randdelen R_1 er den mindste værdi af $f(x,y)$ lig med
cirka $\underline{\underline{74.8}}$.

R_2: Randdel R_2´s ligning $x = 10$ benyttes til at eliminere x fra $f(x,y)$:

$$f_2(y) = f(10,y) = \frac{64}{y} + 6.4 + 10y .$$

Af R_2 på figuren ses, at $y \in [0.32;10]$.

Vi finder globalt minimum for f_2:

$$f_2'(y) = -\frac{64}{y^2} + 10 = 0 \quad \text{for} \quad y = \pm\sqrt{6.4} .$$

Da $-\sqrt{6.4} \notin [0.32;10]$, sammenlignes blot

$$f_2(\sqrt{6.4}) = 20\sqrt{6.4} + 6.4 \approx 57.0$$
$$f_2(0.32) = 209.6$$
$$f_2(10) = 112.8 .$$

Heraf ses, at på randdelen R_2 er den mindste værdi af $f(x,y)$ lig med
cirka $\underline{\underline{57.0}}$.

R_3: Randdel R_3´ ligning er $y = 10$. Helt analogt med tilfældet R_2 fås, at
på randdelen R_3 er den mindste9 værdi af $f(x,y)$ lig med cirka

$\underline{\underline{57.0}}$.

3c) **Punkter hvor** $\overline{\text{grad}}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ **ikke eksisterer:** ingen.

4) Konklusion. Nu sammenlignes de fundne mulige globale minima 48, 74.8, 57.0 og 57.0. Da 48 er mindst, har $f(x,y)$ globalt minimum 48, som indtræffer i minimumspunktet $(x,y) = (4,4)$. Den optimale kasses overflade er altså $48m^2$, som indtræffer for længden $x = 4m$, bredden $y = 4m$ og højden $z = 2m$ $\left(\text{idet } z = \frac{32m^3}{x \cdot y}\right)$.

Edb-løsning. I Maple kan et minimum findes ved følgende ordre :
minimize(64/x+64/y+x*y,x=0.32..10, y=0.32..10,location)
Resultat 48., {[{x=4.,y=4.},48.]}

10.3 ANDRE OPTIMERINGSPROBLEMER

Optimering i mængde, der ikke er lukket og begrænset. Er mængden S ikke lukket og begrænset, fortæller sætning 4.3 ikke, om f har globale ekstrema. Ofte ved man dog af fysiske grunde, at f har globale ekstrema, som så kan findes ved hjælp af sætning 10.1. Ellers må man desuden søge at bevise (eller modbevise) eksistensen af globale ekstrema ved "funktionsvurderinger". Problemet er uddybet i supplement 10A.

Lagranges metode. Denne metode benyttes til at optimere i en mængde S, der er bestemt ved ligninger. Eksempelvis: Find minimum for $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, idet $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Metoden er nærmere omtalt i supplement 10B.

Lineær programmering. Denne metode benyttes til at optimere en lineær funktion af f i en mængde begrænset af lineære uligheder og ligninger. Eksempelvis: Find minimum for $f(x,y) = 3x - 4y$, idet $S = \{(x,y) \mid x - y \geq 0 \wedge x + y \leq 2 \wedge x - 2y \leq 0\}$.
Metoden er nærmere omtalt i supplement 10C.

Numeriske metoder. Bliver de hidtil angivne metoder for besværlige, kan en numerisk metode ofte anvendes. Emnet er nærmere omtalt i supplement 10D og i appendix 10.1 og 10.2 findes formler og algoritmer.

10.4 MINDSTE KVADRATERS METODE

Problemet at skulle løse et **ligningssystem**, f.eks.

$$\begin{aligned} xy - e^{x-y} &= 0 \\ 2x^3 - xy - y^3 &= 0 \end{aligned}$$

kan altid formuleres som et optimeringsproblem:

> Bestem (x,y), så summen af kvadraterne
> $(xy - e^{x-y})^2 + (2x^3 - xy - y^3)^2$
> bliver mindst mulig.

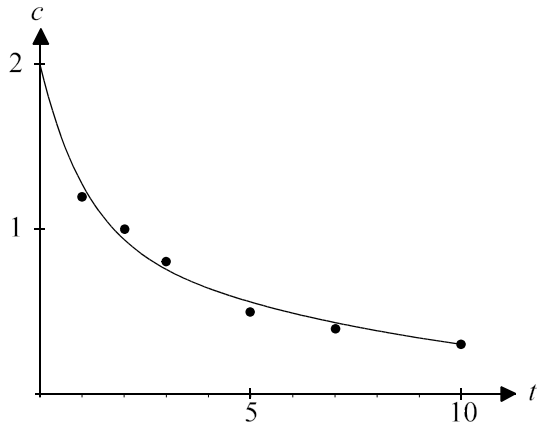
Hvis der ikke findes nogen eksakt løsning til det givne ligningssystem, så fås i hvert fald den værdi (x,y), der er optimal i den forstand, at summen af kvadraterne på ligningsfejlene bliver mindst.

Eksempel 10.3. Bedste bestemmelse af funktion ud fra måledata.

Der foreligger følgende måledata

t	1	2	3	5	7	10
c	1.2	1.0	0.8	0.5	0.4	0.3

for, hvordan en koncentration c afhænger af tiden t. Det forventes, at sammenhængen er givet ved $c = e^{-xt} + e^{-yt}$, hvor x og y er ukendte konstanter. Opstil et optimeringsproblem, der bestemmer x og y "bedst muligt".



LØSNING:

Målingerne giver

$$1.2 = e^{-x\cdot 1} + e^{-y\cdot 1}$$

$$1.0 = e^{-x\cdot 2} + e^{-y\cdot 2}$$

. . . . . .

$$0.3 = e^{-x\cdot 10} + e^{-y\cdot 10} .$$

Dette ligningssystem er opfyldt "bedst muligt", når summen af kvadrater

$$f(x,y) = \left(1.2 - e^{-x\cdot 1} - e^{-y\cdot 1}\right)^2 + \left(1.0 - e^{-x\cdot 2} - e^{-y\cdot 2}\right)^2 + \ldots + \left(0.3 - e^{-x\cdot 10} - e^{-y\cdot 10}\right)^2$$

er mindst. Vi har altså følgende optimeringsproblem: "find de værdier af x og y, hvor $f(x,y)$ har globalt minimum".

Edb-løsning. Den numeriske optimeringsalgoritme i appendix 10.2 finder globalt minimum 0.015 for $x = 0.95,\ y = 0.12$, dvs. $c \approx e^{-0.95t} + e^{-0.12t}$. Hermed kan $c(t)$ indgå i beregninger på lige fod med andre funktioner.

Skalering af ligninger. Ligninger som

$$20x_1 - 10x_2 - 20 = 0 \quad , \quad 3x_1 - 2x_2 - 2.6 = 0 \quad , \quad 0.01x_1 + 0.01x_2 - 0.02 = 0$$

bør afstemmes indbyrdes, f.eks. ved division med $M_1 = 1$, $M_2 = 0.1$ og $M_3 = 0.001$, så vi får

$$20x_1 - 10x_2 - 20 = 0 \quad , \quad 30x_1 - 20x_2 - 26 = 0 \quad , \quad 10x_1 + 10x_2 - 20 = 0 .$$

Generelt kan man bestemme skaleringskonstanterne M_1, M_2 og M_3 sådan: Kan man acceptere fejlene 1, 0.1 og 0.001 på de givne ligninger, vælges $M_1 = 1$, $M_2 = 0.1$ og $M_3 = 0.001$.

Edb-løsning. Med programmet Mathematica løses problemet i eksempel 10.3 således:

```
In[1] := FindMinimum[(1.2-Exp[-x]-Exp[-y])^2+(1-Exp[-2*x]-Exp[-2*y])^2+(0.8-Exp[-3*x]-Exp[-3*y])^2+
        (0.5-Exp[-5*x]-Exp[-5*y])^2+(0.4-Exp[-7*x]-Exp[-7*y])^2+(0.3-Exp[-10*x]-Exp[-10*y])^2,{x,1},{y,0}]
Out[1]= {0.0153383, {x -> 0.945675, y -> 0.124184}}
In[2] := FindMinimum[(1.2-Exp[-x]-Exp[-y])^2+(1-Exp[-2*x]-Exp[-2*y])^2+(0.8-Exp[-3*x]-Exp[-3*y])^2+
        (0.5-Exp[-5*x]-Exp[-5*y])^2+(0.4-Exp[-7*x]-Exp[-7*y])^2+(0.3-Exp[-10*x]-Exp[-10*y])^2,{x,1},{y,1}]
Out[2]= {0.155793, {x -> 0.304377, y -> 0.304377}}
```

Bemærk: Forskellige startpunkter kan give forskellige værdier - man udvælger da tilfældet med den mindste funktionsværdi.

10.5 LOKALE EKSTREMA

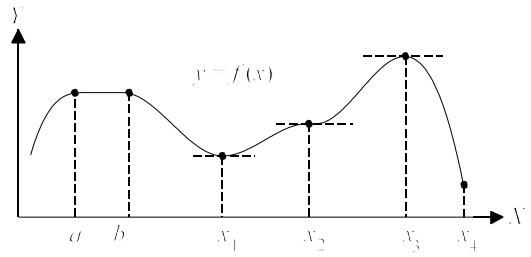
Skal man skaffe sig et overblik over en funktions "udseende", kan det være nødvendigt at kende arten af de stationære punkter, dvs. vide om de er lokale maksima, minima eller saddelpunkter.

DEFINITION *(lokalt minimum). Funktionen f siges at have et* ***lokalt minimum*** *i et* ***indre*** *punkt* $\bar{x}$ *af definitionsmængden S, hvis der findes en udprikket omegn* ω' *af* $\bar{x}$*, således at* $f(\bar{x}^*) \le f(\bar{x})$ *for alle* $\bar{x} \in \omega'$*. Punktet* $\bar{x}^*$ *kaldes i så fald et* ***lokalt minimumspunkt****. Gælder uligheden strengt, dvs.* $f(\bar{x}^*) < f(\bar{x})$ *uden lighedstegn, kan man fremhæve, at f har et* ***egentligt*** *lokalt minimum.*

Analogt defineres lokalt maksimum og lokalt maksimumspunkt. Som en fællesbetegnelse for lokalt maksimum og lokalt minimum anvendes udtrykket **lokalt ekstremum.**

SÆTNING 10.2 *(de mulige lokale ekstrema). Lokale ekstremumspunkter skal søges blandt de stationære punkter for f, samt punkter hvor* $\overline{\text{grad}}\, f$ *ikke eksisterer. Sætningen illustreres ved figur 10.6.*

Beviset for sætningen svarer ganske til beviset for sætning 10.1.



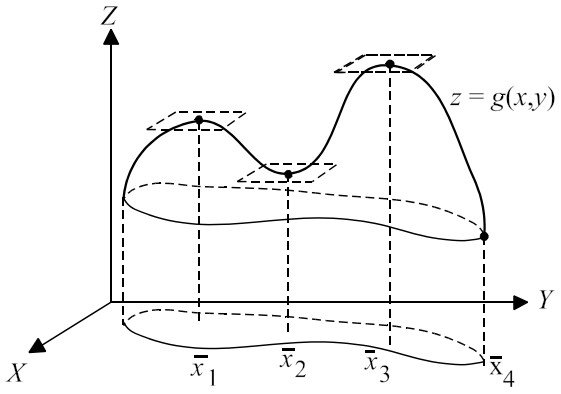


Fig. 10.6a.
Lokalt minimum[1] *i* : x_1,
lokalt maksimum[1] *i* : x_3,
lokalt maksimum i ethvert punkt af intervallet $[a;b]$,
vandret vendetangent i : x_2.

Fig. 10.6b.
Lokalt maksimum[1] *i* : $\bar{x}_1$ *og* $\bar{x}_3$,
lokalt minimum : *ingen*
saddelpunkt i : $\bar{x}_2$.

[1] der er endda tale om et **egentligt** lokalt ekstremum.

Som regel kan man afgøre arten af et stationært punkt ved at betragte de (partielle) afledede af 2. orden i punktet.

Funktion af én variabel

Lad x^* være et stationært punkt for en funktion[1] f (dvs. $f'(x^*) = 0$). Der gælder da:

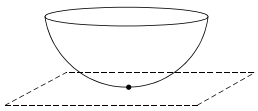
$f''(x^*) > 0 \implies x^*$ er et lokalt minimumspunkt[2]
$f''(x^*) < 0 \implies x^*$ er et lokalt maksimumspunkt[2]
$f''(x^*) = 0$: Nærmere undersøgelse må foretages.

Det er dog tit simplere at lave en fortegnsdiskussion af $f'(x)$:

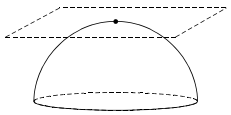
Funktion af to variable

SÆTNING 10.3 *(undersøgelse af arten af et stationært punkt). Lad* (x_0,y_0) *være et stationært punkt for en funktion*[3] *f, og sæt* $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$, $B = 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$ *og* $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$.
Der gælder[4] *da*

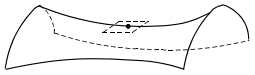
1a) $B^2 - 4AC < 0 \ \wedge \ A > 0 \implies$ { *f har lokalt minimum*[2] *i* (x_0,y_0)



1b) $B^2 - 4AC < 0 \ \wedge \ A < 0 \implies$ { *f har lokalt maksimum*[2] *i* (x_0,y_0)



2) $B^2 - 4AC > 0 \implies$ { *f har intet lokalt ekstremum i* (x_0,y_0) [*saddelpunkt*]



3) $B^2 - 4AC = 0$: *Nærmere undersøgelse må foretages.*

---

1 vi antager her, at f er 2 gange differentiabel med en kontinuert 2. afledet f'',
2 der er endda tale om et **egentligt** lokalt ekstremum,
3 vi antager her, at f har kontinuerte partielle afledede af 2. orden.

4 Eventualt kan $B^2 - 4AC$ erstattes med $f_{xy}^2 - f_{xx}\cdot f_{yy} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ beregnet i (x_0,y_0).

Bevis. For nemheds skyld antages, at f har det stationære punkt $(0,0)$, og at $f(0,0)=0$. (Koordinatsystemet kan altid parallelforskydes, så begyndelsespunktet falder i $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$. Vi skal da blot undersøge fortegnet for $f(x,y)$ nær $(0,0)$. Vi tilnærmer $f(x,y)$ ved Taylorpolynomiet $\tilde{f}(x,y)$ af 2. grad med udviklingspunkt i $(0,0)$:

$$\tilde{f}(x,y) = \frac{1}{2}\left(Ax^2+Bxy+Cy^2\right) \qquad \left(\text{benyttet, at } f(0,0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0\right).$$

Det omskrives til

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y^2\left[A\left(\frac{x}{y}\right)^2+B\left(\frac{x}{y}\right)+C\right] & \text{for} \quad y\neq 0 \\ \frac{1}{2}x^2\left[C\left(\frac{y}{x}\right)^2+B\left(\frac{y}{x}\right)+A\right] & \text{for} \quad x\neq 0. \end{cases}$$

I begge tilfælde indeholder den kantede parentes et andengradspolynomium med diskriminanten $D=B^2-4AC$.

1) Er $D<0$, har andengradspolynomiet i den kantede parentes ingen rødder, dvs. $\tilde{f}(x,y)$ må have samme fortegn for alle $(x,y)\neq(0,0)$, nemlig
   a) positivt for $A>0$, så $\tilde{f}$ har egentligt lokalt minimum i $(0,0)$
   b) negativt for $A<0$, så $\tilde{f}$ har egentligt lokalt maksimum i $(0,0)$.

2) Er $D>0$, har andengradspolynomiet i den kantede parentes 2 rødder, således at $\tilde{f}(x,y)$ vil antage såvel positive som negative værdier i en selv nok så lille udprikket omegn ω' af $(0,0)$, dvs. $\tilde{f}$ har ikke lokalt ekstremum i $(0,0)$.

3) Er $D=0$, haves $B^2-4AC=0 \iff \begin{cases} C=\frac{B^2}{4A} & \text{for} \quad A\neq 0 \\ B=0 & \text{for} \quad A=0. \end{cases}$

   Heraf følger

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2!}\left(Ax^2+Bxy+\frac{B^2}{4A}y^2\right) = \frac{1}{2}A\left(x+\frac{B}{2A}y\right)^2 & \text{for} \quad A\neq 0 \\ \frac{1}{2!}Cy^2 & \text{for} \quad A=0. \end{cases}$$

   I begge tilfælde ses, at på en bestemt linie gennem $(0,0)$ $\left(\text{nemlig } x=\frac{-B}{2A}y \quad \text{eller} \quad y=0\right)$ vil Taylor-polynomiet $\tilde{f}(x,y)$ af anden grad være nul. En nærmere undersøgelse er derfor nødvendig (da $\tilde{f}(x,y)=0$ ikke nødvendigvis medfører at $f(x,y)=0$).

Fuldendelse af beviset. Beviset er nu fuldført, hvis resultaterne for $\tilde{f}$ under punkt 1) og 2) kan overføres til at gælde for f. Idet Taylorpolynomiet af 1. grad er 0, fås

$$f(x,y) = \text{restleddet} = \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi_1,\xi_2)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\xi_1,\xi_2)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi_1,\xi_2)y^2\right], \quad \text{hvor} \quad \xi_1^2+\xi_2^2 < x^2+y^2 .$$

Da $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ er kontinuert, haves

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi_1,\xi_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + \varepsilon_1(\xi_1,\xi_2), \quad \text{hvor} \quad \varepsilon_1(\xi_1,\xi_2) \to 0 \quad \text{for} \quad (\xi_1,\xi_2)\to(0,0) .$$

Idet analoge relationer gælder for $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi_1,\xi_2)$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\xi_1,\xi_2)$, fås

$$f(x,y) = \frac{1}{2!}\left[(A+\varepsilon_1(\xi_1,\xi_2))x^2 + (B+2\varepsilon_2(\xi_1,\xi_2))xy + (C+\varepsilon_3(\xi_1,\xi_2))y^2\right].$$

Sættes

$$x = r\cdot\cos\theta, \quad y = r\cdot\sin\theta, \quad g(\theta) = A\cdot\cos^2\theta + B\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta + C\cdot\sin^2\theta,$$

og

$$R(\xi_1,\xi_2,\theta) = \varepsilon_1(\xi_1,\xi_2)\cos^2\theta + 2\varepsilon_2(\xi_1,\xi_2)\cos\theta\sin\theta + \varepsilon_3(\xi_1,\xi_2)\sin^2\theta \quad , \qquad \theta\in[0;2\pi],$$

kan udtrykket for f omskrives til

$$f(x,y) = \frac{1}{2!}r^2[g(\theta) + R(\xi_1,\xi_2,\theta)] .$$

1') Er $D<0$, har vi vist, at $Ax^2+Bxy+Cy^2$ har samme fortegn for alle $(x,y)\neq(0,0)$. Heraf følger, at $g(\theta) = \frac{1}{r^2}\left(Ax^2+Bxy+Cy^2\right)$ har samme fortegn for alle $\theta\in[0;2\pi]$. Da g endvidere er kontinuert for $\theta\in[0;2\pi]$, fås:

a) g har et positivt minimum m for $A>0$. Idet $\xi_1^2+\xi_2^2<r^2$, må $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ og ε_3 gå mod nul for $r\to 0$, hvoraf følger, at for et tilstrækkeligt lille r, må $|R(\xi_1,\xi_2,\theta)|<m$ (cos og sin er begrænsede). Derfor har $f(x,y)$ samme fortegn som $\frac{1}{2!}r^2 g(\theta) = \tilde{f}(x,y)$ i en udprikket omegn af $(0,0)$,

b) g har et negativt maksimum for $A<0$. Bevis analogt til 1'a).

2') Er $D>0$, findes der værdier θ_1 og θ_2, så $g(\theta_1)>0$ og $g(\theta_2)<0$. Som under punkt 1) indses, at for et tilstrækkeligt lille r vil $|R(\xi_1,\xi_2,\theta_1)|<g(\theta_1)$ og $|R(\xi_1,\xi_2,\theta_2)|<|g(\theta_2)|$.

Eksempel 10.4. Bestemmelse af lokale ekstrema.

Bestem eventuelle lokale ekstrema og saddelpunkter for funktionen $f(x,y) = \frac{64}{x} + \frac{64}{y} + xy$.

LØSNING:

1) Eksistens af gradient. Det ses, at $f(x,y)$ er defineret, når blot $x \neq 0$ og $y \neq 0$, og at gradienten så også er defineret.

2) Stationære punkter bestemmes.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-64}{x^2} + y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{-64}{y^2} + x = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (4,4) .$$

3) De partielle afledede af anden orden i de stationære punkter udregnes.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2\cdot 64}{x^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2\cdot 64}{y^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 .$$

I punktet $(4,4)$ er $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ og $B = 2\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$.

4) Sætning 10.3 benyttes. Da $B^2 - 4AC = -12 < 0$ og $A > 0$, har f lokalt minimum i punktet $(4,4)$.

Advarsel: Ikke globalt minimum

Lad $f(x,y)$ have lokalt minimum i (x_0,y_0), hvor (x_0,y_0) er det eneste stationære punkt. Så har f ikke nødvendigvis noget globalt minimum, se det følgende eksempel.

Eksempel 10.5. Ikke globalt minimum.

Lad $f(x,y) = e^{-2y} - 2(x^2-1)^2 e^{-y}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Vis, at f har netop ét stationært punkt (x_0,y_0), og find dette.

b) Vis, at f har lokalt minimum i (x_0,y_0).

c) Vis, at f ikke har noget globalt minimum.

LØSNING:

a) $$\frac{\partial f}{\partial x} = -4(x^2-1)\cdot 2x e^{-y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = \pm 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2e^{-2y} - 2(x^2-1)^2(-e^{-y}) = 2e^{-y}\left(-e^{-y} + (x^2-1)^2\right) = 0 .$$

Tilfældet $x = \pm 1$ indsat i (2) giver $e^{-y} = 0$, som ikke har nogen løsning.

Tilfældet $x = 0$ indsat i (2) giver $e^{-y} = 1$, dvs. $y = 0$. Altså er $(x_0,y_0) = (0,0)$ det eneste stationære punkt.

b) $$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-8(x^3 - x)e^{-y}\right] = -8(3x^2-1)e^{-y} = 8$$
$$B = 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial}{\partial y}\left[-8(x^3-x)e^{-y}\right] = 16(x^3-x)e^{-y} = 0$$
$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4e^{-2y} - 2(x^2-1)^2 e^{-y} = 4 - 2 = 2 .$$

Da $B^2 - 4AC = 0^2 - 4\cdot 8\cdot 2 < 0$ og $A > 0$, har f lokalt minimum i $(x_0,y_0) = (0,0)$.

c) Sættes $y = 0$, fås $f(x,0) = 1 - 2(x^2-1)^2$. Da $f(x,0) \to -\infty$ for $x \to \infty$, har f intet globalt minimum.

Lokale ekstrema for funktion af n variable

Sætning 10.3, hvor arten af et stationært punkt undersøges ved hjælp af de 2. afledede, kan generaliseres til en funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ af n variable. Dette er nærmere forklaret i supplement 10E.

SUPPLEMENT: 10A OPTIMERING I MÆNGDE, DER IKKE ER LUKKET OG BEGRÆNSET

Ofte ønsker vi at optimere en kontinuert funktion f i en mængde S, der **ikke** er lukket og begrænset. Det er så ikke mere sikkert, at der eksisterer globale ekstrema. I mange tilfælde ved man intuitivt - ud fra problemets fysiske natur - at et globalt ekstremum eksisterer, og i så fald kan man blot benytte sætning 10.1, dvs. finde de mulige globale ekstremumspunkter ved at

1) finde stationære punkter for f,
2) undersøge f i randpunkter, som tilhører S og
3) undersøge f i punkter, hvor $\overline{\text{grad}} f$ ikke eksisterer.

Ved man på forhånd intet om eksistensen af et globalt ekstremum, kan man ud over punkt 1), 2) og 3) også opdele S og foretage passende "funktionsvurderinger", jævnfør eksempel 10A.1.

Eksempel 10A.1. Optimering i åben mængde.

Lad os antage, at der i eksempel 10.2 ikke er nogen øvre grænse for kanternes længde, dvs. begrænsningerne $x \le 10$, $y \le 10$ og $z \le 10$ falder bort. Problemet bliver da

Søg globalt minimum for $f(x,y) = \frac{64}{y} + \frac{64}{x} + xy$
i mængden $S = \{(x,y) \mid 0 < x \ \wedge \ 0 < y\}$.

LØSNING:

1) Eneste stationære punkt i S er $(4,4)$, og vi har $f(4,4) = 48$ (jævnfør eksempel 10.2).
2) Randundersøgelsen erstattes af en vurdering af $f(x,y)$ i hver af de fire mængder M_1, M_2, M_3 og M_4 uden for kvadratet K på figur 10A.1.

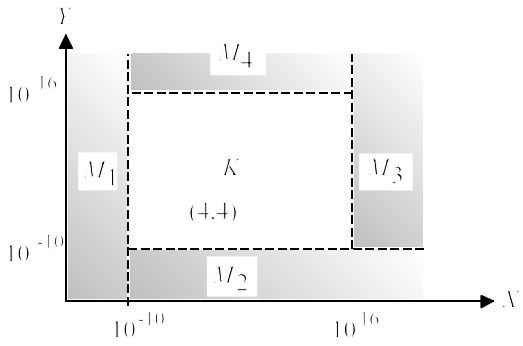


Fig. 10A.1 *I mængden K søges stationære punkter. I mængderne M_1, M_2, M_3, M_4 vurderes f(x, y) (1 Ångstrøm = 10^{-10} meter. 1 lysår ≈ 10^{16} meter).*

M_1: $0 \le x \le 10^{-10} \ \wedge \ y \ge 0$, $f(x,y) = \frac{64}{y} + \frac{64}{x} + xy > \frac{64}{x} \ge 64 \cdot 10^{10}$.

M_2: $x \ge 10^{-10} \ \wedge \ 0 \le y \le 10^{-10}$, $f(x,y) = \frac{64}{y} + \frac{64}{x} + xy > \frac{64}{y} \ge 64 \cdot 10^{10}$.

M_3: $x \ge 10^{16} \ \wedge \ y \ge 10^{-10}$
M_4: $10^{-10} \le x \le 10^{16} \ \wedge \ y \ge 10^{16}$
$\Big\}$ $f(x,y) = \frac{64}{y} + \frac{64}{x} + xy > xy \ge 10^6$.

Heraf følger, at $f(x,y) > 48$ for $(x,y) \in S \setminus K$, dvs. betragtet i mængden S har f globalt minimum $f(4,4) = \underline{\underline{48}}$.

SUPPLEMENT: 10B LAGRANGES METODE

Mens vi i afsnit 10.2 og 10.3 er gået ud fra, at optimeringsproblemet kunne omformes, således at alle begrænsninger blev uligheder, vil vi i dette afsnit se på det tilfælde, hvor **alle begrænsninger er ligninger**.
Optimeringsproblemet kan da skrives

> Søg globalt minimum for $f(\bar{x})$ i mængden S givet ved begrænsningerne $l_j(\bar{x}) = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m$.

I eksempel 10.2 blev ligningerne $l_j(\bar{x}) = b_j$ benyttet til at reducere antallet af variable i problemet. Det er imidlertid ikke altid bekvemt at løse sådanne ligninger, dvs. udtrykke nogle variable ved de øvrige, så det vil ofte være simplest, at finde de mulige globale ekstremumspunkter ved hjælp af den såkaldte Lagranges metode.

SÆTNING 10B.1 *(Lagranges metode). Lad en funktion L, Lagrange-funktionen være defineret ved*

$$L(\bar{x},\bar{\lambda}) = f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [\, l_j(\bar{x}) - b_j \,] ,$$

hvor $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ *er hjælpestørrelser kaldet "Lagrangemultiplikatorer". Under meget generelle betingelser gælder da: Globale ekstremumspunkter for f skal søges blandt løsningerne til ligningssystemet*

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0\,,\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0\ ,\ldots,\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ l_1(\bar{x}) = b_1\,,\ \ l_2(\bar{x}) = b_2\ ,\ldots,\ \ l_m(\bar{x}) = b_m \end{array}\right\} \qquad (10B.1)$$

forstået sådan, at ethvert globalt ekstremumspunkt $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ *svarer til en løsning* $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ *til (10B.1).*

Præcis formulering af sætning 10B.1. *Lad* $l_1, l_2, \ldots, l_m$ *have kontinuerte partielle afledede af 1. orden i* $S \subseteq \mathbb{R}^n$, *og lad* $\bar{x}^*$ *være et globalt ekstremumspunkt for objektfunktionen f under begrænsningerne* $l_1(\bar{x}) = b_1\,,\ \ l_2(\bar{x}) = b_2\,,\ldots,\ \ l_m(\bar{x}) = b_m$. *Lad funktionen L ("Lagrangefunktionen") være defineret ved*

$$L(\bar{x},\bar{\lambda}) = \lambda_0 f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [\, l_j(\bar{x}) - b_j \,] .$$

Der eksisterer da et talsæt $\bar{\lambda}^* = (\lambda_0^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*) \neq \bar{0}$, *så ligningssystemet (10B.1) har løsningen* $(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*)$.

Kommentar. I den "præcise" Lagrangefunktion indgår en ekstra hjælpestørrelse λ_0 . De $m+n$ ligninger (10B.1) har derfor en ubekendt "for meget". Er $\lambda_0 \neq 0$, kan man altså på forhånd sætte $\lambda_0 = 1$, hvilket svarer til den simple sætning 10B.1. I praksis vil det "degenererede" tilfælde $\lambda_0 = 0$ kun meget sjældent forekomme.

Bevis. Et bevis findes i H. Elbrønd Jensen: Matematisk analyse IV, side 333. Vi vil her give en anskuelig geometrisk forklaring for det tilfælde, hvor objektfunktionen f er en funktion af kun to variable med kun én begrænsning $l(x,y) = b$. Lad os eksempelvis betragte følgende problem:

En hyrdedreng, som befinder sig i punktet H, skal hente vand i en å og derefter bringe det til sin ko, som befinder sig i punktet K. I hvilket punkt (x,y) skal han hente vandet for at minimere den totale afstand, han skal gå?

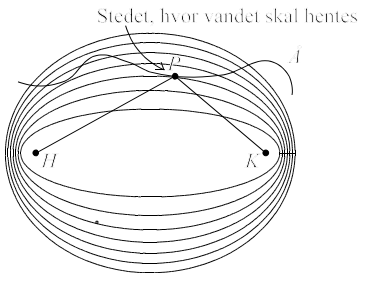


Fig. 10B.1. *Objektfunktionens niveaukurver, samt en begrænsningskurve. Niveaukurverne er ellipser med brændpunkter i H og K.*

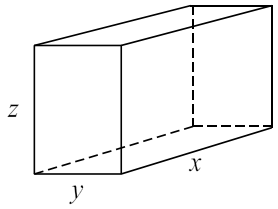
Den totale afstand betegnes $f(x,y) = [\text{afstand fra } H \text{ til } (x,y)] + [\text{afstand fra } (x,y) \text{ til } K]$. Mængden af punkter (x,y), for hvilke summen af afstanden til H og K er en given konstant, er en niveaukurve for f. Problemets begrænsning $l(x,y) = b$ er åen (se figur 10B.1). Det optimale punkt P må findes blandt de punkter, hvor en niveaukurve for f rører (tangerer) åen (hvis nemlig åen skar niveaukurven gennem P, kunne man jo blot følge åen til et lavere niveau for f - i strid med at punktet P var optimalt). I ethvert sådant røringspunkt vil niveaukurven $f(x,y) = k$ og begrænsningen $l(x,y) = b$ have parallelle normalvektorer. Da disse normalvektorer er gradientvektorerne $\overline{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ og $\overline{\nabla} l = \left(\frac{\partial l}{\partial x}, \frac{\partial l}{\partial y} \right)$, må der eksistere et tal λ, så

$$\overline{\nabla} f(P) = -\lambda \overline{\nabla} l(P) \iff \overline{\nabla} f(P) + \lambda \overline{\nabla} l(P) = \overline{0} \iff \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial l}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial l}{\partial y} = 0 \iff \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

hvor L er Lagrangefunktionen $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda l(x,y)$. Det optimale punkt $P = (x^*, y^*)$ er altså sammen med en værdi af λ løsning til ligningssystemet $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, $l(x,y) = b$.

Eksempel 10B.1. Lagranges metode.

En retvinklet kasse uden låg skal have et rumfang på 32m^3. Find dimensionerne af den kasse, der har den mindste overflade, idet det anses for intuitivt klart, at kassens overflade har en mindsteværdi.



LØSNING:

Optimeringsproblemet er

> Søg globalt minimum for $2xz + 2yz + xy$ i mængden S givet ved begrænsningen $xyz = 32$.

Vi vil benytte Lagranges metode. Lagrangefunktionen L er bestemt ved

$$L(x,y,z,\lambda) = 2xz + 2yz + xy + \lambda[xyz - 32].$$

De mulige globale ekstremumspunkter findes ved at løse ligningssystemet

(1) $2z + y + \lambda yz = 0 \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \right)$

(2) $2z + x + \lambda xz = 0 \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \right)$

(3) $2x + 2y + \lambda xy = 0 \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \right)$

(4) $xyz = 32$.

Af ligning (4) ses, at $y \neq 0$ og $z \neq 0$ (iøvrigt klart, at kantlængder er positive). Af ligning (1) fås derfor $\lambda = -\frac{2}{y} - \frac{1}{z}$, som indsat i (2) og (3) giver $y = x$ og $z = \frac{x}{2}$. Indsættes dette i ligning (4), fås $x = 4$. Eneste mulige globale ekstremumspunkt bliver da $(x^*, y^*, z^*) = (4,4,2)$, som følgelig må være det søgte globale minimimspunkt.

SUPPLEMENT: 10C LINEÆR PROGRAMMERING

Når $f(\bar{x})$ har mange variable, vil de hidtil nævnte metoder til at finde ekstrema ofte være umulige at gennemføre. Et vigtigt specialtilfælde kan imidlertid klares - det lineære programmeringsproblem:

Søg globalt minimum for funktionen

$$f(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + d$$

i mængden S givet ved begrænsningerne

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i, \qquad i = 1,2,\ldots,p$$

$$\alpha_{j1}x_1 + \alpha_{j2}x_2 + \ldots + \alpha_{jn}x_n = b_j \qquad j = 1,2,\ldots,m$$

Er der ingen ligninger blandt begrænsningerne (dvs. er $m=0$), så kan problemet illustreres geometrisk på følgende måde. - Idet

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

geometrisk kan opfattes som ligningen for en "hyperplan" i det n-dimensionale rum, må definitionsmængden S for f blive en punktmængde begrænset af sådanne planer (se fig. 10C.1). Man kan nu vise, at hvis f har et globalt ekstremum, må det indtræffe i en "hjørnespids" af definitionsmængden. En løsningsmetode, der kaldes simplexmetoden, bygger på, at man ved hjælp af passende valgkriterier kommer fra én "hjørnespids" til en "nabohjørnespids", indtil det globale ekstremumspunkt er fundet.

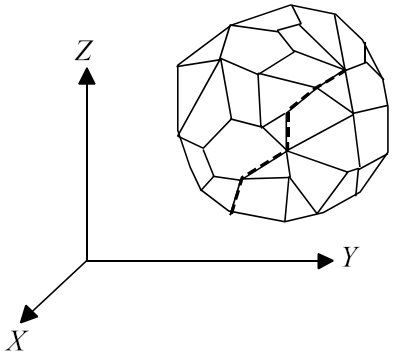


Fig. 10C.1. S er begrænset af planer.

Ved hjælp af standard-edb-programmer klares problemer med mange tusinde variable og begrænsninger. Programmerne "Simplex" og "Mathematica" klarer de lidt mindre problemer. Simplexmetoden vil ikke blive gennemgået her (men der kan henvises til M. Oddershede Larsen: Lineær programmering); vi vil nøjes med at illustrere problemstillingen ved et eksempel, hvor det er muligt at finde løsningen geometrisk.

Eksempel 10C.1. Lineær programmering.

En fabrik fremstiller i en afdeling to slutprodukter A og B, som kan sælges med nettofortjenester på henholdsvis 80 kr./ton og 180 kr./ton. Både A og B skal passere 2 maskiner. Opholdstid og maksimal driftstid ses af skemaet:

	1 ton *A's* opholdstid i hver maskine	1 ton *B's* opholdstid i hver maskine	største totale antal driftstimer pr. uge for hver maskine
maskine 1	1	6	36
maskine 2	1	1	11

Planlæg produktionen, så den giver størst overskud.

LØSNING:

Lad x og y betegne det antal ton, der produceres pr. uge af henholdsvis A og B. Optimeringsproblemet kan nu formuleres

Søg globalt maksimum for

$$f(x,y) = 80x + 180y \quad \text{(fortjeneste)}$$

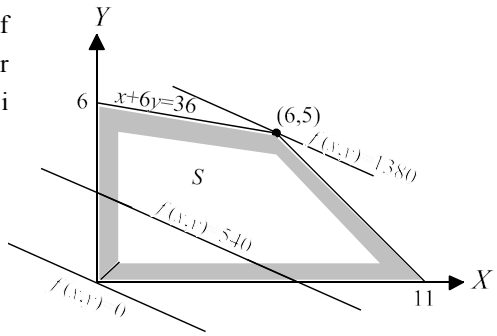
i mængden S givet ved begrænsningerne

$$x + 6y \le 36 \quad \text{(maskine 1 højst 36 timer/uge)}$$

$$x + y \le 11 \quad \text{(maskine 2 højst 11 timer/uge)}$$

$$x \ge 0 \quad , \quad y \ge 0.$$

Figuren viser S og tre niveaukurver (rette linier) for f. Heraf ses, at $f(x,y)$ bliver større, jo større niveauliniens afstand er fra $(0,0)$. Det globale maksimumspunkt ses at ligge i punktet $(6,5)$, og maksimumsværdien er $f(6,5) = 1380$.



Edb-løsning. I programmet Maple løses problemet på følgende måde:

```
> with(simplex):
>maximize(80*x+180*y, {x+6*y <= 36, x+y <= 11}, NONNEGATIVE );
```

$$\{x = 6, y = 5\}$$

SUPPLEMENT: 10D NUMERISKE METODER

Bliver de hidtil angivne metoder for besværlige, kan en numerisk metode ofte anvendes. I appendix 10.1 og 10.2 findes formler og algoritmer.

Funktion af 1 variabel

Vi søger de globale ekstrema for en funktion f i et interval $S=[a;b]$. Intervallet $[a;b]$ opdeles i n lige lange delintervaller med længde $h=\frac{b-a}{n}$. Idet

$$x_0=a,\quad x_1=a+h,\quad x_2=a+2h,\ldots,\quad x_{n-1}=a+(n-1)h,\quad x_n=b$$

beregnes følgende tabel over funktionen

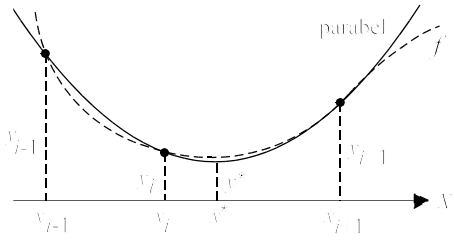
x	x_0	x_1	...	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	...	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	...	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	...	y_n

Ud fra tabellen kan man tilnærmelsesvis angive globale ekstremumspunkter x^*. Mere nøjagtigt bliver det, hvis man tegner og aflæser en "glat" kurve gennem punkterne, eller hvis man bruger formlen

$$x^* \approx x_i+\frac{h}{2}\cdot\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2y_i-y_{i+1}-y_{i-1}},$$

hvor x_{i-1}, x_i og x_{i+1} er tre delepunkter, der ligger nær et indre ekstremumspunkt x^*. Formlen giver det globale ekstremumspunkt for parablen gennem de tre punkter. En tilnærmet værdi for y^* beregnes af

$$y^* \approx y_i+\frac{(y_{i+1}-y_{i-1})^2}{8(2y_1-y_{i+1}-y_{i-1})}$$ (parablens ekstremum)



Funktion af to variable

En tabel over $f(x,y)$ beregnes i punkter, hvor x-værdierne ligger med samme afstand h, og y-værdierne ligger med samme afstand k:

y								
y_m	~	~	~	...	~	...	~	
.	.	.	.	...	.	...	.	
.	.	.	.	...	.	...	.	
.	.	.	.	...	c	d ..	.	
y_i	~	~	~	e ..	a	b ..	~	
.	.	.	.	...	f	...		
.	.	.	.	...	.	...		
.	.	.	.	...	.	...	~	
y_2	~	~	~	...	~	...	~	
y_1	~	~	~	...	~	...	~	
y_0	~	~	~	...	~	...	~	
	x_0	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n	x

Ud fra tabellen kan man tilnæmelsesvis angive globale ekstremumspunkter (x^*,y^*). Hvis ekstremumspunktet ligger tæt ved tabelpunktet (x_i,y_i) med tabelværdien a, og nabotabelværdierne er b, c, d, e og f (se tabellen), så kan en nøjagtigere værdi beregnes af formlerne

$$x^* \approx x_i + \frac{h}{2}\,\frac{(a+d-c-e)(f-c)+2(e-b)(a-c)}{(a-b+d-c)^2+(b+e-2a)(2a-c-f)},$$

$$y^* \approx y_i + \frac{k}{2}\,\frac{(a-b+d-f)(e-b)+2(a-b)(f-c)}{(a-b+d-c)^2+(b+e-2a)(2a-c-f)},$$

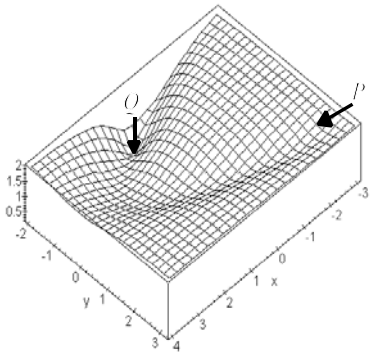
$$z^* \approx a + \frac{b-e}{2h}(x^*-x_i) + \frac{c-f}{2k}(y^*-y_i) + \frac{b+e-2a}{2h^2}(x^*-x_i)^2$$

$$+ \frac{c+f-2a}{2k^2}(y^*-y_i)^2 + \frac{a-b-c+d}{hk}(x^*-x_i)(y^*-y_i),$$

som giver det globale ekstremumspunkt (x^*,y^*) og den tilhørende ekstremumsværdi z^* for en paraboloide gennem de 6 punkter.

Funktioner af n variable

Grafen for en funktion kan sammenlignes med et landskab. Ved minimering skal det laveste punkt findes. En kugle, der får lov at trille ned, finder selv et lokalt eller globalt minimum. På figuren kan en kugle trille fra P til Q ad en krum dal, der omgår en højderyg. I appendix 10.2 er der et par simple algoritmer, som på må og få kan famle sig ned gennem "landskabet", omtrent som kuglen. For funktioner med lange, snævre dale bruges dog meget lang tid. Der findes langt hurtigere metoder, som blot er mere komplicerede (programmer findes på større regnecentre og i D.M. Himmelblau: "Applied Nonlinear Programming ", McGraw-Hill). For at man kan være sikker på at have fundet et globalt minimum, bør **minimeringen gentages flere gange med nye startpunkter**.



Skalering af variable. Man kan selv gøre meget til at undgå lange, snævre dale. Funktionen $x_1^2 + 10^6 x_2^2$ giver en lang snæver dal, som imidlertid kan fjernes ved at indføre "skalerede" variable $y_1 = \frac{x_1}{K_1} = \frac{x_1}{100}$ og $y_2 = \frac{x_2}{K_2} = \frac{x_2}{0.1}$, så vi får $10^4 y_1^2 + 10^4 y_2^2$ (niveaukurverne, som før var langstrakte ellipser, er nu blevet til cirkler). I praksis kan man bestemme skaleringskonstanterne K_1 og K_2 således: - Hvis man på forhånd forventer, at minimeringen vil variere en temperatur x_1 inden for et interval på 100 grader og variere en molbrøk x_2 inden for et interval 0.1, så bør man vælge $K_1 = 100$ og $K_2 = 0.1$.

Uligheder. Begrænsninger i form af uligheder kan klares således: - For de $\bar{x}$**-værdier,** som ikke opfylder alle ulighederne, sættes $f(\bar{x}) = 10^{70}$. (Kræver optimeringsmetoden en kontinuert funktion $f(\bar{x})$, kan man bruge andre "straffemetoder", se kapitel 7 i D.M. Himmelblau: "Applied Nonlinear Programmering", McGraw-Hill).

Ligninger. Begrænsninger i form af ligninger kan klares ved for hver ligning $l_j(\bar{x}) = b_j$ at addere en "straffefunktion" $p_j \cdot (l_j(\bar{x}) - b_j)^2$ til funktionen $f(\bar{x})$, idet p_j er en passende positiv konstant. Den "forøgede funktion" $f(\bar{x}) + \sum p_j \cdot (l_j(\bar{x}) - b_j)^2$ minimeres derpå flere gange med større p_j**-værdier** for hver gang, f.eks. $p_j = 0.1,\ 10,\ 10^3,\ 10^5, \ldots$ ("straffen" skærpes gradvis). Slutpunktet fra hver minimering bruges som startpunkt for den næste minimering. Til sidst er straffen hård, hvilket giver snævre dale, men det generer ikke, fordi vi nu er nær ved minimum.

SUPPLEMENT: 10E LOKALE EKSTREMA FOR FUNKTION AF *N* VARIABLE

Sætning 10.3, hvor arten af et stationært punkt undersøges ved hjælp af de 2. afledede $B^2 - 4AC$, kan generaliseres til en funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ af n variable. Hertil benyttes en $n \times n$ determinant, selv om dette begreb først gennemgås i bind 3.

SÆTNING 10.4 *(arten af et stationært punkt). Lad* $\bar{a}$ *være et stationært punkt for funktionen f. Ligningen*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{a}) - \lambda & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{a}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{a}) - \lambda & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\bar{a}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\bar{a}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{a}) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

har da reelle rødder $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *(evt. er nogle rødder sammenfaldende).*

1) *Hvis* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *alle er positive, har f lokalt minimum i* $\bar{a}$.
2) *Hvis* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *alle er negative, har f lokalt maksimum i* $\bar{a}$.
3) *Hvis der findes rødder med modsat fortegn, har f hverken lokalt maksimum eller minimum i* $\bar{a}$.
4) *Hvis én eller flere af rødderne er nul, og de øvrige rødder har samme fortegn, må en nærmere undersøgelse foretages.*

OPGAVER

Opgave 10.1 (stationære punkter)
Find de stationære punkter for funktionerne

1) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

2) $f(x,y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

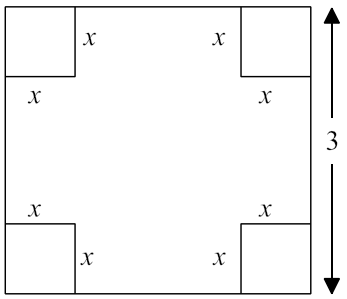
3) $f(x,y) = x \cdot \cos y - x^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R} \times \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$

4) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 5x + 2y - 8, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

5) $f(x,y,z) = x^3 + 3x^2 + 2y^2 + z^2 - yz, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

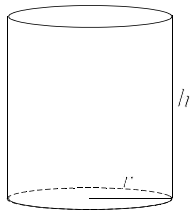
6) $f(x,y,z) = -\frac{1}{3}z^3 + 2yz + 2y^2 - 2xy + x^2 + 2z - 6x, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Opgave 10.2 (1 variabel, globalt maksimum)
Af en tynd kvadratisk plade med siden 3 bortskæres i hjørnerne fire lige store kvadrater (se figuren). Resten bukkes, således at der dannes en kasse (uden låg). Bestem siden i de kvadrater, der skal bortskæres, således at kassens rumfang bliver størst muligt.



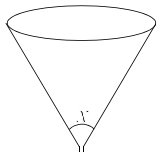
Opgave 10.3 (1 variabel, globalt minimum)
En kemiingeniør planlægger et kemisk anlæg, hvor en plan væg i en ovn skal isoleres mod varmetab. Et isoleringslag af tykkelsen x koster $\frac{x}{cm} \cdot 3650$ kroner, og herigennem tabes varme for $\frac{cm}{x} \cdot 40$ kroner/time. Anlægget påregnes benyttet i døgndrift over 6 år. Find den mest økonomiske isoleringstykkelse x.

Opgave 10.4 (1 variabel, globalt minimum)



En fabrik skal bruge en 10 m^3 beholder af form som en cylinder (uden låg). For at materialeforbruget skal blive lille, ønskes den samlede overflade (krum overflade + bund) mindst mulig.
Find de optimale værdier for radius og højde i cylinderen.

Opgave 10.5 (1 variabel, globalt minimum)

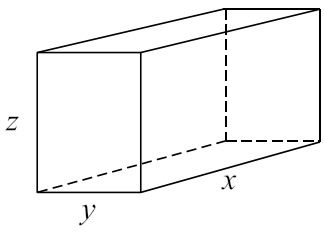


En tragt har form som en omdrejningskegle. Tragtens krumme overflade ønskes mindst mulig for et givet volumen.
Find den optimale åbningsvinkel x.

Opgave 10.6 (2 variable, globalt ekstremum i lukket mængde)

1) Søg minimum for x^2y+xy^2-3xy i mængden S givet ved begrænsningerne
   $x\le 3,\ -x\le y\le 3.$
2) Søg minimum for $10x^3-9y^2$ i mængden S givet ved begrænsningen $x^2+y^2\le 1.$
3) Søg minimum for $7x^3-16y$ i mængden S givet ved begrænsningerne $\le 1,\ x\ge y^2$
4) Søg maksimum for $x^2y-4x^2-2y^2+16y$ i mængden S givet ved begrænsningerne
   $y\le 10-x^2,\ \ y\ge 0.$
5) Søg minimum for x^3+8y^3-3xy i mængden S givet ved begrænsningerne
   $x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ x\le 4,\ \ y\le 4,\ \ xy\le 2.$
6) Søg maksimum for $y\sqrt{1-x^2-y^2}$ i mængden S givet ved begrænsningen $^2+y^2\le 1$
7) Søg maksimum for $(1+y)\sqrt{2x-x^2-y^2}$ i mængden S givet ved begrænsningen
   $2x-x^2-y^2\ge 0.$
8) Søg maksimum for $\sin x+\cos y+\cos(x-y)$ i mængden S givet ved begrænsningerne
   $x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ x\le 2\pi,\ \ y\le 2\pi.$

Opgave 10.7 (globalt minimum i lukket mængde)



En kasseformet tank skal konstrueres, så den får et rumfang på 2000 m^3. Bund, sider og låg koster henholdsvis 4000 kr./m ^{2}, 2000 kr./m^2 og 1000 kr./m ^{2}. Dimensionér tanken således, at prisen bliver mindst, idet dog ingen af kanterne må overstige 20 m.

Opgave 10.8 (2 variable, lokale ekstrema)

Find alle lokale maksimums- og minimumspunkter for følgende funktioner:

1) $f(x,y) = x^2+y^2+xy, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

2 T) $f(x,y) = x^2+y^4+4xy, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

3) $f(x,y) = xy+y^3, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

4) $f(x,y) = x^2+y^3+2x, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

5) $f(x,y) = x^3+y^2-3x, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

6) $f(x,y) = x^2+2xy+2y^3+5y^2, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

7) $f(x,y) = x^4-8x^2+4xy^2+4y^2, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

8) $f(x,y) = x^4+y^4-2(x-y)^2, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

9) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}+x^2-2y^2, \qquad (x,y)\in\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$

10) $f(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

11) $f(x,y) = 2x^2y+xy^2-6xy, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Opgave 10.9 (tre variable, lokale ekstrema)

Find alle lokale ekstremumspunkter for de følgende funktioner

1) $f(x,y,z) = -2x^2-2y^2-z^2+2xy+2yz+8x-4y+2z-3, \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

2) $f(x,y,z) = x^3+3x^2+2y^2+z^2-yz, \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

3) $f(x,y,z) = x^3+2x+y^3+z^3-5xyz, \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Opgave 10.Eksam.19a (2 variable, værdimængde, 20 point)

Lad funktionen f være givet ved $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2-4xy^2-x^2y+8xy$ i mængden $S = \{(x,y)\,|\,xy\geq 1 \wedge 0\leq x\leq 8 \wedge 0\leq y\leq 2\}$.

Find værdimængden for funktionen f.

Opgave 10.Eksam.23 (2 variable, værdimængde, 30 point)

Indledning. Ved en foreliggende industriel proces reagerer et formalet fast stof med en væske. Man har fundet, at for en given begyndelseskoncentration q af fast stof vil den **samlede** procesomkostning z fortrinsvis afhænge af kornstørrelsen x og omrøringsintensiteten y, d.v.s. $z = f_q(x,y)$. Man er interesseret i for enhver fastholdt værdi af q at finde i hvilken udstrækning omkostningen z kan variere, når x og y ændres inden for visse grænser. I det følgende formuleres et abstrakt matematisk problem af samme type.

Problem. Lad funktionen f være givet ved

$f_q(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2qx + 2$ i mængden $S = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 1\}$.

Bestem for enhver fastholdt værdi af q i intervallet $[0;\frac{1}{2}]$ mindsteværdien a(q) og størsteværdien b(q) for funktionen f_q og skitser grafisk, hvorledes a(q) og b(q) afhænger af q.

Opgave 10.Eksam.34 (2 variable, værdimængde, 30 point)

Indledning. En virksomhed skal bruge et 20 m^3 kasseformet bassin med længde $x \le 4$ meter og bredde $y \le 4$ meter. Desuden kræves, at højden $\frac{20m^3}{xy}$ højst må være 2.5 meter, d.v.s. reagerer et formalet fast stof med en væske. Man har fundet, at for en given begyndelseskoncentration q af fast stof vil den **samlede** procesomkostning z fortrinsvis afhænge af kornstørrelsen x og omrøringsintensiteten y, d.v.s. $8m^2 \le xy$. Man ønsker, at bestemme bassinets optimale dimensioner, idet det beregnede samlede varmetab $5qxy + \frac{20}{y} + \frac{80}{x}$ (SI-enheder) skal være mindst mulig; q er en fast værdi, der angiver, hvor effektivt bassinet er overdækket. I det følgende formuleres et abstrakt matematisk problem af samme type.

Problem. Find for enhver fastholdt værdi af $q \in [0;1]$ et punkt (x,y), hvor udtrykket

$$5qxy + \frac{20}{y} + \frac{80}{x}$$

antager sin mindsteværdi i mængden $\{(x,y) \mid 0 \le x \le 4 \wedge 0 \le y \le 4 \wedge 8 \le xy\}$. Skitser herunder grafisk mindsteværdien som funktion af q.

Opgave 10.Eksam.37a (2 variable, værdimængde, 25 point)

Lad funktionen f være givet ved $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1) - \frac{1}{2}x^2 + y$ i mængden $S = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 2^2 \wedge y \le 0\}$. Find værdimængden for funktionen f.

Opgave 10.Eksam.42 (2 variable, globalt minimum, 20 point)

Lad funktionen f være givet ved $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 3xy$

hvor $S = \{(x,y) \mid x > 0 \wedge xy \ge 1 \wedge x+y \le 4\}$. Find mindsteværdien for funktionen f.

Forklaring. Der ønskes mindst mulig korrosion $f(x,y)$ på et anlæg til kemisk produktion, idet x og y er koncentrationer af 2 stoffer. Spildevandsrenheden kræver $x+y \le 4$ mol/m^3 og produktionsmetoden kræver $xy \ge 1$ mol^2/m^6.

Opgave 10.Eksam.46 (2 variable, lokale og globale ekstreme, 25 point)

1) Vis, at funktionen f givet ved $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 4x^2 - 8y^2$ har 5 stationære punkter og afgør for hvert, om det er et lokalt maksimumspunkt, lokalt minimumspunkt eller saddelpunkt.
2) Bestem derpå globalt maksimum og minimum for $f(x,y)$ i mængden $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 16\}$.

Opgave 10.Eksam.55a (2 variable, globalt minimum, 25 point)

Find for enhver given fastholdt værdi af $q \in]0;\infty[$ størsteværdien (globalt maksimum) for funktionen f givet ved $f(x,y) = xy - qy - x^2$ i mængden $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \le y \le 1\}$.

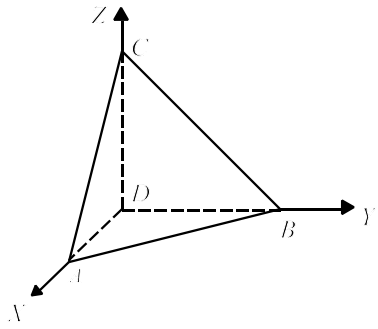
Opgave 10.Eksam.58 (2 variable, globalt minimum, 25 point)

Lad $S = \{(x,y) \mid y \ge 0 \wedge y^2 \le x \le 4\}$.

Find globalt minimum for funktionen $f(x,y) = x^2y(x+3y-5)$, $(x,y) \in S$.

Opgave 10.Eksam.65a (2 variable, globalt minimum, 25 point)

En plan har ligningen $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, hvor $a>2$, $b>4$ og $c>5$ Planen skærer koordinatakserne i punkterne A, B og C (se figuren). Koordinatsystemets begyndelsespunkt kaldes D. Værdierne af a, b og c ønskes bestemt, således at punktet P = (2,4,5) ligger på planen gennem A, B og C, og tetraederet ABC's volumen $V = \frac{1}{6}abc$ bliver mindst mulig. Det oplyses, at der eksisterer værdier af a, b og c med de ønskede egenskaber.



Opgave 10.Eksam.77a (2 variable, værdimængde, 25 point)

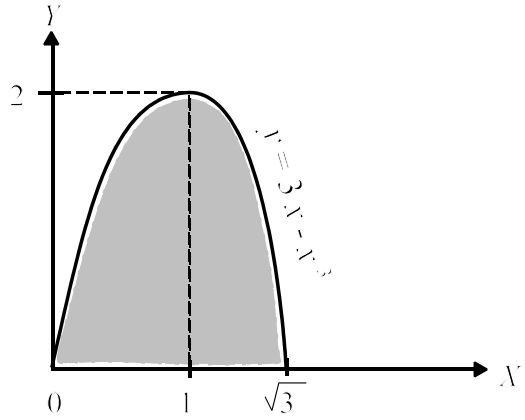
Lad funktionen f være givet ved $f(x,y) = 2x^2 - \ln(x \cdot y) + y$, i mængden $S = \{(x,y) \mid x \cdot y \ge \frac{1}{8} \wedge 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 2\}$. Find værdimængden for funktionen f.

Opgave 10.Eksam.83a (2 variable, minimum, 30 point)

Find globalt minimum for funktionen

$$f(x,y) = y - 5\,\mathrm{Arctan}(2y) + x^3 - 3x + \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cosh(\mathrm{Arcsin}\, t)}{1 - \sqrt{1 - t^2}}$$

i den skraverede lukkede mængde S givet på figuren.



Opgave 10.Eksam.100 (2 variable, differential, lokalt ekstremum, Taylorpolynomium, 30 point)

En funktion $H(p,T)$ har differentialet $dH = (\mathrm{Arctan}\, p + q \cdot T)dp + (2 - 2p + 4T)dT$, hvor q er en ukendt konstant.

1) Find q.
2) Find med mindst 2 betydende cifre et stationært punkt (p^*, T^*) for $H(p,T)$. (Husk at anføre mellemregninger).
3) Undersøg, om (p^*, T^*) er et lokalt maksimumspunkt, lokalt minimumspunkt eller saddelpunkt.
4) Find det 2. Taylorpolynomium $\tilde{H}(p,T)$ for $H(p,T)$ med udviklingspunkt $(p_0, T_0) = (0,0)$, idet det oplyses, at $H(0,0) = 1$.

Opgave 10.Eksam.108 (2 variable, globalt minimum, 30 point)

Lad funktionen f være givet ved $f(x,y,z) = \frac{10}{z} + \frac{4}{x} + \frac{4}{y}$, hvor $(x,y,z) \in S$, og S er givet ved begrænsningerne $xy^2z = 10$, $0 < x \le 4$, $0 < y \le 4$, $0 < z \le 10$. For at reducere opgavens omfang oplyses, at minimum ikke findes på randen $y = 4$.

Opgave 10.Eksam.117 (2 variable, globalt maksimum og minimum, 30 point)

Find globalt maksimum og globalt minimum for funktionen f givet ved $f(x,y) = xy \cdot 2^{y-}$, hvor $(x,y) \in S = \{(x,y) \mid x \ge 0 \wedge x - 4 \le y \le 2\}$.

Opgave 10.Eksam.145 (2 variable, globalt minimum, 20 point)
Lad en funktion f være givet ved $f(x,y) = 3x^3 - xy^2 + 3y^2 - 12y$. Find mindsteværdien for f på mængden S givet ved begrænsningerne $0 \le x \le 3 \wedge 0 \le y \le 5$.

Opgave 10.Eksam.163 (2 variable, lokale ekstrema, 15 point)

a) Find samtlige stationære punkter for funktionen $f(x,y) = x^2y - 2x^2 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2$.

b) Betragt de stationære punkter (x,y) for hvilke $y \le 0$. Afgør for hvert af disse punkter, om punktet er et lokalt maksimumspunkt, et lokalt minimumspunkt eller et saddelpunkt.

Opgave 10.Eksam.176 (stationære punkter, Taylorpolynomium, globalt ekstremum, 25 point)
Lad der være givet funktionen $f(x,y) = \ln\left(x^2 + 2y^2 + \frac{1}{2}\right) - x^2 - 8y^2$.

a) Find samtlige stationære punkter for f.

b) Find det andet Taylorpolynomium for f udfra $(0,0)$.

c) Lad S være området på eller inden for ellipsen $x^2 + 8y^2 = 4$.
Find størsteværdi og mindsteværdi for f i mængden S.

Opgave 10.Eksam.188 (2 variable, globalt minimum, 15 point)
Lad der være givet mængden $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \ge 1 \wedge x^2 + y^2 \le 4\}$.

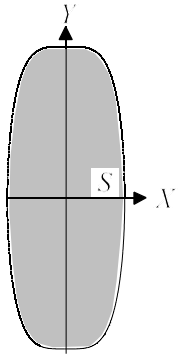
a) Skitsér mængden S.

b) Find mindsteværdi på S for funktionen f givet ved $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2 - x$.
Angiv også, hvor mindsteværdien antages.

Opgave 10.Eksam.209 (2 variable, globalt ekstremum, 20 point)
Bestem største- og mindsteværdi for funktionen

$$f(x,y) = x^4 + xy^2 + y^2$$

på den skitserede mængde $S = \{(x,y) \mid x^4 + y^2 \le 80\}$.



Opgave 10.Eksam.215 (2 variable, lokale ekstrema, 15 point)
Find de stationære punkter for funktionen f givet ved $f(x,y) = (x^2 - y)^2 + 2x^2 - \frac{1}{5}y^2$ og afgør for hvert, om det er et lokalt maksimumspunkt, lokalt minimumspunkt eller saddelpunkt.

Opgave 10.Eksam.225 (2 variable, globalt maksimum, 25 point)

Lad der være givet mængden $S = \{(x,y) \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 6\}$.

a) Skitsér ved skravering punktmængden S i et koordinatsystem.

b) Find størsteværdien i S for funktionen f givet ved $f(x,y) = 5e^{-((x-5)^2+2(y-3)^2+2xy)}$.
Angiv også hvor størsteværdien antages.

Opgave 10.Eksam.230 (2 variable, lokalt ekstremum, 15 point)

Der er givet funktionen $f(x,y) = x^2y - 2x^2 - 2y^2 + 4y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Find samtlige stationære punkter for f.

b) Undersøg, om f har lokalt ekstremum i $(0,1)$.

Opgave 10A.1 (globalt ekstremum i åben mængde)

1) Søg minimum for $x^2 - 4x + 2y^2 + 6$ i mængden $\mathbb{R}^2$.
2) Søg maksimum for $(x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2}$ i mængden $\mathbb{R}^2$.
3) Søg minimum for $x^2 + y^2 + e^{xy}$ i mængden $\mathbb{R}^2$.
4) Søg maximum for $\dfrac{4x-3}{1+x^2+y^2}$ i mængden $\mathbb{R}^2$.
5) Søg maximum for $\ln(4 - x^2 - y^2) + x - y$ i mængden $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$.

Opgave 10B.1 (Lagranges metode)

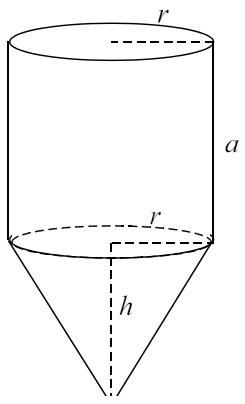
Idet det på forhånd vides, at det ønskede ekstremum eksisterer, skal Lagranges metode anvendes til at løse følgende optimeringsproblemer.

1) Søg minimum for $(x^2 + 2y^2)$, i mængden $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
2) Søg minimum for $((x-1)^2 + y^2)$, i mængden $S = \{(x,y) \mid y^2 - 4x = 0\}$.
3) Søg maksimum for $(x^3 + 18y^2)$, i mængden $S = \{(x,y) \mid (x+9)^2 + y^2 = 25\}$.
4) Søg maksimum for $\left(4xye^{-2x^2-y^2}\right)$, i mængden $S = \{(x,y) \mid 2x^2 + y^2 = 4\}$.
5) Søg maksimum for $(x - 2y + 2z)$, i mængden $S = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
6) Søg minimum for $(x + y^2 + 3yz + 5z^2)$, i mængden $S = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
7) Søg minimum for $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$, i mængden S givet ved begrænsningerne

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 \end{cases}.$$

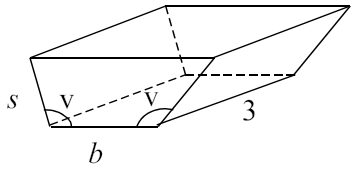
Opgave 10B.2 (Lagranges metode)

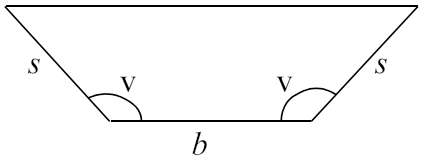
En spidsbundet beholder **uden låg** har sider af form som en ret cylinder med radius r og højde a. Bunden har form som en kegle med radius r og højde h (se figuren). Beholderen skal have et rumfang på 9 m^3. På forhånd vides, at der eksisterer værdier af r, h og a, så beholderens overflade bliver mindst. Find disse værdier f.eks. ved Lagranges metode.



Opgave 10B.3 (Lagranges metode)
Det i opgave 10B.2 stillede problem skal nu løses, idet den eneste forskel er, at beholderen nu har et låg af form som en cirkelskive.

Opgave 10B.4 (Lagranges metode)
En 27 m^3 beholder (uden låg) skal have form som et 3 m langt ret prisme med trapezformet tværsnit (se figuren). Trapezets areal er $T = b \cdot s \cdot \sin v - s^2 \sin v \cdot \cos v,$ og beholderens volumen er $V = 3 \cdot T,$ hvor b, s og v *er angivet på figuren.*





På forhånd vides, at der eksisterer værdier af b, s og v, *så beholderens overflade (bund + sider) bliver mindst. Find disse værdier ved Lagranges metode.*

Opgave 10B.Eksam.73 (Lagranges metode, 20 point)
Find det globale maksimumspunkt for funktionen $f(x,y) = x^3 + 36y, \quad (x,y) \in \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 25\}.$

Opgave 10B.Eksam.128 (Lagranges metode, 15 point)
Vi betragter funktionen $f(x,y) = x + 6y$, og underkaster f den begrænsning, at (x,y) skal opfylde ligningen $x^2 + 2xy + 3y^2 = 9$. Det oplyses (skal altså **ikke** vises), at f med denne begrænsning antager såvel en største- som mindsteværdi. Find disse.

Opgave 10C.1 (lineær programmering)
1) Søg minimum for $3x - 4y$ i mængden S givet ved begrænsningerne $-y \ge 0, \; x + y \le 2, \; x - 2y \le 0$
2) Søg minimum for $2x + y$ i mængden S givet ved begrænsningerne $+y \ge 1, \; 2x + 4y \ge 3, \; x \ge 0, \; y \ge 0$
3) Søg maksimum for $3x + 4y$ i mængden S givet ved begrænsningerne $\le x \le 3, \; 0 \le y \le 4, \; x + y \le 5$
4) Søg minimum for $2x - y$ i mængden S givet ved begrænsningerne $\ge 2, \; 2x - y + 1 \ge 0, \; 4x + y - 16 \le 0$

Opgave 10C.2 (lineær programmering)
Et ernæringsprodukt skal blandes af to råvarer R_1 og R_2 . Råvarernes pris samt indhold af 3 næringsstoffer A, B og C er:

	Råvare R_1	Råvare R_2
Pris kr./ton	2000	4500
Enheder af næringsstof A/ton	16	24
Enheder af næringsstof B/ton	4	2
Enheder af næringsstof C/ton	2	9

Den færdige blanding skal totalt indeholde mindst 80 enheder A, 12 enheder B og 16 enheder C.
Find den billigste blanding.

Opgave 10C.3 (lineær programmering)

En virksomhed skal beplante nogle arealer og kan vælge mellem to typer beplantning A og B, eventuelt en kombination af disse. Type A og B giver et overskud pr. hektar på henholdsvis 2500 kr. og 6000 kr. Af nedenstående skema fremgår, hvad beplantning af 1 hektar kræver af maskiner og omkostninger.

	1 hektar beplantet med type A	1 hektar beplantet med type B
Antal maskindage	1	4
Omkostninger i kr.	1000	2000

I den for beplantning gunstige sæson er der højst 160 maskindage til rådighed, og virksomheden vil højst betale 110000 kr. for arbejdet. Antallet af hektar er så stort, at det kan betragtes som ubegrænset. Find det maksimale overskud, samt det antal hektar der skal beplantes med henholdsvis A og B for at opnå dette overskud.

Opgave 10D.1 (1 variabel, numerisk ekstremumsbestemmelse)

Bestem tilnærmede værdier (3 decimaler efter decimalpunktum) for

1) det globale minimumspunkt og minimum for funktionen f i intervallet $[1;5]$ på grundlag af funktionstabellen

x	1	2	3	4	5
f(x)	5.000	0.000	1.000	12.000	48.000

2) det globale minimumspunkt og minimum for funktionen f i intervallet $[0;2]$ på grundlag af funktionstabellen

x	0	0.5	1	1.5	2
f(x)	3.000	0.563	-2.000	-2.500	3.000

3) det globale maksimumspunkt for funktionen $f(x) = 14x - x^2 - 4x \cdot \ln, \quad x \in [1;5]$ på grundlag af funktionstabellen

x	1	2	3	4	5
f(x)	13.000	18.455	19.817	17.819	12.811

4) det globale maksimumspunkt og maksimum for funktionen $f(x) = (x-3)^2(x+2)\ln x, \quad x \in [1;2]$ på grundlag af funktionstabellen

x	1	1.25	1.5	1.75	2.00
f(x)	0.000	2.221	3.193	3.279	2.773

5) det globale minimumspunkt og minimum for funktionen $f(x) = x^2 + 20 \cdot 2^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ på grundlag af en funktionstabel med heltallige x-værdier.

Opgave 10D.2 (2 variable, numerisk ekstremumsbestemmelse)

Bestem tilnærmede værdier for det globale minimumspunkt

1) for funktionen $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 20 \cdot 2^{-2x-y}$ i mængden $S = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2 \wedge 0 \le y \le 2\}$ på grundlag af tabellen

y					
2.0	13.000	10.750	10.250	10.870	12.313
1.5	11.571	8.286	7.268	7.634	8.942
1.0	12.000	7.250	5.500	5.500	6.625
0.5	14.642	7.821	5.036	4.518	5.384
0.0	20.000	10.250	6.000	4.750	5.250
	0	0.5	1	1.5	2	x

2) for funktionen $f(x,y) = 2x^3 - 2y^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 20x^2 + 25xy + 58y^2 - 94x - 452y + 1188$ i mængden $S = \{(x,y) \mid 3 \le x \le 6 \wedge 4 \le y \le 7\}$ på grundlag af tabellen

y					
7	*45*	*60*	*125*	*252*	
6	*12*	*20*	*72*	*180*	
5	*5*	*0*	*33*	*116*	
4	*36*	*12*	*20*	*72*	
	3	*4*	*5*	*6*	*x*

Opgave 10D.3 (numerisk minimumsbestemmelse)

Regn opgave 10.D2, spm. 1 ved algoritme I i appendix 10.2. (Programmérbar lommeregner eller edb er nødvendig).

11 LØSNING AF LIGNINGER, IMPLICIT GIVEN FUNKTION

11.1 ÉN LIGNING MED ÉN UBEKENDT

At løse en ligning $f(x)=0$ i et givet interval I, vil sige at finde samtlige værdier (rødder) $x^* \in I$, for hvilke $f(x^*)=0$. Eksempelvis har ligningen $2x-3=0$ roden $x^*=\frac{3}{2}$. Eksempel 11.1 viser nogle ligninger, hvor det er muligt ved passende ensbetydende regninger at finde samtlige eksakte rødder. Løsning af n'te gradsligninger blev omtalt i bind 1 kapitel 5.

Eksempel 11.1. Eksakte løsninger.

Løs ligningerne

1) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

2) $2\sqrt{x+7}+x-8 = 0$

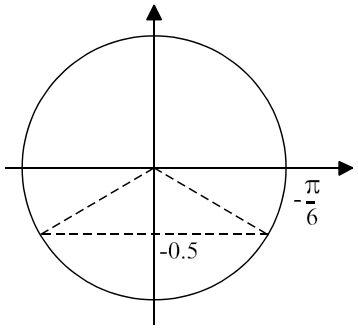
3) $4\cdot 2^{3x+1}-5\cdot 3^{2x}-5\cdot 2^{3x-2}-3^{2x-1} = 0$.

LØSNING:

1) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad 2x = -\frac{\pi}{6}+2p\pi \quad \vee \quad 2x = \frac{7\pi}{6}+2p\pi$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = -\frac{\pi}{12}+p\pi}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x = \frac{7\pi}{12}+p\pi}}$.



2) $2\sqrt{x+7}+x-8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x+7} = 8-x$.

$\sqrt{x+7}$ er kun defineret for $x+7 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -7$.

Da $2\sqrt{x+7} \geq 0$, følger det af ligningen, at også $8-x \geq 0$, dvs. $x \leq 8$.

Vi har derfor, at ligningen kun kan have rødder i $D = \{x \mid -7 \leq x \leq 8\}$.

I D gælder:

$$2\sqrt{x+7} = 8-x \quad \Leftrightarrow \quad 4(x+7) = (8-x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x+28 = 64+x^2-16x$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-20x+36 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{20 \pm \sqrt{20^2-4\cdot 36}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{20 \pm 16}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 18 \ \vee \ x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 2}} \quad \text{da} \quad 18 \notin D \ .$$

3) $4\cdot 2^{3x+1} - 5\cdot 3^{2x} - 5\cdot 2^{3x-2} - 3^{2x-1} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cdot 2^{3x}\cdot 2^1 - 5\cdot 3^{2x} - 5\cdot 2^{3x}\cdot 2^{-2} - 3^{2x}\cdot 3^{-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^{3x}\left(8-\frac{5}{4}\right) - 3^{2x}\left(5+\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2^3)^x \frac{27}{4} = (3^2)^x \frac{16}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^x = \frac{16\cdot 4}{3\cdot 27} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{8}{9}\right)^x = \frac{8^2}{9^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x\ln\left(\frac{8}{9}\right) = 2\ln\left(\frac{8}{9}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 2}} \ .$$

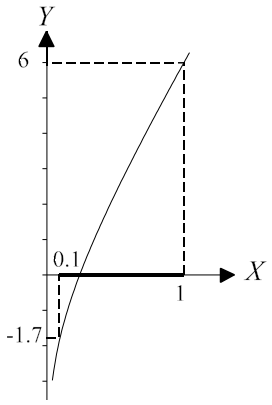
Edb-løsning. Anvendes Maple, kan man ikke være sikker på, at programmet finder rødderne. I ligning 1 finder programmet således kun én rod:

```
> solve(sin(2*x)=-1/2,x);
```

$$-\frac{1}{12}\pi$$

De øvrige uendelig mange rødder må man selv finde ud fra f.eks en enhedscirkel.

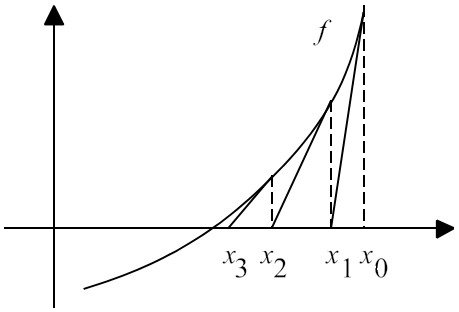
Ofte er det ikke muligt at finde eksakte løsninger. Lad os eksempelvis betragte ligningen $6x + \ln x = 0$. Det er her umuligt at isolere x og ad denne vej finde en rod. Vi vil imidlertid vise, at der eksisterer en rod. Lad $f(x) = 6x + \ln x$. Da $f(0.1) \approx -1.7 < 0$, $f(1) = 6 > 0$, og f er kontinuert, må der være mindst én rod i det mellemliggende interval $]0.1;1[$ (se figuren). (Da $f'(x) = 6 + \frac{1}{x} > 0$, er $f(x)$ voksende, dvs. $f(x) = 0$ har netop én rod.)



Der findes en lang række metoder til med tilnærmelse at finde en rod. I det følgende er angivet to metoder, som begge kan programmeres, idet de angiver en bestemt procedure, hvorved man kommer fra én tilnærmelse af roden til den næste. En tredie metode er angivet i supplement 11A, og algoritmerne for endnu flere metoder kan findes i appendix 11.1.

Newtons metode

Vi søger en rod til ligningen $f(x) = 0$. Først vælges et startpunkt x_0, som ikke må ligge alt for langt fra roden. Geometrisk består metoden nu i, at man tegner tangenten til $f(x)$ i punktet $\big(x_0, f(x_0)\big)$ (se figuren). Den skærer *x*-aksen i et punkt x_1:



$$\boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$ (bevises i det følgende),

som sædvanligvis vil ligge tættere ved den søgte rod end x_0. Nu tegnes tangenten i punktet $\big(x_1, f(x_1)\big)$. Dens skæring med x-aksen kaldes $\left(x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right)$, og ligger oftest endnu tættere ved den søgte rod. Således fortsættes, indtil det skønnes, at tilnærmelsen "x_i" ikke mere ændrer sig indenfor den nøjagtighed, hvormed roden ønskes bestemt.

Bevis for formlen $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Tangenten til grafen for f i punktet $\big(x_0, f(x_0)\big)$ har ligningen

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Indsættes $x = x_1$ og $y = 0$ i ligningen, fås

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Eksempel 11.2. Newtons metode.

Find en positiv rod med mindst 2 betydende cifre til ligningen $6x + \ln x = 0$.

LØSNING:

Idet $f(x) = 6x + \ln x$, bliver Newtons formel $x_1 = x_0 - \dfrac{6x_0 + \ln x_0}{6 + \dfrac{1}{x_0}}$.

Vælges startpunkt $x_0 = 1$, fås

$$x_1 = 1 - \frac{6}{6+1} = \frac{1}{7} = 0.1429$$

$$x_2 = \frac{1}{7} - \frac{6\frac{1}{7} + \ln\frac{1}{7}}{6+7} = 0.2266$$

$$x_3 = 0.2266 - \frac{6 \cdot 0.2266 + \ln 0.2266}{6 + \dfrac{1}{0.2266}} = 0.2386$$

$$x_4 = 0.2386 - \frac{6 \cdot 0.2386 + \ln 0.2386}{6 + \dfrac{1}{0.2386}} = 0.2387.$$

Da resultatet nu er stabilt med 3 betydende cifre, er roden **0.24**. Det er vigtigt, at startpunktet ligger tæt ved roden. Havde vi nemlig valgt $x_0 = 3$, blev $x_1 = 3 - \frac{6 \cdot 3 + \ln 3}{6 + 1/3} = -0.0156$, og da vi ikke kan tage $\ln(-0.0156)$, ville metoden gå i stå.

Edb-løsning I programmet Maple kan en numerisk løsning i intervallet]0;10[findes på følgende måde:

```
> fsolve( 6*x+ln(x)=0, x=0..10 ) ;
                        .2387341293
```

Fixpunktsmetoden

DEFINITION af fixpunkt. *Et punkt* x^* *kaldes et fixpunkt for en funktion* F, *hvis det afbildes over i sig selv af* F, *dvs. hvis* $x^* = F(x^*)$.

Eksempelvis er 1 et fixpunkt for x^2, da $1 = 1^2$.

Omformning til fixpunktsproblem. Ligningen $f(x) = 0$ omformes til $x = F(x)$. Dette kan sædvanligvis ske på mange måder. Eksempelvis kan ligningen $6x + \ln x = 0$ omformes til $x = -\frac{1}{6}\ln x$ eller $x = e^{-6x}$. I dette tilfælde vil kun én af omformningerne føre til en rod. I supplement 11A forklares, **hvornår** metoden virker.

Søgning af fixpunkt. Indsættes et startpunkt x_0 i $F(x)$, fås $x_1 = F(x_0)$. Hvis $x_1 = x_0$, er roden fundet. Ellers indsættes nu x_1 i $F(x)$. Vi får $x_2 = F(x_1)$. Igen vil $x_2 = x_1$ vise, at roden er fundet. Ellers indsættes x_2 i $F(x)$ osv. Når det er klart, at de fundne x-værdier ikke indenfor den ønskede nøjagtighed kan forbedres ved yderligere gentagelser, er roden fundet. Bliver resultatet ikke stabilt, vil man hurtigt opdage det, og man må så prøve nye startpunkter og/eller nye omformninger af ligningen.
(Bemærk, at Newtons metode falder ind under fixpunktmetoden: $f(x) = 0$ omformes til $x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.)

Eksempel 11.3. Fixpunktmetoden.

For ligevægten $2SO_4 + O_2 \rightleftarrows 2SO_3$ kan man ud fra en række oplysninger finde, at "om-sætningsgraden" er $\alpha = \frac{x}{4}$, hvor x er bestemt af

$$\frac{4x^2(100 - x)}{(8 - 2x)^2(12.9 - x)} = 1703, \quad 0 < x < 4.$$

Find værdien af x med 3 betydende cifre.

LØSNING:

Omformning til fixpunktsproblem. Da brøken skal være så stor som 1703, må tælleren være meget større end nævneren. Den eneste mulighed er, at $8-2x \approx 0$, dvs. $x \approx 4$. Det er derfor hensigtsmæssigt at omforme ligningen til $x = 4 + \text{led}$, hvor "led" så er et lille korrektionsled.

Vi får

$$\frac{4x^2(100-x)}{(8-2x)^2(12.9-x)} = 1703 \quad \Longrightarrow \quad \frac{4x^2(100-x)}{12.9-x} = 1703(8-2x)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (4-x)^2 = \frac{x^2(100-x)}{1703\,(12.9-x)} \quad \Leftrightarrow \quad 4-x = x\sqrt{\frac{100-x}{1703\,(12.9-x)}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 4 - x\sqrt{\frac{100-x}{1703\,(12.9-x)}}\ .$$

Søgning af fixpunkt. Sættes $:=4$ fås $_1 = 4 - 4\sqrt{\frac{100-4}{1703\,(12.9-4)}} = 3.6817$

Sættes $x = 3.6817$, fås $x_2 = 3.7116$.
Sættes $x = 3.7116$, fås $x_3 = 3.7089$.
Sættes $x = 3.7089$, fås $x_4 = 3.7091$.
Vi har følgelig, at roden er $x = 3.709 \approx \underline{\underline{3.71}}$.

11.2 NEWTONS METODE FOR 2 LIGNINGER MED 2 UBEKENDTE

Antag, at ligningssystemet

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

har mindst én løsning (x,y). Først vælges et startpunkt (x_0,y_0), som ikke må ligge alt for langt væk fra en løsning. Derpå **lineariseres** ligningssystemet omkring dette punkt ved, at f og g hver erstattes med deres 1. Taylorpolynomium med udviklingspunkt (x_0,y_0):

$$\begin{aligned} f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) &= 0 \\ g(x_0,y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Geometrisk betyder det, at de to flader givet ved $z = f(x,y)$ og $z = g(x,y)$ er blevet erstattet med deres tangentplaner i punkterne $\left(x_0,y_0,f(x_0,y_0)\right)$ og $\left(x_0,y_0,g(x_0,y_0)\right)$, henholdsvis. Det lineariserede ligningssystem (2) har løsningen (x_1,y_1) givet ved

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot g(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)}$$

$$y_1 = y_0 - \frac{g(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot f(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)} \qquad (3)$$

forudsat, at brøkernes nævner ikke er 0. Det nye punkt (x_1,y_1) vil sædvanligvis ligge tættere ved en løsning, end (x_0,y_0). Derfor indsættes (x_1,y_1) i stedet for (x_0,y_0) i højresiderne af (3). Herved fås et nyt punkt (x_2,y_2), der igen kan indsættes i højresiderne af (3), osv., indtil det skønnes, at den tilnærmede løsning (x_i,y_i) ikke mere ændrer sig inden for den nøjagtighed, hvormed en løsning ønskes bestemt. Er dette ikke sket efter beregning af 10-20 punkter, vil man ofte starte forfra med et nyt startpunkt. Det kan man også gøre for at se, om der skulle være andre løsninger.

Eksempel 11.4. Newtons metode for 2 ligninger med 2 ubekendte.

Find en løsning (x,y) til ligningssystemet

$$xy - e^{x-2y} = 0$$
$$x - y + e^{-x^2y} = 0 \ ,$$

hvor $-1 \le x \le 1$ og $0 \le y \le 2$.

LØSNING:

Vi har

$$f(x,y) \equiv xy - e^{x-2y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = y - e^{x-2y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2e^{x-2y},$$

$$g(x,y) \equiv x - y + e^{-x^2y}, \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = 1 - 2xy\,e^{-x^2y}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -1 - x^2e^{-x^2y}.$$

Indsættes disse udtryk i formlerne (3), fås

$$x_1 = x_0 - \frac{\left(x_0y_0 - e^{x_0-2y_0}\right)\cdot\left(-1 - x_0^2 e^{-x_0^2y_0}\right) - \left(x_0 + 2e^{x_0-2y_0}\right)\cdot\left(x_0 - y_0 + e^{-x_0^2y_0}\right)}{\left(y_0 - e^{x_0-2y_0}\right)\cdot\left(-1 - x_0^2 e^{-x_0^2y_0}\right) - \left(x_0 + 2e^{x_0-2y_0}\right)\cdot\left(1 - 2x_0y_0\, e^{-x_0^2y_0}\right)}$$

$$y_1 = y_0 - \frac{\left(x_0 - y_0 + e^{-x_0^2y_0}\right)\cdot\left(y_0 - e^{x_0-2y_0}\right) - \left(1 - 2x_0y_0\, e^{-x_0^2y_0}\right)\cdot\left(x_0y_0 - e^{x_0-2y_0}\right)}{\left(y_0 - e^{x_0-2y_0}\right)\cdot\left(-1 - x_0^2 e^{-x_0^2y_0}\right) - \left(x_0 + 2e^{x_0-2y_0}\right)\cdot\left(1 - 2x_0y_0\, e^{-x_0^2y_0}\right)} \quad . \qquad (3a)$$

Der vælges et startpunkt, f.eks. $(x_0,y_0) = (0, 0.8)$. Ved indsættelse i formlerne (3a) fås den forbedrede løsning $(x_1,y_1) = (0.1209, 1.1209)$. Nu indsættes (x_1,y_1) i stedet for (x_0,y_0) i højresiderne af (3a). Herved fås et nyt punkt $(x_2,y_2) = (0.1131223081, 1.099256985)$, der igen indsættes på højresiderne i (3a), osv.:
$(x_3,y_3) = (0.1130779117, 1.099122161)$,
$(x_4,y_4) = (0.1130779103, 1.099122157)$,
$(x_5,y_5) = (0.1130779103, 1.099122157)$.

Da resultatet nu er stabilt med 10 betydende cifre, er en løsning bestemt med denne nøjagtighed ved blot 4-5 skridt med Newtons metode.

Edb-løsning I programmet Maple kan en numerisk løsning findes på følgende måde:

```
> fsolve( {x*y-exp(x-2*y), x-y+exp(-x^2*y)}, {x,y}, {x= -1..1, y=0..2} );
```

{ x = .1130779104, y = 1.099122157 }

11.3 LIGNINGEN $f(x,y) = 0$

Hver af ligningerne $y = \cos x + e^x$ og $y = \frac{2}{3}x - 2$ siges at give y **eksplicit** som funktion af x, idet ligningerne er af typen $y = g(x)$, hvor g er en funktion af x. I ingeniørmæssige problemer vil sammenhængen mellem to størrelser ofte blive udtrykt ved en ligning $f(x,y) = 0$, hvor y ikke er isoleret. Lad os eksempelvis betragte ligningerne

$2x - 3y - 6 = 0 \qquad (1)$

$x^2 - y^2 - 4 = 0 \qquad (2)$

$xy - e^{x-y} = 0 \qquad (3)$.

Det ses umiddelbart, at i tilfælde (1) vil der til enhver x-værdi være (højst) én y-værdi, som tilfredsstiller ligningen. Man siger i et sådant tilfælde, at ligningen $2x - 3y - 6 = 0$ bestemmer y **implicit** som en funktion af x. Isoleres y, dvs. $y = \frac{2}{3}x - 2$, er y eksplicit givet som funktion af x.

I tilfælde (2), hvor grafen er en cirkel med radius 2, bestemmer ligningen **ikke** y som en implicit given funktion af x for alle $x\in\mathbb{R}$, da der til en værdi i intervallet $]-2;2[$ svarer to y-værdier. I tilfælde (2) er det muligt at isolere y $(y=\pm\sqrt{4-x^2})$, mens det kan vises, at dette ikke er muligt i tilfælde (3). Om ligning (3) bestemmer y som en implicit given funktion af x kan vi først vide efter en nærmere undersøgelse (se eksempel 11.5).

DEFINITION af implicit given funktion. *Lad der være givet en ligning* $f(x,y)=0$ *i en mængde S af xy-planen, og lad* S_x *betegne projektionen af S på x-aksen (se figur 11.1). Lad endvidere ligningen* $f(x,y)=0$ *for ethvert punkt* $x\in S_x$ *have netop én y-værdi* $y(x)$ *som løsning, hvor* $(x,y(x))\in S$. *Ligningen* $f(x,y)=0$ *siges da inden for S at fastlægge y som en* ***implicit*** *given funktion* $y(x)$ *af x.*

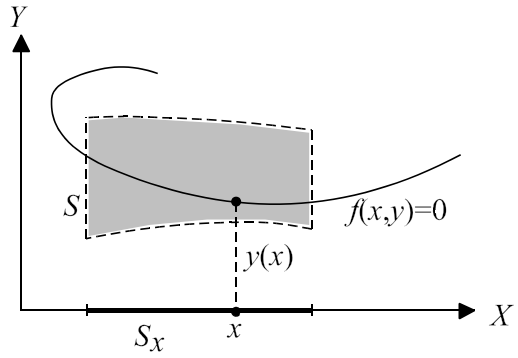
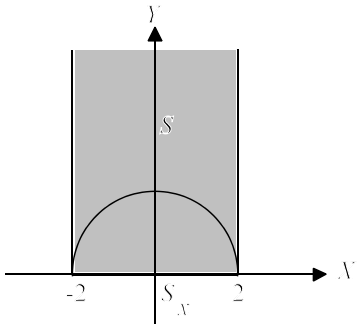


Fig. 11.1. *I den skraverede mængde S fastlægger ligningen* $f(x,y)=0$ *en funktion* $y(x)$.

Lad os eksempelvis betragte ligningen (2) $x^2+y^2-4=0$ i mængden $S=\{(x,y)\mid -2\le x\le 2\ \wedge\ y\ge 0\}$, se figuren. I dette tilfælde vil ligningen (2) inden for S fastlægge y som en implicit given funktion af x for $x\in S_x=[-2;2]$.



Det følgende eksempel 11.5 vil vise, hvorledes man i mere indviklede tilfælde afgør, om en given ligning bestemmer y som en implicit given funktion af x, og hvorledes man iøvrigt matematisk behandler en sådan funktion.

Eksempel 11.5. Ligningen $f(x,y) = 0$.

En vilkårlig ofte differentiabel funktion $y = h(x)$ er givet implicit ved ligningen

$x\,h(x) - 2\cdot e^{2x - h(x)} = 0$ for alle $x>0$, eller kortere ved ligningen

$xy - 2\cdot e^{2x-y} = 0$. (1)

1) Find $h(1)$.

2) Tegn grafen for $y(x)$ i intervallet $[0.1;3]$.

3) Find $h'(1)$, $h''(1)$ og $h'''(1)$.

4) Find det 3. Taylorpolynomium for $y(x)$ med udviklingspunkt 1.

5) Find en approksimerende funktion $\tilde{y}(x)$ i intervallet $[0.1;3]$.

6) Vis, at ligningen $xy - 2\cdot e^{2x-y} = 0$ i mængden $S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x\}$ fastlægger y som en implicit given funktion $y(x)$.

LØSNING:

1) Funktionsværdi. Indsættes x=1 i ligning (1) fås ligningen $y - 2\cdot e^{2-y} = 0$. Denne ses at have løsningen $y = 2$, d.v.s. $h(1) = 2$.

2) Graf. Der indsættes forskellige x-værdier i ligningen $y - 2\cdot e^{2-y} = 0$, og hver gang findes den tilhørende y-værdi ved numerisk rodsøgning. Benyttes Newtons metode, vil vi for $x = x_0$ få $y_2 = y_1 - \dfrac{x_0 y_1 - 2\cdot e^{2x_0 - y_1}}{x_0 + 2\cdot e^{2x_0 - y_1}}$.

Sættes $x_0 = 1.5$ synes det rimeligt at vælge startpunktet $y_1 = 2$, da jo $h(1) = 2$.

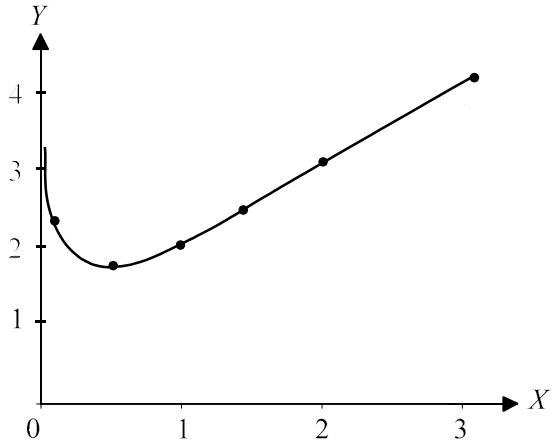
Vi finder følgende værdier 2, 2.3512, 2.4075, 2.4086, 2.4086.

Vi har altså, at for $x = 1.5$ er $y = 2.41$.

På denne måde fås følgende tabel:

x	0.1	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0
y	2.34	1.80	2.00	2.41	2.93	4.17

Efter afbildning af tabelpunkterne kan grafen tegnes:



Edb-løsning. I Maple kan grafen for h tegnes ved ordren

```
> with( plots ) ;
> implicitplot( x*y-2*exp(2*x-y)=0, x=0.1..3, y=0..4 ) ;
```

3) **Implicit differentiation.** Lad $V(x) = xh(x) - 2\cdot e^{2x-h(x)}$ hvor $V(x)$ er venstre side af ligning (1). Da h er vilkårlig ofte differentiabel, er også funktionen $V(x)$ vilkårlig ofte differentiabel, og $V'(x) = h(x) + xh'(x) - 2\cdot e^{2x-h(x)}\cdot(2-h'(x))$. Ifølge ligning (1) er $V(x)=0$ for alle $x>0$. Heraf følger, at $V'(x)=0$ for alle $x>0$, d.v.s. $h(x) + xh'(x) - 2\cdot e^{2x-h(x)}\cdot(2-h'(x)) = 0$ for alle $x>0$.

Indsættes $x=1$ samt $h(1)=2$ fra spørgsmål 1, fås

$2 + h'(1) - 2\cdot e^{2-2}\cdot(2-h'(1)) = 0$, som giver $\underline{\underline{h'(1) = \frac{2}{3}}}$.

Ved differentiation af $V'(x)=0$ fås dernæst

$V''(x) = h'(x) + h'(x) + xh''(x) - 2\cdot e^{2x-h(x)}\cdot\left((2-h'(x))^2 - h''(x)\right) = 0$

gældende for alle $x>0$.

Indsættes $x=1$, $h(1)=2$ og $h'(1) = \frac{2}{3}$, fås $\underline{\underline{h''(1) = \frac{20}{27}}}$.

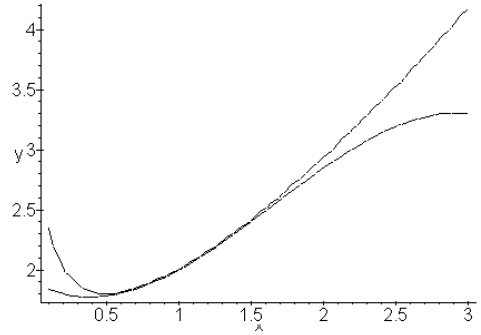
Ved differentiation af $V''(x)=0$ og indsættelse af $x=1$, $h(1)=2$, , $h'(1) = \frac{2}{3}$ og $h''(1) = \frac{20}{27}$ fås analogt $\underline{\underline{h'''(1) = -\frac{92}{81}}}$.

4) **Taylorpolynomium.** Idet $x=1$, $h(1)=2$, $h'(1) = \frac{2}{3}$, $h''(1) = \frac{20}{27}$ og $h'''(1) = -\frac{92}{81}$, fås

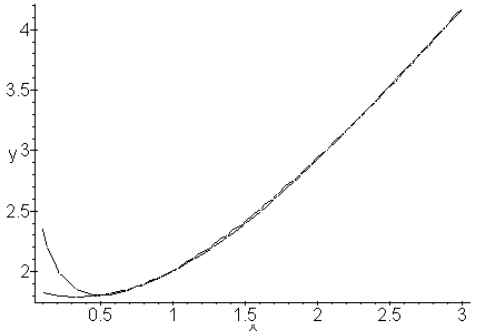
$$y = h(x) \approx 2 + \frac{\frac{2}{3}}{1!}(x-1) + \frac{\frac{20}{27}}{2!}(x-1)^2 + \frac{(-\frac{92}{81})}{3!}(x-1)^3$$

$$\underline{\underline{= 2 + \frac{2}{3}(x-1) + \frac{10}{27}(x-1)^2 - \frac{46}{243}(x-1)^3}} \qquad \left(= -\frac{46}{243}x^3 + \frac{76}{81}x^2 - \frac{52}{81}x + \frac{370}{243}\right).$$

5) Approksimerende funktion Ud fra tabellen i spørgsmål 2 dannes f.eks. en polynomium-approksimation $\tilde{y}(x) = -0.079x^3 + 0.63x^2 - 0.41x + 1.86$ med kollokation for $x = 0.5,\ 1.0,\ 2.0,\ 3.0$ (ønskes stor nøjagtighed, må der beregnes flere og nøjagtigere tabelværdier, hvorefter der f.eks. kan dannes en splinefunktion). Polynomiet minder meget om det, vi fandt i spørgsmål 4.



Graf for h og Taylorpolynomium (h øverst).



Graf for h og kollokationspol. (h øverst.)

6) Eksistens af funktion. Vi sætter $xy - 2\cdot e^{2x-y} = 0$.

Lad x_0 være en vilkårlig fastholdt positiv værdi af x.

Idet

- $f(x_0,y)$ antager positive værdier, da f.eks. $f(x_0,y) \to \infty$ for $y \to \infty$,
- $f(x_0,y)$ antager negative værdier, da f.eks. $f(x_0,y) \to -\infty$ for $y \to -\infty$,
- $f(x_0,y)$ er en kontinuert funktion af y,

må ligningen $f(x_0,y) = 0$ have mindst 1 rod.

Idet yderligere

- $f(x_0,y)$ er en monoton funktion af y, da $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y) = x_0 + 2\cdot e^{2x_0-y} > 0$,

må ligningen $f(x_0,y) = 0$ have netop 1 rod.

Dermed har vi vist, at ligningen $f(x,y) = 0$ i S fastlægger en implicit given funktion $y(x)$.

Implicit-sætningen

Den følgende sætning, som nævnes uden bevis, kan tjene til at afgøre, om en ligning $f(x,y) = 0$ **lokalt** fastlægger y som en funktion af x.

SÆTNING 11.1 *(implicit-sætningen).*

1) Lad $f(x,y)$ *have kontinuerte partielle afledede til q'te orden* $(q \geq 1)$ *i en åben mængde S,*

2) lad (x_0,y_0) *være et punkt i S, for hvilket* $f(x_0,y_0) = 0$, *og*

3) lad $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ *i punktet* (x_0,y_0).

Så eksisterer der et rektangel med (x_0,y_0) *som midtpunkt, sådan at ligningen* $f(x,y) = 0$ *i rektanglet fastlægger* y *som en implicit given funktion* $y(x)$ *med kontinuerte afledede* $y'(x),\ y''(x), \ldots,\ y^{(q)}(x)$ *til q' te orden.*

Sætningen er en typisk "omegnssætning", idet den ikke siger, hvor stort rektanglet kan vælges.

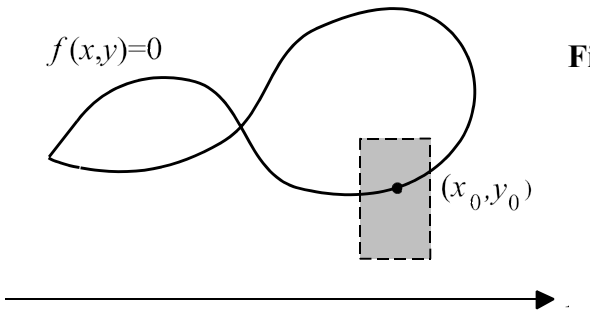


Fig. 11.2. *I rektanglet fastlægges netop én y-værdi for hver x-værdi.*

Eksempel 11.6. Implicit-sætningen.

Vis, at ligningen $xy-2\cdot e^{2x-y}=0$ i et rektangel med (1,2) som midtpunkt fastlægger y som en implicit givet funktion $y(x)$, der er vilkårligt ofte differentiabel.

LØSNING:

1) $f(x,y)=xy-2\cdot e^{2x-y}$ har kontinuerte partielle afledede af vilkårlig høj orden i $\mathbb{R}^2$,
2) $(x,y)=(1,2)$ tilfredsstiller ligningen, da $1\cdot 2-2\cdot e^{2-2}=0$, og
3) $\frac{\partial f}{\partial y}=x+2\cdot e^{2x-y}=3\neq 0$ i punktet (1,2).

Ifølge implicitsætningen vil ligningen $xy-2\cdot e^{2x-y}=0$ derfor opfylde det ønskede.

Differentiation af en implicit given funktion. Man kan ved implicit differentiation i konkrete tilfælde finde $y'(x), y''(x)$ osv. således som det er vist i eksempel 11.5. Vi vil her udlede nogle formler, hvor $y'(x)$ og $y''(x)$ bliver udtrykt ved de partielle afledede af f.

I et rektangel hvor ligningen $f(x,y)=0$ ifølge implicit-sætningen fastlægger y som en implicit given funktion af x, og hvor $\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0$, gælder

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}} \quad . \qquad (1)$$

Er eksempelvis $f(x,y)=xy-2\cdot e^{2x-y}$, haves $\frac{\partial f}{\partial x}=y-4\cdot e^{2x-y}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}=x+2\cdot e^{2x-y}$.

Den ved ligningen $f(x,y)=0$ bestemte implicitte funktion vil da i punktet $(x,y)=(1,2)$ have $y'(1)=-\frac{2-4\cdot e^0}{1+2\cdot e^0}=\frac{2}{3}$ (jævnfør eksempel 11.5).

Med de samme forudsætninger gælder

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3} \quad . \tag{2}$$

Er eksempelvis $f(x,y) = xy - 2\cdot e^{2x-y}$, haves $\frac{\partial f}{\partial x} = y - 4\cdot e^{2x-y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2\cdot e^{2x-y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -8\cdot e^{2x-y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 + 4\cdot e^{2x-y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\cdot e^{2x-y}$. Den ved ligningen $f(x,y) = 0$ bestemte implicit givne funktion, vil da i punktet (1,2) have

$$y''(1) = -\frac{-8\cdot e^0(1+2\cdot e^0)^2 - 2(1+4\cdot e^0)(2-4\cdot e^0)(1+2\cdot e^0) - 2\cdot e^0(2-4\cdot e^0)^2}{(1+2\cdot e^0)^3} = \frac{20}{27}.$$

Bevis for formel (1). Indsættes $y = y(x)$ i $f(x,y)$, fås "nulfunktionen" $f(x,y(x)) = 0$, dvs. funktionen er nul for alle $x \in S_x$. Differentieres denne nulfunktion med hensyn til x ved hjælp af kædereglen

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \quad \text{med} \quad x = t, \quad \text{fås} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\frac{dy}{dx} = 0 \ . \tag{1a}$$

Da $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, fås $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$, hvilket skulle bevises.

Bevis for formel (2). Differentieres (1a) videre ved hjælp af kædereglen, fås

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \ . \tag{2a}$$

Indsættes udtrykket (1) for $\frac{dy}{dx}$ i ligning (2a), fås det ønskede udtryk ved isolation af $\frac{d^2y}{dx^2}$.

11.4 LIGNINGEN $f(x,y,z) = 0$

Vi betragter ligningen $f(x,y,z) = 0$ i en mængde S af xyz-rummet og lader S_{xy} betegne projektionen af S på xy-planen (se figur 11.3). Lad ligningen $f(x,y,z) = 0$ for ethvert $(x,y) \in S_{xy}$ have netop én z-værdi $z(x,y)$ som løsning. Man siger da, at z er implicit givet som en funktion $z(x,y)$ af x og y.

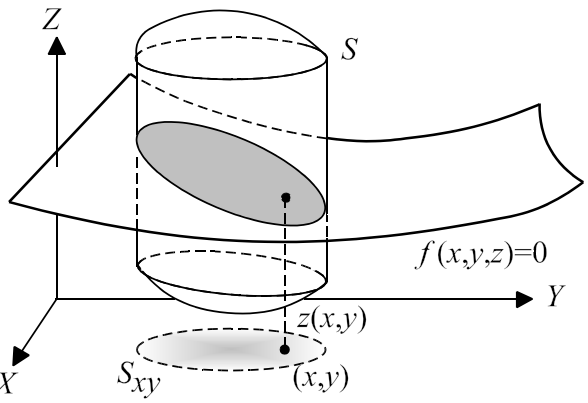


Fig. 11.3. *I mængden S fastlægger ligningen* $f(x,y,z) = 0$ *en funktion* $z(x,y)$.

Eksempel 11.7. Ligningen $f(x,y,z) = 0$.

En vilkårlig ofte differentiabel funktion $z = h(x,y)$ er givet implicit ved ligningen

$f(x,y) = e^{3x-2y} + y^2 h(x,y)^3 - 10 = 0$ eller kortere ved ligningen $e^{3x-2y} + y^2 z^3 - 10 = 0$.

1) Find $z(2,3)$, $z(0,0)$ og $z(1,1)$ med 2 decimalers nøjagtighed.
2) Find $\frac{\partial z}{\partial x}$ og $\frac{\partial z}{\partial y}$ for $(x,y) = (2,3)$.
3) Find det 1. Taylorpolynomium for $z(x,y)$ med udviklingspunkt $(2,3)$.
4) Vis, at ligningen $ze^{3x-2y} + y^2 z^3 - 10 = 0$ i mængden $\mathbb{R}^3$ fastlægger z som en implicit givet funktion $z(x,y)$.

LØSNING:

Lad $f(x,y,z) = ze^{3x-2y} + y^2 z^3 = 10$.

1) Funktionsværdi.

Indsættes $(2,3)$ i ligningen, fås $ze^{6-6} + 9z^3 = 10 \Leftrightarrow z = 1$, dvs. $\underline{\underline{z(2,3) = 1}}$.

Indsættes $(0,0)$ i ligningen, fås $ze^0 + 0 = 10 \Leftrightarrow z = 10$, dvs. $\underline{\underline{z(0,0) = 10}}$.

Indsættes $(1,1)$ i ligningen, fås $ze^1 + z^3 = 10$. Ved numerisk rodsøgning med Newtons metode fås $z_1 = z_0 - \frac{z_0 e + z_0^3 - 10}{e + 3z_0^2}$. Med startpunkt $z_0 = 1$ fås

z: 2 2.0985 1.788 1.741 1.740 , dvs. $\underline{\underline{z(1,1) \approx 1.74}}$.

2) Implicit differentiation. Vi har $f(x,y,z(x,y)) = 0$ for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dvs.

$z(x,y) \cdot e^{3x-2y} + y^2 (z(x,y))^3 - 10 = 0$. (1)

Denne nulfunktion differentieres med hensyn til x:

$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot e^{3x-2y} + z \cdot 3e^{3x-2y} + 3y^2 z^2 \frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

Indsættes $(x,y,z) = (2,3,1)$, fås

$\frac{\partial z}{\partial x} e^0 + 1 \cdot 3e^0 + 3 \cdot 9 \cdot 1^2 \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 28 \frac{\partial z}{\partial x} = -3 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\underline{-\frac{3}{28}}}$.

Nulfunktionen (1) differentieres derpå med hensyn til y:

$\frac{\partial z}{\partial y} \cdot e^{3x-2y} + z \cdot (-2)e^{3x-2y} + 2yz^3 + y^2 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Indsættes $(x,y,z) = (2,3,1)$, fås

$\frac{\partial z}{\partial y} e^0 + 1 \cdot (-2)e^0 + 2 \cdot 3 \cdot 1^3 + 3^2 \cdot 3 \cdot 1^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

$\Leftrightarrow 28 \frac{\partial z}{\partial y} = -4 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4}{28} = \underline{\underline{-\frac{1}{7}}}$.

3) **Taylorpolynomium.** $\tilde{z}(x,y) = z(2,3) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(x-2) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot(y-3)\right]$

$$= 1 + \left[-\frac{3}{28}(x-2) - \frac{1}{7}(y-3)\right] = \underline{\underline{-\frac{3}{28}x - \frac{1}{7}y + \frac{23}{14}}}\ .$$

4) **Eksistens af funktion.** Lad $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Idet

- $f(x_0,y_0,z)$ antager positive værdier, da f.eks. $f(x_0,y_0,z) \to \infty$ for $z \to \infty$,
- $f(x_0,y_0,z)$ antager negative værdier, da f.eks. $f(x_0,y_0,z) \to -\infty$ for $z \to -\infty$,
- $f(x_0,y_0,z)$ er en kontinuert funktion af z,

må ligningen $f(x_0,y_0,z) = 0$ have mindst 1 rod.
Idet yderligere

- $f(x_0,y_0,z)$ er en monoton funktion af z, da $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z) = e^{3x_0-2y_0} + 3y_0^2z^2 > 0$,

må ligningen $f(x_0,y_0,z) = 0$ have netop 1 rod.
Dermed har vi vist, at ligningen $f(x,y,z) = 0$ i $\mathbb{R}^3$ fastlægger en implicit givet funktion $z(x,y)$.

Implicit-sætningen

Den følgende "omegnssætning" kan tjene til at afgøre, om en ligning $f(x,y,z) = 0$ lokalt fastlægger z som en funktion $z(x,y)$ af x og y.

SÆTNING 11.2 *(implicit-sætningen).*
1) Lad $f(x,y,z)$ *have kontinuerte partielle afledede til q'te orden i en åben mængde* S,
2) lad (x_0,y_0,z_0) *være et punkt i* S, *for hvilket* $f(x_0,y_0,z_0) = 0$, *og*
3) lad $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ *i punktet* (x_0,y_0,z_0).
Så eksisterer der en retvinklet kasse med (x_0,y_0,z_0) *som midtpunkt, sådan at ligningen* $f(x,y,z) = 0$ *i kassen fastlægger* z *som en implicit givet funktion* $z(x,y)$ *med kontinuerte partielle afledede til q'te orden.*

Implicit differentiation. Vi har $f(x,y,z(x,y)) = 0$ **for alle** $(x,y)\in S_{xy}$. Differentieres denne nulfunktion med hensyn til x og y, fås ved hjælp af kædereglen

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \qquad (1)$$

forudsat, at $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$. De højere partielle afledede af $z(x,y)$ findes analogt ved at differentiere nulfunktionen yderligere. Implicit-sætningen garanterer åbenbart, at hvis det formelt er muligt at finde de partielle afledede af $z(x,y)$ til q'te orden ved implicit differentiation, så har det også mening.

Nogle nyttige formler. Lad ligningen $f(x,y,z) = 0$ også fastlægge x og y som implicit givne funktioner $x(y,z)$ og $y(x,z)$. Analogt til ligning (1) fås da

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial x}}, \qquad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \qquad \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Heraf finder vi de nyttige formler

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

(samt analoge formler ved ombytninger af x,y,z)

Grunden til, at man ikke blot kan forkorte $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$ og få 1, er at vi jo i $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$ holder z fast, mens vi i $\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)$ holder en anden variabel x fast. Eksempelvis fås for et kemisk system med tilstandsligningen $f(V,p,T) = 0$, at $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}$ og $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = -1$ (bemærk, at blot fordi der er en tilstandsligning, kan vi udlede sådanne formler - uden at kende tilstandsligningen!).

SUPPLEMENT: 11A NÆRMERE OM FIXPUNKTMETODEN

Ved fixpunktmetoden omformes ligningen $f(x) = 0$ til ligningen $x = F(x)$. Dette kan ske på mange måder. Eksempelvis kan ligningen $x^3 + 2x - \frac{1}{5} = 0$ omformes til

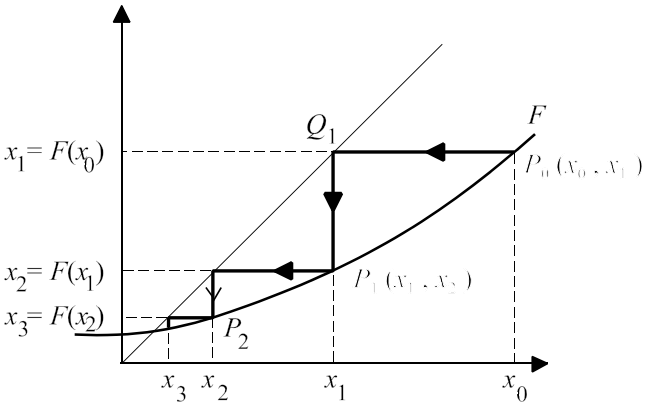
$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{5} - 2x}, \qquad x = \frac{1}{10} - \frac{x^3}{2}, \qquad x = \frac{1}{5(x^2+2)}, \qquad x = \frac{1}{5x^2} - \frac{2}{x}, \qquad x = \sqrt{\frac{1}{5x} - 2}\ .$$

Ikke alle disse omformninger fører til en rod.

Hvornår virker metoden? Man kan svare: "Hvis $|F'(x)| \le k < 1$ for alle x i en omegn af en rod r, og startpunktet ligger i denne omegn, så virker metoden".

Forklaring. Af $x_n = F(x_{n-1})$ og $r = F(r)$ fås nemlig ved subtraktion $x_n - r = F(x_{n-1}) - F(r)$. Middelværdisætningen giver nu $x_n - r = F'(\xi)(x_{n-1} - r)$. Så hvis $|F'(\xi)| \le k < 1$, må den numeriske fejl $|x_n - r|$ i hvert fald mindst blive formindsket med faktoren k for hver ny tilnærmelse. Derved kan der ved gentagelser ("iterationer") opnås en vilkårlig lille fejl.

Geometrisk anskueliggørelse. Lad startværdien være x_0. Ved indsættelse i $F(x)$ fås $x_1 = F(x_0)$. Punktet P_0 på grafen for F har derfor koordinaterne (x_0, x_1). Ved indsættelse af x_1 i $F(x)$ fås derpå $x_2 = F(x_1)$. Punktet P_1 på grafen for F har derfor koordinaterne (x_1, x_2), osv. Tegnes en vandret linie gennem P_0 og en lodret linie gennem P_1, så vil skæringspunktet Q_1 få koordinaterne (x_1, x_1). Altså ligger Q_1 på linien $y = x$. Man kan derfor komme fra P_0 til P_1 ved at gå vandret fra P_0 til skæring med $y = x$ og derfra lodret til skæring med grafen for F. På samme måde kommer man frem til punkterne $P_2, P_3 \ldots$.



Betragtes igen ligningen $x^3 + 2x - \frac{1}{5} = 0$, som omformes til $x = \sqrt[3]{\frac{1}{5} - 2x}$, så kan man på forhånd ikke vide noget om størrelsen af $F'(x) = \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{5} - 2x\right)^2}}$ i nærheden af roden. Ved man derimod, at roden ligger tæt ved $\frac{1}{10}$, så ses, at $|F'(x)| > 1$, dvs. omformninger vil ikke føre til roden.

Valg af omformning Lad $x^3 + 2x = \frac{1}{5}$, hvor man ved, at x er et lille tal $<<1$. Så må leddet x^3 være særlig lille, og ligningen kan tilnærmelsesvis skrives $2x \approx \frac{1}{5}$ med "løsningen" $x \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}$. Eksakt fås $2x = \frac{1}{5} - x^3$ med "løsningen" $x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - x^3\right)$, hvori x^3 indgår som et lille korrektionsled, der ikke påvirker løsningen meget, hvilket igen betyder, at løsningen bliver god til ny beregning af korrektionsleddet osv. Fixpunktmetoden vil virke godt i alle sådanne tilfælde, **hvor "løsningen" kan opskrives med små korrektionsled.** For Newtons metode er korrektionsleddet, $-\frac{f(x)}{f'(x)}$, sædvanligvis lille nær ved roden, fordi $f(x) \approx 0$.

OPGAVER

Opgave 11.1 *(eksakt rod)*

Find x (eksakt) af ligningen

a) $\frac{x^2-5x}{x+3} = x-3+\frac{1}{x}$ *b)* $\frac{x}{7}+\frac{21}{x+5} = \frac{23}{7}$ *c)* $x+2\sqrt{x-3} = 6$.

Opgave 11.2 *(eksakt rod)*

Find x (eksakt) af ligningen

a) $(10x)^{\log x} = 100$. *b)* $\frac{x^{\ln x}}{x^2\sqrt{x}} = \frac{1}{e}$. *c)* $3^{2+x}+3^{1-x} = 28$.

d) $\ln x = 4\ln 2+2\ln 5-\ln 20$. *e)* $\ln\left(\sqrt{2x-3}\right)+\ln\left(\sqrt{3x-2}\right) = \ln\sqrt{50}$.

Opgave 11.3 *(rodsøgning)*

Find med mindst 3 betydende cifre samtlige rødder til ligningerne:

1) $x^3-3x^2+3x-3 = 0,$ $x\in\mathbb{R}$ *(antal rødder: 1).*

2) $x^3+9x^2+23x+14 = 0,$ $x\in\mathbb{R}$ *(antal rødder: 3).*

3) $x\cdot\sin x = 1,$ $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ *(antal rødder: 1).*

4) $[H_3O^+]^3-[H_3O^+]+0.200 = 0$, $[H_3O^+]\in[0;\frac{1}{2}]$ *(antal rødder: 1).*

5) $xe^x = a,$ *hvor* $a = 2,\ 4$ *og* $10,$ $x\in\mathbb{R}$ *(antal rødder: 1).*

6) $x^5 = x+0.2,$ $x\in\mathbb{R}$ *(antal rødder: 3).*

Opgave 11.4 *(fikspunktmetoden)*

I forbindelse med undersøgelsen af et kemisk ligevægtsystem forekommer følgende ligning

$(2x-1)^3 = (1-x)^2\ 4370,$ *hvor det vides, at* $\frac{1}{2}<x<1$.

Benyt fikspunktmetoden til at finde en rod i ligningen med mindst 3 betydende cifre.

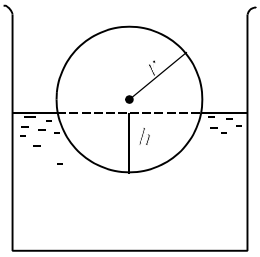
Vink: Omskriv ligningen til $x = 1-u(x),$ *hvor* $u(x)$ *er lille.*

Opgave 11.5 *(rodsøgning)*

Find en positiv rod til ligningen $\operatorname{Arctan}x-\operatorname{Arccos}x = 0$ *med mindst 3 betydende cifre.*

Opgave 11.6 (*rodsøgning)*

En massiv kugle med radius r *og massefylde* ρ_k *flyder på en væske med massefylden* ρ_v. *Lad* h *betegne kuglens største dybde under vandoverfladen. Når kuglen er i ro, er tyngdekraften* $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k \cdot g$ *og opdriften* $\frac{\pi}{3}h^2(3r-h)\rho_v \cdot g$ *lige store. Derved fås ligningen*



$$\left(\frac{h}{r}\right)^3 - 3\left(\frac{h}{r}\right)^2 + 4\frac{\rho_k}{\rho_v} = 0 \ .$$

Idet $\rho_v = 1000$ *og* $\rho_k = 400$, *skal man finde* $\frac{h}{r}$ *med mindst 3 betydende cifre.*

Opgave 11.7a *(løs ligningssystem* $f(x,y)=0,\quad g(x,y)=0$*)*

For hvert af de nedenstående ligningssystemer skal man med mindst 2 betydende cifre

a) finde én løsning (x,y) *i rektanglet* $S_a = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2 \ \wedge \ 0 \le y \le 2\}$

b) finde øvrige løsninger (x,y) *i rektanglet* $S_b = \{(x,y) \mid -2 \le x \le 2 \ \wedge \ -2 \le y \le 2\}$.

1) $2x^3 - xy - y^3 = 0, \qquad x - y + e^{xy} - 2 = 0,$

2) $e^{-x} - xy - y^3 + 1 = 0, \qquad x^3 + e^{-2xy} - y^5 = 0,$

3) $x^2 + y + y^3 + \cosh x - 3 = 0, \qquad xy + \sinh(x-y) = 0.$

4[T]) $x^2 + y^2 - 4 = 0, \qquad x^2 - y^2 - 1 = 0.$

Opgave 11.7 $(f(x,y)=0)$

Idet det oplyses, at hver af nedenstående ligninger i en delmængde S *af xy-planen fastlægger* y *som en implicit givet funktion* $y(x)$, *skal man i hvert af nedenstående tilfælde*

a) tegne grafen for $y(x)$ *i intervallet* I.

b) eftervise, at ligningen virkelig fastlægger y som en implicit funktion af x.

1)	$2x^3 - xy - y^3 = 0$	$S = \{(x,y) \mid x \ge 0\}$	$I = [0;3]$.
2)	$xy + e^{-x} + y^3 = 0$	$S = \{(x,y) \mid x \ge 0\}$	$I = [0;3]$.
3)	$x + y + e^{x^2 y} = 0$	$S = \mathbb{R}^2$	$I = [-2;2]$.
4)	$xy + e^{x^2+y} = 0$	$S = \{(x,y) \mid x > 0\}$	$I = [1;4]$.

Opgave 11.8 $(f(x,y)=0)$

I hvert af de følgende tilfælde skal man finde en approksimerende funktion $\tilde{y}(x)$ *med kollokationspunkter* $x_0, x_1, \ldots, x_n$. *(Det oplyses, at den givne ligning* $f(x,y)=0$ *definerer y implicit som en vilkårlig ofte differentiabel funktion af x i et interval, der indeholder de givne x-værdier - skal ikke vises.)*

1)	$x^3 + xy + y^3 - 1 = 0$	$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$.
2)	$\sqrt{x} + x^2 - y - y^3 = 0$	$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3$.
3)	$2x^2 + 4x - 3y - 3y^3 = 0$	$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3$.
4)	$7x^3 - 30x^2 + 47x - 30 - 3y - 3y^3 = 0$	$x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$.

Opgave 11.9 $(f(x,y)=0,$ *Taylorpolynomium*)

I hvert af de følgende tilfælde skal man finde det 3. Taylorpolynomium for $y(x)$ *med udviklingspunkt* x_0. *(Det oplyses, at den givne ligning* $f(x,y)=0$ *definerer y implicit som en vilkårlig ofte differentiabel funktion af x i det angivne rektangel S - skal ikke vises.)*

1)	$x^3+xy+y^3=1$	$x_0=1$,	$S=\{(x,y) \mid -3\le x\le 3 \wedge -4\le y\le 4\}$.
2)	$y^{2x}+e^{y-1}=5x-8$	$x_0=2$,	$S=\{(x,y) \mid 7/4\le x\le 3 \wedge 0<y\le 4\}$.
3)	$2x^3-xy=y^3$	$x_0=1$,	$S=\{(x,y) \mid 0<x\le 3 \wedge -4\le y\le 4\}$.
4)	$x+e^{xy}=y$	$x_0=0$,	$S=\{(x,y) \mid -1\le x\le 1/5 \wedge -3\le y\le 3\}$.
5)	$x+y^x=y$	$x_0=0$,	$S=\{(x,y) \mid -1\le x\le 1/2 \wedge 0<y\le 4\}$.
6)	$x^3-3x=y+y^3$	$x_0=1$,	$S=\{(x,y) \mid -4\le x\le 4 \wedge -4\le y\le 4\}$.

Opgave 11.10 $(f(x,y)=0,$ *spline*)

I hvert af de følgende tilfælde skal man

a) undersøge, om en ligning i en delmængde S af xy-planen fastlægger y som en implicit givet funktion $y(x)$,

b) finde en approksimerende kubisk splinefunktion $\tilde{y}(x)$ *med 2 kollokationspunkter* x_0, x_1 *og korrekt hældningskoefficient i disse punkter.*

1)	$x^3+xy+y^5=1$	$S=\{(x,y) \mid x\ge 0\}$	$x_0=0$	$x_1=1$.
2)	$x+y+e^{xy}=3$	$S=\{(x,y) \mid x\ge 0\}$	$x_0=0$	$x_1=2$.
3)	$x+y+\sinh(xy)=3$	$S=\{(x,y) \mid 0\le x\le 3 \wedge y\ge 0\}$	$x_0=0$	$x_1=3$.
4)	$x+2y-\operatorname{Arctan}(xy)=8$	$S=\{(x,y) \mid 0\le x\le 9 \wedge y\ge 0\}$	$x_0=0$	$x_1=8$.

Opgave 11.11 $(f(x,y)=0,$ *grænseværdi*)

1) *Undersøg* $\dfrac{\sinh x}{\sin(y-1)}$ *for* $x\to 0$, *idet* $x+e^{xy}=y$ *og* $-1\le x\le 1/5$, $-3\le y\le 3$.

2) *Undersøg* $\dfrac{\ln(x-1)}{y}$ *for* $x\to 2$, *idet* $8xe^y+y=x^4$ *og* $1\le x\le 3$, $-4\le y\le 4$.

3) *Undersøg* $\dfrac{y}{x\cdot\sin y}$ *for* $x\to 0$, *idet* $x^2+y+e^{xy}=1$ *og* $-2/5\le x\le 1$, $-2\le y\le 2$.

4) *Undersøg* $\dfrac{y}{x^3}$ *for* $x\to 0$, *idet* $x^3+y+\sinh(xy)=0$ *og* $-2/5\le x\le 1$, $-2\le y\le 2$.

Opgave 11.12 $(f(x,y)=0,$ *stationært punkt*)

I hvert af de følgende tilfælde skal man

a) finde alle stationære punkter for $y(x)$ *i* S_x,

b) søge at afgøre, om $y(x)$ *i disse punkter har lokalt maksimum, lokalt minimum eller vendepunkt.*

1)	$12x-x^3+y+e^y=17$	$S=\mathbb{R}^2$	$s_x=\mathbb{R}$.
2)	$8x^3+6x^4+y+y^5=0$	$S=\mathbb{R}^2$	$s_x=\mathbb{R}$.
3)	$4x^3-18x^2+24x+y+y^3=10$	$S=\mathbb{R}^2$	$s_x=\mathbb{R}$.
4)	$\cosh(1-x)+(1-x)^4-y^3-y+1=0$	$S=\mathbb{R}^2$	$s_x=\mathbb{R}$.

Opgave 11.13 $(f(x,y)=0,$ *globalt ekstremum)*

I hvert af de følgende tilfælde skal man finde globalt maksimum og minumum for $\mathrm{y}(x)$ *i intervallet* S_x.

1) $\mathrm{x}^3-3x^2+y+3y^3=0$ $\quad \mathrm{S}=\{(x,y)\mid x\in S_x\}$ $\quad \square_x=[-1;3]$.

2) $4x^3-6x^2+y+y^5=0$ $\quad \mathrm{S}=\{(x,y)\mid x\in S_x\}$ $\quad \square_x=[-1;1]$.

3) $\mathrm{x}-\mathrm{e}^x+y+\mathrm{e}^y=0$ $\quad \mathrm{S}=\{(x,y)\mid x\in S_x\}$ $\quad \square_x=[-1;1]$.

4) $\mathrm{x}^3-3x+y+y^7=0$ $\quad \mathrm{S}=\{(x,y)\mid x\in S_x\}$ $\quad \square_x=[-2;2]$.

Opgave 11.14 $(f(x,y,z)=0)$

Idet det oplyses, at hver af nedenstående ligninger i hele xyz-rummet fastlægger z som en implicit givet funktion $\mathrm{z}(x,y)$, *skal man i hvert af nedenstående tilfælde*

a) lave følgende tabel over $\mathrm{z}(x,y)$

y			
y_1	?		
y_0	?	?	
	x_0	x_1	x

b) finde en approksimerende funktion $\tilde{\mathrm{z}}(x,y)$ *med kollokationspunkter* (x_0,y_0), (x_1,y_0), (x_0,y_1).

c) eftervise, at ligningen virkelig fastlægger z som en implicit funktion af x og y.

		x_0	x_1	y_0	y_1
1)	$2y^3+2x-z-z^3=0$	*0*	*5*	*0*	*1*
2)	$5x+4y-5z-5z^5=23$	*1*	*3*	*2*	*7*
3)	$-2y-2x^2z+2^z=2$	*0*	*1*	*0*	*1*
4)	$-9x+(1+x^2)z+y^2z^3=2$		*0*	*2*	*0*	*1*

Opgave 11.15 $(f(x,y,z)=0,$ *Taylorpolynomium*)

I hvert af de følgende tilfælde skal man finde det 2. Taylorpolynomium for $\mathrm{z}(x,y)$ *med udviklingspunkt* (x_0,y_0).

1) $(x-1)^2(y+2)-z-z^3=0$ $\quad (x_0,y_0)=(0,0)$.

2) $-3xy+(1+x^2)z+y^2z^3=4$ $\quad (x_0,y_0)=(0,0)$.

3[T]) $\mathrm{x}^2+z\cdot\cosh(xy)+\sinh z=4$ $\quad (x_0,y_0)=(2,0)$.

4) $\mathrm{z}\cdot\mathrm{e}^{2x-y}+x^2z^3=10$ $\quad (x_0,y_0)=(1,2)$.

5) $\mathrm{e}^z\ln(y-x)+y^2z=0$ $\quad (x_0,y_0)=(1,2)$.

6) $\mathrm{ye}^{z-x}+xyz=4$ $\quad (x_0,y_0)=(0,0)$.

Opgave 11.16 [T)] *(ukendt tilstandsligning)*

For et system med en ukendt tilstandsligning $\mathrm{f}(p,V,T)=0$ *har man målt* $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T=-1$, $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_V=2$ *for* $\mathrm{p}=V=T=1$. *Find* $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ *og* $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p$ *for* $p=T=V=1$.

Opgave 11.17 $(f(x,y,z)=0,$ *stationært punkt*)

I hvert af de følgende tilfælde skal man

a) finde alle de stationære punkter for $\mathrm{z}(x,y)$ *i* S_{xy},

b) søge at afgøre, om $\mathrm{z}(x,y)$ *i disse punkter har lokalt maksimum, lokalt minimum eller saddelpunkt.*

1) $2+x^2+4y^2=z+z^3$ $\qquad \mathrm{s}_{xy}=\mathbb{R}^2$.

2) $\mathrm{x}^2e^z+(1+y^2)(z+1)=1$ $\qquad \mathrm{S}_{xy}=\mathbb{R}^2$.

3) $(1+x^2)z+(y-2)^2z^3=2$ $\qquad \mathrm{S}_{xy}=\mathbb{R}^2$.

4) $2e^{z-x-2y^2}+x^2+z=4$ $\qquad \mathrm{S}_{xy}=\{(x,y)\mid x>0\}$.

Opgave 11.18 $(f(x,y,z)=0,$ *globalt ekstremum*)

I hvert af de følgende tilfælde skal man finde globalt maksimum og minimum for $\mathrm{z}(x,y)$ *i mængden* S_{xy}.

1 [T)] $\quad 4-x^2-y^2=z+3z^3$ $\qquad \mathrm{s}_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\}$.

2) $\quad \mathrm{x}^2-y^2+z+(1-x^2-y^2)z^3=2$ $\qquad \mathrm{S}_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$.

3) $\quad \mathrm{y}^2+z+(4-x^2-4y^2)e^z=4$ $\qquad \mathrm{S}_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+4y^2\le 4\ \wedge\ y\ge 0\}$.

4) $\quad (x^2+1)z+(y+1-x^2)z^3=34$ $\qquad \mathrm{S}_{xy}=\{(x,y)\mid x^2-1\le y\le 3\}$.

Opgave 11.19 $(f(x,y,z,w)=0)$

I hvert af de følgende tilfælde skal man

a) undersøge, om ligningen $\mathrm{f}(x,y,z,w)=0$ *i* $\mathbb{R}^4$ *fastlægger w som en implicit givet funktion* $\mathrm{w}(x,y,z)$,

b) finde det 1. Taylorpolynomium for $\mathrm{w}(x,y,z)$ *med udviklingspunkt* (x_0,y_0,z_0).

1 [T)] $\quad \mathrm{xy}^2z+3w+(1+x^2+y^2)w^3=8$ $\qquad (x_0,y_0,z_0)=(1,1,2)$.

2) $\quad (x^2+z^2)w+e^{y^2-z+w}=2$ $\qquad (x_0,y_0,z_0)=(0,0,1)$.

3) $\quad \mathrm{xyzw}+e^{w^3-x-y+z}=2$ $\qquad (x_0,y_0,z_0)=(1,1,1)$.

4) $\quad \mathrm{x}+y-z+w+\sinh(x^2+y^2-z+w)=0$ $\qquad (x_0,y_0,z_0)=(1,0,1)$.

Opgave 11.Eksam16 $(f(x,y)=0,$ *Taylorpolynomium, 20 point*)

1) Vis, at ligningen $e^{y+1}-2xy+3y=0$ *i en omegn af punktet* $(x,y)=(1,-1)$ *implicit bestemmer* y *som en funktion af* x.

2) Find det 2. Taylorpolynomium for $y(x)$ *med udviklingspunkt 1.*

Opgave 11.Eksam20 $(f(x,y,z)=0,$ *Taylorpolynomium, 20 point*)

1) Vis, at ligningen $\ln\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)+\sqrt{x^2+y^2+z^2}-3-\ln 3=0$ *i en omegn af punktet* $(2,2,1)$ *implicit bestemmer* z *som funktion af* x *og* y, *dvs.* $z=f(x,y)$.

2) Find de partielle differentialkvotienter af 1. orden i punktet $(x,y)=(2,2)$ *for funktionen* f.

3) Find det 1. Taylorpolynomium for $f(x,y)$ *med udviklingspunkt* $(2,2)$.

Opgave 11.Eksam28 $(f(x,y)=0,$ *3. Taylorpolynomium, 27 point*)

INDLEDNING: En velkendt matematisk model for en gas er idealgasligningen $\frac{PV}{nRT}=1,$ *som gælder bedst for små tryk. Ved en statistisk-mekanisk gennemregning af de enkelte molekylers bevægelse og vekselvirkning fås for "kompressibilitetsfaktoren"* $Z\equiv\frac{PV}{nRT}$ *en bedre tilnærmelse* $Z=1+B\cdot\left(\frac{n}{V}\right)+C\cdot\left(\frac{n}{V}\right)^2,$ *hvor "virialkoefficienterne" B og C kun afhænger af temperaturen og gassens sammensætning. Da man i praksis gerne vil have trykket P som variabel (lettest at måle), elimineres* $\frac{n}{V},$ *så man får* $Z=1+\frac{B}{ZRT}P+\frac{C}{(ZRT)^2}P^2$ *eller*

$$-Z^3+Z^2+bPZ+cP^2=0, \qquad (1)$$

hvor $b\equiv\frac{B}{RT}$ *og* $c\equiv\frac{C}{(RT)^2}$. *Man mangler nu blot at finde Z af ligning (1).*

PROBLEM: Der er givet ligningen $-Z^3+Z^2+bPZ+cP^2=0$, *hvor* $Z>0$ *og* $P\geq 0,$ *mens b og c er reelle konstanter. Ligningen definerer Z som funktion af P (dette ønskes* ***ikke*** *vist).*

Find det 3. Taylorpolynomium $\tilde{Z}(P)$ *for Z som funktion af P med udviklingspunkt* $P=0,$ *idet der skal gælde* $Z=1$ *for* $P=0$.

Opgave 11.Eksam35 (*Taylorudvikling,* $f(x,y,z)=0,$ *33 point*)

1) Lad en funktion f være givet ved $f(x)=x^2\ln x+\frac{1}{60}x^5,\quad x>0,$ *og lad* $\tilde{f}(x)$ *betegne det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunktet* $x=1$.

a) Find $\tilde{f}(x)$.

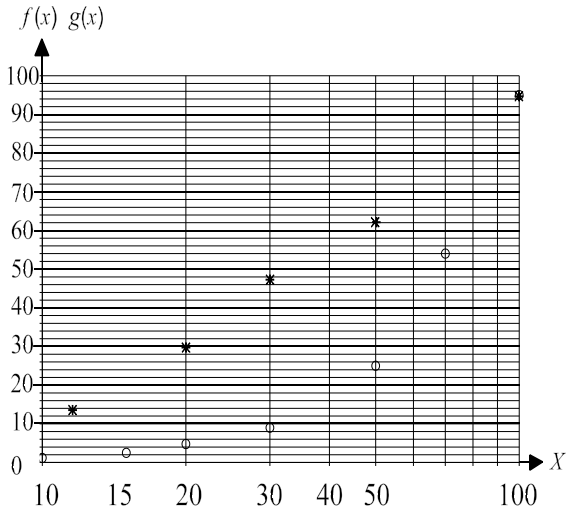
b) Undersøg, om uligheden $|f(x)-\tilde{f}(x)|<10^{-3}$ *er opfyldt for enhver x-værdi i intervallet* $\left[\frac{9}{10};\frac{11}{10}\right]$.

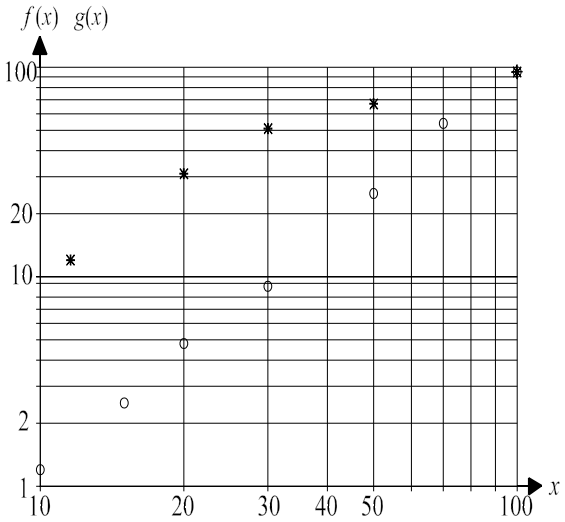
2) Det oplyses (kræves altså ikke vist), at ligningen $ze^{xy}+x\cdot\ln(z-y)-yz-3=0$ *i en omegn af punktet* $(x,y,z)=(0,-2,1)$ *bestemmer z implicit som en funktion g af x og y.*
Find $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,-2)$.

Opgave 11.Eksam43 *(rodsøgning, 25 point)*

Find med 2 betydende cifre en rod til ligningen $10\frac{df(x)}{dx} = g(x) - 40, \quad x \in [10;100],$ *idet funktionerne f og g er fastlagt ved måledata på nedenstående figurer. (Husk at anføre mellemregninger). Der er kun anvendt lineære skalaer og logaritmiske skalaer.*

$\ast = (x, g(x)) \qquad \odot = (x, f(x))$





Opgave 11.Eksam44 (*l'Hospital, rodsøgning, 10 point*)

1) *Undersøg* $\dfrac{\frac{1}{\cos x} - \cos x}{x \cdot \sin x}$ *for* $x \to 0$.

2) *Givet* $2 \cdot \sin x = x$. *Find en løsning* $x \in]0;\infty[$ *med mindst 3 betydende cifre. (Husk at anføre mellemregninger).*

Opgave 11.Eksam48 ($f(x,y) = 0,$ *stationært punkt, Taylorpolynomium, 20 point*)

For en kemisk reaktor bestemmer ligningen $x^3 + (y-1)^3 - 12x + y + 15 = 0$ *entydigt udbyttet y som en funktion af temperaturen x, dvs.* $y = y(x)$ *(kræves ikke vist).*

1) *Find et stationært punkt* $x_0 \in]0;\infty[$ *for funktionen* $y(x)$.

2) *Find det 2. Taylorpolynomium* $T_2(x)$ *for funktionen* $y(x)$ *svarende til udviklingspunktet* x_0 *(se spørgsmål 1).*

Opgave 11.Eksam56 ($f(x,y)=0$, *Taylorpolynomium, 25 point*)

Ligningen $e^{T-Y}-TY+0.195=0$ *bestemmer entydigt en koncentration* Y *som funktion af temperaturen* T *i en beholder (ønskes ikke vist). Lad* $Y \approx A+B\cdot(T-1)+C\cdot(T-1)^2$ *betegne det 2. Taylorpolynomium til* Y *med udviklingspunktet* $T_0=1$.
Find konstanterne A, B, C med mindst 2 decinaler efter decimalpunktum.

Opgave 11.Eksam60 ($(f(x,y)=0$, *rodsøgning, kubisk spline, 35 point*)

Der oplyses, at ligningen $16\cdot 2^y+15xy+7x^3=0$ *i mængden* $S=\{(x,y)\mid x>0\}$ *fastlægger* y *som en implicit given funktion* $\varphi(x)$.

1) Find $y(3)$ *med 2 betydende cifre.*

Det oplyses, at $y(1)=-1$ *og* $y(2)=-2$.

2) Find $\frac{dy}{dx}$ *for* $x=1$ *og* $x=2$.

3) Find den kubiske splinefunktion $\tilde{y}(x)$ *som er bestemt ved at* $\tilde{y}(1)=-1$ $\tilde{y}(2)=-2$ $\tilde{y}'(1)=-0.3$ *og* $\tilde{y}'(2)=-1.6$.

Opgave 11.Eksam63 ($f(x,y)=0$, *tegne graf, l'Hospital, 35 point*)

En differentialligning har en løsningskurve, der er bestemt ved ligningen

$$x e^y + y e^{x-1} = 1, \quad x \geq 0. \tag{1}$$

1) Vis, at ligningen (1) for $x \geq 0$ *bestemmer* y *som en funktion af* x, *dvs.* $y=y(x)$.

2) Det oplyses, at $y(x)\to 0$ *for* $x\to\infty$ *(ønskes ikke vist).*
Find, med mindst 2 betydende cifre, $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$ *og* $y'(1)$, *og skitsér på grundlag heraf grafen for* $y(x)$ $(x\geq 0)$.

3) Opstil to ligninger, som bestemmer de punkter (x_0,y_0), *hvor grafen har vandret tangent. Ligningerne skal* ***ikke*** *løses.*

4) Undersøg $\dfrac{2y(x)+x-1}{2\cosh(x-1)+x^2-2x-1}$ *for* $x\to 1$.

Opgave 11.Eksam70 ($f(x,y,z)=0$, *rodsøgning, stationært punkt, 25 point*)

Det oplyses (kræves altså ikke vist), at ligningen $z^3+(x-1)^2z-e^y+y+2=0$ *i mængden* $\mathbb{R}^3$ *fastlægger* z *som en implicit given funktion* $z(x,y)$ *af* x *og* y.

1) Find $z(3,0)$ *med 2 betydende cifre.*

2) Vis, at der findes netop ét stationært punkt for $z(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

3) Det oplyses, at for det i spørgsmål 2) omtalte stationære punkt (x_0,y_0) *gælder:*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0,y_0)=\frac{1}{3} \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=0.$$

Afgør, om $z(x,y)$ *har lokalt maksimum, lokalt minimum eller saddelpunkt i* (x_0,y_0).

Opgave 11.Eksam84 ($f(x,y,z)=0$, *Taylorpolynomium, 20 point)*

Lad der i en beholder gælde $\sinh(3T-x-2y)+xyT-1=0$, *hvor T er temperaturen* (≥ 0), *mens x og y er koncentrationer* (≥ 0) *af to stoffer. Det oplyses (skal ikke vises), at ligningen fastlægger temperaturen som en funktion* $T(x,y)$ *af koncentrationerne, og at* $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(1,1)=0$ *og* $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(1,1)=\frac{-1}{8}$.

Find det 2. Taylorpolynomium for funktionen $T(x,y)$ *med* $(x_0,y_0)=(1,1)$ *som udviklingspunkt.*

Opgave 11.Eksam105 ($f(x,y)=0$, *mindsteværdi, Taylorpolynomium, 25 point)*

Det oplyses, at ligningen $\ln\left(\frac{1}{4}x^2y\right)-\frac{1}{4}x^2+y=0$, $x>0$, $y>0$ *bestemmer y som en funktion af x, dvs.* $y=y(x)$.

1) Udgår.

2) Find mindsteværdien for $y(x)$. ***Vink**: Betragt* $y'(x)$*'s fortegnsvariation.*

3) Find $y(4)$ *med 3 betydende cifre.*

4) Find det 2. Taylorpolynomium for $y(x)$ *med udviklingspunkt* $x=2$.

5) Skitsér på grundlag af resultaterne i spørgsmålene 2), 3) og 4) grafen for $y(x)$ *for* $x\in[1;4]$.

Opgave 11.Eksam109 ($f(x,y)=0$, *monotoni, Taylorpolynomium, 20 point*)

Det oplyses, at ligningen $3x-4y+\sin(x-y)=0$, $x\in\mathbb{R}$

bestemmer y som en implicit given funktion af x, dvs. $y=y(x)$.

1) Angiv funktionen $y=y(x)$*'s monotoniforhold.*

2) Find det 2. Taylorpolynomium $\tilde{y}(x)$ *for* $y(x)$ *med udviklingspunkt* $x=0$.

Opgave 11.Eksam125 (*eksakt differentialligning, implicit differentiation 30 point*)

1) Vis, at $\left(\frac{y}{t}-1\right)e^{\frac{y}{t}}dt-\left(e^{\frac{y}{t}}+1\right)dy$, $t>0$

er et (eksakt) differential, og find samtlige stamfunktioner $u(t,y)$ *til dette differential. Anfør en kontrol på resultatet.*

2) Find den partikulære løsning $y=y(t)$ *til differentialligningen*

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\left(\frac{y}{t}-1\right)e^{\frac{y}{t}}}{e^{\frac{y}{t}}+1} \quad , \quad t>0 ,$$

der går gennem punktet $(t,y)=(1,0)$. *Løsningen skal (og kan) kun angives på implicit form.*

3) Find $\frac{dy}{dt}$ *i punktet* $(t,y)=(1,0)$.

4) Find det 2. Taylorpolynomium $\tilde{y}(t)$ *for* $y(t)$ *med udviklingspunkt* $t=1$.

5) Idet det yderligere oplyses, at $\lim_{x\to 0+} y(t)=0$, *skal man skitsere grafen for* $y(t)$ *i intervallet* $0<t\le 2$.

Opgave 11.Eksam153 (*Taylorpolynomium, Eulers metode, 20 point*)

Løsningen $y=y(t)$ *til differentialligningen* $\frac{dy}{dt}=\frac{\sqrt{3+y^4}}{1+t^2}$ *med begyndelsesbetingelsen* $y(0)=-1$ *kan ikke udtrykkes ved kendte simple funktioner.*

a) Find det andet Taylorpolynomium $P_2(t)$ *for* $y(t)$ *med udviklingspunkt* $t=0$. *Beregn* $P_2(0.1)$ *og* $P_2(0.2)$.

b) Find ved brug af Eulers metode med skridtlængden $h=0.1$ *tilnærmede værdier for* $y(0.1)$ *og* $y(0.2)$. *Metoden skal klart fremgå af besvarelsen, og mellemregninger skal medtages i rimeligt omfang.*

Opgave 11.Eksam155 ($f(x,y,z)=0$, *stationære punkter, 15 point*)

Det oplyses, at ligningen $z^3+z+\frac{\pi}{4}-\operatorname{Arctan}(x^2+y^2)-2y^2=0$ *i mængden* $\mathbb{R}^3$ *fastlægger z som en vilkårligt ofte differentiabel funktion af x og y, dvs.* $z=z(x,y)$ *(skal* ***ikke*** *vises). Find samtlige stationære punkter for* $z(x,y)$ *samt værdien af* $z(x,y)$ *i hvert af disse punkter med mindst 2 betydende cifre.*

Opgave 11.Eksam168 ($f(x,y)=0$, *Taylorpolynomium, 15 point*)

Vis, at ligningen $\sqrt{x^2+y^2}-2x+y-3=0$ *i mængden* $S=\{(x,y)\mid x>0\wedge y>0\}$ *fastlægger y som en implicit given funktion* $\varphi(x)$, *og find det 1. Taylorpolynomium for* $y(x)$ *med udviklingspunkt* $x_0=3$.

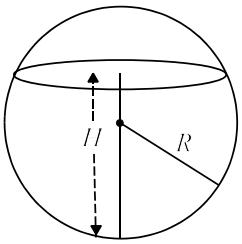
Opgave 11.Eksam194 ($f(x,y)=0$, *Taylorpolynomium, 18 point*)

Lad a være en positiv konstant. Det oplyses, at ligningen $x^2+y^2=a^2-\sin(xy^2)$ *i en omegn om punktet* $(0,a)$ *bestemmer y som en vilkårligt ofte differentiabel funktion af x. (Denne funktion betegnes i det følgende* $y(x)$. *)*

a) Find $y'(0)$ *og* $y''(0)$ *udtrykt ved a.*

b) Find det 2. Taylorpolynomium $P_2(x)$ *for* $y(x)$ *med udviklingspunkt* $x=0$, *når* $a=2$.

Opgave 11.Eksam195 (*rodsøgning, 15 point*)



For en kugleformet beholder med indre radius R er væskevolumenet V som funktion af væskehøjden h (se figuren) givet ved

$$V(h) = \frac{\pi}{3}\cdot h^2(3R - h)\,.$$

En sådan beholder med indre radius R = 1.00 m er påfyldt 2980 liter væske.

a) Find væskehøjden h i beholderen ved Newtons metode. (Den benyttede formel samt mellemregninger skal anføres og resultatet angives med mindst 3 betydende cifre.)

*b) Find - **ved hjælp af et differential** - hvor meget h ændres, når der aftappes 20 liter væske fra beholderen.*

Opgave 11.Eksam204 ($f(x,y) = 0$, *rodsøgning, 30 point*)

a) Lad $g(x) = \ln x - x$ *for* $x > 0$ *Ligningen* $g(x) = \ln 2 - 2$ *har foruden løsningen* $x = 2$ *også en løsning* $x = a$ *med* $0 < a < 1$.
Find a ved hjælp af Newtons metode. Tre betydende cifre er tilstrækkeligt, og mellemregninger skal anføres i rimeligt omfang.

b) Find mindsteværdien for g i intervallet $[a;2]$.

c) Lad $f(x,y) = \ln y - y + \ln x - x - \ln 2 + 3$ *være givet i området S bestemt ved* $x > 0$ *og* $y \geq 1$. *Vis, at* $f(x,1) > 0$ *for alle* $x \in]a;2[$.

d) Vis, at ligningen $f(x,y) = 0$ *i S bestemmer y (implicit) som en funktion af x for alle* $x \in [a;2]$. *Denne funktion betegnes med* $y(x)$ *i det følgende.*

e) Find $y(1)$, $y(2)$ *og* $y(a)$ *(**eksakte** værdier, ikke ved hjælp af en numerisk metode).*

Opgave 11.Eksam218 ($f(x,y) = 0$, *Taylorpolynomium, 25 point*)

Det oplyses, at ligningen $x^3 + y^3 + 3e^y + x - 5 = 0$ *definerer y (implicit) som en funktion af x,* $y = y(x)$, *for alle* $x \in \mathbb{R}$. *Det oplyses endvidere, at* $y(x)$ *er en vilkårligt ofte differentiabel funktion.*

a) Vis, at $y(x)$ *er aftagende.*

b) Find det 2. Taylorpolynomium $P_2(x)$ *for* $y(x)$ *med udviklingspunkt* $x = 1$.

12 PLANINTEGRAL OG RUMINTEGRAL

12.1 DEFINITION. NUMERISK METODE

Planintegral og rumintegral anvendes sædvanligvis til **opsummering af en (fysisk) størrelse, der optræder "kontinuert" fordelt**. Vi vil først betragte nogle massefordelinger for bedre at kunne anskueliggøre definitionen af integraler. På figur 12.1 er der givet tre legemer:

S_1: en tynd stang f_1: S_1's 1-dimensionale massetæthed $f_1(x) = x^2 + 2$ kg/m

S_2: et plant legeme f_2: S_2's 2-dimensionale massetæthed $f_2(x,y) = (8-x)(4-y)$ kg/m^2

S_3: et rumligt legeme f_3: massetæthed $f_3(x,y,z) = (9 - \frac{1}{8}z^3)(x^2 + y^2)$ kg/m^3.

Vi vil prøve at finde hvert legemes totale masse.

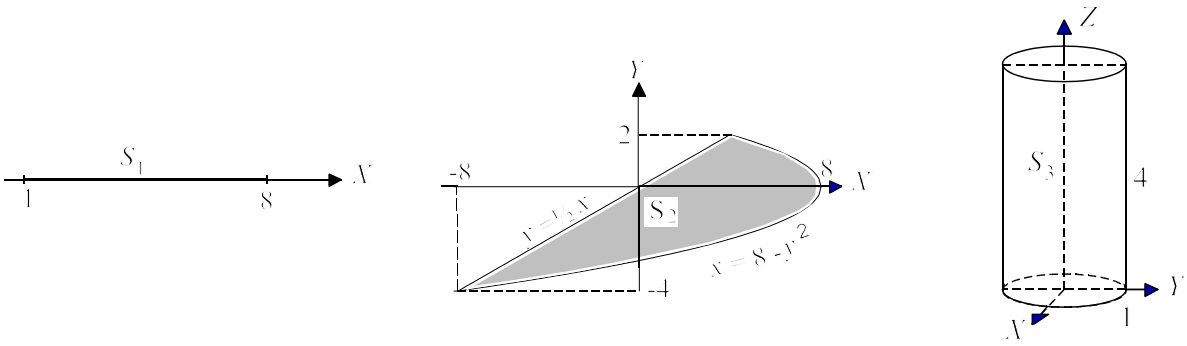


Fig. 12.1. *Tre legemer. Alle mål er i meter.*

Inddeling og punktmængde. Vi inddeler, som vist på figur 12.2:

S_1: Intervallet $a;b$ inddeles i l delintervaller med længderne $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_l$. Længden af det største delinterval kaldes inddelingens maskestørrelse μ. Derpå vælges en punktmængde $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_l^*$ bestående af ét vilkårligt punkt fra hvert delinterval.

S_2: Et rektangel, som indeholder S_2, inddeles i $l \times m$ delrektangler med arealerne

$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$, hvor $i = 1, 2, \ldots, l$ og $j = 1, 2, \ldots, m$. Længden af den største side alle blandt alle delreaktanglerne kaldes inddelingens maskestørrelse μ. Derpå vælges en punktmængde bestående af ét vilkårligt punkt fra hvert delrektangel - punktet i det (i,j)´te delrektangel kaldes (x_i^*, y_j^*).

S_3: En kasse, som indeholder S_3, inddeles i $l \times m \times n$ delkasser med volumenerne $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$ hvor $i = 1, 2, \ldots l$, $j = 1, 2, \ldots, m$ og $k = 1, 2, \ldots, n$. Længden af den største kant blandt alle delkasserne kaldes inddelingens maskestørrelse μ. Derpå vælges en punktmængde bestående af ét vilkårligt punkt fra hver delkasse - punktet i den (i,j,k)´te delkasse kaldes (x_i^*, y_j^*, z_k^*).

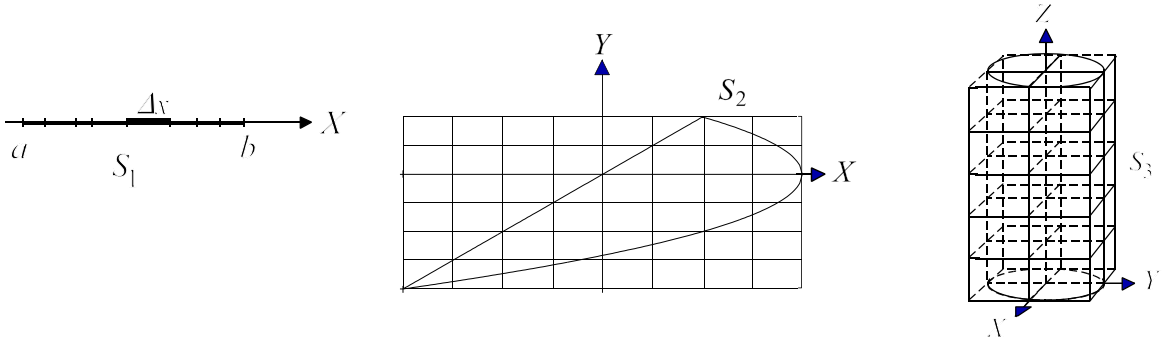


Fig. 12.2. *Inddelinger.*

<u>Tilnærmede bidrag fra delmængderne summeres.</u> Massen i hver af inddelingens små delmængder tilnærmer vi ved (massetætheden i det valgte punkt P^* af delmængden) (delmængdens måltal[1]), idet massetætheden naturligvis må sættes lig med 0 uden for S_1, S_2 og S_3. Ved at summere alle delmængdernes bidrag fås en såkaldt **middelsum**, der tilnærmer den samlede masse:

$$\text{masse}(S_1) \approx \sum_{i=1}^{l} f_1(x_i^*) \cdot \Delta x_i$$

$$\text{masse}(S_2) \approx \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \hat{f}_2(x_i^*, x_j^*) \cdot \Delta A_{ij}$$

$$\text{masse}(S_3) \approx \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \hat{f}_3(x_i^*, x_j^*, x_k^*) \cdot \Delta V_{ijk}\ .$$

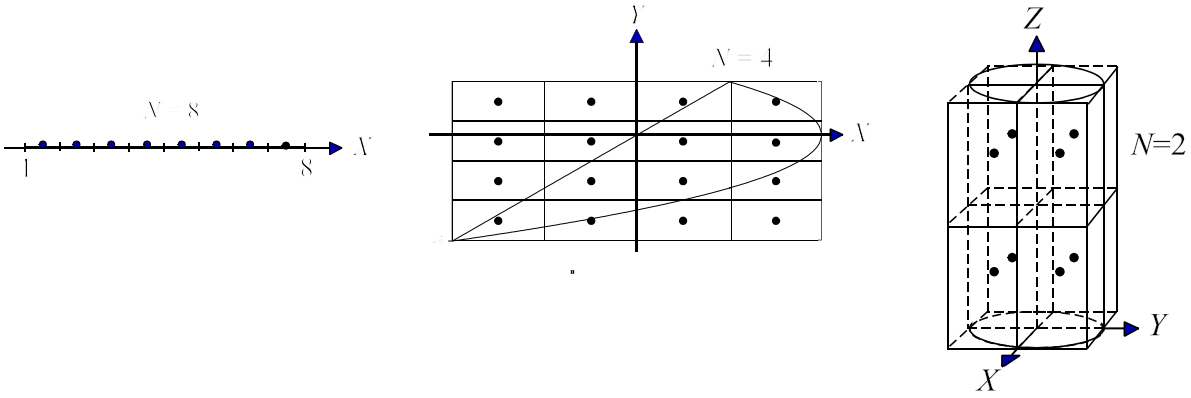
Her betegner $\hat{f}_2$ og $\hat{f}_3$ funktioner, der er identiske med f_2 og f_3 i mængderne S_2 og S_3, men er 0 i alle andre punkter.

---

[1] Ved "måltal" forstås i de tre tilfælde henholdsvis længde, areal og rumfang.

Eksempel 12.1. Numerisk metode, konvergens af middelsum.

Lad de foran betragtede middelsummer for massefordelingerne være baseret på henholdsvis N ens delintervaller, N^2 ens delrektangler og N^3 ens delkasser, og lad P^* være midtpunktet i hver delmængde.



Beregn middelsummerne for $N = 2, 4, 8, 16, 32, 64$ med 3 betydende cifre.

LØSNING:

For $N = 2$ fås: $\sum_{i=1}^{2} f_1(x_i)\Delta x_i = f(2.75)*3.5 + f(6.25)*3.5 = 177.19 \approx \underline{\underline{177}}$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \hat{f}_2(x_i,y_j)\,\Delta A_{ij} = [\hat{f}_2(-4,-2.5) + \hat{f}_2(-4,0.5) + \hat{f}_2(4,0.5) + \hat{f}_2(4,-2.5)]\cdot 24$$
$$= [f_2(-4,-2.5) + 0 + f_2(4,0.5) + 0]\cdot 24 = \underline{\underline{2208}}\ .$$

Ved fortsat regning på computer finder man:

N	$\sum f_1(x_i)\cdot\Delta x_i$	$\sum\sum \hat{f}_2(x_i,y_j)\cdot\Delta A_{ij}$	$\sum\sum\sum \hat{f}_3(x_i,y_j,z_k)\cdot\Delta V_{ijk}$
1	155.8	3840	00.0
2	177.2	2208	58.0
4	182.5	1398	38.8
8	183.9	1319	46.7
16	184.2	1294	47.0
32	184.3	1280	44.7
64	184.3	1280	43.9

I hver kolonne konvergerer middelsummerne øjensynligt mod et bestemt tal (den totale masse) for $N \to \infty$. Algoritmer for metoden findes i appendix 12.1.

DEFINITION *(integral). Lad* f_1, f_2, f_3 *være begrænsede funktioner, og lad* S_1, S_2, S_3 *være begrænsede mængder. Antag, at middelsummerne af en sådan funktion* f *over en sådan mængde* S *konvergerer mod et bestemt tal* c *(jævnfør eksempel 12.1), når blot inddelingernes maskestørrelse* μ *går mod nul, uanset hvordan inddelingerne i øvrigt foretages, og uanset hvordan punktet* P_i^* *i hver delmængde vælges. I så fald definerer* f *integralet af* f *over* S*, og* f *kaldes integrabel over* S*. Vi skriver da:*

$$\sum_{i=1}^{l} f_1(x_i^*)\cdot \Delta x_i \underset{(\mu \to 0)}{\to} \int_a^b f_1(x)dx \quad \textit{(retlinet) } \textbf{\textit{integral}} \textit{ af } f_1 \textit{ over } S_1 = [a;b]$$

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} \hat{f}_2(x_i^*, y_j^*)\cdot \Delta A_{ij} \underset{(\mu \to 0)}{\to} \iint_{S_2} f_2(x,y)dA \quad \textbf{\textit{planintegralet}} \textit{ af } f_2 \textit{ over } S_2$$

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \hat{f}_3(x_i^*, y_j^*, z_k^*)\cdot \Delta V_{ijk} \underset{(\mu \to 0)}{\to} \iiint_{S_3} f_3(x,y,z)dV \quad \textbf{\textit{rumintegralet}} \textit{ af } f_3 \textit{ over } S_3.$$

DEFINITION *(areal, volumen). Lad* S_2 *være en begrænset mængde i planen og* S_3 *en begrænset mængde i rummet. Er funktionen* "1" *integrabel over* S_2*, henholdsvis* S_3*, siger vi, at*

S_2 *har et areal, nemlig* $\iint_{S_2} 1\, dA$,

S_3 *har et volumen, nemlig* $\iiint_{S_3} 1\, dV$.

For kontinuerte funktioner gælder følgende sætning:

SÆTNING 12.1 *(integral af kontinuert funktion).*

1) En kontinuert funktion $f_1(x)$ *er integrabel i ethvert lukket, begrænset interval* $[a;b]$.

2) En kontinuert funktion $f_2(x,y)$ *er integrabel over enhver lukket, begrænset mængde* S_2*, som har et areal.*

3) En kontinuert funktion $f_3(x,y,z)$ *er integrabel over enhver lukket, begrænset mængde* S_3*, som har et volumen.*

I appendix 12.2 findes flere velkendte integralsætninger (additionssætning, indskudssætning, middelværdisætning) generaliseret til plan- og rumintegraler.

I appendix 12.3 findes også formler til beregning af masse, tyngdepunkt og inertimoment.

12.2 PLANINTEGRAL OPLØST I RETVINKLEDE KOORDINATER

På figur 12.3 er vist en plan mængde $S = \{(x,y) \mid a \le x \le b \wedge g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$, hvor ¦ og ¦ er kontinuerte og $g_1(x) \le g_2(x)$ for alle $x \in [a;b]$. Det er muligt at omskrive ("opløse") planintegralet $\iint_S f(x,y)\,dA$ til sædvanlige 1-dimensionale integraler.

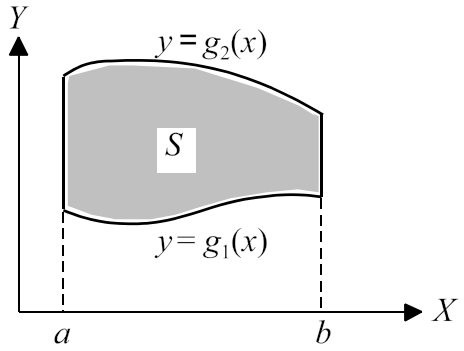
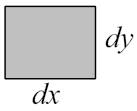


Fig. 12.3. *Mængden S.*

Intuitiv opløsning. Lad ˙(x,y være en 2-dimensional massetæthed. Så er den samlede masse i S lig med $\iint_S f(x,y)\,dA$. Intuitivt er dette planintegral blot en middelsum svarende til en "uendelig fin" inddeling, hvor



$dA = dx \cdot dy$ = arealet af et delrektangel med siderne dx og dy

$f(x,y)\,dA = f(x,y)\,dx\,dy$ = massen i delrektanglet.

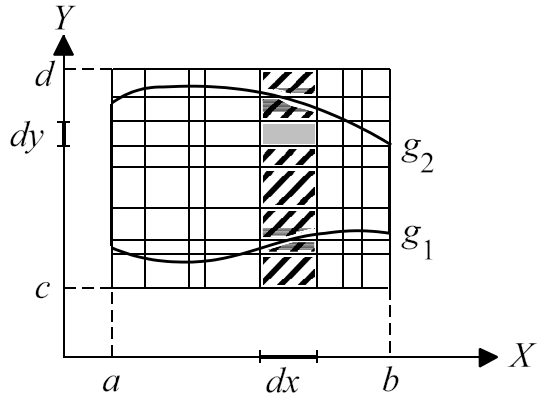


Fig. 12.4. *Inddeling af et rektangel R, som indeholder S.*

Vi betragter den skraverede lodrette søjle af delrektangler med bredden dx på figur 12.4. Ved at opsummere (integrere) delrektanglernes masser i y-retningen (for fastholdt x og dx) fås

$$\text{masse(søjlen)} = dx \int_c^d \hat{f}(x,y)\,dy = dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy = dx \cdot F(x)\ .$$

Ved en vandret opsummering (integration) af alle søjlernes masser fås nu analogt

$$\text{masse(S)} = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx\ .$$

Dette "dobbeltintegral" plejer man for kortheds skyld at skrive som

$$\int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \ .$$

Dermed er vi intuitivt ledt frem til den følgende sætning, som derpå bevises.

SÆTNING 12.2 *(planintegralets opløsning i retvinklede koordinater). Lad funktionen* $\mathbf{f}$ *være kontinuert i mængden* $\mathbf{S}$ *vist på figur 12.3. Så gælder*

$$\iint_S f(x,y)\,dA = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \qquad (12.1)$$

Bevis. Rektanglet R inddeles i delrektangler ved at indskyde lodrette linier

$$x = x_0 = a, \quad x = x_1, \quad x = x_2, \ldots, \quad x = x_l = b$$

og vandrette linier

$$y = y_0 = c, \quad y = y_1, \quad y = y_2, \ldots, \quad y = y_m = d \ .$$

Sættes $F(x) = \int_c^d \hat{f}(x,y)\,dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy$,

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ og $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, fås

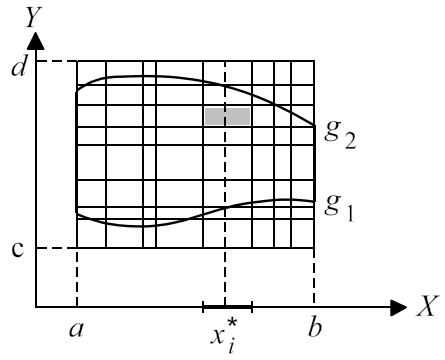


Fig. 12.5. *Inddeling.*

$$I = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy = \int_a^b F(x)\,dx = \sum_{i=1}^{l} \int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x)\,dx$$ (integralregningens indskudssætning)

$$= \sum_{i=1}^{l} F(x_i^*)\Delta x_i \ , \qquad x_i^* \in \,]x_{i-1}, x_i[$$ (integralregningens middelværdisætning)

$$= \sum_{i=1}^{l} \left(\int_c^d \hat{f}(x_i^*, y)\,dy \right) \Delta x_i$$ (indsætter $F(x_i^*)$)

$$= \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=1}^{m} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \hat{f}(x_i^*, y)\,dy \right) \Delta x_i$$ (integralregningens indskudssætning)

$$= \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \hat{f}(x_i^*, y_{ij}^*)\Delta y_j \Delta x_i \ , \qquad y_{ij}^* \in \,]y_{j-1}; y_j[$$ (integralregningens middelværdisætning).

Den sidste omskrivning gælder kun, hvis $\hat{f}$ er kontinuert i intervallerne $[y_{j-1}; y_j], \quad j = 1, 2, \ldots, m$. Dette er imidlertid tilfældet, hvis de rette linier $y = y_j$ blot underkastes den betingelse, at der går en af dem gennem ethvert af punkterne $\left(x_i^*, g_1(x_i^*)\right)$ og $\left(x_i^*, g_2(x_i^*)\right)$, (se figur 12.5). Vi har hermed omformet dobbeltintegralet til en middelsum for planintegralet. Indskydes flere linier, så diagonalen i de enkelte rektangler går mod nul, vil ovennævnte middelsum konvergere mod planintegralet, dvs. $\int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy = \iint_S f(x,y)\,dA$.

I sætning 12.2 kan vi lade x og y bytte roller, så vi får opløsningen

$$\iint_S f(x,y)\,dA = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \qquad (12.2)$$

svarende til figur 12.6, hvor

$S = \{(x,y) \mid c \le y \le d \wedge h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$.

Ofte kan et planintegral opløses efter både formel 12.1 og 12.2; det gælder da om at vælge den integrationsrækkefølge, der giver de enkleste regninger.

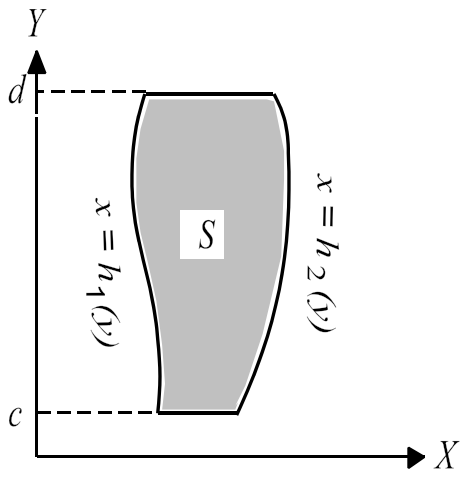


Fig. 12.6. *Principielt som figur 12.3, men x og y har byttet roller.*

Eksempel 12.2. Valg af integrationsrækkefølge ved opløsning af planintegral.

Lad S være den lukkede punktmængde i xy-planen, der er begrænset af kurverne $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = 1$ og $x = 2$. Find $\iint_S xy\,dA$.

LØSNING:

Punktmængden S er skitseret på figur 12.7a og 12.7b.

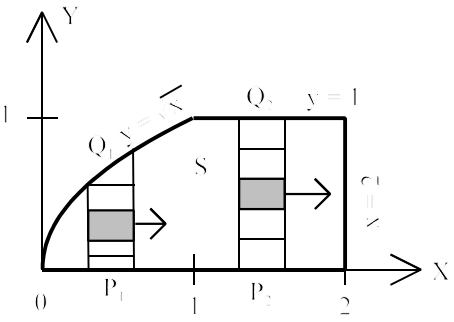


Fig. 12.7a. *Først summeres i y-retningen.*

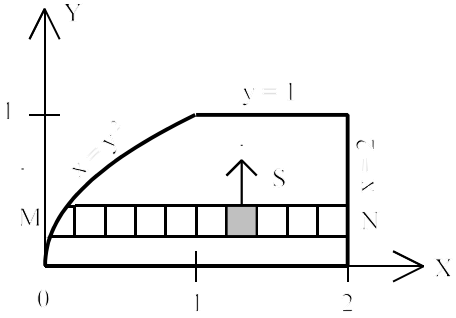


Fig. 12.7b. *Først summeres i x-retningen.*

a) Integrationsrækkefølgen vælges således, at man først fastholder x, og integrerer $f(x,y) = xy$ med hensyn til y fra "nederste" til "øverste" kurve (summerer lodret, jævnfør figur 12.7a). Øverste kurve er imidlertid sammensat af to, så man må dele S op i to delmængder S_1 og S_2 ($\triangle$ og $\square$).

S_1: Idet $x \in [0;1]$, integreres mht. y fra $y = 0$ til $y = \sqrt{x}$ (svarende til søjlen P_1Q_1), og derefter mht. x fra $x = 0$ til $x = 1$.

S_2: Idet $x \in [1;2]$, integreres mht. y fra $y = 0$ til $y = 1$ (svarende til søjlen P_2Q_2), og derefter mht. x fra $x = 1$ til $x = 2$.

Vi har derfor $\iint_S xy\,dA = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} xy\,dy + \int_1^2 dx \int_0^1 xy\,dy$.

b) Skiftes integrationsrækkefølgen (se figur 12.7b), fastholdes først y, og $f(x,y)$ integreres mht. x fra venstre rand $x = y^2$ til højre rand $x = 2$ (svarende til rækken MN). Derefter integreres mht. y fra $y = 0$ til $y = 1$. Vi har derfor

$$\iint_S xy\,dA = \int_0^1 dy \int_{y^2}^2 xy\,dx \ .$$

Da den sidste opløsning er den simpleste, benyttes denne, og vi får

$$\iint_S xy\,dA = \int_0^1 dy \int_{y^2}^2 xy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 y \right]_{y^2}^2 dy = \int_0^1 \left(2y - \frac{1}{2}y^5 \right) dy$$

$$= \left[y^2 - \frac{1}{12}y^6 \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{12} - (0-0) = \underline{\underline{\frac{11}{12}}} \ .$$

Edb-løsning. I Maple kan integralet beregnes ved følgende ordrer:

```
>with(student);
>Doubleint( x*y, x=y^2..2, y=0..1 ) ;
```

$$\int_0^1 \int_{y^2}^2 xy\,dx\,dy$$

```
>value(%);
```

$$\frac{11}{12}$$

Eksempel 12.3. Valg af integrationsrækkefølge ved opløsning af planintegral.

Lad S være den lukkede punktmængde i xy-planen, der er begrænset af kurverne $x + y^2 = 8$ og $x - 2y = 0$. Find $\iint_S (8-x)(4-y)\,dA$.

LØSNING:

Punktmængden S er skitseret på figur 12.8a og 12.8b.

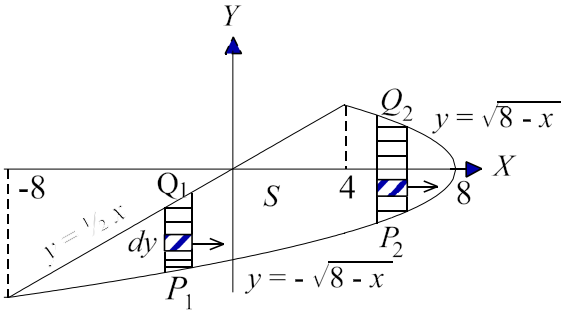


Fig. 12.8a. *Først summeres i y-retningen.*

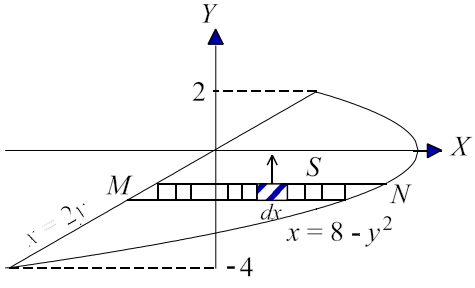


Fig. 12.8b. *Først summeres i x-retningen.*

a) Integrationsrækkefølgen vælges således, at man først fastholder x, og integrerer $f(x,y) = (8-x)(4-y)$ med hensyn til y fra "nederste" til "øverste" kurve (summerer lodret, jævnfør figur 12.8a). Øverste kurve er imidlertid sammensat af to, så man må dele S op i to delmængder S_1 og S_2 (◺ og ▷).

S_1: Idet $x \in [-8;4]$, integreres mht. y fra $y = -\sqrt{8-x}$ til $y = \frac{1}{2}x$ (svarende til søjlen P_1Q_1), og derefter mht. x fra $x = -8$ til $x = 4$.

S_2: Idet $x \in [4;8]$, integreres mht. y fra $y = -\sqrt{8-x}$ til $y = \sqrt{8-x}$ (svarende til søjlen P_2Q_2), og derefter mht. x fra $x = 4$ til $x = 8$.

Vi har derfor

$$\iint_S (8-x)(4-y)\,dA = \int_{-8}^{4} dx \int_{-\sqrt{8-x}}^{\frac{1}{2}x} (8-x)(4-y)\,dy + \int_{4}^{8} dx \int_{-\sqrt{8-x}}^{\sqrt{8-x}} (8-x)(4-y)\,dy .$$

b) Skiftes integrationsrækkefølgen (se figur 12.8b), fastholdes først y, og $f(x,y)$ integreres mht. x fra venstre rand $x = 2y$ til højre rand $x = 8-y^2$ (svarende til rækken MN). Derefter integreres mht. y fra $y = -4$ til $y = 2$. Vi har derfor

$$\iint_S (8-x)(4-y)\,dA = \int_{-4}^{2} dy \int_{2y}^{8-y^2} (8-x)(4-y)\,dx .$$

Da den sidste opløsning er den simpleste, benyttes denne, og vi får

$$\iint_S (8-x)(4-y)\,dA = \int_{-4}^{2} \left[-\frac{(8-x)^2}{2} \right]_{2y}^{8-y^2} (4-y)\,dy$$

$$= \int_{-4}^{2} \left(-2y^4 + \frac{1}{2}y^5 + 2(4-y)^3\right) dy = \underline{\underline{1281\frac{3}{5}}} .$$

I eksempel 12.1 blev det samme integral udregnet numerisk.

Edb-løsning. I Maple kan integralet beregnes ved følgende ordrer:

```
>with(student);
>Doubleint( (8-x)*(4-y), x=2*y..8-y^2, y=-4..2 ) ;
```

$$\int_{-4}^{2} \int_{2y}^{8-y^2} (8-x)(4-y)\,dx\,dy$$

```
>value(");
```

$$\frac{6408}{5}$$

12.3 PLANINTEGRAL OPLØST I POLÆRE KOORDINATER

Planintegraler, hvor integrationsmængden S er begrænset af cirkler, spiraler eller lignende "runde" kurver, kan ofte med fordel udregnes i polære koordinater.

Polære koordinater i planen

DEFINITION *(polære koordinater). Et punkt P har de polære koordinater (r,θ), hvor*

1) $r = |\vec{OP}|$ *er afstanden fra P til begyndelsespunktet O,*

2) θ *er en med fortegn regnet vinkel fra den positive x-akse til $\vec{OP}$ (vinklen θ regnes positiv modsat uret).*

Er P identisk med begyndelsespunktet 0, kan θ vælges vilkårligt.

Man bemærker, at punktet P også har de polære koordinater $(r,\theta+2p\pi)$, hvor p er et helt tal.

Af den retvinklede trekant på figur 12.9 findes følgende sammenhæng mellem punktet P's retvinklede koordinater (x,y) og dets polære koordinater (r,θ):

$$\boxed{x = r\cdot\cos\theta, \qquad y = r\cdot\sin\theta}\ .$$

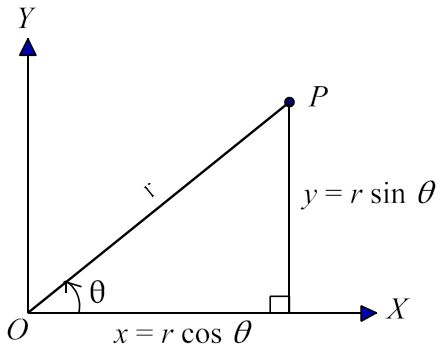


Fig. 12.9. *Polære koordinater r og θ til et punkt P.*

Omvendt gælder:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x} & \text{for} \quad x>0 \\ -\pi + \operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x} & \text{for} \quad x<0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{for} \quad x=0 \wedge y>0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{for} \quad x=0 \wedge y<0 \\ \text{vilkårlig} & \text{for} \quad x=0 \wedge y=0\ . \end{cases}$$

Eksempel 12.4. Ligning for kurve i polære koordinater.

I retvinklede koordinater har to cirkler ligningerne

$x^2+y^2 = a^2$ og $(x-a)^2+y^2 = a^2$.

Find cirklernes ligninger i polære koordinater.

LØSNING:

Indsættes $x = r\cdot\cos\theta$, $y = r\cdot\sin\theta$ i ligningerne, fås

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = a^2 \iff \underline{\underline{r = a}}\,, \text{ og } (r\cdot\cos\theta - a)^2 + r^2\sin^2\theta = a^2$$

$$\iff r^2 = 2a\cdot r\cdot\cos\theta \iff r = 0 \vee r = 2a\cdot\cos\theta$$

$$\iff \underline{\underline{r = 2a\cdot\cos\theta}}\,, \quad \underline{\underline{\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[}} \quad (r=0 \text{ er inkluderet i } r=2a\cdot\cos\theta \text{ for } \theta=\frac{\pi}{2}).$$

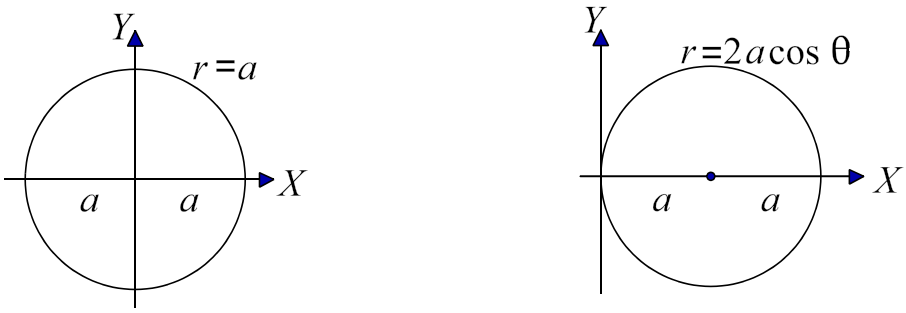


Fig. 12.10. *Cirklen r = a og cirklen r = 2 a cos θ.*

Opløsning i polære koordinater

Lad S være punktmængden, der er begrænset af to halvlinier $\theta = a$, $\theta = b$ $(0 < b-a < 2\pi)$, og to kurver som i polære koordinater har ligningerne $r = g(\theta)$ og $r = h(\theta)$, hvor g og h er kontinuerte, og $0 \le g(\theta) \le h(\theta)$ for alle $\theta \in [a;b]$ (se figur 12.11). Ved dannelsen af middelsummer opdeles S i delmængder begrænset af kurver, hvor en koordinat er konstant. I retvinklede koordinater opdelte vi således i rektangler begrænset af linier *x=konstant* og *y=konstant*.

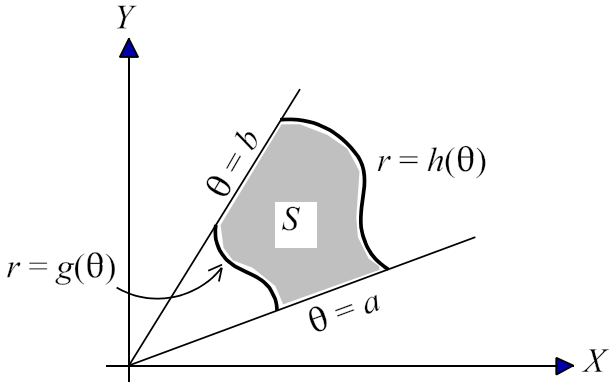


Fig. 12.11. *Mængden S.*

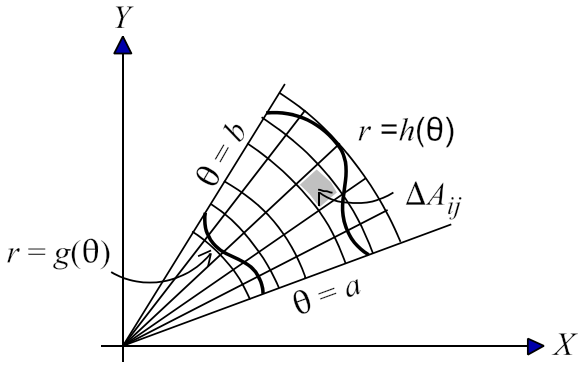


Fig. 12.12. *Inddeling af S.*

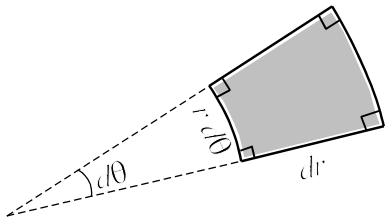


Fig. 12.13. *Delmængde af S.*

I polære koordinater er det tilsvarende praktisk at opdele et cirkelringsudsnit, der indeholder S, i små cirkelringsudsnit begrænset af cirkler af typen r=*konstant* og "*radier*" af typen θ=*konstant* (se figur 12.12). Med figur 12.13's betegnelser, har de intuitivt arealerne $dA = rd\theta \cdot dr$ (jævnfør beviset nedenfor). I overensstemmelse hermed gælder:

SÆTNING 12.3 *(planintegrals opløsning i polære koordinater). Lad funktionen f være kontinuert i mængden S vist på figur 12.11. Så gælder*

$$\iint_S f(x,y)\,dA = \int_a^b d\theta \int_{g(\theta)}^{h(\theta)} f(r\cdot\cos\theta, r\cdot\sin\theta)\, r\,dr \ .$$

Bevis. Med figur 12.14's betegnelser er de små delmængders arealer ΔA_{ij} $\left(i \in \{1,2,..,l\},\ j \in \{1,2,..,m\}\right)$ givet ved

$$\Delta A_{ij} = \text{(areal af cirkeludsnit OED) - (areal af cirkeludsnit OBC)} = \frac{1}{2} r_j^2\,\Delta\theta_i - \frac{1}{2} r_{j-1}^2\,\Delta\theta_i = \frac{1}{2}\left(r_j^2 - r_{j-1}^2\right)\Delta\theta_i$$

$$= \frac{1}{2}\left(r_j + r_{j-1}\right)\left(r_j - r_{j-1}\right)\Delta\theta_i = r_j^*\,\Delta r_j\,\Delta\theta_i \ ,$$

hvor $r_j^* = \frac{1}{2}\left(r_j + r_{j-1}\right)$.

En middelsum for planintegralet $\iint_S f(x,y)\,dA$ kan da skrives

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} \hat{f}\,(r_j^*\cos\theta_i^*, r_j^*\sin\theta_i^*)\, r_j^*\,\Delta r_j\,\Delta\theta_i \ ,$$

hvor $\hat{f}$ er en funktion, der er identisk med f i S og ellers 0.

Ved betragtninger analoge med beviset for sætning 12.1 får vi derfor det i sætning 12.3 nævnte resultat.

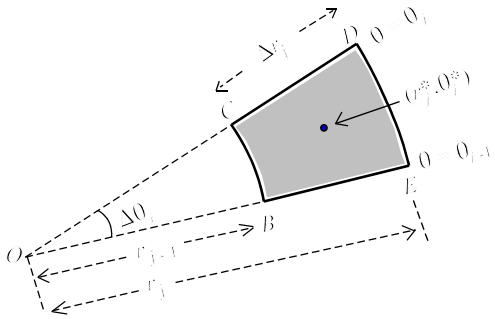
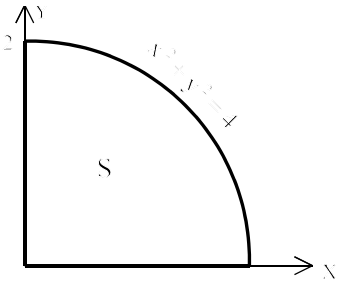


Fig. 12.14. *Delmængde af S.*

Eksempel 12.5. Opløsning i polære koordinater.



Den kvarte cirkelskive S på figuren har i punktet (x, y) en massetæthed på $f(x,y) = x + 2y$.
Find den samlede masse.

LØSNING:

Vi har

$$\text{massen} = \iint_S f(x,y)\,dA = \iint_S (x + 2y)\,dA \quad .$$

Opløses i polære koordinater, bliver den kvarte cirkelskive bestemt ved

$$S = \left\{ (r,\theta) \;\middle|\; 0 \le r \le 2 \;\wedge\; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \right\}$$ (jævnfør eksempel 12.4).

Vi har derfor

$$\iint_S (x+2y)\,dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 (r\cdot\cos\theta + 2r\cdot\sin\theta)\,r\,dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 (\cos\theta + 2\sin\theta)\,r^2\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 (\cos\theta + 2\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3}\cdot(\cos\theta + 2\sin\theta)\,d\theta = \frac{8}{3}\left[\sin\theta - 2\cdot\cos\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{8}{3}\left(\sin\frac{\pi}{2} - 2\cdot\cos\frac{\pi}{2} - (\sin 0 - 2\cdot 0) \right)$$

$$= \frac{8}{3}(1 - 2\cdot 0 - (0 - 2\cdot 1)) = \underline{\underline{8}}\,.$$

Eksempel 12.6. Opløsning i polære koordinater.

Cirkelskiven $x-1)^2+y^2 \le$ har i punktet P en massetæthed på $(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

a) Find cirkelskivens tyngdepunkt.

b) Find cirkelskivens inertimoment I_z om z-aksen.

LØSNING:

a) Af symmetrigrunde må tyngdepunktet ligge på x-aksen. Abscissen x_T findes af formlerne for masse og tyngdepunkt i appendix:

$$x_T = \frac{\iint_S x\cdot f(x,y)\,dA}{\text{massen}} = \frac{\iint_S x\cdot f(x,y)\,dA}{\iint_S f(x,y)\,dA} = \frac{\iint_S x\sqrt{x^2+y^2}\,dA}{\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dA} \quad .$$

Opløses i polære koordinater, bliver cirkelskiven bestemt ved

$$S = \left\{ (r,\theta) \;\middle|\; 0 \le r \le 2\cos\theta \;\wedge\; -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \right\}$$ (jævnfør eksempel 12.4).

Vi har derfor

$$\iint_S x\sqrt{x^2+y^2}\,dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r\cdot\cos\theta\cdot r\cdot r\,dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{2\cos\theta} \cos\theta\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cdot\cos^5\theta\,d\theta = \frac{4}{5}\left[\sin\theta\cdot\cos^4\theta + 4\cdot\sin\theta - \frac{4}{3}\sin^3\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{64}{15} .$$

$$\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r\cdot r\,dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{2\cos\theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3}\cos^3\theta\,d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{9}$$

$$\underline{\underline{(x_T, y_T) = \left(\frac{6}{5}, 0 \right)}} \quad .$$

b) Inertimomentet I_z om z-aksen findes af formlen i appendix 12.3:

$I_z = \iint_S (x^2+y^2) f(x,y)\,dA$. Opløses igen i polære koordinater, fås

$$I_z = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2\cdot r\cdot r\,dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{32}{5}\cdot\cos^5\theta - 0 \right) d\theta = \frac{32}{5}\left(\left[\frac{\sin\theta\cdot\cos^4\theta}{5} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\,d\theta \right)$$ Schaum 14.396

$$= \frac{32}{5}\left(0 - 0 + \frac{4}{5}\left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right)$$ Schaum 14.379

$$= \frac{128}{25}\left(1 - \frac{1^3}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right) = \frac{128}{25}\cdot\frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{512}{75}}} \quad .$$

12.4 BEREGNING AF RUMINTEGRAL

Rumintegral opløst i retvinklede koordinater og cylinderkoordinater

Lad punktmængden S være givet ved $= \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; (x,y) \in S_{xy} \;\wedge\; g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y) \right\}$ hvor S_{xy} er en begrænset, lukket mængde (med et areal) i xy-planen, g_1 og g_2 er kontinuerte og $g_1(x,y) \le g_2(x,y)$ for alle $(x,y) \in S_{xy}$. S_{xy} kaldes $S's$ projektion på xy-planen. Vi inddeler S som antydet på figur 12.15, så alle delmængder, der ligger "over" hinanden har samme projektion på xy-planen.

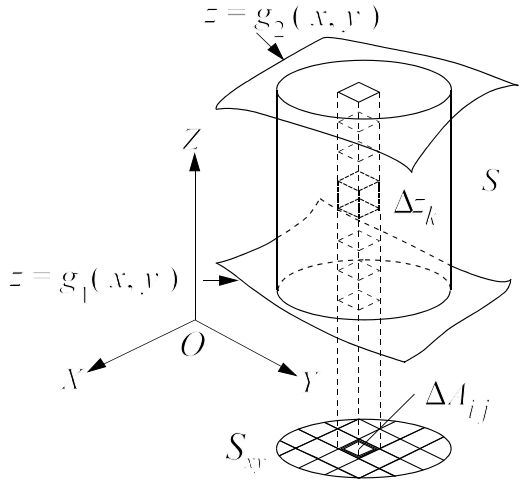


Fig. 12.15. *Mængden S.*

En delmængde med grundfladearealet ΔA_{ij} og højden Δz_k må have volumenet $\Delta V_{ijk} = \Delta A_{ij}\, \Delta z_k$. En middelsum for rumintegralet $\iiint_S f(x,y,z)\, dV$ kan da skrives $\sum\sum \Delta A_{ij} \sum_{k=1}^{n} \hat{f}(x_i,y_j,z_k)\, \Delta z_k$, idet vi for fastholdt x_i, y_j og ΔA_{ij} summerer i z-aksens retning. Dermed er vi intuitivt ledt frem til følgende sætning (som det også er muligt at føre strengt bevis for):

SÆTNING 12.5 *(rumintegralets opløsning). Lad funktionen f være kontinuert i mængden S vist på figur 12.15. Så gælder* $\iiint_S f(x,y,z)\,dV = \iint_{S_{xy}} dA \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$, *dvs. en integration i z-retningen efterfulgt af et planintegral over S's projektion på xy-planen.*

Der fremkommer naturligvis to analoge formler ved ombytning af bogstaverne x, y og z.

Planintegralet over S_{xy} kan opløses i retvinklede koordinater eller i polære koordinater, som det nu er mest bekvemt.

Eksempel 12.7. Rumintegral opløst i retvinklede koordinater.

Lad S være det tetraeder, der afgrænses af koordinatplanerne og planen med ligningen $x+y+z=1$. Beregn koordinaterne til tetraederets tyngdepunkt, idet tetraederet er homogent med massetæthed 1.

LØSNING:

Af symmetrigrunde må tyngdepunktet have samme første-, anden- og trediekoordinat.

Førstekoordinaten x_T findes af formlen

$$x_T = \frac{\iiint_S x\,dV}{M}, \quad \text{hvor } M = \frac{1}{6} \text{ er massen (volumenet) af } S.$$

Beskrivelse af punkterne i S: S_{xy} = trekantskiven $\{(x,y) \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x+y \leq 1\}$,

og for alle $(x,y) \in S_{xy}$ gælder $0 = g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y) = 1-x-y$.

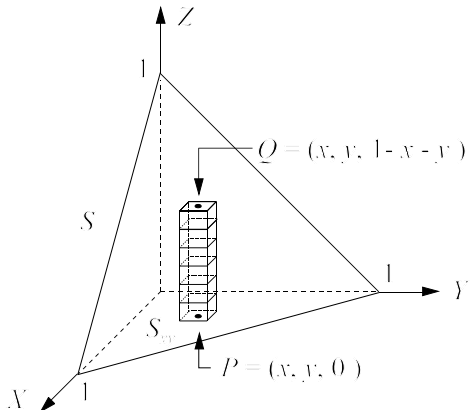


Fig. 12.16. *Tetraederet S.*

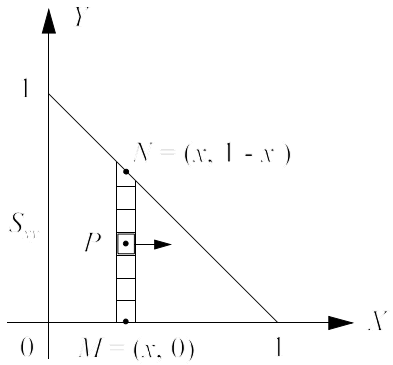


Fig. 12.17. *Projektionen S_{xy}.*

Ved opløsning i retvinklede koordinater fås

$$x_T = 6\cdot\iiint_S x\,dV = 6\cdot\iint_{S_{xy}} dA \int_0^{1-x-y} x\,dz \quad \text{(integration langs søjlen } PQ \text{ på figur 12.16)}$$

$$= 6\iint_{S_{xy}} x[z]_0^{1-x-y}\,dA = 6\iint_{S_{xy}} x(1-x-y)\,dA = 6\int_0^1 dx \int_0^{1-x} x(1-x-y)\,dy$$

$$= -6\int_0^1 x\left[\frac{(1-x-y)^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = 6\int_0^1 x\,\frac{(1-x)^2}{2}\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

Cylinderkoordinater. Erstattes de de retvinklede koordinater (x,y) i *xy*-planen med de tilsvarende polære koordinater (r,θ), bliver de rumlige retvinklede koordinater (x,y,z) ændret til (r,θ,z), som kaldes **cylinderkoordinater**. Holdes r konstant, mens θ varierer, fremkommer nemlig en cirkel i *xy*-planen, og når yderligere z varierer, parallelforskydes cirklen i *z*-retningen, så der fremkommer en cylinderflade.

Eksempel 12.8. Rumintegral opløst i cylinderkoordinater.

En beholder af form som en cylinder har højden 4 og radius i grundfladen er 1. Cylinderen er helt fyldt med et stof, som har massefylden $9-\frac{1}{8}z^3$ (koordinatsystemet er indlagt, som vist på figur 12.18). Find inertimomentet I om *z*-aksen af beholderens indhold.

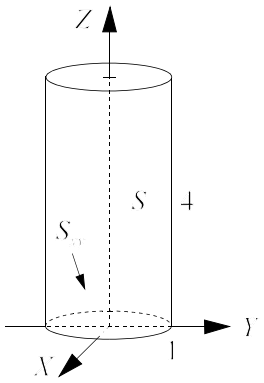


Fig. 12.18. *Cylinder.*

LØSNING:

Beskrivelse af punkterne i S: S_{xy} = **cirkelskiven** $x^2+y^2 \le 1$,

og for alle $(x,y)\in S_{xy}$ gælder $0 = g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y) = 4$.

$$I = \iiint_S (x^2+y^2)\cdot(9-\frac{1}{8}z^3)\,dV = \iint_{S_{xy}} dA \int_0^4 (x^2+y^2)\cdot(9-\frac{1}{8}z^3)\,dz$$

$$= \iint_{S_{xy}} dA\,(x^2+y^2)\left[9z-\frac{z^4}{32}\right]_0^4 = 28\iint_{S_{xy}} (x^2+y^2)\,dA$$

$$= 28\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2\cdot r\,dr = \underline{\underline{14\pi}} \approx \underline{\underline{43.98}} .$$

I eksempel 12.1 blev samme integral udregnet numerisk.

Edb-løsning. Benyttes Maple kan man anvende ordrerne:

```
> g := (1-x^2)^(1/2) :      f := (x^2+y^2) * (9-z^3/8) :
>with (student) :
>Tripleint( f, y=-g..g, z=0..4, x=-1..1 ) ;
```

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(x^2+y^2\right)\left(9-\tfrac{1}{8}z^3\right) dy\,dz\,dx$$

```
>value( " ) ;
```

$$14\,\pi$$

SUPPLEMENT: 12A KUGLEKOORDINATER

Kuglekoordinater kan opfattes som polære koordinater i rummet. De kan være nyttige, når punktmængden S har symmetri omkring koordinatsystemets begyndelsespunkt O, eller når afstanden til O $\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ spiller en rolle i integranden.

DEFINITION *(kuglekoordinater). Et punkt P (se figur 12A.1) har kuglekoordinaterne* (r,θ,ϕ), *hvor*

1) $r = |OP|$ *er afstanden fra P til begyndelsespunktet O,*

2) θ *er den samme vinkel som i cylinderkoordinaterne* $(\theta\in[0;2\pi])$, *og*

3) ϕ *er vinklen fra* $\vec{k}$ *(z-aksen) til* $\vec{OP}$ $(\phi\in[0;\pi])$.

Idet $|OP_1| = r\cdot\sin\phi$, kan koordinaterne til P_1 skrives $P_1 = (r\cdot\sin\phi\cdot\cos\theta,\ r\cdot\sin\phi\cdot\sin\theta,\ 0)$. Overgangsformlerne mellem retvinklede koordinater og kuglekoordinater er følgelig

$x = r\cdot\sin\phi\cdot\cos\theta,\quad y = r\cdot\sin\phi\cdot\sin\theta,\quad z = r\cdot\cos\phi,$

hvor $r\geq 0,\ \theta\in[0;2\pi],\ \phi\in[0;\pi]$.

I geografien (jordkuglen) erstatter man ofte ϕ med $\delta = \frac{\pi}{2} - \phi$ (nordlig og sydlig bredde), og den positive z-akses skæring med kuglen kaldes kuglens nordpol.

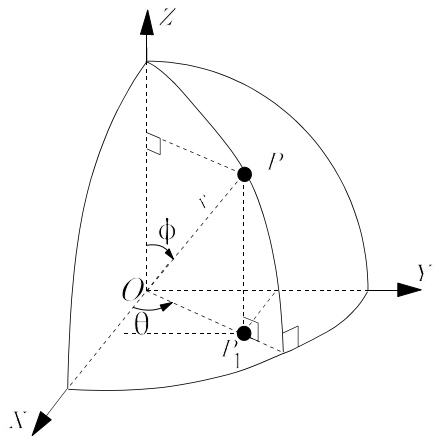


Fig. 12A.1. *Kuglekoordinater* r,θ,ϕ *til et punkt P.*

Lad punktmængden S være givet ved $S = \{(r,\theta,\phi)\mid g_1(\theta,\phi)\leq r\leq g_2(\theta,\phi)\ \wedge\ (\theta,\phi)\in S_{\theta\phi}\}$, hvor $S_{\theta\phi}$ er en lukket mængde (med et areal) indeholdt i $[0;2\pi]\times[0;\pi]$, g_1 og g_2 er kontinuerte, og $0\leq g_1(\theta,\phi)\leq g_2(\theta,\phi)$ for alle $\theta,\phi\in S_{\theta\phi}$.

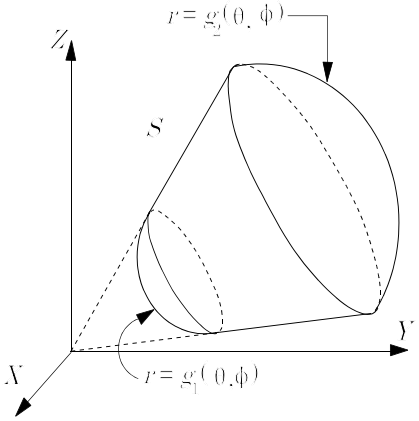


Fig. 12A.2. *Mængden S.*

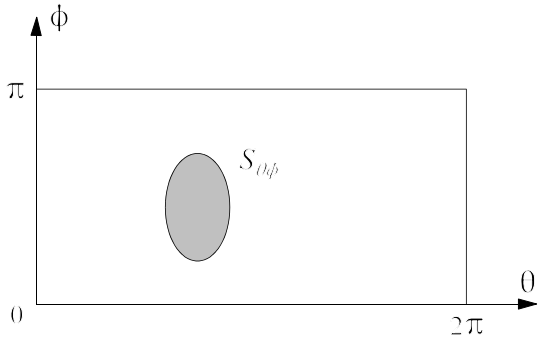


Fig. 12A.3. *Mængden* $S_{\theta\varphi}$

SÆTNING 12A.1 *(opløsning i kuglekoordinater). Lad funktionen f være kontinuert i mængden S vist på figur 12A.2.*

Så gælder $$\iiint_S f(x,y,z)\,dV = \iint_{S_{\theta\phi}} dA \int_{g_1(\theta,\phi)}^{g_2(\theta,\phi)} f(r\cdot\sin\phi\cos\theta, r\cdot\sin\phi\cdot\sin\theta, r\cdot\cos\phi)\,r^2\cdot\sin\phi\,dr\ .$$

Begrundelse.

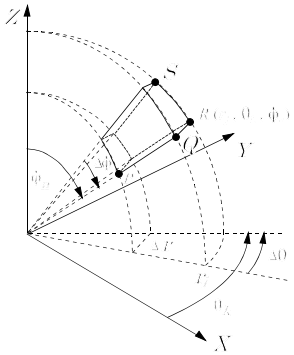


Fig. 12A.4. *Dellegeme i kuglekoordinater.*

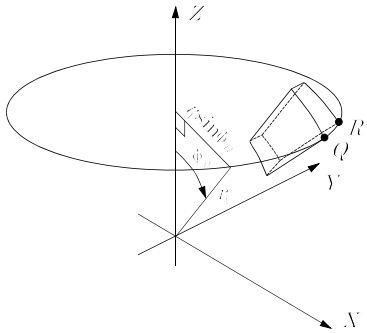


Fig. 12A.5. *R og Q på cirkel med radius* $r_j \sin\phi_n$.

Punktmængden S opdeles i dellegemer begrænset af fladerne $r = konstant$, $\theta = konstant$ og $\phi = konstant$. Figur 12A.4 viser et sådant dellegeme, begrænset af kuglerne $r = r_{j-1}$ og $r = r_j$, halvplanerne $\theta = \theta_{k-1}$ og $\theta = \theta_k$ samt keglerne $\phi = \phi_{n-1}$ og $\phi = \phi_n$. Rumfanget af dette legeme er med tilnærmelse lig produktet af kantlængderne $|PQ|$, $|RS|$ og $|QR|$. Vi har umiddelbart, at $|PQ| = r_j - r_{j-1} = \Delta r$, og $|RS| = r_j(\phi_n - \phi_{n-1}) = r_j \Delta\phi$. Som det fremgår af figur 12A.5, ligger RQ på en vandret cirkel med radius $r_j \sin\phi_n$, dvs. $|RQ| = r_j \sin\phi_n(\theta_k - \theta_{k-1}) = r_j \sin\phi_n \Delta\theta$. Idet $\Delta A = \Delta\theta\Delta\phi$ har vi nu, at rumfanget af legemet er $\Delta V = r_j^2 \sin\phi_n \Delta r\Delta\theta\Delta\phi = r_j^2 \sin\phi_n \Delta A\Delta r$, hvilket begrunder formlen.

Eksempel 12A.1. Opløsning i kuglekoordinater.

Et legeme S er begrænset af en kegle med topvinklen $\frac{\pi}{2}$ og en kugle med centrum i keglens toppunkt og radius 1. Find inertimomentet I af S om keglens akse, når S er homogen med massetæthed 1 ton/m^3.

LØSNING:

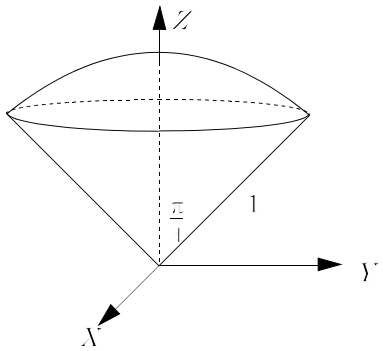


Fig. 12A.6. *Mængden S.*

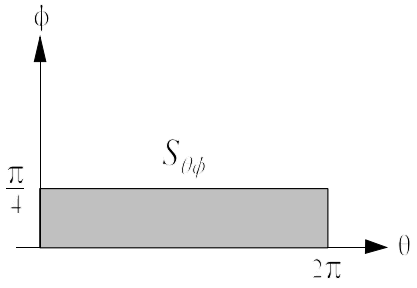


Fig. 12A.7. *Mængden* $S_{\theta\varphi}$

Indlægges kordinatsystemet, som vist på figur 12A.6, er $I = \iiint_S (x^2+y^2)dV$, hvor

$S = \left\{(r,\theta,\phi) \mid 0 \le r \le 1 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}\right\}$. Vi har derfor

$$I = \int_{S_{\theta\phi}} \int dA \int_0^1 \left((r\cdot\sin\phi\cdot\cos\theta)^2 + (r\cdot\sin\phi\cdot\sin\theta)^2\right) r^2 \sin\phi\, dr = \int_{S_{\theta\phi}} \int dA \int_0^1 r^4 \sin^3\phi\, dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 \sin^3\phi\, d\theta$$

$$= \frac{2}{5}\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\phi\, d\phi = \frac{2}{5}\pi \left[\frac{\cos^3\phi}{3} - \cos\phi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{4}{15} - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)\pi \approx \underline{0.0973}\ [ton\cdot m^2].$$

OPGAVER

Opgave 12.1 *(numerisk integration)*

Beregn i hvert af de følgende tilfælde med tilnærmelse planintegralet

1) $\iint_S \sqrt{\frac{x}{y}}\, dA$, *2)* $\iint_S e^{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\, dA$, *3)* $\iint_S \sqrt{\frac{(x+2y)^2-12}{2(x+2y)^2-13}}\, dA$,

hvor $S=[2;4]\times[1;2]$, *ved at opdele* S *i* N^2 *ens delrektangler og danne middelsummer for* $N=1, 2$ og 4.

Opgave 12.2 *(numerisk integration)*

Foretag i hvert af de følgende tilfælde en grov vurdering (ét betydende ciffer) af planintegralet

1) $\iint_S \ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})\, dA$, *2)* $\iint_S \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\, dA$, *3)* $\iint_S \frac{2^{xy}}{xy}\, dA$,

hvor $S=\{(x,y) \mid 1\le x\le 4 \wedge 1\le y\le \sqrt{5-x}\}$.

Opgave 12.3 *(integration uden opløsning)*

Udregn

1) $\iint_S 5\, dA$, *når* $S=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 2^2\}$

2) $\iiint_S 3\, dV$, *når* $S=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2\le 4^2 \wedge 0\le z\le 5\}$

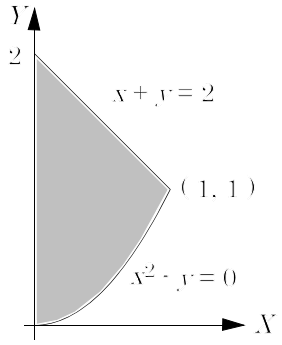
3) $\iint_S \sqrt{9-x^2-y^2}\, dA$, *når* $S=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 3^2\}$

4) $\iiint_S (x+y+z)\, dV$, *når* $S=\left\{(x,y,z) \,\middle|\, \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\ge\frac{5}{2}\right\}$.

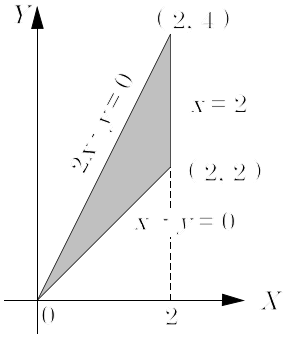
Opgave 12.4 *(planintegral)*

Beregn i hvert af de følgende tilfælde planintegralet over den skraverede mængde S.

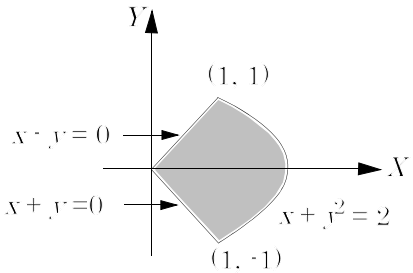
1 T) $\iint_S (2x+y)\,dA$



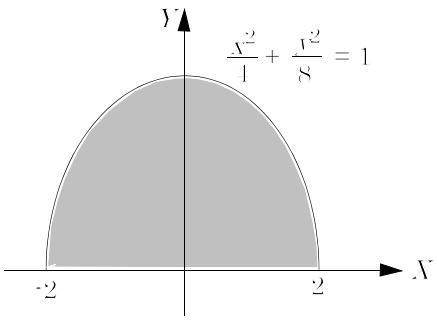
2) $\iint_S xy\,dA$



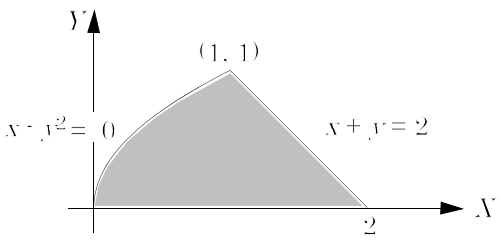
3) $\iint_S (x^2-y^2)\,dA$



4) $\iint_S \frac{2y}{(x+3)(1+x^2)}\,dA$



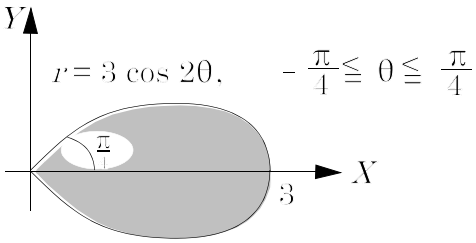
5) $\iint_S (x+2y)\,dA$

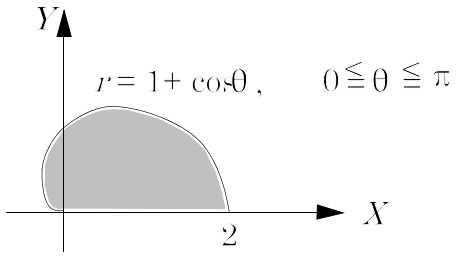


Opgave 12.5 *(areal)*

Find i hvert af de følgende tilfælde arealet af den skraverede mængde S.

1) *2)*

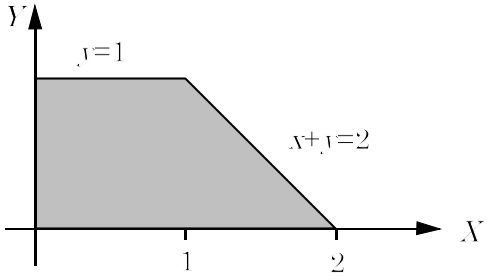




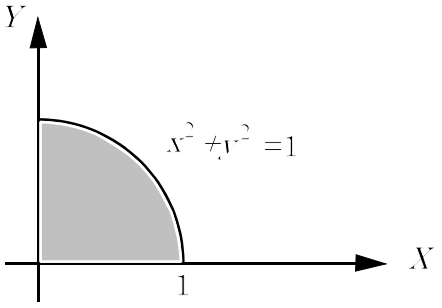
Opgave 12.6 ***(masse)***

Beregn i hvert af de følgende tilfælde massen af det skraverede plane legeme S med den 2-dimensionale massetæthed $\mathbf{f(x,y)}$ *målt i* $\mathbf{kg/m^2}$. *Alle mål er i meter.*

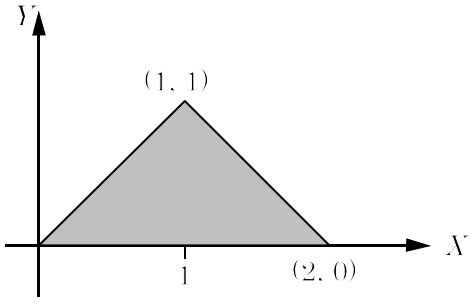
1[T]) $\mathbf{f(x,y) = 2x + y}$.



2) $\mathbf{f(x,y) = xy}$.



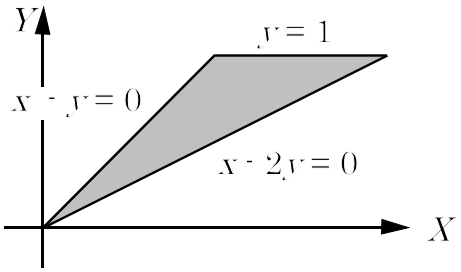
3) $\mathbf{f(x,y) = x^2 + y}$.



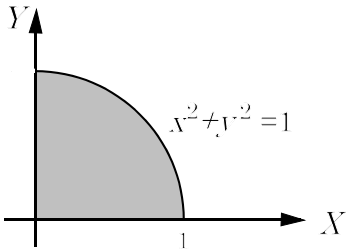
Opgave 12.7 *(inertimoment)*

Beregn i hvert af følgende tilfælde inertimomentet om z-aksen (en linie gennem $0,0$ *vinkelret på xy-planen) af det skraverede plane legeme* S *med den 2-dimensionale massetæthed* $\rho(x,y)$ *målt i* kg/m^2. *Alle mål er i meter.*

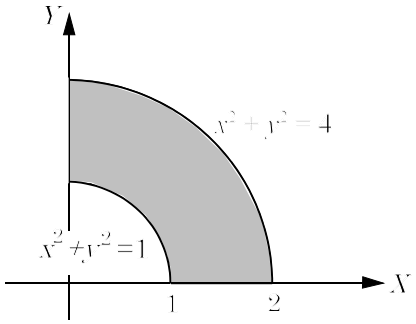
1) $f(x,y) = 1$



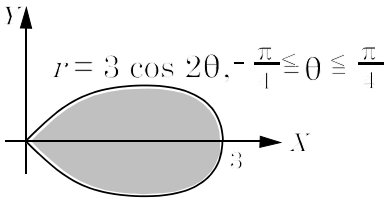
2) $f(x,y) = 1$



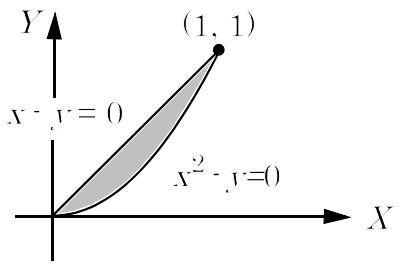
3 T) $f(x,y) = 1$



4) $f(x,y) = 1$



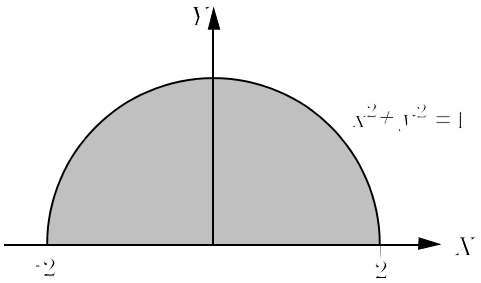
5) $f(x,y) = 15xy^2$



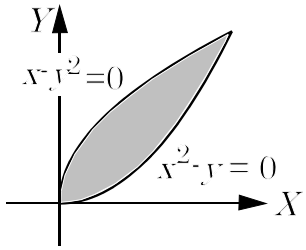
Opgave 12.8 *(tyngdepunkt)*

Beregn i hvert af følgende tilfælde tyngdepunktet for det skraverede plane legeme S med den 2-dimensionale massetæthed $\mathbf{f}(x,y)$ *målt i* $\mathbf{kg/m^2}$. *Alle mål er i meter.*

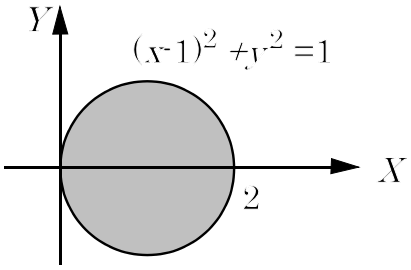
1) $f(x,y) = 1$



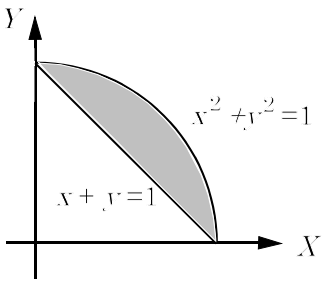
2) $f(x,y) = 1$



3) $\mathbf{f}(x,y) = 5(y^2+x)$

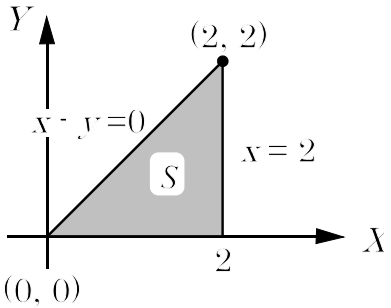


4) $\mathbf{f}(x,y) = 1$



Opgave 12.9 *(fordampning)*

Fordampning fra den skraverede plane flade S er på stedet (x,y) givet ved $x-y$ målt i $kg/(m^2 \cdot h)$. Hvor mange kg fordamper fra hele S på 1 time? Alle mål er i meter.



Opgave 12.10 *(befolkningstal)*

En cirkelrund by har en befolkningstæthed, der i punktet x,y er $\dfrac{500}{\sqrt{x^2+y^2}+1000}$ *indbyggere/m², hvor $(0,0)$ er byens centrum, og x, y måles i meter.*

Beregn antallet af indbyggere inden for en radius på 1000 m.

Opgave 12.11 *(integrand givet implicit)*

Det oplyses, at ligningen $xy + x^2z + z^3 = 1$ bestemmer z som en funktion af x og y. Idet $S = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le \left(\frac{1}{10}\right)^2 \wedge z \ge 0\}$, *skal man finde en tilnærmet værdi af planintegralet* $\iint_S z(x,y)\,dA$ *med en relativ fejl mindre end 1% (nøjagtigheden skal dog ikke begrundes).*

Opgave 12.12 *(rumintegral)*

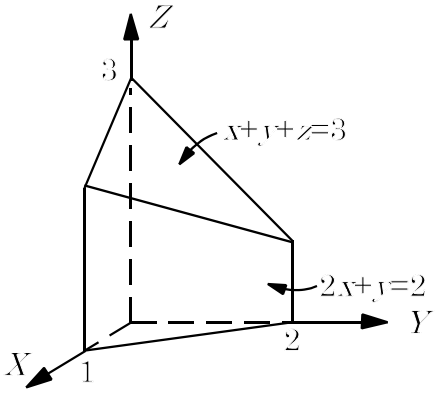
Beregn de følgende rumintegraler

1) $\iiint_S (x-y)\,dV$,

hvor S er begrænset af fladerne givet ved

$x+y+z=3$, $2x+y=2$

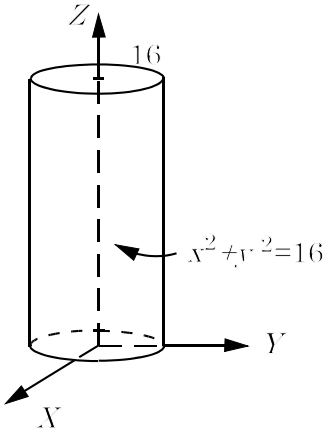
$x=0$, $y=0$, $z=0$.



2) $\iiint_S xyz\,dV$,

hvor S er begrænset af fladerne givet ved

$z=16$, $x^2+y^2=16$, $z=0$.

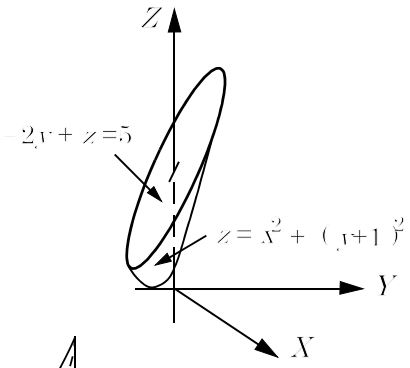


Opgave 12.13 *(volumen)*

Beregn i hvert af følgende tilfælde volumenet af mængden S:

1) *S er begrænset af fladerne givet ved*

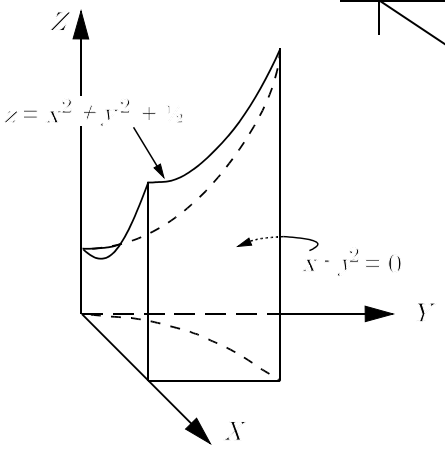
$$-2y+z=5, \qquad z=x^2+(y+1)^2 \ .$$



2) *S er begrænset af fladerne givet ved*

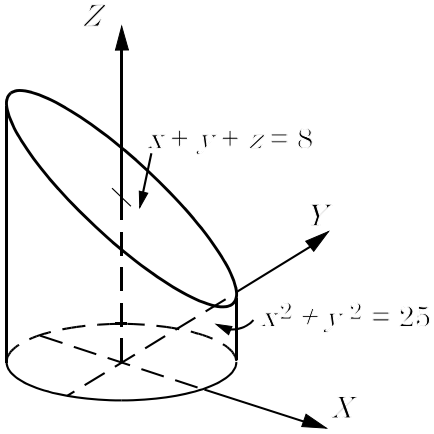
$$z=x^2+y^2+\frac{1}{2}, \qquad x-y^2=0,$$

$$x=1, \qquad y=0, \qquad z=0 \ .$$



3) *S er begrænset af fladerne givet ved*

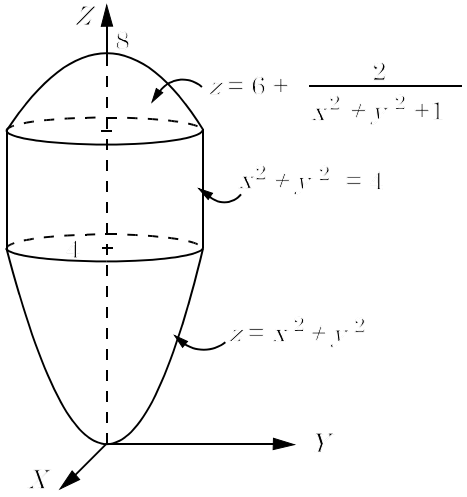
$$x+y+z=8, \qquad x^2+y^2=25, \qquad z=0 \ .$$



4) *S er begrænset af fladerne givet ved*

$$z=6+\frac{2}{x^2+y^2+1},$$

$$x^2+y^2=4, \qquad z=x^2+y^2 \ .$$



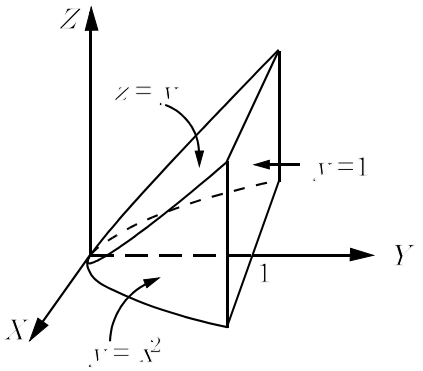
Opgave 12.14 *(masse)*

Beregn i hvert af de følgende tilfælde massen af S med massetætheden $\mathbf{f}(x,y,z)$ *målt i* $\mathbf{kg/m^3}$. *Alle mål er i meter.*

1) $\mathbf{f}(x,y,z) = 15\sqrt{yz}$

S er begrænset af fladerne givet ved

$z = y, \quad y = 1, \quad y = x^2, \quad z = 0.$



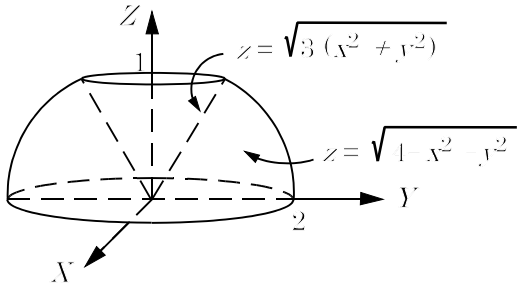
2) $\mathbf{f}(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

S er begrænset af fladerne givet ved

$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{3(x^2 + y^2)},$

$z = 0.$

(Halvkugle med kegleformet fordybning.)

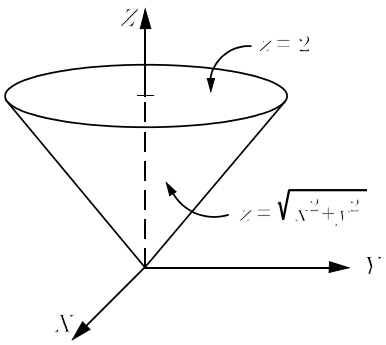


Opgave 12.15 *(inertimoment)*

Beregn i hvert af de følgende tilfælde inertimomentet om z-aksen for legemet S med massetætheden $1000\ kg/m^3$. *Alle mål er i meter.*

1) *S er begrænset af fladerne givet ved* $z = 2$

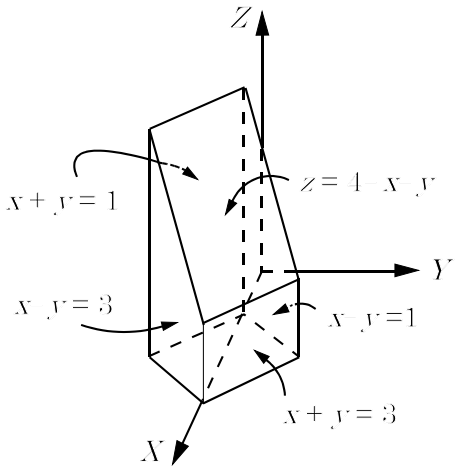
$z = \sqrt{x^2 + y^2}$



2) *S er begrænset af fladerne givet ved*

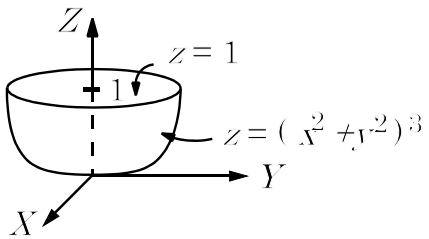
$z = 4 - x - y, \quad x - y = 1,$

$x + y = 3, \quad x + y = 1, \quad x - y = 3.$



3) *S er begrænset af fladerne givet ved*

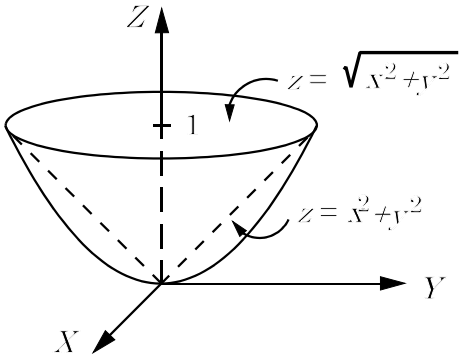
$z = (x^2 + y^2)^3, \quad z = 1.$



4) *S er begrænset af fladerne givet ved*

$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = x^2 + y^2,$

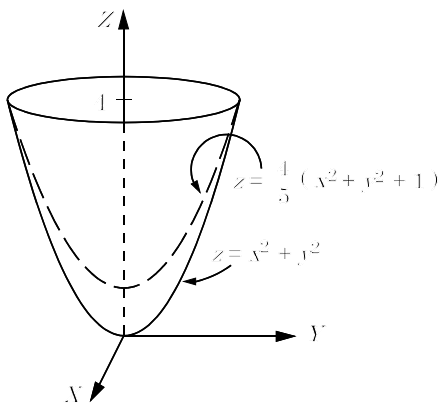
(en paraboloideformet skål med en keglefor-met fordybning).



5) *S er begrænset af fladerne givet ved*

$z = \frac{4}{5}(x^2 + y^2 + 1), \quad z = x^2 + y^2,$

(en paraboloideformet skål med en paraboloide-formet fordybning).



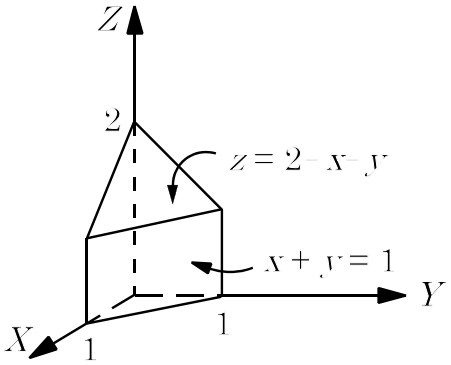
Opgave 12.16 *(tyngdepunkt)*

Beregn i hvert af følgende tilfælde tyngdepunktet for legemet S med massetætheden $1000\ kg/m^3$. *Alle mål er i meter.*

1) *S er begrænset af fladerne givet ved*

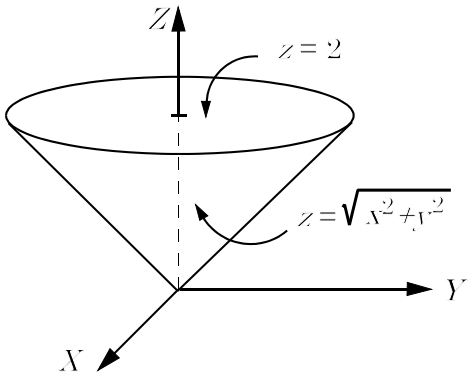
$z = 2 - x - y$, $x + y = 1$,

$x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.



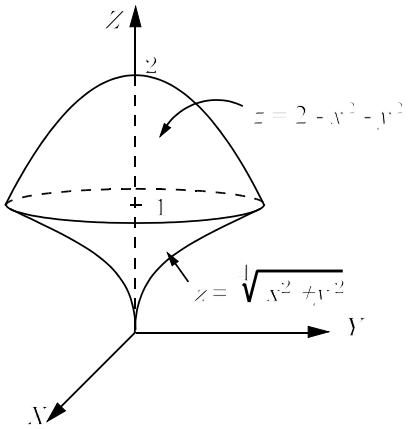
2T) *S er begrænset af fladerne givet ved*

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 2$.



3) *S er begrænset af fladerne givet ved*

$z = 2 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$.



Opgave 12.17 *(kuglekoordinater, rumintegral)*

S er kuglen med centrum i (0,0,0) og radius a .

1) *Find, ved integration, rumfanget af S.*

Ladningstætheden i punktet (x,y,z) *er* $f(x,y,z) = z^2$.

2) *Find, ved integration, ladningen i S, dvs.* $\iiint_S f(x,y,z)\,dV$.

Opgave 12.18 *(kuglekoordinater, rumintegral)*

S er halvkuglen $\{(x,y) \mid x^2+y^2+z^2 \le 4 \ \wedge \ z \ge 0\}$.

1) Find, ved integration, rumfanget af S.

Ladningstætheden i punktet (x,y,z) *er* $f(x,y,z) = xz$.

2) Find, ved integration, ladningen i S, dvs. $\iiint_S f(x,y,z)dV$.

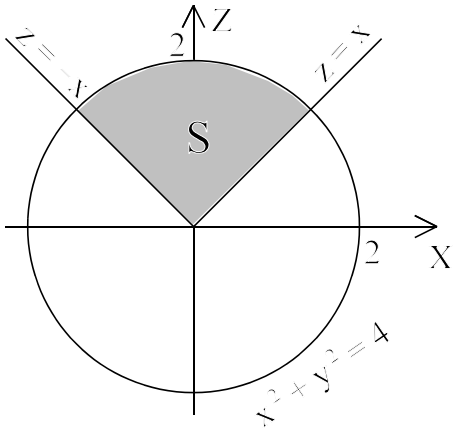
Opgave 12.19 *(kuglekoordinater, rumintegral)*

S er keglen ("isvaflen")

$\{(x,y) \mid x^2+y^2+z^2 \le 4 \ \wedge \ z \ge \sqrt{x^2+y^2}\}$

(Vink: S er rotationssymmetrisk om z-aksen.

Se figuren.)



1) Find rumfanget af S.

2) Find $\iiint_S z\,dV$.

Opgave 12.Exam18a *(plan- og rum- integral, 20 point)*

Hyperblerne givet ved $y = \frac{6-x}{x}$ *og* $y = \frac{2}{x-1}$ *afgrænser i første kvadrant et begrænset område S.*

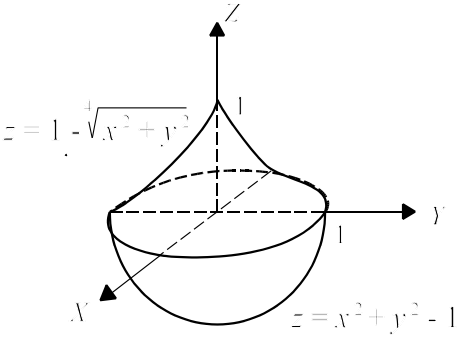
1) Find planintegralet $\iint_S \frac{6-x}{y^2}\,dA$.

2) Idet $T = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in S \wedge 0 \le z \le \frac{6-x}{y^2}\}$ *skal man finde rumintegralet*

$$\iiint_S \frac{8y^2z}{6-x}dV.$$

Opgave 12.Exam39a *(rumintegral, 10 point)*

På figuren er skitseret en lukket beholder, som er rotationssymmetrisk om z-aksen. Alle mål er i meter.



Beholderens bund har ligningen

$z = x^2 + y^2 - 1$.

Beholderens låg har ligningen

$z = 1 - \sqrt[4]{x^2 + y^2}$.

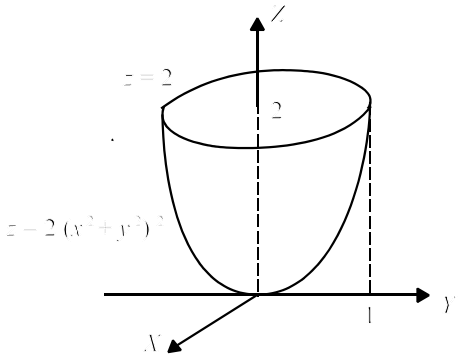
Hvor mange m^3 *rummer beholderen?*

Opgave 12.Exam47a *(rumintegral, 20 point)*

På figuren er skitseret en beholder, som er rotationssymmetrisk om z-aksen. Alle mål er i meter.

1) Hvor mange m^3 rummer beholderen?

2) Beholderen er helt fyldt med et indhold, der har massefylden $\rho = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ *. målt i ton/m^3. Find massen af indholdet.*



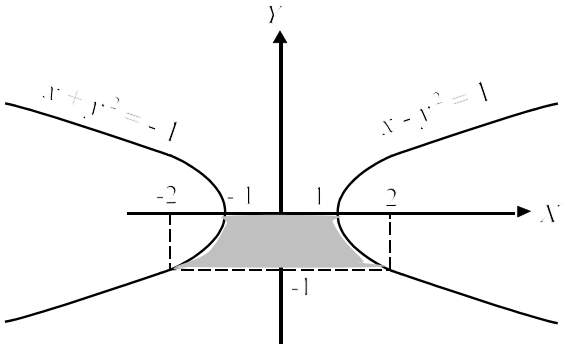
Opgave 12.Exam59a *(plan- og rumintegral, 20 point)*

En mængde S er begrænset af kurver med ligningerne (se figuren)

$x + y^2 = -1, \quad x - y^2 = 1$

$y = 0$ *og* $y = -1$.

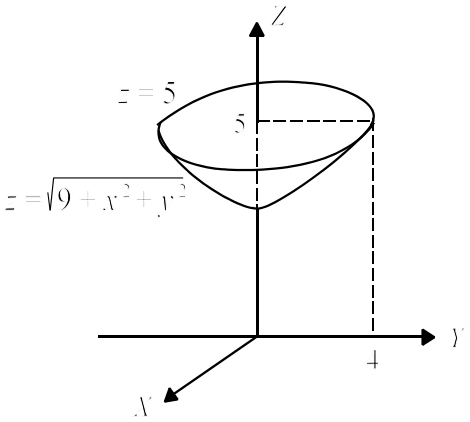
1) Find planintegralet af $f(x,y) = x^2 y$ *over mængden S .*



2) På figuren er skitseret en beholder, som er rotationssymmetrisk om z-aksen. Alle mål er i meter. Beholderens bund har ligningen $z = \sqrt{9 + x^2 + y^2}$.

Beholderen afgrænses endvidere af planen med ligningen z=5. Beholderen er helt fyldt med et indhold, der har massefylden $\rho = 5 - z$ *målt i kg/m^3.*

Find massen af indholdet.

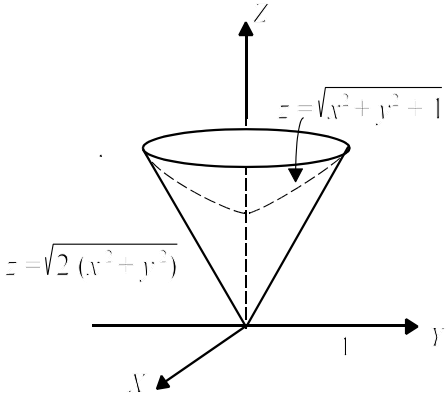


Opgave 12.Exam64a *(rumintegral, 15 point)*

I legeme S med massetætheden 1 ton/m^3 er begrænset af fladerne givet ved

$z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ *og* $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$

(en kegleformet skål med en hyperboloideformet fordybning). Alle mål er i meter. Beregn legemets tyngdepunkt med to betydende cifre.



Opgave 12.Exam69a *(planintegral, 25 point)*

1) Skitser det i et xy-koordinatsystem beliggende område S_1 *bestemt ved*

$S_1 = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \le \pi \}$ *og beregn planintegralet* $\iint_{S_1} \sin(x^2 + y^2)\, dA$.

2) I et xyz-koordinatsystem er givet 2 cirkler c_1 *og* c_2 *beliggende i xy-planen:*

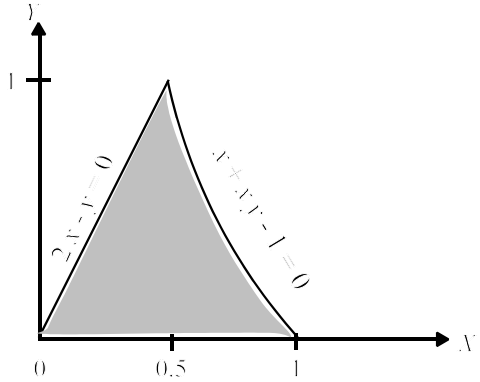
$c_1 = \{ (x,y,z) \mid x^2 + (y-1)^2 = 1 \wedge z = 0 \}$, $c_2 = \{ (x,y,z) \mid x^2 + (y-2)^2 = 4 \wedge z = 0 \}$.

a) Skitser området S_2 *, der er bestemt som mængden af punkter (x,y,z) i xy-planen, som ligger uden for* c_1 *, men inden for* c_2 *.*

b) Idet S_2 *er forsynet med en tynd homogen massebelægning med massetætheden* $\rho = \frac{1}{90}$ *kg/m*^{2} *, ønskes inertimomentet om z-aksen beregnet for* S_2 *(alle mål er i meter).*

Opgave 12.Exam72a *(planintegral, 20 point)*

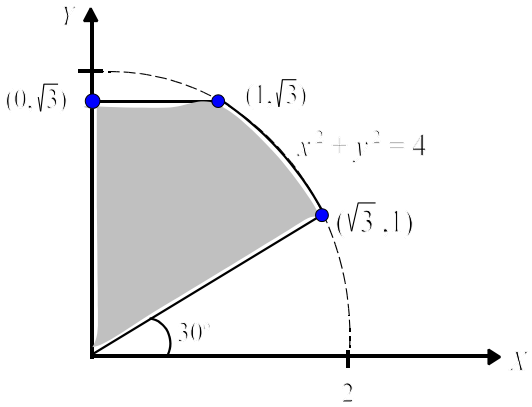
Beregn tyngdepunktets abscisse for det skraverede plane legeme (se figuren) med den 2-dimensionale massetæthed 2 *kg/m*^{2}*. Alle mål er i meter.*



Opgave 12.Exam79a *(planintegral, 25 point)*

Lad S være det skraverede område på figuren (alle mål er i meter) og lad S have en massetæthed på 2 *kg/m*^{2}*.*

Find abscissen x_p *til S' s tyngdepunkt.*



Opgave 12.Exam82a *(planintegral, 20 point)*

1) Skitser i et xy-koordinatsystem mængden S givet ved $S = \{ (x,y) \mid 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le x+1 \}$

2) For en funktion f(x,y) kendes differentialet $df = e^y \sinh x\, dx + e^y \cosh x\, dy$, *og det vides, at* $f(0,0) = 1$.

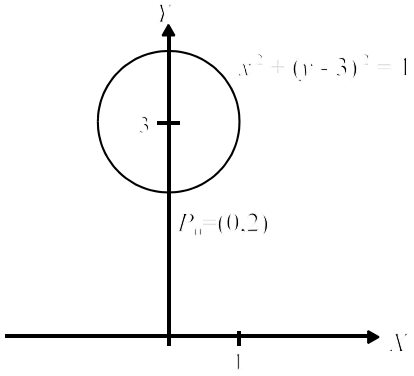
Find planintegralet af f(x,y) over mængden S.

Opgave 12.Exam113 *(kurveintegral, planintegral, 30 point)*

1) Lad kurven k være den orienterede kurve på figuren med samme startpunkt og slutpunkt $P_0 = (0, 2)$. Undersøg, om kurveintegralet

$$\int_k \text{Arcsin}\left(\frac{x}{y}\right) dx + \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{y} dy$$

har værdien nul (begrundelse ønskes).

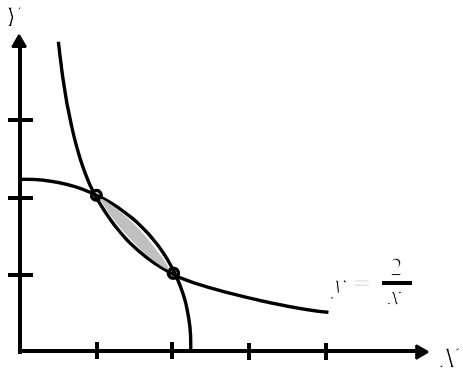


2) Lad S være den lukkede punktmængde i første kvadrant, der er begrænset af cirklen $x^2 + y^2 = 4$ og hyperblen $y = \frac{2}{x}$ (se figuren).

a) Angiv S i polære koordinater, dvs. på formen

$$S = \{(r,\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta \ \wedge \ f_1(\theta) \le r \le f_2(\theta)\} .$$

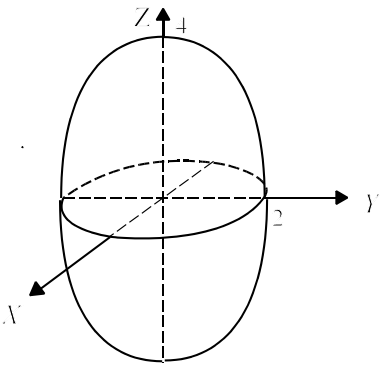
b) Lad S være homogent belagt med masse med en massetæthed på 2.7 kg/m^2 (alle mål er i meter). Find S's inertimoment om z-aksen.



Opgave 12.Exam124 *(rumintegral, 20 point)*

Det på figuren skitserede legeme S, er begrænset af fladen med ligningen $z^2 = 16 - (x^2+y^2)^2$. *Alle mål er i meter. Legemets massetæthed er 100 kg/m^2*

Find legemets inertimoment om z-aksen.



Opgave 12.Exam136 *(planintegral, uden brug af hjælpemidler, 10 point)*

Find planintegralet $\iint_S \frac{1}{x^2 y} dA$ *hvor S er den mængde i planen, der er bestemt ved*

$y \ge 1$, $y \ge x^2$ *og* $y \le 4$

Opgave 12.Exam146 *(rumintegral, numerisk integration, 20 point)*

Lad $B = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \frac{1}{2} \ \wedge \ 0 \le y \le \operatorname{Arcsin} x\}$ *og*

$A = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; (x,y) \in B \ \wedge \ 0 \le z \le \sqrt{\frac{2y}{x+1}}\right\}$.

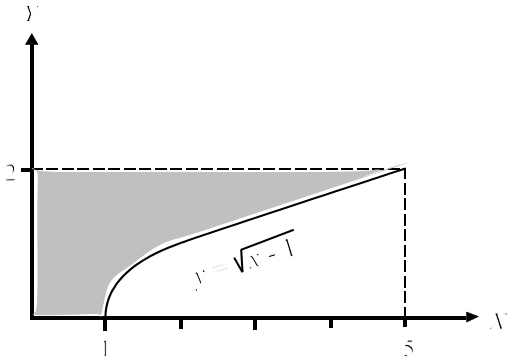
Beregn rumintegralet $\mathrm{I} = \iiint_S 2z \, dV$, *idet man går frem som følger:*

a) Vis, at $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{t^2 \cos t}{1 + \sin t} \, dt$.

b) Find en tilnærmelse til integralet i spørgsmål a) ved hjælp af Simpsons formel med $n = 2$ *og* $n = 4$ *(mellemregninger skal anføres).*

Opgave 12.Exam165 *(planintegral, uden brug af hjælpemidler, 10 point)*

Beregn planintegralet $\iint_S (2xy + 1) dA$, *hvor S er den skraverede punktmængde på figuren.*



Opgave 12.Exam183 *(planintegral, uden brug af hjælpemidler, 10 point)*

Lad området S være givet ved $\mathrm{S} = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1 \ \wedge \ 0 \le y \le 1 - |2x - 1|\}$.

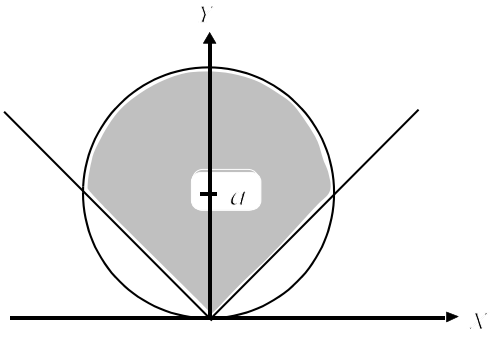
a) Skitser området S.

b) Find planintegralet $\iint_S 2xy \, dA$.

Opgave 12.Exam203 *(planintegral, 15 point)*

Lad S være det område i planen, der er skraveret på figuren, og som er begrænset af cirklen med centrum i (0,a) og radius a, og kurven $y = |x|$ *:*

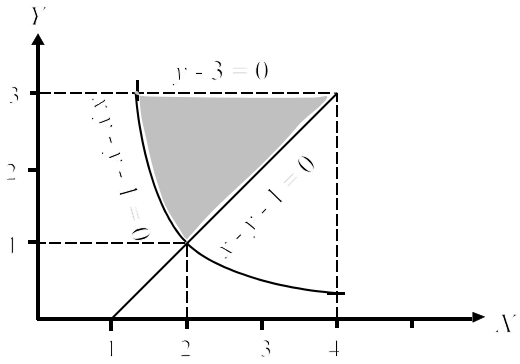
Udregn planintegralet $\iint_S y \, dA$.



Opgave 12.Exam212 *(planintegral, uden brug af hjælpemidler, 12 point)*

Lad S være det på på figuren skraverede område begrænset af kurverne med ligningerne

$x - y - 1 = 0$, $y - 3 = 0$ *og* $xy - y - 1 = 0$.



a) Opløs planintegralet

$$\iint_S \frac{6xy^2}{y+1}\,dA$$

i retvinklede koordinater.

Vælg den integrationsrækkefølge, der medfører, at opløsningen resulterer i netop ét dobbeltintegral.

b) Beregn planintegralets værdi.

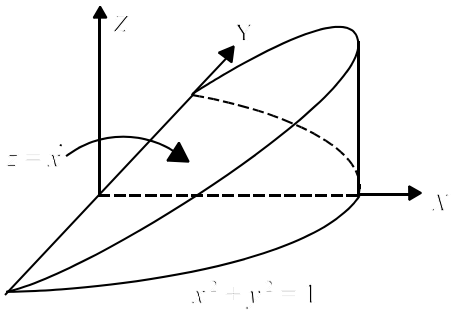
Opgave 12.Exam224 *(rumintegral, 15 point)*

Find værdien af rumintegralet

$$\iiint_S 2z\sqrt{x^2+y^2}\,dV$$ *hvor området*

$S = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \le 1 \ \wedge \ 0 \le z \le x\}$ *er vist på figuren.*

Vink: Brug cylinderkoordinater.



Opgave 12.Exam233 *(planintegral, 15 point)*

Lad området S være givet ved $S = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1 \ \wedge \ \frac{1}{x^2 - 2x + 5} \le y \le 1\}$.

a) Skitsér området S.

b) Beregn planintegralet $\iint_S x\,dA$.

Opgave 12.Exam237 *(planintegral,uden hjælpemidler, 8 point)*

Lad området S være givet ved $S = \{(x,y) \mid \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \ \wedge \ \cos x \le y \le \sin x\}$.

a) Skitsér området S.

b) Beregn planintegralet $\iint_S \frac{2y}{\sin x - \cos x}\,dA$.

13 FLADER, FLADEAREAL OG FLADEINTEGRAL

Forudsætninger i dette kapitel.

I: Et interval i $\mathbb{R}$.

D: En åben sammenhængende delmængde af $\mathbb{R}^2$.

Alle funktioner er kontinuerte reelle funktioner af 1, 2 eller 3 variable og har kontinuerte (partielle) afledede i henholdsvis *I* eller *D*.

13.1 FLADER

Vi har tidligere set, at en kurve i planen kan være givet på forskellige måder:

- ved en funktion $y = f(x)$, f.eks. $y = x^2 + 1$
- ved en ligning $g(x, y) = 0$, f.eks. $x^2 + (y-1)^2 = 1$
- ved en parameterfremstilling $\bar{r} = \bar{r}(t) = (x(t), y(t))$, f.eks.
  $\bar{r}(t) = (t \cdot \cos t, t \cdot \sin t)$, $t \in [0; \infty[$.

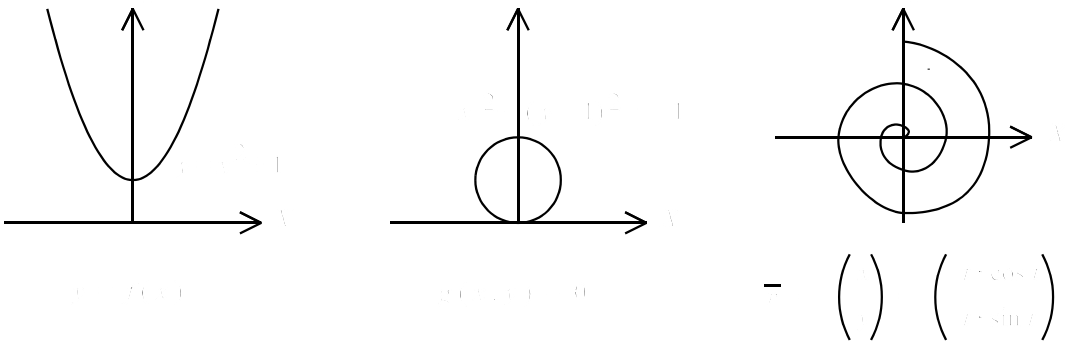


Fig. 13.1. *Kurver i planen.*

Analogt kan en "flade" i rummet være givet:

- ved en funktion $z = f(x,y)$, f.eks. $z = x^2+y^2$
- ved en ligning $g(x,y,z) = 0$, f.eks. $x^2+y^2+z^2 = 1$
- ved en parameterfremstilling

$$\bar{r} = \bar{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \qquad (u,v) \in D,$$

f.eks. $$\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

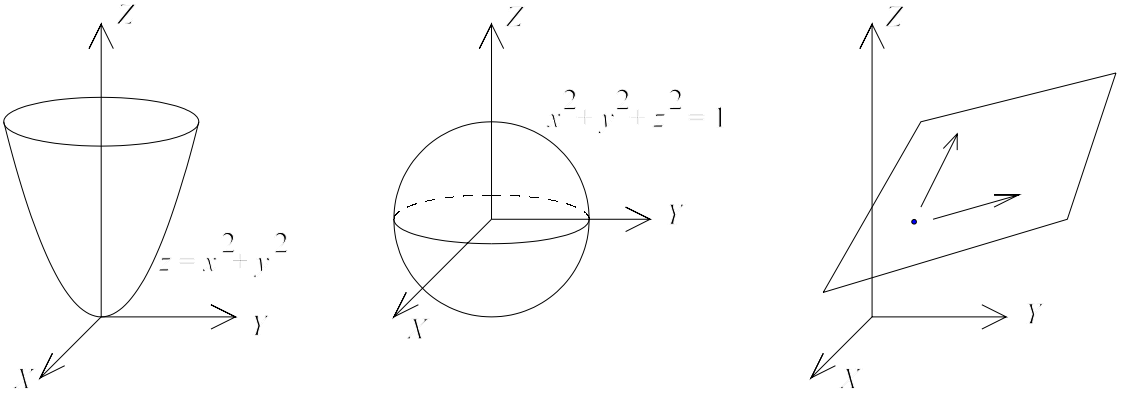


Fig. 13.2. *Flader i rummet.*

Parameterfremstilling

Lad tre funktioner $x(u,v)$, $y(u,v)$ og $z(u,v)$ være defineret for $(u,v) \in D$. Til ethvert punkt $(u,v) \in D$ vil der da svare et punkt (x,y,z) i et rumligt *xyz*-koordinatsystem. Den herved fremkomne punktmængde kaldes en flade F med parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}, \qquad (u,v) \in D$$

eller kort

$$\bar{r} = \bar{r}(u,v), \qquad (u,v) \in D.$$

Eksempelvis $\bar{r} = (1+u-3v,\ 2+3u-v,\ 3+u+2v), \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$

Omskrivning til parameterfremstilling

Er en flade givet ved en funktion $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, er det altid muligt at omskrive til en parameterfremstilling ved at sætte $x = u$ og $y = \mathrm{v}$, så vi får

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \mathrm{v} \\ f(u,\mathrm{v}) \end{pmatrix}, \qquad (u,\mathrm{v}) \in D \ .$$

Er en flade eksempelvis givet ved funktionen $z = x^2 + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, kan vi omskrive til parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \mathrm{v} \\ u^2 + \mathrm{v}^2 \end{pmatrix}, \qquad (u,\mathrm{v}) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Omskrivning for ligning $g(x,y,z) = 0$. Er en flade givet ved en ligning $g(x,y,z) = 0$, er det ofte muligt at omskrive til en parameterfremstilling. Er der eksempelvis givet en kugleflade ved ligningen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ses af omtalen af kuglekoordinater i supplement 12A, at man kan omskrive til parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \cdot \sin \mathrm{v} \\ \sin u \cdot \sin \mathrm{v} \\ \cos \mathrm{v} \end{pmatrix}, \qquad u \in [0;2\pi[, \quad \mathrm{v} \in [0;\pi] \ .$$

I det følgende vil vi antage, at flader er givet ved en parameterfremstilling.

Parameterkurver

Ved parameterfremstillingen $\bar{r} = \bar{r}(u,\mathrm{v})$, $(u,\mathrm{v}) \in D$ vil et fast punkt $Q_0 = (u_0, \mathrm{v}_0)$ i D afbildes over i et punkt P_0 på fladen F, idet $\overrightarrow{OP_0} = \bar{r}(u_0, \mathrm{v}_0)$, se figur 13.3.

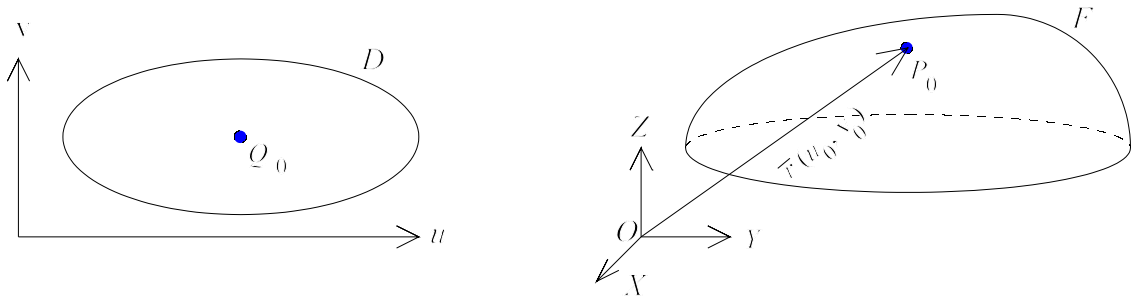


Fig. 13.3. *Punktet Q_0 afbildes over i punktet P_0 på fladen F.*

Betragtes et punkt $Q = (u_0, v)$, hvor v varierer, vil Q gennemløbe en lodret linie gennem Q_0, se figur 13.4a. Det til Q svarende punkt P på fladen F vil da gennemløbe en kurve med parameterfremstillingen

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u_0, v) \\ y(u_0, v) \\ z(u_0, v) \end{pmatrix}, \qquad (u_0, v) \in D,$$

som kaldes en **parameterkurve** på F, se figur 13.4b.

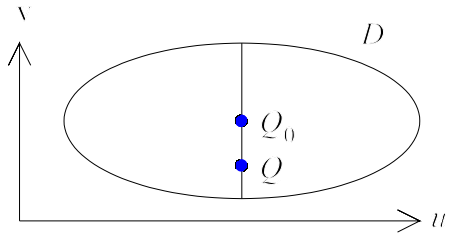


Fig.13.4a. *Varierer* v.

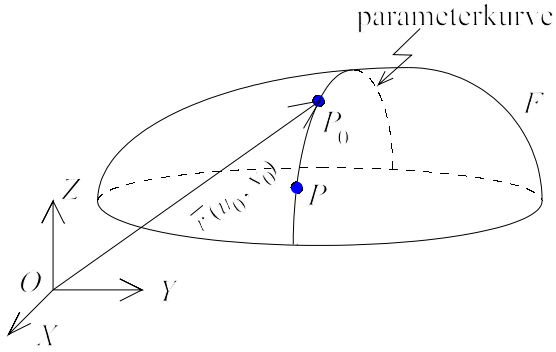


Fig. 13.4b. *Får parameterkurve på fladen F.*

Parameterkurven har tangentvektoren

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}(u_0, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v) \end{pmatrix}.$$

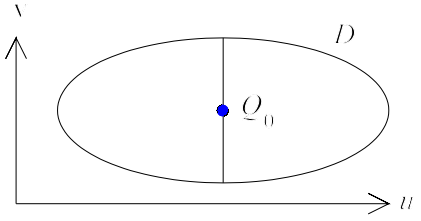


Fig. 13.5a. *Varierer* v.

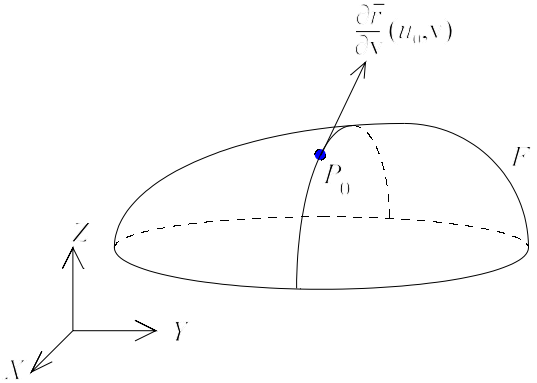


Fig. 13.5b. *Får parameterkurve med tangentvektor.*

Eksempel 13.1. Parameterkurve på flade.

Lad en flade F være givet ved parameterfremstillingen

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - v + 1 \\ u + v + 4 \\ 8 - u^2 - 2v^2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$(u,v) \in \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \in [-2;2] \wedge v \in [-1;1]\}.$$

Find en parameterfremstilling for parameterkurven givet ved $u = 1$, og find en tangentvektor.

LØSNING:

Indsættes $u = 1$ i fladens parameterfremstilling, fås følgende parameterfremstilling for parameterkurven:

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - v \\ 5 + v \\ 7 - 2v^2 \end{pmatrix}, \qquad v \in [-1;1].$$

Tangentvektoren bliver da (se figur 13.6)

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4v \end{pmatrix}.$$

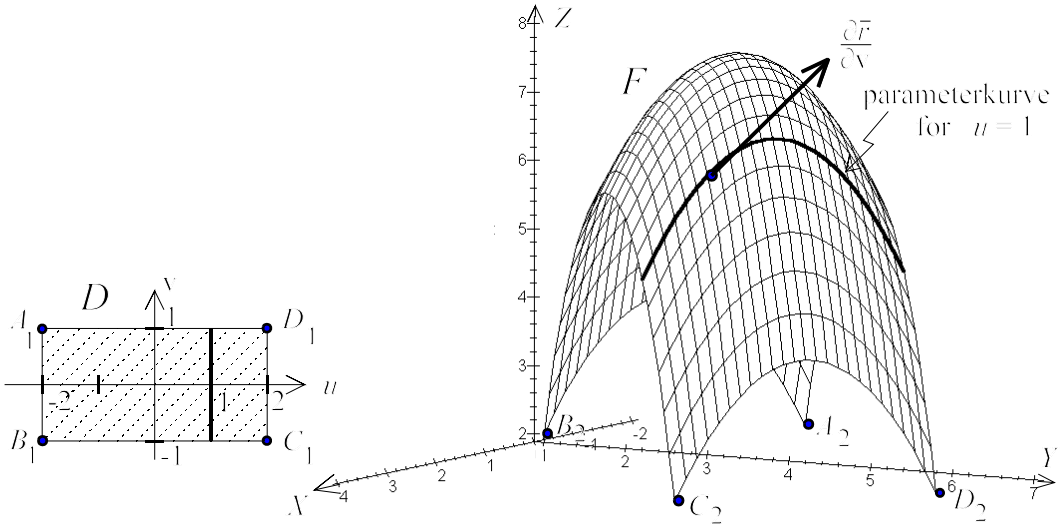


Fig. 13.6. *Fastholdes u=1, så kun* v *varierer, fås en parameterkurve på fladen.*

Fastholder vi $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ og lader u variere, får vi en anden parameterkurve givet ved $\bar{r}(u, \mathbf{v}_0)$ med tangentvektoren $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$, se figur 13.7.

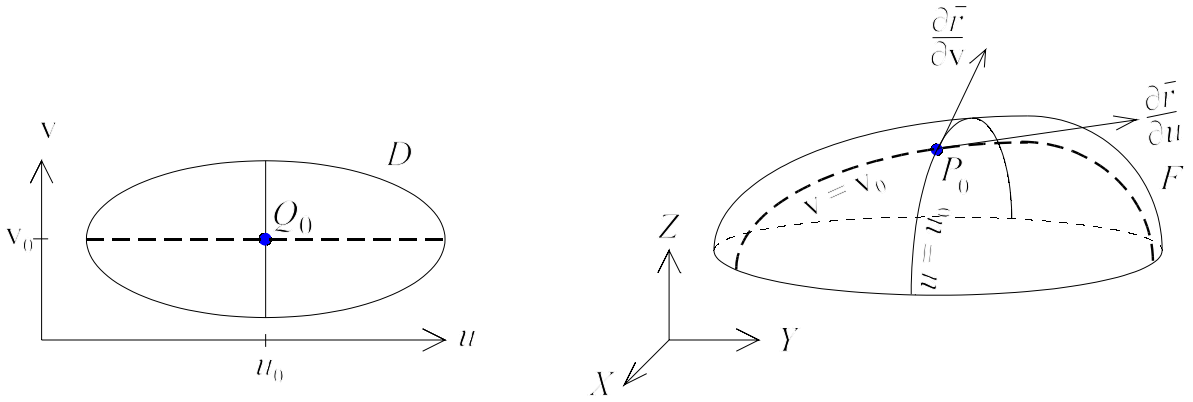


Fig. 13.7. *Variererer u, og får en anden parameterkurve med tangentvektor.*

Vi betragter et fladepunkt P_0 givet ved stedvektoren $\overline{OP_0} = \bar{r}(u_0, \mathbf{v}_0)$. Hvis de to tangentvektorer $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(u_0, \mathbf{v}_0)$ og $\frac{\partial \bar{r}}{\partial \mathbf{v}}(u_0, \mathbf{v}_0)$ begge er forskellige fra $\bar{0}$ og ikke er parallelle, vil de sammen med fladepunktet P_0 bestemme en plan, som kaldes fladens **tangentplan** i P_0, se figur 13.8.

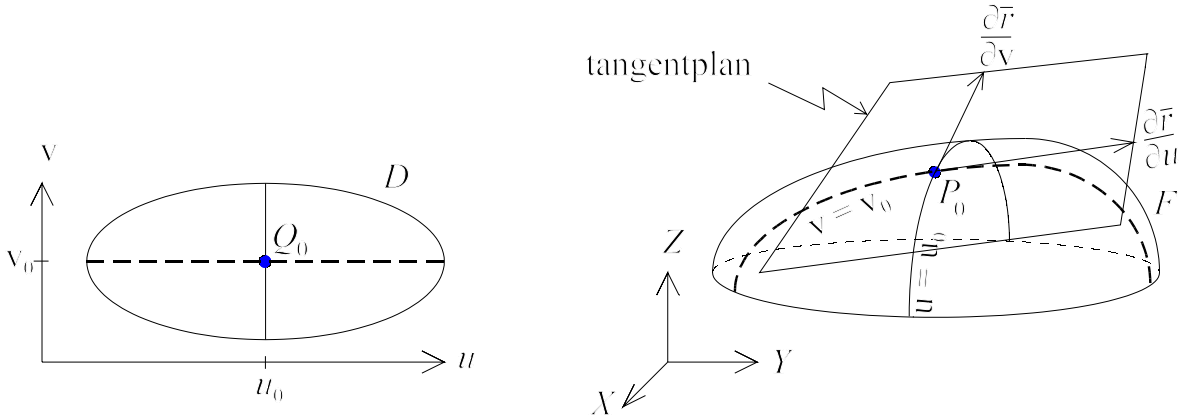


Fig. 13.8. *Tangentplan for flade.*

Vektorproduktet $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$ er vektoren med

1) **retning** vinkelret på $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$ og $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$, sådan at $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$ og $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$ i denne rækkefølge er i højrestilling (som tommel-, pege- og langfinger på højre hånd, se figur 13.9),

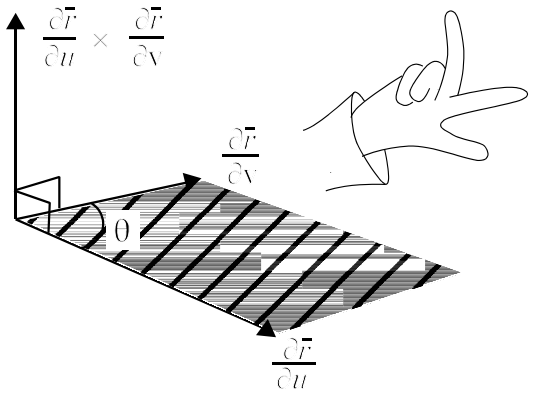


Fig. 13.9. *Vektorprodukt.*

2) **længde** $\left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right|$ lig med arealet af det parallelogram, der udspændes af $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$ og $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$, dvs. $\left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right| = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\right| \cdot \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right| \sin\theta$.

Antagelsen om at $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$ og $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$ begge er forskellige fra $\bar{0}$ og ikke parallelle, er ensbetydende med, at $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \neq \bar{0}$. Derfor vil $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$ være en normalvektor for tangentplanen, se figur 13.10.

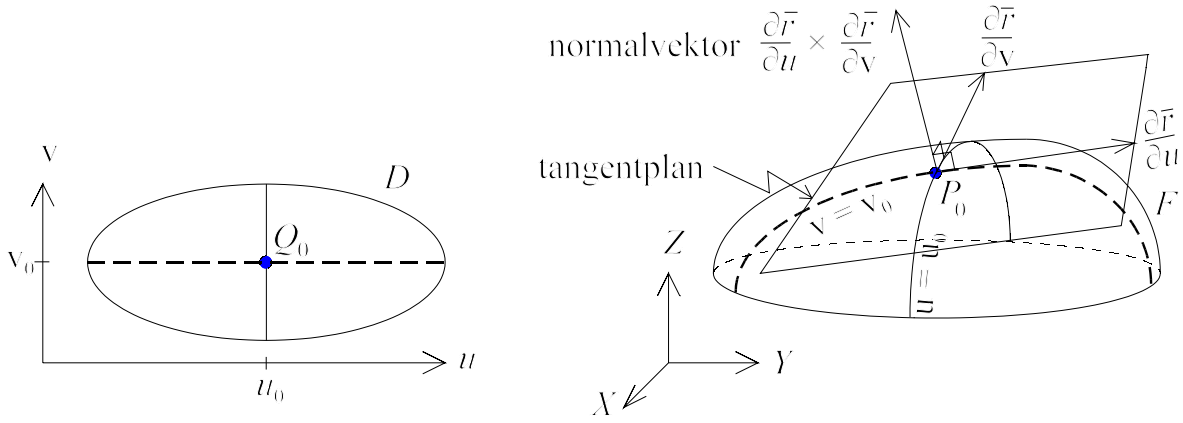


Fig. 13.10. *Tangentplan og normalvektor.*

En flade givet ved en parameterfremstilling $\bar{r} = \bar{r}(u,v),\ \ (u,v) \in D$, kaldes **regulær**, hvis

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \neq \bar{0} \quad \text{for alle } (u,v) \in D.$$

Eksempel 13.2. Tangentplan.

Vi betragter igen fladen fra eksempel 13.1 givet ved parameterfremstillingen

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - v + 1 \\ u + v + 4 \\ 8 - u^2 - 2v^2 \end{pmatrix},$$

$$(u,v) \in D = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \in [-2;2] \wedge v \in [-1;1] \right\}.$$

a) Vis, at fladen er regulær.

b) Find en ligning for fladens tangentplan i det til $(u_0, v_0) = (1,0)$ svarende fladepunkt P_0.

LØSNING:

a) Vi finder:

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4v \end{pmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2u & -4v \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2u & -4v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (-4v + 2u, 4v + 2u, 1 + 1) \neq (0,0,0) \quad \text{for alle } (u,v) \in D.$$

Da $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \neq \bar{0}$ overalt i D, er fladen regulær.

b) Vi finder fladepunktet

$$P_0 = \bar{r}(1,0) = (1 - 0 + 1, 1 + 0 + 4, 8 - 1^2 - 0) = (2,5,7)$$

og normalvektoren

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = (-4 \cdot 0 + 2 \cdot 1,\ 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1,\ 2) = (2,2,2).$$

En ligning for tangentplanen bliver da:

$$(2,2,2) \cdot (x - 2, y - 5, z - 7) = 0$$

$$2(x-2) + 2(y-5) + 2(z-7) = 0$$

$$\underline{\underline{x + y + z - 14 = 0}}.$$

13.2 FLADEINTEGRAL

Et fladeintegral anvendes sædvanligvis til opsummering af en (fysisk) størrelse, der optræder "kontinuert" fordelt på en flade. Vi vil først betragte opsummering af en massefordeling over en flade for at finde den samlede masse på fladen. På figur 13.11 er der vist en åben

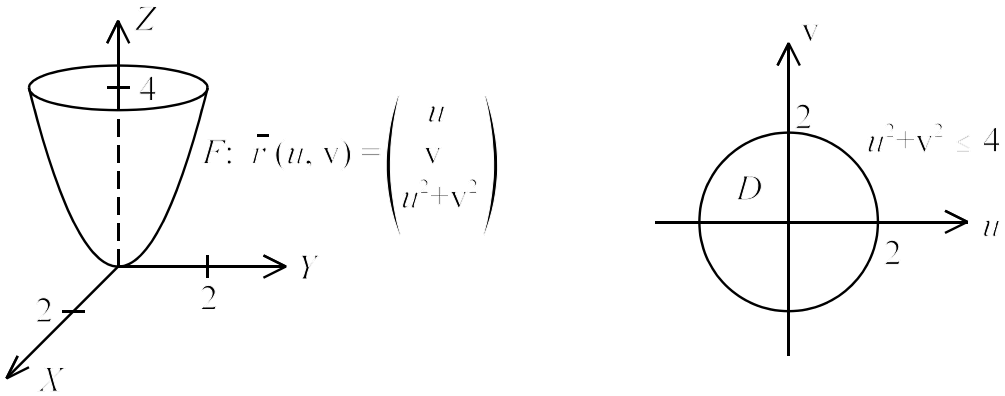


Fig. 13.11. *Åben beholder. Alle mål er i meter.*

stålbeholder, som indvendig er belagt med et varierende lag titan for at modvirke korrosion. Titanlagets 2-dimensionale massetæthed er

$$f(x,y,z) = 1 + 4x^2 + 4y^2 \ \ [\mathrm{kg/m^2}] \ .$$

Vi vil prøve at finde den samlede masse af titanlaget.

<u>Inddeling og punktmængde.</u> Vi inddeler mængden D som vist på figur 13.12a:

D: Et rektangel som indeholder D inddeles i $\ell * m$ delrektangler med arealerne $\Delta A_{ij} = \Delta u_i \cdot \Delta v_j$, hvor $i = 1,2,...,\ell$ og $j = 1,2,...,m$. Derpå vælges en punktmængde bestående af ét vilkårligt punkt fra hvert delrektangel, idet punktet i det $(i,j)'$te delrektangel kaldes (u_i^*, v_j^*).

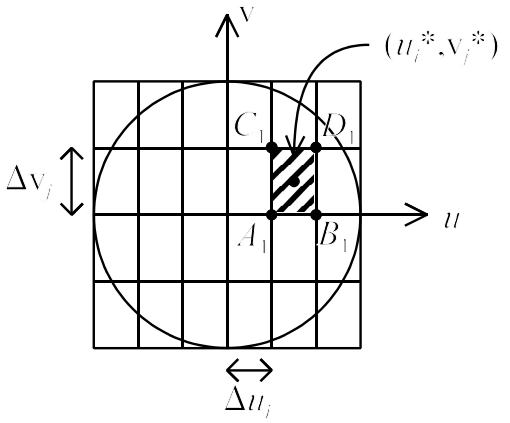


Fig. 13.12a. *Inddeling i uv-plan.*

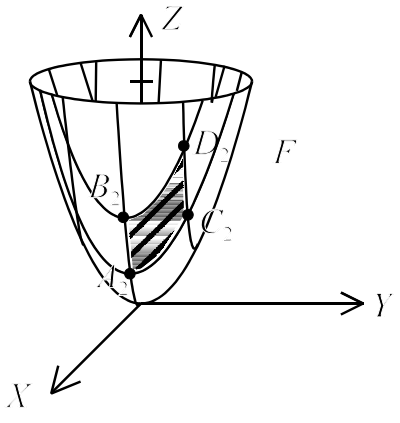


Fig. 13.12b. *Inddeling på flade.*

F: Figur 13.12b illustrerer, at inddelingen af D fører til en inddeling af fladen F. Det $(i,j)'$te delrektangel $A_1B_1C_1D_1$ afbildes over i et firkantlignende stykke $A_2B_2C_2D_2$ af F. Vi vil tilnærme $A_2B_2C_2D_2$ ved et parallelogram $A_3B_3C_3D_3$, hvor $\overline{A_3B_3} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(u_i, v_j)\,\Delta u_i$ og $\overline{A_3C_3} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}(u_i, v_j)\,\Delta v_j$, således at parallelogrammet ligger i tangentplanen hørende til punktet $\bar{r}(u_i, v_j)$, se figur 13.13.

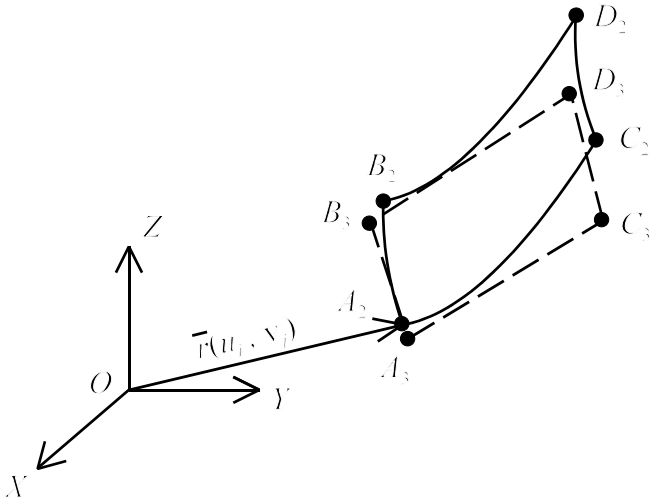


Fig.13.13. *Fladestykket $A_2B_2C_2D_2$ tilnærmes ved parallelogrammet $A_3B_3C_3D_3$.*

Begrundelse. Vi antager for nemheds skyld, at (u_i, v_j) er valgt i punktet A_1, sætter $A_3 = A_2$, og finder:

$$\overline{A_2B_2} = \overline{OB_2} - \overline{OA_2} = \bar{r}(u_i + \Delta u_i, v_j) - \bar{r}(u_i, v_j)$$

$$= \frac{\bar{r}(u_i + \Delta u_i, v_j) - \bar{r}(u_i, v_j)}{\Delta u_i}\,\Delta u_i \approx \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(u_i, v_j) \cdot \Delta u_i \equiv \overline{A_3B_3}$$

$$\overline{A_2C_2} = \overline{OC_2} - \overline{OA_2} = \bar{r}(u_i, v_j + \Delta v_j) - \bar{r}(u_i, v_j)$$

$$= \frac{\bar{r}(u_i, v_j + \Delta v_j) - \bar{r}(u_i, v_j)}{\Delta v_j}\,\Delta v_j \approx \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}(u_i, v_j) \cdot \Delta v_j \equiv \overline{A_3C_3}$$

$$\overline{A_2D_2} = \overline{OD_2} - \overline{OA_2} = \bar{r}(u_i + \Delta u_i, v_j + \Delta v_j) - \bar{r}(u_i, v_j)$$

$$= \bar{r}(u_i + \Delta u_i, v_j + \Delta v_j) - \bar{r}(u_i, v_j + \Delta v_j) + \bar{r}(u_i, v_j + \Delta v_j) - \bar{r}(u_i, v_j)$$

$$= \frac{\bar{r}(u_i + \Delta u_i, v_j + \Delta v_j) - \bar{r}(u_i, v_j + \Delta v_j)}{\Delta u_i}\,\Delta u_i + \frac{\bar{r}(u_i, v_j + \Delta v_j) - \bar{r}(u_i, v_j)}{\Delta v_j}\,\Delta v_j$$

$$\approx \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(u_i, v_j) \cdot \Delta u_i + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}(u_i, v_j) \cdot \Delta v_j \equiv \overline{A_3D_3}\,.$$

Da $\overline{A_3D_3} = \overline{A_3B_3} + \overline{A_3C_3}$, er $A_3B_3C_3D_3$ et parallelogram.

Parallelogrammet $A_3B_3C_3D_3$ har arealet

$$\Delta F_{ij} = \left|\overline{A_3B_3} \times \overline{A_3C_3}\right| = \left|\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(u_i, \mathrm{v}_j)\,\Delta u_i\right) \times \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \mathrm{v}}(u_i, \mathrm{v}_j)\,\Delta \mathrm{v}_j\right)\right|$$

$$= \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(u_i, \mathrm{v}_j) \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \mathrm{v}}(u_i, \mathrm{v}_j)\right| \Delta u_i \Delta \mathrm{v}_j$$

$$= \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(u_i, \mathrm{v}_j) \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \mathrm{v}}(u_i, \mathrm{v}_j)\right| \Delta A_{ij}$$

eller kort

$$\Delta F = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \mathrm{v}}\right| \Delta A \ .$$

Tilnærmede bidrag fra delmængderne summeres. Massen på hvert lille stykke flade $(A_2B_2C_2D_2)_{ij}$ tilnærmer vi ved

[massetæthed i $\bar{r}(u_i^*, \mathrm{v}_j^*)$] · [arealet af parallelogrammet $(A_3B_3C_3D_3)_{ij}$],

idet massetætheden naturligvis må sættes lig med 0, når (u_i^*, v_j^*) falder uden for D. Ved at summere alle delmængdernes bidrag fås en tilnærmelse til den samlede masse:

$$\text{masse}(F) \approx \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m} \hat{f}\left(x(u_i^*, \mathrm{v}_j^*), y(u_i^*, \mathrm{v}_j^*), z(u_i^*, \mathrm{v}_j^*)\right) \cdot \Delta F_{ij} \qquad (1)$$

$$\approx \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m} \hat{f}\left(x(u_i^*, \mathrm{v}_j^*), y(u_i^*, \mathrm{v}_j^*), z(u_i^*, \mathrm{v}_j^*)\right) \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(u_i^*, \mathrm{v}_j^*) \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \mathrm{v}}(u_i^*, \mathrm{v}_j^*)\right| \Delta u_i \cdot \Delta \mathrm{v}_j \ . \qquad (2)$$

Her betegner $\hat{f}\left(x(u,\mathrm{v}), y(u,\mathrm{v}), z(u,\mathrm{v})\right)$ en funktion, der er identisk med f for $(u,\mathrm{v}) \in D$, men 0 i alle andre punkter. Det ses, at (2) er en middelsum for planintegralet

$$\iint_D f(x(u,\mathrm{v}), y(u,\mathrm{v}), z(u,\mathrm{v})) \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(u,\mathrm{v}) \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \mathrm{v}}(u,\mathrm{v})\right| dA \,,$$

som vi derfor vil gøre til definitionen af det såkaldte fladeintegral:

$$\iint_F f(x,y,z)\, dF \qquad \text{(skrivemåden stammer fra (1)).}$$

DEFINITION *(fladeintegral, fladeareal). Lad* F *være en regulær flade givet ved en parameterfremstilling:*

$$F: \quad \bar{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}, \qquad (u,v) \in D,$$

hvor D *er en lukket begrænset mængde, som har et areal. Lad endvidere* $f(x,y,z)$ *være en sådan funktion, at*

$$f(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}(u,v) \right|$$

er kontinuert over D*. Så defineres værdien af fladeintegralet*

$$\iint_F f(x,y,z)\, dF$$

ved planintegralet

$$\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}(u,v) \right| dA \ .$$

Er $f(x,y,z)$ *identisk lig med 1, kaldes værdien af fladeintegralet for fladens* ***areal:****.*

$$\text{Areal}(F) = \iint_F dF = \iint_D \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}(u,v) \right| dA \ ,$$

og dF *kaldes et arealelement på fladen.*

Eksempel 13.3. Inertimoment af tynd kugleskal.

Lad F være et 90^0 bredt ækvatorbælte af en homogen kugleskal med massetætheden $\rho\ [\mathrm{kg/m^2}]$ og radius R [meter], se figuren.

a) Find inertimomentet af F omkring z-aksen.

b) Find arealet af F.

LØSNING:

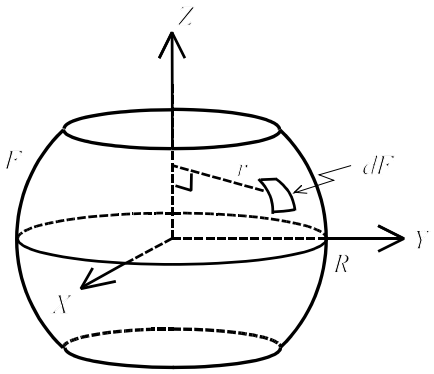


Fig. 13.14. *Ækvatorbælte F.*

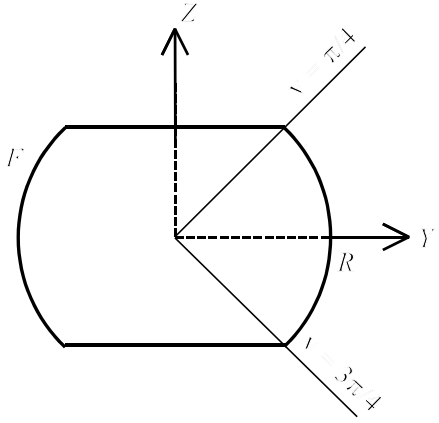


Fig. 13.15. *Snit med lodret plan.*

a) Vi indlægger et koordinatsystem med begyndelsespunkt i kuglens centrum, og søger inertimomentet omkring z-aksen. Lad dF være et arealelement på fladen omkring punktet (x,y,z). Inertimomentet af dF er da tilnærmelsesvis $dI = r^2 \cdot dm =$ $(x^2+y^2)dm$, hvor $dm = \rho\, dF$ er massen af dF. Summeres over hele F, fås inertimomentet

$$I = \iint_F (x^2+y^2)\,\rho\, dF = \rho \iint_F (x^2+y^2)\, dF .$$

Indføres kuglekoordinater (se kapitel 12), får F parameterfremstillingen

$$\bar{r} = (x,y,z) = \big(R\cdot\cos u\cdot\sin \mathrm{v},\ R\cdot\sin u\cdot\sin \mathrm{v},\ R\cdot\cos \mathrm{v}\big), \quad (u,\mathrm{v}) \in D,$$

hvor $D = \left\{ (u,\mathrm{v}) \;\middle|\; 0 \le u < 2\pi \ \wedge\ \frac{\pi}{4} \le \mathrm{v} \le \frac{3\pi}{4} \right\}$.

Idet

$$\left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \bar{r}}{\partial \mathrm{v}}\right| = \left|\begin{pmatrix} R\cdot[-\sin u\cdot\sin \mathrm{v}] \\ R\cdot\cos u\cdot\sin \mathrm{v} \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} R\cdot\cos u\cdot\cos \mathrm{v} \\ R\cdot\sin u\cdot\cos \mathrm{v} \\ -R\cdot\sin \mathrm{v} \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -R^2\cos u\cdot\sin^2 \mathrm{v} \\ -R^2\sin u\cdot\sin^2 \mathrm{v} \\ -R^2\cos \mathrm{v}\cdot\sin \mathrm{v} \end{pmatrix}\right|$$

$$= R^2\cdot\sin \mathrm{v}\cdot\left|\begin{pmatrix} \cos u\cdot\sin \mathrm{v} \\ \sin u\cdot\sin \mathrm{v} \\ \cos \mathrm{v} \end{pmatrix}\right| = R^2\cdot\sin \mathrm{v}$$

og

$$x^2+y^2 = R^2\cdot\cos^2 u\cdot\sin^2 \mathrm{v} + R^2\cdot\sin^2 u\cdot\sin^2 \mathrm{v} = R^2\cdot\sin^2 \mathrm{v},$$

fås

$$I = \rho\iint_D R^2\cdot\sin^2 \mathrm{v}\cdot R^2\cdot\sin \mathrm{v}\,dA = \rho\cdot R^4\int_0^{2\pi} du\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin^3 \mathrm{v}\,d\mathrm{v}$$

Schaum 14.349

$$= 2\pi\rho R^4\cdot\left[-\cos \mathrm{v}+\frac{1}{3}\cos^3 \mathrm{v}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= 2\pi\rho R^4\cdot\left[-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\frac{1}{3}\cos^3\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{3}\cos^3\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]$$

$$= 2\pi\rho R^4\cdot\left[-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^3-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^3\right)\right]$$

$$= 2\pi\rho R^4\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{12}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{12}\sqrt{2}\right) = 2\pi\rho R^4\cdot\frac{5}{6}\sqrt{2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{5}{3}\sqrt{2}\pi\rho R^4}}.$$

b) $\mathrm{Areal}(F) = \iint_F 1\cdot dF = \iint_D\left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \bar{r}}{\partial \mathrm{v}}\right|dA$

$$= \int_0^{2\pi} du\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} R^2\cdot\sin \mathrm{v}\,d\mathrm{v} = R^2\int_0^{2\pi}\left[-\cos \mathrm{v}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}du$$

$$= R^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)du = R^2\,2\pi\sqrt{2} = \underline{\underline{2\sqrt{2}\,\pi R^2}}.$$

OPGAVER

Opgave 13.1^{T} *(skitse af flade, tangentplan)*

Lad F være den flade, der er bestemt ved parameterfremstillingen

$$(x, y, z) = (\cos u, \mathrm{v}, \sin u + 1), \qquad (u, \mathrm{v}) \in \omega,$$

hvor $\omega \in \{(u,\mathrm{v}) \mid 0 \le \mathrm{v} \le u \ \wedge \ 0 \le u \le \frac{\pi}{2}\}$.

1) Beskriv parameterkurverne for F, og skitser på det grundlag fladen.

2) Undersøg, om fladen er en regulær flade.

3) Find ligningen for fladens tangentplan i det til $(u,\mathrm{v}) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ *svarende fladepunkt.*

Opgave 13.2 *(skitse af flade, tangentplan)*

Lad F være den flade, der er bestemt ved parameterfremstillingen

$$(x,y,z) = (\cos \mathrm{v} - u \sin \mathrm{v}, \sin \mathrm{v} + u \cos \mathrm{v}, u), \qquad u \in \mathbb{R},\ \mathrm{v} \in [0;2\pi] \ .$$

1) Vis, at enhver af fladens parameterkurver enten er en ret linie eller en cirkel.

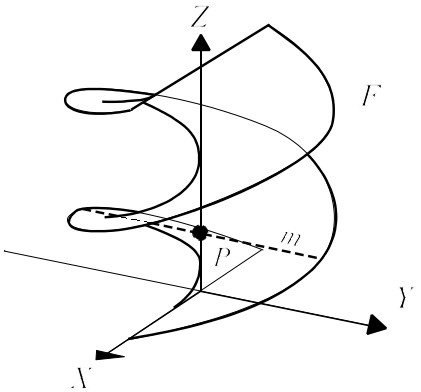
2) Undersøg, om fladen er en regulær flade.

3) Find ligningen for fladens tangentplan i det til $(u,\mathrm{v}) = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ *svarende fladepunkt.*

4) Skitsér fladen.

Opgave 13.3 *(vindelflade, tangentplan)*

En ret linie m parallel med xy-planen skærer z-aksen i punktet P. Fladen F (kaldet en vindelflade) fremkommer ved, at linien m "skruer" rundt om z-aksen, dvs. m drejes rundt om z-aksen samtidig med, at punktet P bevæger sig op ad z-aksen (se figuren). Lad P's koordinater være $(0,0,3\mathrm{v})$*, hvor* v *er vinklen mellem m og x-aksen.*



1) Angiv en parameterfremstilling for F.

2) Undersøg om fladen er regulær.

3) Beskriv parameterkurverne for F.

4) Angiv ligningen for F's tangentplan i punktet $(\sqrt{3}, 1, \frac{\pi}{2})$.

Opgave 13.4 *(flade, ligning for flade, tangentplan)*

Lad F være den flade, der er bestemt ved parameterfremstillingen

$$(x,y,z) = \left(\frac{u-\mathrm{v}}{u+\mathrm{v}}, \frac{u\mathrm{v}+1}{u+\mathrm{v}}, \frac{u\mathrm{v}-1}{u+\mathrm{v}} \right), \qquad (u,\mathrm{v}) \in \{(u,\mathrm{v}) \mid u \neq -\mathrm{v}\} .$$

1) Vis, at enhver af fladens parameterkurver er en ret linie, fra hvilken der er fjernet et punkt.

2) Vis, at fladen F er en del af hyperboloiden med ligningen $\mathrm{x}^2 + y^2 - z^2 = 1$.

3) Find ligningen for fladens tangentplan i det til $(u,\mathrm{v}) = (2,1)$ *svarende fladepunkt.*

Opgave 13.5 *(flade)*

Lad fladen F være givet ved ligningen $\mathrm{z} = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *(En parameterfremstilling er da* $(x,y,z) = (u,\mathrm{v},\sqrt{u^2+\mathrm{v}^2})$, $(u,\mathrm{v}) \in \mathbb{R}^2$.*)*

1) Skitsér fladen F, idet man betragter fladens skæringskurver med planer parallelle med xy-planen.

2) Find ligningen for fladens tangentplan i punktet $(x,y,z) = (3,4,5)$.

Opgave 13.6 *(flade, fladeareal)*

Lad F være fladen bestemt ved parameterfremstillingen

$$(x,y,z) = (u\cdot \mathrm{v}, (u+\mathrm{v})^2, u^2+\mathrm{v}^2), \qquad (u,\mathrm{v}) \in \{(u,\mathrm{v}) \mid 0<u<1 \wedge -u<\mathrm{v}<u\} .$$

1) Vis, at F er en regulær flade.

2) Vis, at F er en del af planen $2x - y + z = 0$.

3) Udregn arealet af F.

Opgave 13.7 *(flade, fladeareal)*

Lad F være fladen bestemt ved parameterfremstillingen

$$(x,y,z) = (\sqrt{2}\cos u \cos \mathrm{v}, \sqrt{2}\sin u \cos \mathrm{v}, \cos 2\mathrm{v}), \qquad (u,\mathrm{v}) \in D,$$

hvor $$\mathrm{D} = \left\{ (u,\mathrm{v}) \mid 0 \le u \le \frac{1}{2} \wedge \frac{\pi}{6} \le \mathrm{v} \le \frac{1}{2}\operatorname{Arccos} u \right\} .$$

1) Vis, at F er en regulær flade.

2) Vis, at F udgør en del af omdrejningsparaboloiden med ligningen $\mathrm{z} = x^2+y^2-1$.

3) Find arealet af F.

Opgave 13.8 *(fladeareal)*

Find arealet af fladestykket med ligningen

$$\mathrm{z} = x\cdot y , \qquad (x,y) \in S_{xy},$$

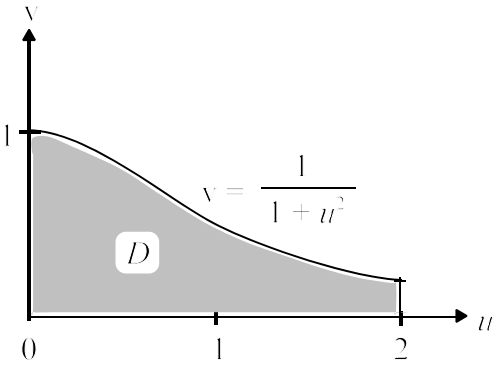
hvor

$$\mathrm{S}_{xy} = \{(x,y) \mid 0 \le x \wedge 0 \le y \wedge x^2+y^2 \le 1\}.$$

Opgave 13.9 *(fladeareal)*

Lad en flade F have parameterfremstillingen $F: (x,y,z) = \left(\frac{1}{2}u^2, -2u+3v, u-4v\right)$, *hvor* $(u,v) \in D$ *(det skraveret område på figuren).*

Find arealet af F.

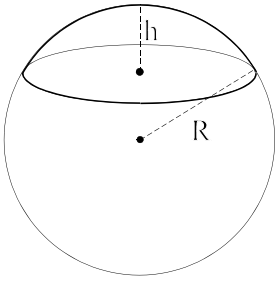


Opgave 13.10a *(fladeareal)*

Vis, at arealet af en kugle med radius R er $4\pi R^2$.

Opgave 13.10b *(fladeareal)*

Vis, at arealet af den på figuren viste kuglekalot er $2\pi Rh$ *(se også Schaum 4.41) .*



Opgave 13.10c *(fladeareal)*

Find arealet af den del af planen $2x + y + 2z = 16$ *for hvilken* $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $x^2 + y^2 \leq 64$.

Opgave 13.10d *(fladeareal)*

Vis, at arealet af den del af paraboloiden $x^2 + y^2 = 4z$, *der ligger mellem z=1 og z=3 er* $\frac{16\pi}{3}\left(4 - \sqrt{2}\right)$.

Opgave 13.10 *(masse)*

Lad fladen F være bestemt ved ligningen $z = x^2 + 2y^2$, $(x,y) \in S_{xy}$, *hvor* $S_{xy} = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1\}$ *(alle mål er i meter). Lad endvidere F have massetætheden 100 kg/m².*

Beregn fladen F's masse.

Opgave 13.11a *(fladeintegral)*

Find $\iint_F z^2\,dF$, *idet F er halvkugleskallen* $x^2+y^2+z^2=1$ hvor $z\ge 0$.

Opgave 13.11b *(fladeintegral)*

Find $\iint_F (x+y)\,dF$, *idet F er halvkugleskallen* $x^2+y^2+z^2=1$ hvor $x\ge 0$.

Opgave 13.11c *(fladeareal, fladeintegral)*

Lad F være den del af cylinderfladen $x^2+y^2=1$, *som ligger mellem planen* $3x+2y+z=6$ *og planen* $z=0$.

1) Find arealet af F.

2) Find $\iint_F xy\,dF$.

Opgave 13.11 *(tyngdepunkt)*

Lad F være fladestykket $\{(x,y,z)\mid z=xy \wedge x\ge 0 \wedge y\ge 0 \wedge x^2+y^2\le 4\}$ *(alle mål er i meter), og lad F's massetæthed være 200 kg/m²*.

Find tyngdepunktets z-koordinat $z_T=\dfrac{\iint_F z\,dF}{\iint_F dF}$.

Opgave 13.12 *(inertimoment)*

Lad F være den del af en vindelflade, der bestemmes ved parameterfremstillingen

$$(x,y,z)=(v\cos u, v\sin u, 2u),\qquad u\in[0;2\pi],\quad v\in[0;1].$$

Lad endvidere fladen F have massetætheden 100 kg/m² (alle mål er i meter).

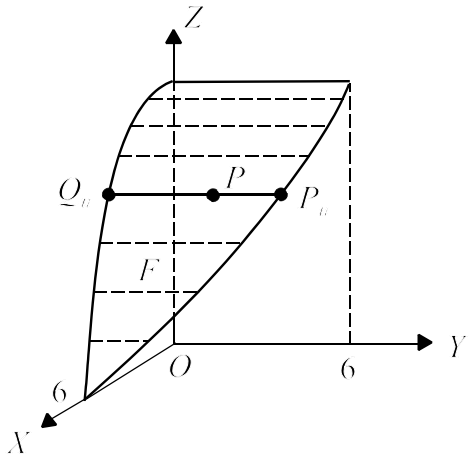
Beregn fladen F's inertimoment omkring z-aksen.

Opgave 13.Exam13 *(flade, fladeareal, 20 point)*

Lad P_u *være et vilkårligt punkt på skruelinien* k *med parameterfremstillingen*

$$(x,y,z) = (6\cos u, 6\sin u, 6u), \qquad u \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right].$$

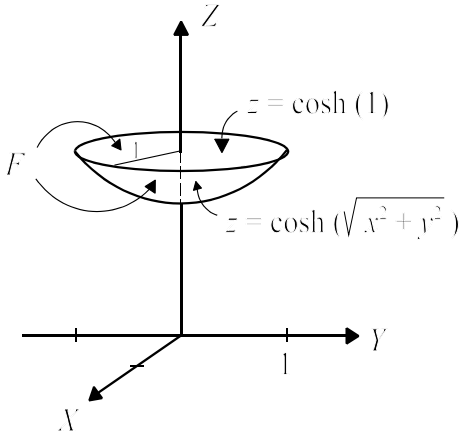
Idet Q_u *er* P_u*'s projektion på xz-planen (se figuren), vil liniestykket* P_uQ_u *beskrive en flade* F *i rummet, når* u *gennemløber intervallet* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.



1) *Angiv en parameterfremstilling for* F.
   (Vink: Anvend f.eks. $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{OQ_u} + \overrightarrow{Q_uP}$, *hvor* P *er et vilkårligt punkt på* F*).*
2) *Lad* M *være midtpunktet af liniestykket* $\mathrm{P}_u\mathrm{Q}_u$ *for* $u = \frac{\pi}{4}$.
   Find koordinaterne til den enhedsvektor, der er normalvektor til F *i punktet* M*, og som peger "væk" fra* y*-aksen.*
3) *Find arealet af* F.

Opgave 13.Exam14 *(fladeareal, 20 point)*

Find arealet af den viste lukkede flade F *(lukket beholder med plant vandret låg):*



Opgave 13.Exam15 *(flade, fladeintegral, 15 point)*

Lad en differentiabel flade F være givet ved parameterfremstillingen

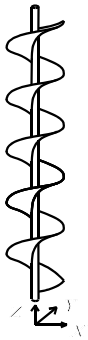
$$\bar{r}(u,v) = (u+3v-1, 3u-v+1, u^2+v^2), \qquad u^2+v^2 \le 9.$$

1) Find ligningen for fladen F's tangentplan i punktet $(x,y,z) = (6,2,5)$.

2) Beregn værdien af fladeintegralet $\iint_F \frac{x+y}{\sqrt{5+2z}}\, dF$.

Opgave 13.Exam16 *(inertimoment, 20 point)*

Inertimomentet om z-aksen af en transportsnegls skrueblad er givet ved fladeintegralet



$$I_z = \iint_F (x^2+y^2)\,\rho\, dF, \quad \textit{hvor}$$

$\rho = 100$ = *bladets masse pr. arealenhed,*

F = en flade (af form som skruebladet) med parameterfremstillingen

$$(x,y,z) = \left(v\cdot\cos u, v\cdot\sin u, \frac{u}{4}+v^2\right), \quad \textit{hvor}$$

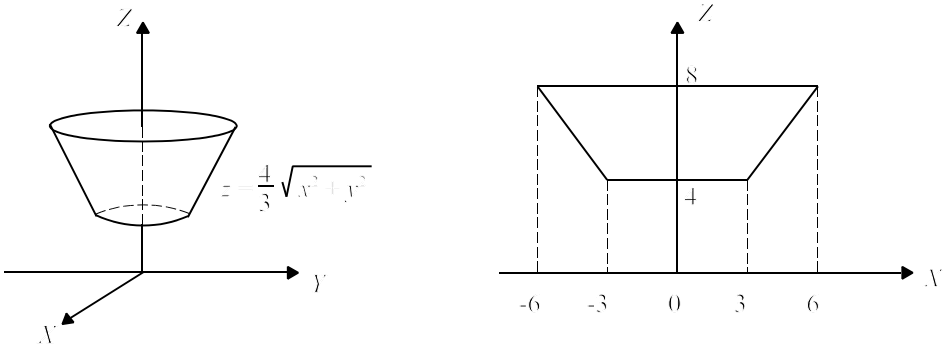
$$(u,v) \in \{(u,v)\in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le u \le 10\pi \ \wedge\ 0.1 \le v \le 0.5\}.$$

Find I_z *(enten eksakt eller med mindst 3 betydende cifre).*

Opgave 13.Exam17 *(inertimoment, 20 point)*

På figurerne er vist den krumme overflade F af en keglestub.

Alle mål er i meter, og massetætheden på F er konstant 100 kg/m².



For at finde egenfrekvensen af små svingninger om x-aksen beregnes inertimomentet I_x om x-aksen af den krumme flade F.

Find I_x .

14 VEKTORANALYSE

Forudsætninger i dette kapitel.

I: Et interval i $\mathbb{R}$.

D: En åben sammenhængende delmængde af $\mathbb{R}^2$.

S: En åben sammenhængende delmængde af $\mathbb{R}^3$.

E: En åben sammenhængende punktmængde i det tredimensionale rum.

Alle funktioner er kontinuerte med kontinuerte (partielle) afledede i deres definitionsmængde.
Alle kurver er kontinuerte og sammensat af regulære kurver.
Alle flader er kontinuerte og sammensat af regulære flader.
Ingen kurver eller flader har multiple punkter (dobbeltpunkter).

14.1 SKALARFELT, VEKTORFELT

De grundlæggende begreber i vektoranalysen er skalarfelt og vektorfelt. For at give en anskuelig introduktion til disse begreber vil vi betragte en væskestrømning. Til ethvert punkt P af væsken kan vi til et givet tidspunkt knytte et reelt tal $u(P)$, som angiver væskens temperatur i P. Herved er defineret et såkaldt **skalarfelt** u. Knyttes der til ethvert punkt P i ovennævnte væskestrømning en vektor $\bar{\mathbf{v}}(P)$, som angiver det pågældende punkts (partikels) hastighed til et givet tidspunkt, er der defineret et **vektorfelt.**

Af andre fysiske eksempler på skalarfelter kan nævnes et legemes massetæthed eller ladningstæthed, trykket i et rør, der gennemstrømmes af en væske og det elektriske potential omkring en elektrisk ladning. Af andre eksempler på vektorfelter kan nævnes kraftfelter såsom tyngdefelt og elektriske og magnetiske felter. Man siger, at et felt er **stationært**, såfremt feltet er uafhængigt af tiden. Vi vil i dette kapitel sædvanligvis kun betragte stationære vektor- og skalarfelter.

DEFINITION *(skalarfelt). Ved et skalarfelt u i E forstås en funktion, som til ethvert punkt P i E knytter et tal (en skalar)* $\mathrm{u}(P)$.

DEFINITION *(vektorfelt). Ved et vektorfelt $\bar{\mathbf{v}}$ i E forstås en funktion, som til ethvert punkt P i E knytter en vektor* $\bar{\mathbf{v}}(P)$.

Det bemærkes, at skalarfelt og vektorfelt er defineret **uden** indførelse af koordinatsystem. Vi vil dog i det følgende gå ud fra, at der er indført et sædvanligt retvinklet koordinatsystem. I så fald vil der til mængden E svare en mængde $S \subseteq \mathbb{R}^3$, hvor skalarfeltet vil bestemme en reel funktion u af tre variable, og vektorfeltet vil bestemme en vektorfunktion $\bar{\mathbf{v}}$, hvor

$$\bar{\mathbf{v}}(x,y,z) = \big(\mathrm{v}_1(x,y,z), \mathrm{v}_2(x,y,z), \mathrm{v}_3(x,y,z)\big), \qquad (x,y,z) \in S.$$

Vi vil i dette kapitel benytte betegnelse u for et skalarfelt, og lade $\bar{\mathbf{v}}$ betegne et vektorfelt med koordinatfunktionerne $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ og v_3. Felterne u og $\bar{\mathbf{v}}$ kaldes todimensionale (eller "plane"), hvis $S \subseteq \mathbb{R}^2$.

Skalarfelter anskueliggøres ofte ved deres **niveauflader**, dvs. ved flader, der går gennem punkter med samme "niveau", se figur 14.1. Er skalarfeltet eksempelvis et temperaturfelt, vil en niveauflade svarende til f.eks. 20°C være den flade, der går gennem alle de punkter, hvori temperaturen er 20 °C (isoterm).

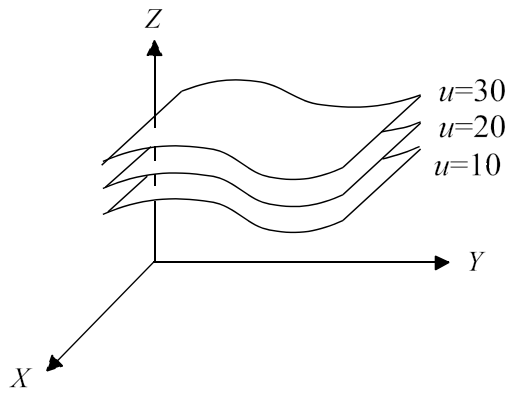


Fig. 14.1. *Niveauflader for skalarfelt.*

Vektorfelter $\bar{\mathbf{v}}$ anskueliggøres ofte ved **feltlinier**, dvs. kurver som i ethvert punkt P har en tangent i samme retning som $\bar{\mathbf{v}}(P)$, se figur 14.2.

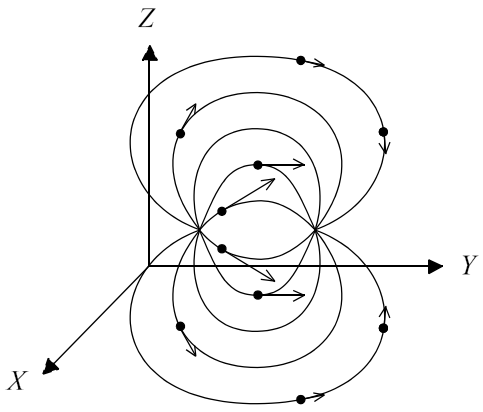


Fig.14.2. *Feltlinier for vektorfelt.*

Eksempel 14.1. Skalarfelt, vektorfelt.

Lad mængden E betegne hele rummet, lad O være et punkt i E, og lad E_1 være mængden E pånær punktet O. Lad endvidere et skalarfelt u i E_1 være givet ved, at der til ethvert punkt P forskellig fra O knyttes tallet $u(P) = \frac{1}{|OP|}$ (det elektriske potential omkring en punktformet ladning i O). Lad endelig et vektorfelt $\bar{\mathbf{v}}$ i E_1 være givet ved, at der til ethvert punkt P i E_1 er knyttet en vektor $\bar{\mathbf{v}}(P)$, hvis længde er omvendt proportional med kvadratet på punktet P's afstand fra O, og hvis retning peger væk fra punktet O, dvs. $|\bar{\mathbf{v}}(P)| = \frac{1}{|OP|^2}$ og $\bar{\mathbf{v}}(P) = k \cdot \overline{OP}$ $(k>0)$ (vektoren $\bar{\mathbf{v}}(P)$ kan f.eks. angive den kraft, hvormed en elektrisk ladning i P påvirkes af en elektrisk ladning i O ifølge Coulombs lov).

a) Indlæg et koordinatsystem med begyndelsespunkt i O og angiv funktionsudtrykkene for $u(x,y,z)$ og $\bar{\mathbf{v}}(x,y,z)$.

b) Beskriv niveaufladerne for u og feltlinierne for $\bar{\mathbf{v}}$.

LØSNING:

a) Lad P have koordinaterne (x,y,z).

$$u(P) = \frac{1}{|OP|} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}}, \qquad (x,y,z) \neq (0,0,0).$$

$$\bar{\mathbf{v}}(P) = k \cdot \overline{OP} \ \wedge \ |\bar{\mathbf{v}}(P)| = \frac{1}{|OP|^2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{|\bar{\mathbf{v}}(P)|}{|OP|} = \frac{1}{|OP|^3}$$

$$\bar{\mathbf{v}}(P) = \frac{1}{|OP|^3} \cdot \overline{OP} = \underline{\underline{\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} \cdot (x,y,z)}}, \qquad (x,y,z) \neq (0,0,0).$$

b) En niveauflade for u med niveauet c, er en kugle med centrum i O og radius $\frac{1}{c}$.

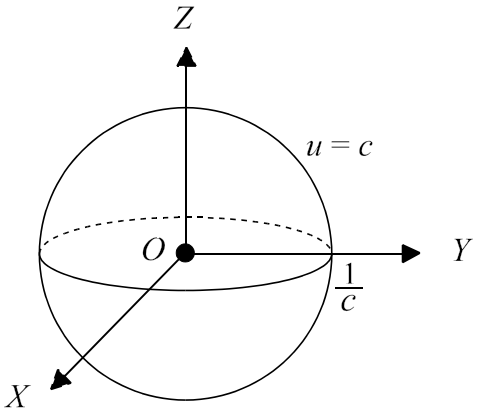


Fig. 14.3. *Niveaufladerne for u er kugler.*

Feltlinierne for $\bar{\mathbf{v}}$ er halvlinier, der udgår fra O, se figur 14.4.

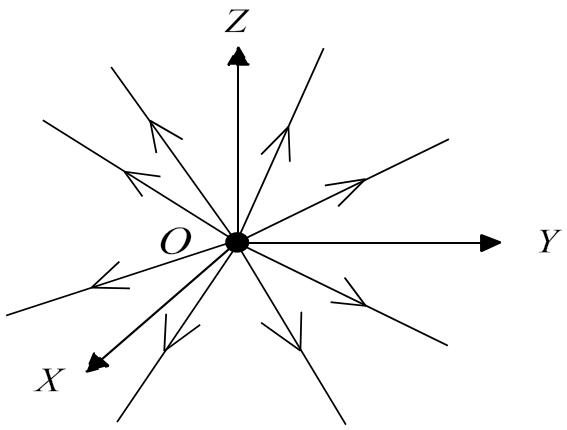


Fig. 14.4. *Feltlinierne for vektorfeltet er halvlinier gennem O.*

14.2 GRADIENT-, DIVERGENS- OG ROTATIONSFELTER

Lad der i et koordinatsystem være givet et skalarfelt $u(x,y,z)$ samt et vektorfelt $\bar{\mathbf{v}}(x,y,z)$ med koordinatfunktionerne $\mathrm{v}_1(x,y,z)$, $\mathrm{v}_2(x,y,z)$ og $\mathrm{v}_3(x,y,z)$, $(x,y,z) \in S$. Som det vil blive illustreret, har de følgende tre kombinationer af partielle afledede konkret fysisk betydning uafhængig af koordinatsystemet og er derfor igen felter. Vi har tidligere indført det til skalarfeltet u hørende gradientfelt:

$$\overline{\mathbf{grad}}\ u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right), \qquad (x,y,z) \in S.$$

DEFINITION *(divergensfelt). Ved det til vektorfeltet* $\bar{\mathbf{v}}$ *hørende divergensfelt forstås skalarfeltet* $\mathbf{div}\ \bar{\mathbf{v}}$ *bestemt ved* $\mathbf{div}\ \bar{\mathbf{v}} = \dfrac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial z}$. *Tallet* $\mathbf{div}\ \bar{\mathbf{v}}(P)$ *kaldes divergensen eller kildetætheden af* $\bar{\mathbf{v}}$ *i punktet* P.

Eksempelvis vil det udadrettede hastighedsfelt $\bar{\mathbf{v}} = (x,y,z)$ have $\mathbf{div}\ \bar{\mathbf{v}} = 1+1+1 = 3$, mens det indadrettede hastighedsfelt $\bar{\mathbf{v}} = (-x,-y,-z)$ vil have $\mathbf{div}\ \bar{\mathbf{v}} = -1-1-1 = -3$, svarende til at divergensen er positiv/negativ for en udad-/indadgående strøm (herom mere senere).

DEFINITION *(rotationsfelt). Ved det til vektorfeltet* $\bar{v}$ *hørende rotationsfelt forstås vektorfeltet* $\overline{\text{rot}}\,\bar{v}$ *bestemt ved* $\overline{\text{rot}}\,\bar{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)$. *Vektoren* $\overline{\text{rot}}\,\bar{v}(P)$ *kaldes rotationen af* $\bar{v}$ *i punktet P.*

Eksempelvis vil hastighedsfeltet $\bar{v} = (-y, x, 0)$ have $\overline{\text{rot}}\,\bar{v} = (0-0, 0-0, 1+1) = (0,0,2)$ svarende til, at $\frac{1}{2}\overline{\text{rot}}\,\bar{v}$ altid angiver den lokale drejningsvektor $\bar{\omega}$, dvs. en højreskruning om $\bar{\omega}$ med vinkelhastighed $|\bar{\omega}|$ (herom mere senere). Indfører man rent formelt "vektoren" $\bar{\nabla}$ (udtales "nabla" *) ved $\bar{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ (altså en operator) kan man opfatte

1) $\overline{\text{grad}}\,u$ som et produkt af "vektoren" ∇ og skalaren u:

$$\bar{\nabla} u = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

2) $\text{div}\,\bar{v}$ som et skalært produkt af $\bar{\nabla}$ og $\bar{v}$:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_1, v_2, v_3) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z},$$

3) $\overline{\text{rot}}\,\bar{v}$ som et krydsprodukt af $\bar{\nabla}$ og $\bar{v}$:

$$\bar{\nabla} \times \bar{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Eksempel 14.2. Gradient-divergens-rotation.

Lad skalarfeltet u og vektorfeltet $\bar{v}$ være de i eksempel 14.1 nævnte felter, dvs. $u = \frac{1}{r}$ og $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3) = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right)$, hvor $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (potential u og feltstyrke $\bar{v}$ omkring en elektrisk ladning).

Find $\overline{\text{grad}}\,u$, $\text{div}\,\bar{v}$ og $\overline{\text{rot}}\,\bar{v}$.

*) Ikke alle sætter vektorstreg (eller pil) over nabla, grad og rot.

LØSNING:

Idet $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ og $u = r^{-1}$, fås $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2x = \dfrac{x}{r}$ og

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = (-1)\cdot r^{-2}\cdot \dfrac{x}{r} = -\dfrac{x}{r^3}$, samt de analoge formler for $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ og $\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

Vi har derfor: $\overline{\mathbf{grad}}\, u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z} \right) = \underline{\underline{\left(-\dfrac{x}{r^3}, -\dfrac{y}{r^3}, -\dfrac{z}{r^3} \right)}} = -\bar{\mathrm{v}}$.

Idet $\mathrm{v}_1 = \dfrac{x}{r^3}$ fås: $\dfrac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x} = \dfrac{r^3\cdot 1 - x\cdot 3r^2\dfrac{x}{r}}{r^6} = \dfrac{r^2-3x^2}{r^5}$, og

$\dfrac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial y} = \dfrac{r^3\cdot 0 - x\cdot 3r^2\dfrac{y}{r}}{r^6} = \dfrac{-3xy}{r^5}$. Analogt kan $\dfrac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial y}$, $\dfrac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial z}$ osv. findes.

Vi har derfor:

$$\mathbf{div}\,\bar{\mathrm{v}} = \bar{\nabla}\cdot\bar{\mathrm{v}} = \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial z} = \frac{r^2-3x^2+r^2-3y^2+r^2-3z^2}{r^5}$$

$$= \frac{3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = \frac{3r^2-3r^2}{r^5} = \underline{\underline{0}},$$

$$\overline{\mathbf{rot}}\,\bar{\mathrm{v}} = \bar{\nabla}\times\bar{\mathrm{v}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{3zy}{r^5} - \left(-\dfrac{3yz}{r^5}\right) \\ -\dfrac{3xz}{r^5} - \left(-\dfrac{3zx}{r^5}\right) \\ -\dfrac{3yx}{r^5} - \left(-\dfrac{3xy}{r^5}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\bar{0}}}\ .$$

Gradientfeltets geometriske betydning. Gradientvektoren $\bar{\nabla}u(P)$ er som bekendt en normalvektor til niveaufladen for u gennem punktet P. Vektoren peger i den retning, hvor u vokser hurtigst, og længden $|\bar{\nabla}u(P)|$ angiver skalarfeltets ændring pr. længdeenhed (se figur 14.5a). Dette fremgår af beviset for sætning 8.8.

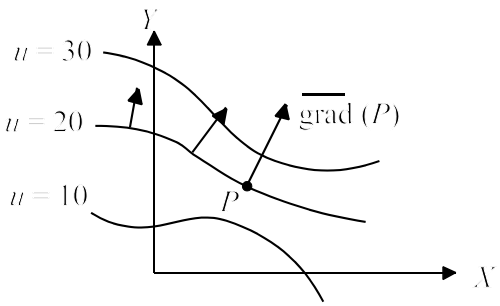


Fig. 14.5a. *Niveaukurver og gradientvektorer for funktion u af to variable.*

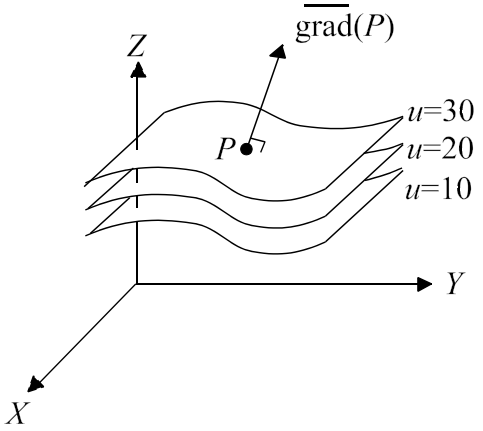


Fig. 14.5b. *Niveauflader og gradientvektorer for funktion u af tre variable.*

Divergensens fysiske betydning. En mere præcis forklaring vil blive omtalt senere. En forståelse af divergensen kan dog fås, hvis vi opfatter vektorfeltet $\bar{\mathbf{v}}$ som hastighedsfeltet for en gas eller en væske L med massetætheden ρ. Hvis ρ afhænger af såvel tid som sted, kan man, som det fremgår af det følgende, vise, at hvis $\mathbf{div}\left(\rho(P)\bar{\mathbf{v}}(P)\right)>0$ til et givet tidspunkt, så aftager massetætheden i punktet P (gassen ekspanderer), mens $\mathbf{div}\left(\rho(P)\bar{\mathbf{v}}(P)\right)<0$ viser, at massetætheden i punktet P vokser (gassen komprimeres). Er specielt ρ en konstant (usammentrykkelig væske), er $\mathbf{div}\,\bar{\mathbf{v}}=0$, hvilket løst sagt udtrykker, at der pr. tidsenhed strømmer samme mængde væske ind og ud af en rumfangsenhed.

Kontinuitetsligningen for gasser og væsker. Lad L, $\bar{\mathbf{v}}$ og ρ have samme betydning som ovenfor. For kortheds skyld sættes $\bar{w} = \rho\bar{\mathbf{v}} = w_1\bar{i} + w_2\bar{j} + w_3\bar{k}$.

Lad K være kassen $ABCD$-$EFGH$ bestemt ved, at A har koordinaterne (x_0, y_0, z_0), og at kanterne er parallelle med akserne og har længderne $\Delta x, \Delta y$ og Δz (se figur 14.6). Den del af L, der befinder sig indenfor K, vil ændre sig med tiden, og vi søger nu den masseændring, der sker indenfor et lille tidsrum Δt.

Først søges massen af den del af L, som i løbet af tiden Δt går gennem fladen $ABCD$ med arealet $\Delta x\Delta z$. Da $\mathbf{v}_1\bar{i}$ og $\mathbf{v}_3\bar{k}$ er parallelle med $ABCD$, kan kun $\mathbf{v}_2\bar{j}$ give et bidrag. Den søgte masse må da tilnærmelsesvis blive $w_2(y_0)\Delta x\,\Delta z\,\Delta t$, hvor $w_2(y_0) = \rho(y_0)\mathbf{v}_2(y_0)$, og y_0 angiver, at alle punkter i $ABCD$ har anden-koordinaten y_0. Massen, der i samme tidsrum går

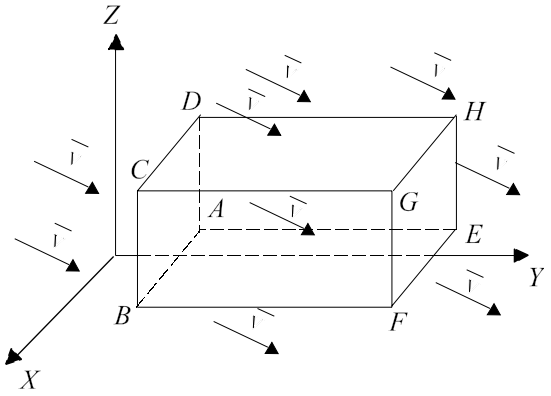


Fig. 14.6. *Hastighedsfelt $\bar{\mathbf{v}}$ for væske eller gas.*

gennem $EFGH$, må analogt være ca. $w(y_0+\Delta y)\Delta x\,\Delta z\,\Delta t.$

Sættes $\Delta w_2 = w_2(y_0+\Delta y)-w(y_0),$ bliver massetabet i y-aksens retning tilnærmelsesvis $\Delta w_2\Delta x\,\Delta z\,\Delta t = \frac{\Delta w_2}{\Delta y}\Delta V\Delta t,$ hvor $\Delta V=\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ er rumfanget af K. Analogt er massetabet i x-aksen og z-aksen's retning ca. $\frac{\Delta w_1}{\Delta x}\Delta V\Delta t$ og $\frac{\Delta w_3}{\Delta z}\Delta V\Delta t,$ hvor $\Delta w_1 = w_1(x_0+\Delta x)-w_1(x_0)$ og $\Delta w_3 = w_3(z_0+\Delta z)-w_3(z_0).$ Det samlede massetab er tilnærmelsesvis $\left(\frac{\Delta w_1}{\Delta x}+\frac{\Delta w_2}{\Delta y}+\frac{\Delta w_3}{\Delta z}\right)\Delta V\Delta t,$ eller pr. tids- og rumfangsenhed $\frac{\Delta w_1}{\Delta x}+\frac{\Delta w_2}{\Delta y}+\frac{\Delta w_3}{\Delta z}.$ Lader vi $\Delta x, \Delta y$ og Δz gå mod nul, ser vi, at $\bar{\nabla}\cdot\bar{w} = \bar{\nabla}\cdot(\rho\bar{v}) = \frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{\partial w_2}{\partial y}+\frac{\partial w_3}{\partial z}$ er et udtryk for **massetabet pr. tids- og rumfangsenhed.**

Går vi ud fra at gassen eller væsken L ikke "dannes" eller "tilintetgøres" (ingen "kilder" eller "dræn"), må massetabet skyldes forandringen i massetætheden $-\frac{\partial\rho}{\partial t},$ dvs. $\bar{\nabla}\cdot(\rho\bar{v}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$ eller $\underline{\underline{\bar{\nabla}\cdot(\rho\bar{v})+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0}}.$

Denne ligning kaldes **kontinuitetsligningen** for en sammentrykkelig gas. Hvis feltet er stationært, dvs. uafhængigt af tiden, er $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0,$ og vi har $\bar{\nabla}\cdot(\rho\bar{v}) = 0.$

Hvis L er usammentrykkelig, f.eks. en væske, er ρ konstant. Vi har da $\bar{\nabla}\cdot\bar{v} = 0,$ som kaldes **kontinuitetsligningen for en væske**, og løst udtrykker, at der pr. tidsenhed strømmer samme mængde væske ind og ud af en rumfangsenhed. For usammentrykkelige væsker kaldes $\bar{\nabla}\cdot\bar{v}(P)$ for vektorfeltet $\bar{v}$'s **kildetæthed** i P, idet $\bar{\nabla}\cdot\bar{v}(P)$ er et udtryk for den væskemasse, der pr. tidsenhed strømmer ud fra P. Hvis $\bar{\nabla}\cdot\bar{v}(P)>0$, siges vektorfeltet at have en **kilde** i P; hvis $\bar{\nabla}\cdot\bar{v}(P)<0$, siges vektorfeltet at have et **dræn** i P.

<u>Rotationsfeltets fysiske betydning.</u> Lad der være givet et stift legeme L, som roterer om en akse ℓ med vinkelhastigheden ω. Til ethvert punkt P i L vil der til et bestemt tidspunkt være knyttet en hastighedsvektor $\bar{v}(P)$. Feltlinierne er koncentriske cirkler med centrum på aksen.

Lad punktet P have koordinaterne (x,y,z) i det på figur 14.7 angivne koordinatsystem. Vektoren $\overline{P_\ell P}$ har da koordinaterne $(x,y,0)$. $\bar{v}(P)$ er en "tværvektor" til $\overline{P_\ell P}$ med længden $\omega\cdot|P_\ell P|$. Vi har derfor $\bar{v}(P)=\omega\,(-y,x,0).$

$$\overline{\text{rot}}\,\bar{v} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-y\omega\\ x\omega\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\omega\end{pmatrix}.$$

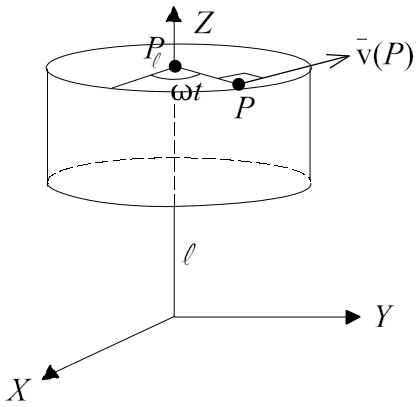


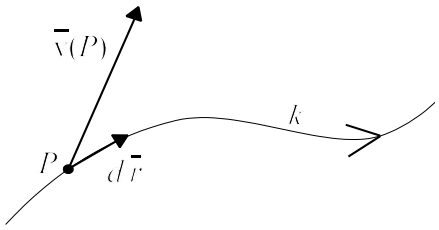
Fig. 14.7. *Rotation af legeme.*

Heraf ses, at rotationsvektoren i ethvert punkt er parallel med rotationsaksen ℓ for legemet, og dens længde er det dobbelte af vinkelhastigheden. Dette illustrerer, at hvis vi som tidligere betragter en væskestrømning og anbringer et lille skovlhjul i P, vil hjulet rotere, hvis $\overline{\text{rot}}\,\bar{v}(P)\neq\bar{0},$ og hurtigst hvis hjulets akse er parallel med $\overline{\text{rot}}\,\bar{v}(P).$

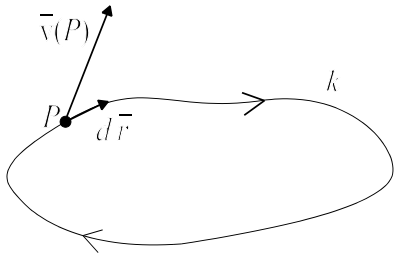
14.3 ET VEKTORFELTS STRØM

Et vektorfelts strøm langs en kurve

Lad $\bar{\mathrm{v}}$ være et vektorfelt i S, og lad k være en regulær kurve i S med parameterfremstillingen $\bar{r} = \bar{r}(t)$, $t \in [a;b]$. Ved vektorfeltets **strøm** langs kurven k forstås kurveintegralet $\int_k \bar{\mathrm{v}} \cdot d\bar{r}$. Hvis kurven k er sammensat af regulære kurver, defineres vektorfeltets strøm langs k naturligvis som summen af vektorfeltets strøm langs de enkelte stykker. Opfattes vektorfeltet som et kraftfelt, er strømmen det arbejde, som vektorfeltet udfører, når en partikel føres langs kurven.



Er kurven lukket og uden multiple punkter, kaldes strømmen også **vektorfeltets cirkulation langs kurven** og skrives kort $\oint_k \bar{\mathrm{v}} \cdot d\bar{r}$.



Nær sammenhæng mellem integraltyper. Greens sætning i planen. Er k randkurve for en mængde S i xy-planen, og gennemløbes k mod uret, så kan man vise Greens sætning i planen:

$$\oint_k \bar{\mathrm{v}} \cdot d\bar{r} = \iint_S \left(-\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x} \right) dA .$$

Formlen udtrykker en nær sammenhæng mellem planintegral og kurveintegral i planen. Senere i dette kapitel omtales, at der også er en nær sammenhæng mellem fladeintegraler og rumintegraler (Gauss's sætning), såvel som en nær sammenhæng mellem fladeintegraler og kurveintegraler i rummet (Stokes's sætning).

Et vektorfelts strøm gennem en flade

Lad F være en regulær flade med parameterfremstillingen $\bar{r} = \bar{r}(u,\mathrm{v})$, $(u,\mathrm{v}) \in D$. Hvis D er en lukket sammenhængende mængde og F ikke har dobbeltpunkter, dvs. $(u_1,\mathrm{v}_1) \neq (u_2,\mathrm{v}_2) \implies \bar{r}(u,\mathrm{v}_1) \neq \bar{r}(u_2,\mathrm{v}_2)$, så kaldes F for et **regulært fladestykke.** I det følgende antages, at F er et regulært fladestykke. Til ethvert punkt på F knytter vi en **enhedsnormalvektor** $\bar{n}$, som enten er

$$\bar{n} = \frac{\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial \mathrm{v}}}{\left| \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial \mathrm{v}} \right|} \text{ for alle } (u,\mathrm{v}) \in D, \text{ eller } \bar{n} = \frac{-\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial \mathrm{v}}}{\left| \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial \mathrm{v}} \right|} \text{ for alle } (u,\mathrm{v}) \in D .$$

Ved et vektorfelt $\bar{\mathbf{v}}$'s **strøm** (eller **flux**) gennem den ved $\bar{n}$ orienterede flade F, forstås fladeintegralet $\Phi = \iint_F \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{n}\, dF$.

For en flade, der er sammensat af regulære fladestykker, defineres vektorfeltets strøm gennem fladen naturligvis som summen af vektorfeltets strøm gennem de enkelte stykker. Af definitionen på fladeintegral i forrige kapitel følger da:

$$\Phi = \iint_F \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{n}\, dF = \iint_D \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\pm \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \mathrm{v}}}{\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \mathrm{v}} \right|} \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \mathrm{v}} \right| dA$$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi = \iint_F \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{n}\, dF = \iint_D \bar{\mathbf{v}} \cdot \left(\pm \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \mathrm{v}} \right) dA \, . \tag{14.1}$$

Er fladen F lukket, vil vi i afsnit 14.5 bevise en anden formel til beregning af strømmen $\bar{\mathbf{v}}$ gennem F.

Fysisk illustration af vektorfelts strøm gennem flade. Lad vektorfeltet $\bar{\mathbf{v}}$ være hastighedsfeltet for en væskestrømning, og lad ΔT være en lille del af fladen F svarende til et arealelement ΔF. Lad endvidere P være et punkt på ΔT, og $\bar{n}(P)$ være en enhedsnormalvektor til F i P. Rumfanget af den væske, der pr. tidsenhed strømmer gennem ΔT, vil tilnærmelsesvis være lig rumfanget af det på figur 14.8 tegnede parallelepipedum med kantlængden $|\bar{\mathbf{v}}(P)|$ og grundfladeareal ΔF.

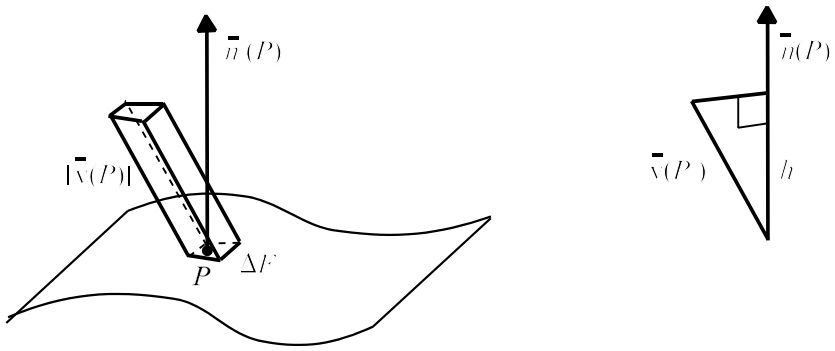


Fig. 14.8. *Strøm gennem flade.*

Idet $\bar{\mathbf{v}}(P) \cdot \bar{n}(P)$ er den med fortegn regnede længde af projektionen af $\bar{\mathbf{v}}(P)$ på fladenormalen i P, vil $\bar{\mathbf{v}}(P) \cdot \bar{n}(P)$ være højden, og $\bar{\mathbf{v}}(P) \cdot \bar{n}(P)\, \Delta F$ være rumfanget af det omtalte parallelepipedum. Ved summation over fladen F fås, at $\Phi = \iint_F \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{n}\, dF$ er det samlede volumen af den væske, der pr. tidsenhed strømmer gennem F (regnet med fortegn efter $\bar{n}$'s retning).

Eksempel 14.3. Beregning af strøm gennem flade.

En cylinder E med højden 5 og radius 4 er indlagt i et koordinatsystem som vist på figur 14.9. Lad fladen F_1 være den krumme overflade af E, mens planen F_2 er E's "låg" $(z=5)$ og planen F_3 er E's "bund" $(z=0)$. Lad vektorfeltet $\bar{\mathbf{v}}$ være bestemt ved $\bar{\mathbf{v}} = (y, x+y, 2z)$.

1) Find vektorfeltet $\bar{\mathbf{v}}$'s strøm "ud" gennem F_1.
2) Find vektorfeltet $\bar{\mathbf{v}}$'s strøm "ud" gennem F_2.
3) Find vektorfeltet $\bar{\mathbf{v}}$'s strøm "ud" gennem F_3.

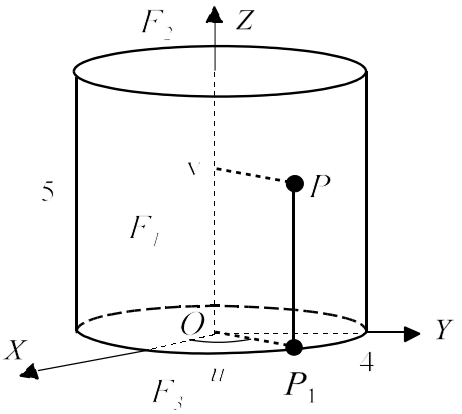


Fig. 14.9. *En cylinder.*

LØSNING:

1) Vi søger en parameterfremstilling $\bar{r}(u,\mathrm{v})$ for F_1. Lad $P=(x,y,z)$ være et vilkårligt punkt på F_1, og lad P_1 være P's projektion på xy-planen. Er u vinklen mellem $\overline{OP_1}$ og x-aksen (se figur 14.9) , har P_1 koordinaterne $(4\cos u, 4\sin u, 0)$ og P har koordinaterne $(4\cos u, 4\sin u, \mathrm{v})$. F_1 har derfor parameterfremstillingen $\bar{r}(u,\mathrm{v}) = (4\cos u, 4\sin u, \mathrm{v})$, $u \in [0; 2\pi]$, $\mathrm{v} \in [0;5]$.

Idet $\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial \mathrm{v}} = (4\cos u, 4\sin u, 0)$ er en "udadrettet" normal til F, fås af formel (14.1):

$$\iint_F \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{n}\, dF = \iint_D \begin{pmatrix} 4\sin u \\ 4\cos u + 4\sin u \\ 2\mathrm{v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4\cos u \\ 4\sin u \\ 0 \end{pmatrix} dA$$

$$= \int_0^{2\pi} du \int_0^5 \left(16\cos u \cdot \sin u + 16\cos u \cdot \sin u + 16\sin^2 u\right) d\mathrm{v}$$

$$= 5\int_0^{2\pi} \left(32\cos u \cdot \sin u + 16\sin^2 u\right) du$$

$$= 5\left[\frac{32}{2}\cos^2 u + 16\left(\frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4}\right)\right]_0^{2\pi} = 5\left[\frac{32}{2} + 16(\pi - 0) - \frac{32}{2} - 16\cdot 0\right] = \underline{\underline{80\pi}}.$$

2) Da F_2 har ligningen $z=5$, er $\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= (0,0,1)$ en udadrettet normal til F_2. Vi har nu

$$\iint_{F_2} \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{n}\, dF = \iint_{S_{xy}} \begin{pmatrix} z \\ xy \\ 2\cdot 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dA = \iint_{S_{xy}} 10\, dA$$

$$= 10 \cdot \mathrm{Areal}(S_{xy}) = 10 \cdot \pi \cdot 4^2 = \underline{\underline{160\pi}},$$

hvor S_{xy} er fladens projektion på xy-planen.

3) Da F_3 har ligningen $z = 0$, er $\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= (0,0,1)$ en indadrettet normal til F_3. Vi har nu

$$\iint_{F_3} \bar{v} \cdot \bar{n}\, dF = \iint_{S_{xy}} \begin{pmatrix} z \\ xy \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dA = \iint_{S_{xy}} 0\, dA = \underline{\underline{0}}.$$

Eksempel 14.4. Beregning af strøm gennem flade.

En halvkugle E med radius R er indlagt i et koordinatsystem som vist på figur 14.10. Lad fladen F_1 være den krumme overflade af E, mens planen F_2 er E's "bund" $(z = 0)$. Lad vektorfeltet $\bar{v}$ være bestemt ved $\bar{v} = (x - y, x, z)$.

1) Find vektorfeltet $\bar{v}$'s strøm "ud" gennem F_1.

2) Find vektorfeltet $\bar{v}$'s strøm "ud" gennem F_2.

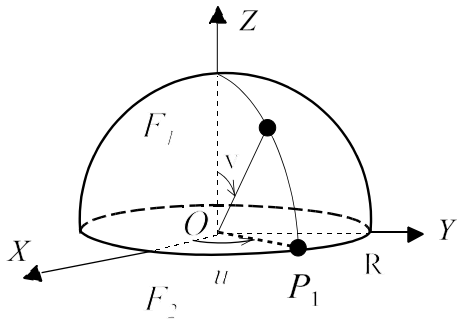


Fig. 14.10. *En halvkugle.*

LØSNING:

1) Halvkuglefladen F_1 har parameterfremstillingen

$$\bar{r}(u,v) = (R\sin v \cdot \cos u, R\sin v \cdot \sin u, R\cos v), \quad u \in [0; 2\pi], \quad v \in [0; \tfrac{\pi}{2}].$$

Idet $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -R\sin v \cdot \sin u \\ R\sin v \cdot \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R\cos v \cdot \cos u \\ R\cos v \cdot \sin u \\ -R\sin v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R^2 \sin^2 v \cdot \cos u \\ -R^2 \sin^2 v \cdot \sin u \\ -R^2 \sin v \cdot \cos v \end{pmatrix}$

er en "indadrettet" normal til F_1, fås af formel (14.1):

$$\iint_{F_1} \bar{v} \cdot \bar{n}\, dF = \iint_{D_1} \begin{pmatrix} R\sin v \cdot \cos u - R\sin v \cdot \sin u \\ R\sin v \cdot \cos u \\ R\cos v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R^2 \sin^2 v \cdot \cos u \\ R^2 \sin^2 v \cdot \sin u \\ R^2 \sin v \cdot \cos v \end{pmatrix} dA$$

$$= R^3 \int_0^{2\pi} du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 u \cdot \sin^3 v + \cos^2 v \cdot \sin v\right) dv$$

$$= R^3 \int_0^{2\pi} \left[\cos^2 u \cdot \left(-\cos v + \frac{\cos^3 v}{3} \right) - \frac{\cos^3 v}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} du$$

$$= R^3 \int_0^{2\pi} \left[\cos^2 u \cdot \left(-0 + \frac{0}{3} \right) - \frac{0}{3} - \left(\cos^2 u \cdot \left(-1 + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} \right) \right] du$$

$$= R^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3}\cos^2 u + \frac{1}{3} \right) du \quad = R^3 \left[\frac{2}{3}\left(\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} \right) + \frac{u}{3} \right]_0^{2\pi}$$

$$= R^3 \left[\frac{2}{3}(\pi + 0) + \frac{2\pi}{3} - \frac{2}{3}(0+0) - \frac{0}{3} \right] = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}R^3}}.$$

2) Da F_2 har ligningen $z = 0$, er $\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= (0,0,1)$ en indadrettet normal til F_2. Vi har nu

$$\iint_{F_2} \bar{\mathrm{v}} \cdot \bar{n}\, dF = \iint_{S_{xy}} \begin{pmatrix} x - y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dA = \iint_{S_{xy}} 0\, dA = \underline{\underline{0}},$$

hvor S_{xy} er fladens projektion på *xy*-planen.

14.4 GAUSS'S SÆTNING

Er vektorfeltet $\bar{\mathrm{v}}$ et hastighedsfelt for en væske, indså vi i afsnit 14.2, at divergensen af $\bar{\mathrm{v}}$ i et punkt P er et udtryk for den væskemængde, der pr. tidsenhed strømmer ud fra P. Er F en lukket flade, som begrænser en lukket punktmængde S, er det derfor rimeligt at antage, at "en sum" af divergenserne fra ethvert punkt P i S, dvs. rumintegralet $\iiint_S \operatorname{div} \bar{\mathrm{v}}\, dV$ er et udtryk for strømmen ud gennem F. Dette fremgår da også af følgende sætning:

SÆTNING 14.1 *(Gauss's sætning). Lad F være en lukket flade uden multiple punkter, som begrænser en lukket punktmængde S, og lad $\bar{\mathrm{v}}$ være et vektorfelt i S.*

Da er
$$\oiint_F \bar{\mathrm{v}} \cdot \bar{n}\, dF = \iiint_S \operatorname{div} \bar{\mathrm{v}}\, dV, \tag{14.2}$$

hvor venstre side betegner strømmen ud gennem fladen F, mens højre side er rumintegralet af divergensen af $\bar{\mathrm{v}}$.

Ringen om integraltegnet betegner, at der integreres over en lukket flade.

Bevisskitse. Idet vi sætter $\bar{n} = (a,b,c)$ og $\bar{\mathrm{v}} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$, går formlen (14.2) over i

$$\iint_F (a\mathrm{v}_1 + b\mathrm{v}_2 + c\mathrm{v}_3)\, dF = \iiint_S \left(\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial z} \right) dV.$$

Kan man nu vise, at
$$\iint_F c\mathrm{v}_3\, dF = \iiint_S \frac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial z}\, dV, \tag{14.3}$$

fås den søgte formel umiddelbart ved bogstavombytning i (14.3) og addition. For at vise (14.3), betragter vi først en punktmængde S af typen $S = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D \wedge f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\}$, hvor D er en lukket punktmængde i xy-planen. Da består F af fladestykkerne $F_1\colon z = f_1(x,y)$ og $F_2\colon z = f_2(x,y)$, **hvor (x,y) tilhører D**, samt af cylinderfladen C, der "forbinder" de to fladestykker (se figur 14.11).

For cylinderfladen er $\bar{n} = (a,b,c)$ vinkelret på z-aksen, så $c = 0$, og følgelig giver cylinderfladen intet bidrag til fladeintegralet $\iint_F c\mathrm{v}_3\, dF$. Idet en normalvektor til F_2 er

$$\bar{d}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}, -\frac{\partial f_2}{\partial y}, 1 \right),$$

og enhedsnormalvektoren $\bar{n}$ skal være rettet udad fra S, må $\bar{n}$'s trediekoordinat være $\frac{1}{|\bar{d}_2|}$. Analogt ses, at for F_1 er $\bar{n}$'s trediekoordinat $c = -\frac{1}{|\bar{d}_1|}$, hvor $\bar{d}_1 = \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x}, -\frac{\partial f_1}{\partial y}, 1 \right)$. Vi har derfor

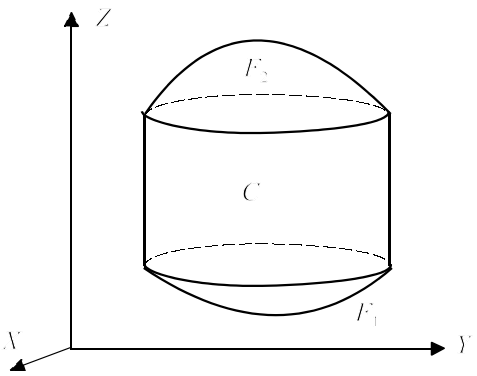


Fig. 14.11. *En lukket flade.*

$$\iint_F c\mathrm{v}_3\, dF = \iint_{F_2} \mathrm{v}_3 \frac{1}{|\bar{d}_2|}\, dF - \iint_{F_1} \mathrm{v}_3 \frac{1}{|\bar{d}_1|}\, dF, \tag{14.4}$$

som ifølge formel (14.1) kan omformes til planintegralerne

$$\iint_D \mathrm{v}\left(x,y,f_2(x,y)\right) \frac{1}{|d_2|} |d_2|\, dA - \iint_D \mathrm{v}\left(x,y,f_1(x,y)\right) \frac{1}{|d_1|} |d_1|\, dA,$$

dvs. $$\iint_F c\mathrm{v}\, dF = \iint_D \left(\mathrm{v}_3(x,y,f_2(x,y)) - \mathrm{v}_3(x,y,f_1(x,y))\right) dA .$$

Under benyttelse af sætningen om rumintegral fås nu

$$\iint_D \left(\mathrm{v}_3(x,y,f_2(x,y)) - \mathrm{v}_3(x,y,f_1(x,y))\right) dA = \iint_D dA \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial z}\, dz = \iiint_S \frac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial z}\, dV .$$

Vi har hermed vist sætningen for denne specielle type punktmængde, idet vi naturligvis er gået ud fra, at f_1 og f_2 er vilkårligt ofte differentiable funktioner.

Ved grænseovergang kan man vise, at resultatet også gælder i tilfælde, hvor tangentplanen i randpunkter af F_1 og F_2 er vinkelret på z-aksen $(c = 0)$. Ligeledes kan man vise, at enhver punktmængde S, der er begrænset af en lukket flade uden multiple punkter, kan opdeles i punktmængder af den her nævnte type og på det grundlag vise formlen.

Fysisk betydning af divergens. Vi har tidligere set, at hvis $\bar{\mathrm{v}}$ angiver hastighedsfeltet for en væske, vil Φ angive det med fortegn regnede volumen af væsken, der pr. tidsenhed strømmer ud fra det område S, der er begrænset af F. Af middelværdisætningen for rumintegraler følger

da $$\Phi = \iiint_S \operatorname{div} \bar{\mathrm{v}}\, dV = \operatorname{div} \bar{\mathrm{v}}(P) \cdot V(S) \iff \operatorname{div} \bar{\mathrm{v}}(P) = \frac{\Phi}{V(S)},$$ hvor $P \in S$ og $V(S)$ betegner volumenet af S. Heraf ses, at divergensen af $\bar{\mathrm{v}}$ i et punkt P kan fortolkes som strømmen ud gennem en "differentiel" punktmængde dS, som indeholder P, divideret med rumfanget af dS. Er væsken **usammentrykkelig** (dvs. lige store rumfang indeholder samme væskemængde), og nydannes der ikke væske i S, må $\operatorname{div} \bar{\mathrm{v}} = 0$.

Eksempel 14.5. Beregning af strøm gennem lukket flade.

Lad E være den cylinder, som er beskrevet i eksempel 14.3, og lad F være E's overflade. Lad igen $\bar{\mathbf{v}}$ være vektorfeltet $\bar{\mathbf{v}}(x,y,z) = (y, x+y, 2z)$.
Find $\bar{\mathbf{v}}$'s strøm ud gennem F.

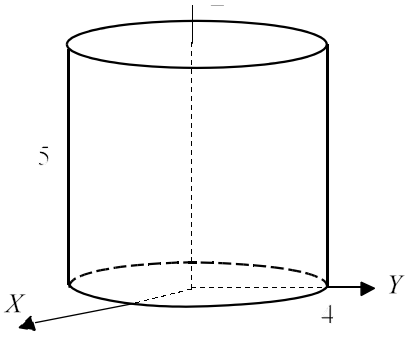


Fig. 14.12. *En cylinder.*

LØSNING:
Vektorfeltets strøm ud gennem F er

$$\Phi = \iint_F \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{n}\, dF = \iiint_E \operatorname{div}\bar{\mathbf{v}}\, dV = \iiint_E (0+1+2)\, dV$$
$$= 3\iiint_E dV = 3 \cdot \text{Volumen}(E) = 3 \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 5 = \underline{\underline{240\pi}}.$$

Dette er netop summen af resultaterne i eksempel 14.3.

Eksempel 14.6. Beregning af strøm gennem lukket flade.

Lad E være den halvkugle, som er beskrevet i eksempel 14.4, og lad F være E's overflade. Lad igen $\bar{\mathbf{v}}$ være vektorfeltet $\bar{\mathbf{v}}(x,y,z) = (x-y, x, z)$.
Find $\bar{\mathbf{v}}$'s strøm ud gennem F.

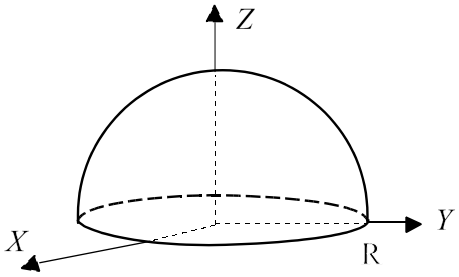


Fig. 14.13. *En halvkugle.*

LØSNING:
Vektorfeltets strøm ud gennem F er

$$\Phi = \iint_F \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{n}\, dF = \iiint_E \operatorname{div}\bar{\mathbf{v}}\, dV = \iiint_E (1+0+1)\, dV$$
$$= 2\iiint_E dV = 2 \cdot \text{Volumen}(E) = 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{4\pi}{3}R^3 = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}R^3}}.$$

Dette er netop summen af resultaterne i eksempel 14.4.

14.5 STOKES'S SÆTNING

Vi har tidligere defineret både et vektorfelts rotationsfelt $\nabla \times \mathbf{v}$ og et vektorfelts cirkulation $\oint_k \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ langs en lukket kurve k. Vi vil i dette afsnit uden bevis nævne en sætning, som angiver en sammenhæng mellem disse to begreber, og bl.a. derved få en mere fysisk forståelse af begrebet rotation i et punkt.

SÆTNING 14.2 *(Stokes's sætning). Lad* $\mathbf{v}$ *være et vektorfelt, og lad* F *være et i* S *indeholdt fladestykke, med den positive enhedsnormalvektor* $\mathbf{n}$. *Lad endvidere* F*'s randkurve* k *have en parameterfremstilling* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),\ t \in I$, *således at* k *og* $\mathbf{n}$ *danner en "højreskrue" (se figur 14.14). Vi har da, at cirkulationen af* $\mathbf{v}$ *langs* k *er lig med strømmen gennem* F *af* $\operatorname{rot}\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$, *altså*

$$\oint_k \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_F \operatorname{rot}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dF .$$

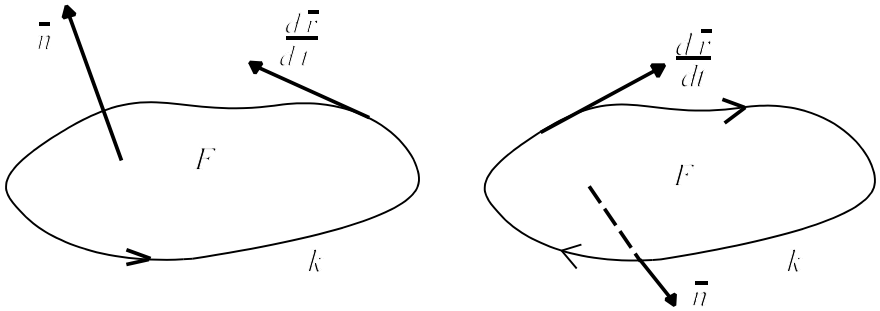


Fig. 14.14. *Kurven k og normalvektoren* $\mathbf{n}$ *danner en højreskrue.*

Som det fremgår af sætningen, kan cirkulationen langs en givet lukket kurve k beregnes som strømmen af rotationsfeltet gennem en **vilkårlig** flade, der har k som rand. Ved at vælge en passende flade kan beregningen af cirkulationen i visse tilfælde blive meget simpel (jfr. eksempel 14.7). En anden anvendelse af sætningen, hvor cirkulationen let beregnes direkte, ses i eksempel 14.8.

Fysisk betydning af rotation. Man kan vise, at der analogt med middelværdisætninger for andre integraler gælder følgende middelværdisætning for fladeintegraler $\iint_F f(x,y,z)\,dF = f(P)\ a(F)$, hvor P er et punkt på fladen F, og $a(F)$ er arealet af F. Af denne sætning samt Stokes's sætning følger nu $\operatorname{rot}\mathbf{v}(P) \cdot \mathbf{n}(P) = \dfrac{1}{a(F)} \iint_F \operatorname{rot}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dF = \dfrac{1}{a(F)} \oint_k \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$. Lader vi nu fladen F trække sig sammen om et punkt $P_0 \in F$, vil $\operatorname{rot}\mathbf{v}(P) \cdot \mathbf{n}(P)$ konvergere mod $\operatorname{rot}\mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0)$, som jo angiver projektionen af $\operatorname{rot}\mathbf{v}(P_0)$ på fladenormalen. Er F specielt en cirkelskive vinkelret på $\mathbf{n}$ med centrum i P_0 og radius r, finder vi

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) = \lim_{r \to 0} \frac{\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}}{\pi r^2} .$$

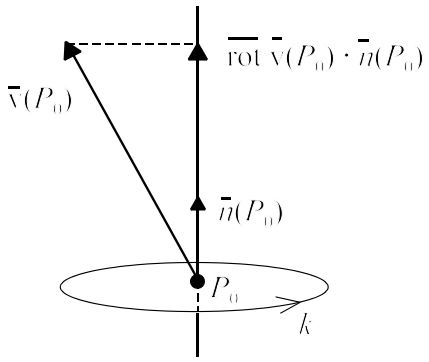


Fig. 14.15. *Rotationens størrelse angiver cirkulation pr arealenhed.*

Eksempel 14.7. Anvendelse af Stokes's sætning.

Lad vektorfeltet $\bar{\mathbf{v}}$ være givet ved $\bar{\mathbf{v}}(x,y,z) = (2x^2-y,\, 4y^3z,\, y^4+z^2)$ og lad kurven k være cirklen med parameterfremstillingen $(x,y,z) = (2\cos t, 2\sin t, 0)$, $t\in[0;2\pi]$.

Find cirkulationen langs k.

LØSNING:

Idet $\overline{\mathbf{rot}}\,\bar{\mathbf{v}} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(2x^2-y,\, 4y^3z,\, y^4+z^2\right) = (0,0,1)$, kan vi beregne rotationsfeltets strøm gennem cirkelskiven $C = \left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le 4 \wedge z=0\right\}$.

Af Stokes's sætning fås

$$\oint_k \bar{\mathbf{v}}\cdot d\bar{r} = \iint_C (0,0,1)\cdot\bar{n}\,dF = \iint_C (0,0,1)\cdot(0,0,1)\,dF = \iint_C dF = \underline{\underline{4\pi}}\ .$$

(Forsøger man at udregne cirkulationen af $\bar{\mathbf{v}}$ direkte uden brug af Stokes's sætning, ses beregningsardbejdet at blive væsentlig større).

Eksempel 14.8. Magnetfelt i spole.

For problemer vedrørende magnetostatik i vacuum gælder $\overline{\text{rot}}\,\bar{B} = \mu_0 \bar{i}$ (MKSA-enheder), hvor $\bar{B}$ betegner det magnetiske felt, $\bar{i}$ betegner den elektriske strømtæthed og μ_0 betegner en konstant (vacuum-permeabiliteten).

(Den nævnte ligning er en af de 4 såkaldte Maxwell-ligninger). Stokes's sætning kan sammen med ligningen $\overline{\text{rot}}\,\bar{B} = \mu_0 \bar{i}$ direkte give svaret på mange konkrete problemstillinger i magnetostatikken.

Eksempelvis vil vi finde en formel for magnetfeltet i og omkring en elektrisk spole. Vi betragter en torusformet spole (se figur 14.16) med et stort antal vindinger N, hvorigennem der løber en strøm af størrelsen I.

For det magnetiske felt $\bar{B}$ kan man vise, at det med god tilnærmelse gælder, at feltlinierne er cirkler beliggende i planer vinkelret på torusaksen gennem 0 og med centre på torusaksen.

Først betragtes en feltlinie k, der forløber inde i spolen, og som har radius R (se figur 14.16). Vi beregner cirkulation af $\bar{B}$ langs feltlinien k:

$\oint_k \bar{B}\cdot d\bar{r} = |\bar{B}|\cdot 2\pi R$. Størrelsen $\oint_k \bar{B}\cdot d\bar{r}$ kan også findes ved hjælp af Stokes's sætning

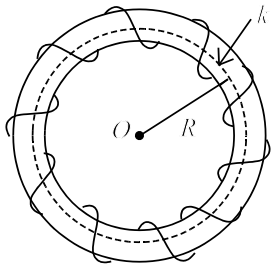


Fig. 14.16. *Spole*.

$$\oint_k \bar{B}\cdot d\bar{r} = \iint_F \overline{\text{rot}}\,\bar{B}\cdot \bar{n}\,dF = \iint_F \mu_0 \bar{i}\cdot\bar{n}\,dF = \mu_0 \iint |\bar{i}|\,dF = \mu_0 NI.$$ Altså $|\bar{B}| = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}$.

OPGAVER

Opgave 14.1 (skalarfelt, grad)

Lad skalarfeltet u være givet ved $u(x,y,z) = x^2+4y^2+16z^2$.

1) Find $u(P)$ og $u(Q)$, hvor $P=(0,2,0)$ og $Q=\left(2,1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2) Beskriv niveaufladen $\{(x,y,z) \mid u(x,y,z)=16\}$.

3) Find det til u hørende gradientfelt.

4) Angiv en normalvektor til ovennævnte niveauflade i hvert af punkterne P og Q.

Opgave 14.2

Lad O være et fast punkt i rummet E og lad E_1 være rummet E pånær O.
Et vektorfelt i E_1 fremkommer ved, at der til ethvert punkt $P \neq 0$ knyttes en vektor $\bar{v}(P) = \frac{\overline{PO}}{|\overline{OP}|}$.

Angiv i et passende koordinatsystem den vektorfunktion, der bestemmes ved vektorfeltet $\bar{v}$, og find divergensfeltet og rotationsfeltet for $\bar{v}$.

Opgave 14.3 (vektorfelt, div, rot)
Lad vektorfeltet $\bar{v}$ være givet ved $\bar{v}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x,y,z), \quad (x,y,z) \neq (0,0,0)$

1) Beskriv vektorfeltet.

2) Angiv $\operatorname{div}\bar{v}$ og $\overline{\operatorname{rot}}\,\bar{v}$.

3) Angiv feltlinierne for feltet $\bar{v}$.

Opgave 14.4 (∇ -vektor)

Lad vektorfeltet $\bar{v}$ og skalarfeltet u være givet ved $\bar{v}(x,y,z) = (2x^2yz, -3xz^3, xy^2z)$ og $u(x,y,z) = 2y^2 - xz$. Find i punktet $P=(-1,1,1)$:

1) $\bar{\nabla}\cdot\bar{v}$, 2) $\bar{v}\cdot(\bar{\nabla}u)$, 3) $\bar{\nabla}\cdot(u\bar{v})$, 4) $\operatorname{div}(\overline{\operatorname{grad}}\,u)$, 5) $\bar{\nabla}(\bar{\nabla}u\cdot\bar{\nabla}u)$.

Opgave 14.5 (∇ -vektor)

Lad vektorfeltet $\bar{v}$ og skalarfeltet u være givet ved $\bar{v}(x,y,z) = (2x^2z, -yz, 3xyz)$ og $u = xy^2z$. Find i punktet $P=(1,1,-1)$:

1) $\bar{\nabla}\times\bar{v}$, 2) $\overline{\operatorname{rot}}(u\bar{v})$, 3) $\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\times\bar{v})$, 4) $\bar{\nabla}(\bar{v}\cdot\overline{\operatorname{rot}}\,\bar{v})$, 5) $\overline{\operatorname{rot}}(\overline{\operatorname{grad}}u)$.

Opgave 14.6 *(cirkulation)*

Beregn cirkulationen af vektorfeltet $\bar{\mathbf{v}}$ *langs cirklen* k *bestemt ved parameterfremstillingen* $(x,y,z) = (2\cos t, 2\sin t, 2)$, $t \in [0;2\pi]$, *når* $\bar{\mathbf{v}}$ *er bestemt ved*

1) $\bar{\mathbf{v}}(x,y,z) = (-1,2,3)$, *2)* $\bar{\mathbf{v}}(x,y,z) = (x,y,z)$, *3)* $\bar{\mathbf{v}}(x,y,z) = (-y,x,z)$.

Opgave 14.7a *(cirkulation)*

Givet vektorfeltet $\bar{\mathbf{v}}(x,y,z) = (x^3+y,\ 3y^4+x,\ z^{-5}+x+y)$.

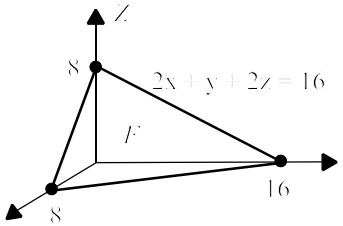
Find cirkulationen af $\bar{\mathbf{v}}$ *langs hver af de følgende kurver:*

1) $\mathbf{k}_1$: $x^2+y^2=9 \ \wedge \ z=2$,

2) $\mathbf{k}_2$: $x^2+y^2=9 \ \wedge \ x+y+4z=8$,

3) $\mathbf{k}_3$: $x^2+y^2=9 \ \wedge \ z=x^2$.

Opgave 14.7b *(strøm)*



Givet fladen

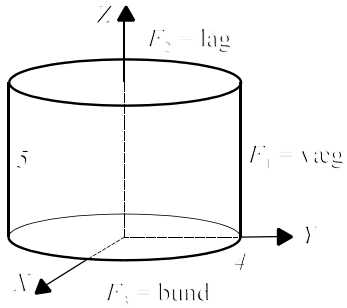
F: $\{(x,y,z) \mid 2x+y+2z=16 \ \wedge \ x\geq 0 \ \wedge \ y\geq 0 \ \wedge \ z\geq 0\}$.

Lad $\bar{\mathbf{v}} = (\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3)$ *være givet ved*

$\bar{\mathbf{v}}(x,y,z) = (x,-2,-x+1)$.

Find $\iint\limits_F \bar{\mathbf{v}}\cdot\bar{n}\ dF$.

Opgave 14.7c *(strøm)*



Givet fladerne F_1: $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2=16 \ \wedge \ 0\leq z\leq 5\}$,

F_2: $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2\leq 16 \ \wedge \ z=5\}$ *og*

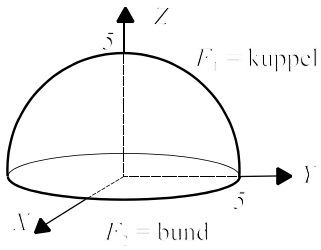
F_3: $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2\leq 16 \ \wedge \ z=0\}$.

Lad $\bar{\mathbf{v}}(x,y,z) = (x,y,z^2)$.

Find $\iint\limits_{F_1} \bar{\mathbf{v}}\cdot\bar{n}\ dF$, $\iint\limits_{F_2} \bar{\mathbf{v}}\cdot\bar{n}\ dF$ *og* $\iint\limits_{F_3} \bar{\mathbf{v}}\cdot\bar{n}\ dF$.

$\quad$ "udad" $\quad$ "opad" $\quad$ "nedad"

Opgave 14.7d *(strøm)*



Givet fladerne F_1: $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=25 \ \wedge \ z\geq 0\}$

og $\mathbf{F}_2$: $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2\leq 25 \ \wedge \ z=0\}$.

Lad $\bar{\mathbf{v}}(x,y,z) = (x,y,z)$.

Find $\iint\limits_{F_1} \bar{\mathbf{v}}\cdot\bar{n}\ dF$ *og* $\iint\limits_{F_2} \bar{\mathbf{v}}\cdot\bar{n}\ dF$.

$\quad$ "udad" $\quad$ "nedad"

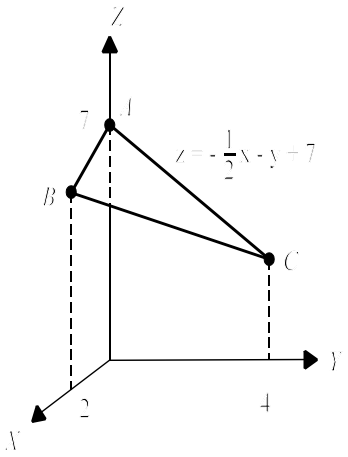
Opgave 14.7 *(strøm, 27 point)*

Lad der være givet et vektorfelt $\overline{\mathbf{v}}$ *ved*

$$\overline{\mathbf{v}}(x,y,z) = (2xz, x^2, y).$$

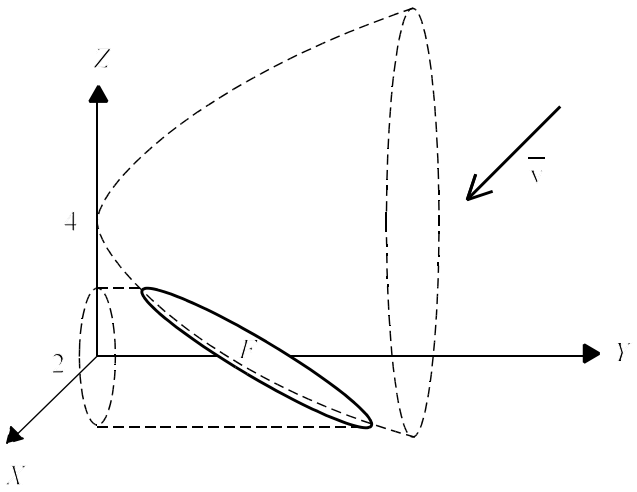
1) Find $\operatorname{div}\overline{\mathbf{v}}$ *og* $\overline{\operatorname{rot}}\,\overline{\mathbf{v}}$.

2) Punkterne $A = (0,0,7)$, $B = (2,0,6)$ *og* $C = (0,4,3)$ *er vinkelspidser i en trekant ABC, der ligger i planen med ligningen* $z = -\frac{1}{2}x - y + 7$. *Find vektorfeltet* $\overline{\mathbf{v}}$*'s strøm gennem trekant ABC, idet strømmen regnes positiv "op" gennem trekanten (omtrent i z-aksens retning).*



Opgave 14.8 *(strøm, 15 point)*

Et fladestykke F er givet ved $F = \left\{(x,y,z) \mid y = x^2 + \frac{1}{4}(z-4)^2 \wedge x^2 + z^2 \le 4\right\}$ *(se figuren).*



F er den del af paraboloiden $y = x^2 + \frac{1}{4}(z-4)^2$, *som ligger inden for cylinderen* $x^2 + z^2 \le 4$.

Alle mål er i meter.

Vand strømmer gennem fladen F med en konstant hastighed $\overline{\mathbf{v}} = \left(\frac{3}{2}, -2, 0\right)\frac{m}{sek}$, *og dets massefylde er* $1000\,\frac{kg}{m^3}$. *Find massen af det vand, der pr. sekund strømmer gennem F.*

Opgave 14.9 *(strøm, 20 point)*

Lad et elektrisk felt $\overline{\mathbf{E}}$ *være givet ved*

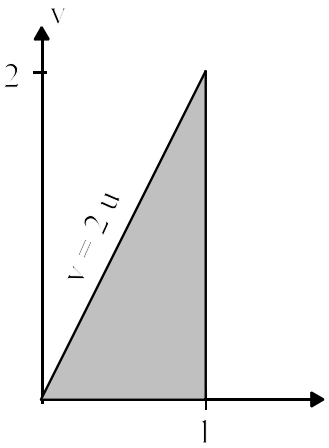
$\overline{\mathbf{E}} = (x + yz, z - y, z + y)$ *og lad en flade F være givet ved*

$F: (x,y,z) = \left(2u^3 - 2v^3, u^2 - v^2, u^2 + v^2\right)$,

hvor (u,v) *tilhører det skraverede område på figuren.*

1) Find $\overline{\operatorname{rot}}\,\overline{E}$.

2) Find den numeriske værdi af $\overline{E}$*'s strøm gennem fladen F.*

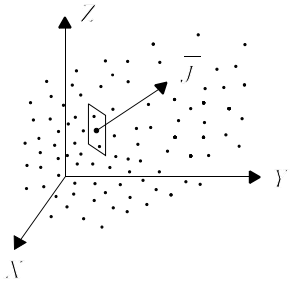


Opgave 14.10 *(strøm, 20 point)*

Lad koncentrationen $c = c(x,y,z)$ *af et stof* A *i en væske være givet ved*

$c = x^2 - y^2 + xz + 100$ *(dimensionsløse enheder).*

Praktisk anvendelse *(kan overspringes). Over korte afstande sker transport effektivt ved diffusion. Vektoren* $\bar{J} = -D \cdot \overline{\text{grad}}\, c$ *peger i nettotransportens retning, og størrelsen angiver den mængde af stoffet A, der pr. tidsenhed passerer en arealenhed vinkelret på transportretningen. Diffusionskoefficienten* D *sættes i det følgende konstant lig med 1.*



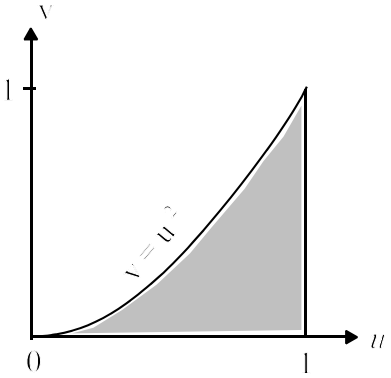
1) Find $\bar{J} = -\overline{\text{grad}}\, c$.

2) Find derpå $\text{div}\, \bar{J}$ *og* $\overline{\text{rot}}\, \bar{J}$.

Lad en flade F *være givet ved*

$$F:\ (x,y,z) = \left(u^2,\ \frac{1}{2}v^2,\ -uv\right),$$

hvor (u,v) *tilhører det skraverede område på figuren.*

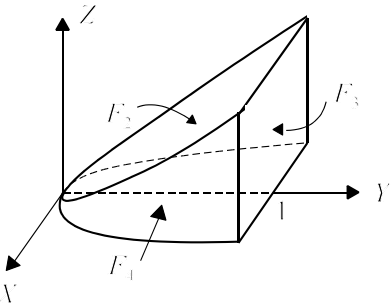


3) Find arealet af F.

4) Find den numeriske værdi af strømmen af $\bar{J}$ *gennem* F *(= den mængde af stoffet A, som netto transporteres gennem* F *pr. tidsenhed).*

Opgave 14.11 *(fladeareal, strøm, 25 point)*

Legemet S på figuren er begrænset af 4 flader: bunden F_1 *der ligger i planen med ligningen z=0, låget* F_2 *der ligger i planen med ligningen z=y, sidefladen* F_3 *der ligger i planen med ligningen y=1, og en krum sideflade* F_4 *der ligger på en cylinderflade med ligningen* $y=x^2$. *Alle mål er i meter.*



1) Låget F_2 *har en homogen massetæthed* $\rho = 100\ kg/m^2$ *og tyngdepunktet* $T = (x_T, y_T, z_T)$.
Find tyngdepunktets koordinater, idet det oplyses, at

$$y_T = \frac{\iint_{F_2} y \cdot \rho\, dF}{\iint_{F_2} \rho\, dF}.$$

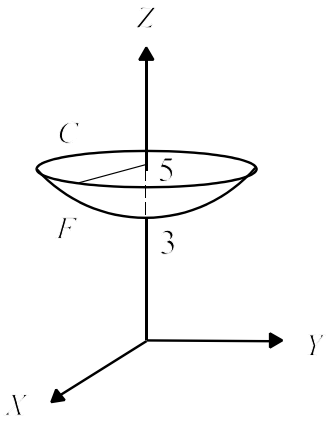
2) Vand strømmer gennem den ***krumme*** *sideflade* F_4 *med en konstant hastighed* $\bar{v} = (0,-2,-2)$ *m/sek. Vandets massefylde er 1000 kg/m³. Find massen af det vand, der pr. sekund netto strømmer gennem* F_4.

Opgave 14.12 *(strøm)*

Beregn strømmen af vektorfeltet $\bar{\mathbf{v}}$ *bestemt ved* $\bar{\mathbf{v}}(x,y,z) = (x,y,z)$ *gennem den del* F *af en omdrejningsparaboloide, der er bestemt ved ligningen* $z = 4 - (x^2+y^2)$, $(x,y) \in D$, *hvor* $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 4\}$. *Strømmen regnes positiv opad.*

Opgave 14.13 *(flade, strøm, 25 point)*

En skålformet flade F *har ligningen* $z^2 = 9 + x^2 + y^2$, $3 \le z \le 5$ *(se figuren).*



1) En parameterfremstilling for fladen F *er*

$\bar{\mathbf{r}}(u,v) = \left(3u\cos v, 3u\sin v, 3\sqrt{1+u^2}\right)$, $(u,v) \in D$

(kræves ikke vist).

Find en mængde D, *så der til ethvert punkt i* D *svarer netop ét punkt på fladen* F.

Et vektorfelt $\bar{\mathbf{v}}$ *er bestemt ved*

$$\bar{\mathbf{v}}(x,y,z) = \left(-y,\, x,\, \frac{1}{4}x^2 z\right).$$

2) Find strømmen af $\bar{\mathbf{v}}$ *gennem fladen* F *enten eksakt eller med mindst tre betydende cifre.*

Enhedsnormalvektorerne på F *skal vælges, så de peger "ind" i skålen.*

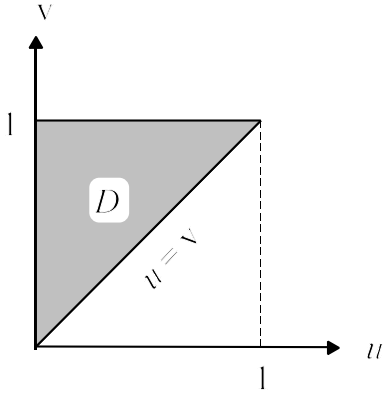
3) Find strømmen af $\bar{\mathbf{v}}$ *gennem cirkelskiven* $C = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 16 \wedge z = 5\}$.

Enhedsnormalvektorerne på C *skal vælges, så de peger i* z*-aksens retning.*

Opgave 14.14 *(determinant, strøm, 25 point)*

1) Find arealet af fladen givet ved $z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 1 & -y \\ -1 & -2 & -2 & y \\ -x & x & 0 & -y^2 \end{vmatrix}$, $x^2+y^2 \le 1$.

2) Lad et magnetfelt $\overline{\mathbf{B}}$ *være givet ved* $\overline{\mathbf{B}} = (xy-z, x-y, y+z)$ *, og lad en flade F være givet ved* $\mathbf{F}: \overline{r} = (x,y,z) = (2u+\mathrm{v}, u-3\mathrm{v}, u+\mathrm{v})$, *hvor (u,v) tilhører det skraverede område D på figuren. Find strømmen af* $\overline{\mathrm{rot}}\,\overline{B}$ *gennem F.*



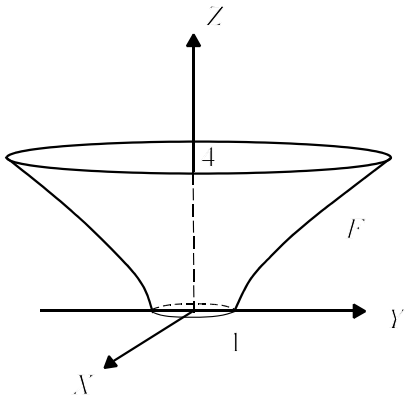
Opgave 14.15 *(strøm, 20 point)*

*Figuren viser en særligt krummet tragt F (**uden** bund og låg) givet ved ligningen*

$x^2+y^2-\frac{3}{2}z^2 = 1$, *hvor* $z \in [0;4]$.

Alle mål er i meter.

1) Lad P være det punkt på F, for hvilket $\mathrm{x} = 2$ *og* $y = \sqrt{3}$. *Angiv koordinaterne til den af F's to enhedsnormalvektorer i P, der peger mest "væk" fra z-aksen.*



Et vektorfelt $\overline{\mathrm{v}}$ *er bestemt ved* $\overline{\mathrm{v}}(x,y,z) = (x,y,-2z)$.

2) Beregn $\mathrm{div}\,\overline{\mathrm{v}}$ *og* $\overline{\mathrm{rot}}\,\overline{\mathrm{v}}$.

3) Find strømmen af $\overline{\mathrm{v}}$ *gennem F, idet strømmen regnes positiv "væk" fra z-aksen. (Denne strøm er varmetabet pr. sek. fra hele tragtens ydre overflade, når* $\overline{\mathrm{v}}$ *på stedet* (x,y,z) *angiver varmestrømningen målt i watt pr. arealenhed anbragt vinkelret på* $\overline{\mathrm{v}}$ *).*

Opgave 14.16 *(strøm, 20 point)*

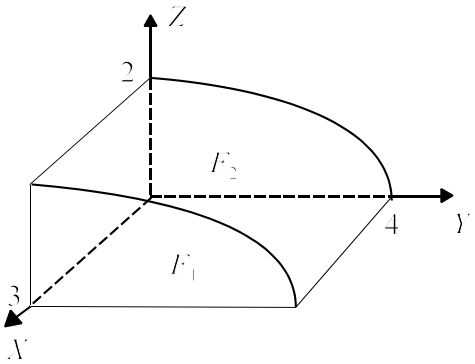
En beholder er begrænset af koordinatplanerne, planen $x = 3$ *og fladen* $z = \sqrt{4-y}$ *(se figuren). Lad* F_1 *være beholderens "ene" endeflade, med ligningen* $x = 3$, *og lad* F_2 *være det krumme "låg", med ligningen* $z = \sqrt{4-y}$.

Find strømmen af vektorfeltet $\overline{\mathbf{v}} = (y, z, x)$

1) ud gennem fladen F_1

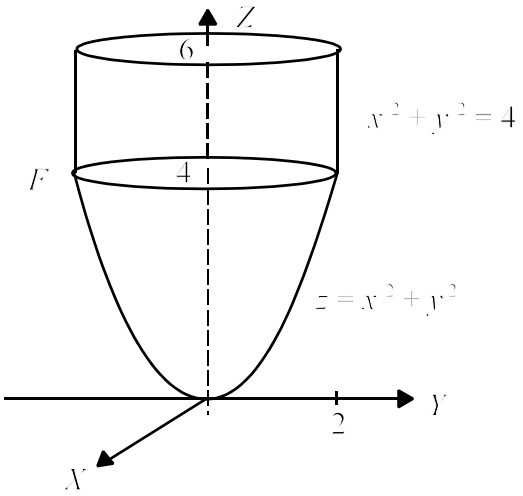
2) ud gennem fladen F_2

3) ud gennem hele overfladen af den lukkede beholder.



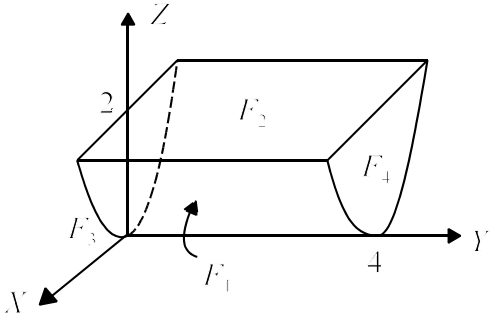
Opgave 14.17 *(strøm, 15 point)*

Find strømmen af vektorfeltet $\overline{\mathbf{v}} = (xy,\ x+xz,\ z-3+x)$ *gennem den viste flade* F *(beholder uden låg), idet normalvektorer overalt er rettet udad:*



Opgave 14.18 *(strøm, 20 point)*

En beholder er begrænset af planer med ligningerne $y = 0,\ y = 4$ *og* $z = 2,$ *samt af fladen med ligningen* $z = \frac{1}{2}x^2$ *(se figuren). Alle mål er i meter. Lad* F_1 *være bunden (den krumme overflade), og lad* F_2, F_3 *og* F_4 *være henholdsvis låget og de to endeflader. Et vektorfelt* $\overline{\mathbf{v}}$ *er bestemt ved* $\overline{\mathbf{v}}(x,y,z) = (x^2+4y^2z,\ y+1+x\cdot z^2,\ z+1+x^2y)$.



1) Beregn $\operatorname{div}\overline{\mathbf{v}}$ *og* $\overline{\operatorname{rot}}\,\overline{\mathbf{v}}$.

2) Find strømmen af $\overline{\mathbf{v}}$ *ud gennem beholderens overflade pånær låget.*

Opgave 14.19 *(fladeareal, strøm, 25 point)*

Lad temperaturen $T = T(x,y,z)$ *i et fast stof være givet ved* $T = x^4 + y^4 + 2z$.

1) Find $\bar{J} = -\overline{grad}\ T$.

2) Find derpå $\operatorname{div} \bar{J}$ *og* $\overline{\operatorname{rot}}\ \bar{J}$.

3) Find strømmen af $\bar{J}$ *ud gennem fladen* F *på figur a. (*F *har form som en beholder med låg, men* ***uden*** *bund).*

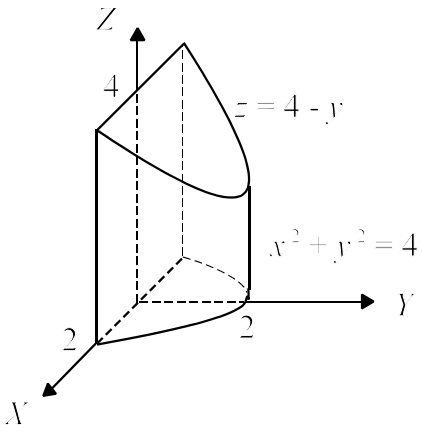


Fig. a.

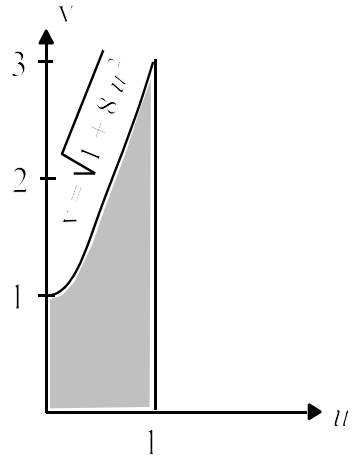


Fig. b.

4) Lad en flade G *være givet ved parameterfremstillingen*

G: $\bar{r}(u,v) = (u^2, v, u+v)$, *hvor* (u,v) *tilhører det skraverede område på figur b. Find arealet af* G.

Opgave 14.20 *(Stokes's sætning)*

Et vektorfelt $\bar{v}$ *defineres ved* $\bar{v}(x,y,z) = (-3yz, x, z+3)$.

1) Find $\bar{\nabla} \cdot \bar{v}$ *og* $\bar{\nabla} \times \bar{v}$.

2) For et givet $c \in]-1;1[$ *defineres det regulære fladestykke* F *ved*

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 + 2x^2 + 2y^2 = 1 \wedge z \geq c\}$. *Fladen tænkes orienteret bort fra z-aksen. For hvilke værdier af* c *er strømmen af* $\bar{\nabla} \times \bar{v}$ *gennem* F *lig med 0?*

Opgave 14.21 *(Stokes's sætning)*

1) Vis, at fladen F *bestemt ved ligningen* $z = x \cdot y, \ (x,y) \in D,$

hvor $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ *er en regulær flade.*

Idet fladen F *tænkes orienteret således, at* $\bar{n} = (0,0,1)$ *er en af fladens positive normalvektorer, og* $\bar{v}$ *er et vektorfelt bestemt ved* $\bar{v}(x,y,z) = (x+y, x-y, y^2+z)$, *skal man*

2) finde $\bar{v}$*'s strøm gennem* F,

3) finde $\bar{v}$*'s cirkulation langs randen af* F, *idet randkurven tænkes orienteret i overensstemmelse med* F*'s orientering.*

APPENDIX 8.1
APPROKSIMATION AF $f(x,y)$

Taylorpolynomium for $f(x,y)$:

$$f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\right]$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0)\right]$$

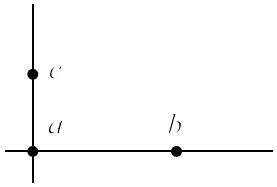
$$+ \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2(y-y_0)\right.$$

$$\left. + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0)^2\right].$$

Kollokationspolynomium for $f(x,y)$:

Kendes $f(x,y)$ i 3 punkter:

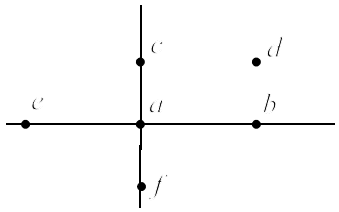
y			
y_0+k	c	-	
y_0	a	b	
	x_0	x_0+h	x



er kollokationspolynomiet $a + \frac{b-a}{h}(x-x_0) + \frac{c-a}{k}(y-y_0)$.

Kendes $f(x,y)$ i 6 punkter:

y				
y_0+k	-	c	d	
y_0	e	a	b	
y_0-k	-	f	-	
	x_0-h	x_0	x_0+h	x



er kollokations-polynomiet

$$a + \frac{b-e}{2h}(x-x_0) + \frac{c-f}{2k}(y-y_0) + \frac{b+e-2a}{2h^2}(x-x_0)^2 + \frac{c+f-2a}{2k^2}(y-y_0)^2 + \frac{a-b-c+d}{hk}(x-x_0)(y-y_0) \ .$$

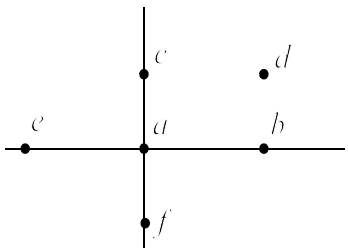
APPENDIX 11.2 IMPLICIT DIFFERENTIATION FOR $f(x,y) = 0$

For $y(x)$ gælder

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{-\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}.$$

Kendes $f(x,y)$ i 6 punkter:

y				
y_0+k	-	c	d	
y_0	e	0	b	
y_0-k	-	f	-	
	x_0-h	x_0	x_0+h	x



vil der for $y(x)$ i punktet x_0 gælde

$$y = y_0, \quad \frac{dy}{dx} \approx \frac{(b-e)k}{(f-c)h}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} \approx \left[\frac{b+e}{f-c} + 2\frac{(d-b-c)(b-e)}{(f-c)^2} + \frac{(c+f)(b-e)^2}{(f-c)^3}\right]\frac{2k}{h^2}.$$

APPENDIX 11.3 IMPLICIT DIFFERENTIATION FOR $f(x,y,z) = 0$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}, \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \qquad \left(\begin{array}{l}\text{samt analoge formler ved}\\ \text{omytning af } x,y,z\end{array}\right).$$

For $z(x,y)$ gælder

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{-\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{-\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{-\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}{-\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3}$$

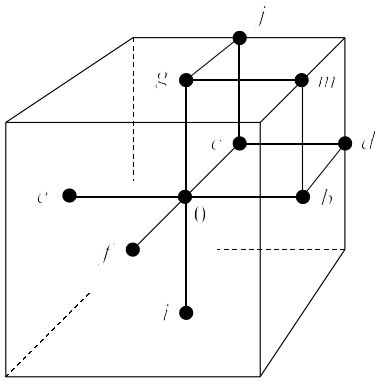
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}}{-\frac{\partial f}{\partial z}}$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3}.$$

Kendes $f(x,y,z)$ i 10 punkter:

y	$z=z_0+p$		
y_0+k	-	j	-
y_0	-	g	m
y_0-k	-	-	-
	x_0-h	x_0	x_0+h	x

y	$z=z_0$		
y_0+k	-	c	d
y_0	e	0	b
y_0-k	-	f	-
	x_0-h	x_0	x_0+h	x



y	$z=z_0-p$		
y_0+k	-	-	-
y_0	-	i	-
y_0-k	-	-	-
	x_0-h	x_0	x_0+h	x

vil der for $z(x,y)$ i punktet (x_0,y_0) gælde

$$z = z_0, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} \approx \frac{(b-e)p}{(i-g)h}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} \approx \frac{(c-f)p}{(i-g)k}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \approx \left[\frac{b+e}{i-g} + 2\frac{(m-g-b)(b-e)}{(i-g)^2} + \frac{(g+i)(b-e)^2}{(i-g)^3}\right]\frac{2p}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \approx \left[\frac{c+f}{i-g} + 2\frac{(j-g-c)(c-f)}{(i-g)^2} + \frac{(g+i)(c-f)^2}{(i-g)^3}\right]\frac{2p}{k^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \approx \left[\frac{d-b-c}{i-g} + \frac{(m-g-b)(c-f)}{(i-g)^2} + \frac{(j-c-g)(b-e)}{(i-g)^2} + \frac{(g+i)(b-e)(c-f)}{(i-g)^3}\right]\frac{2p}{hk}\ .$$

APPENDIX 11.4 IMPLICIT DIFFERENTIATION FOR $f(x,y,z,w) = 0$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{z,w} = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{z,w}}, \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{z,w}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_{x,w}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,w} = -1$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{z,w}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_{w,x}\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_{x,y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z} = 1, \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial w}}$$

samt analoge formler ved ombytning af x, y, z, w

Kendes $f(x,y,z,w)$ i 15 punkter:

y	$z=z_0-p,\ w=w_0$			
y_0+k	-	-	-	
y_0	-	i	-	
y_0-k	-	-	-	
	x_0-h	x_0	x_0+h	x

y	$z=z_0,\ w=w_0$			
y_0+k	-	c	d	
y_0	e	0	b	
y_0-k	-	f	-	
	x_0-h	x_0	x_0+h	x

y	$z=z_0+p,\ w=w_0$			
y_0+k	-	j	-	
y_0	-	g	m	
y_0-k	-	-	-	
	x_0-h	x_0	x_0+h	x

y	$z=z_0,\ w=w_0-q$			
y_0+k	-	-	-	
y_0	-	r	-	
y_0-k	-	-	-	
	x_0-h	x_0	x_0+h	x

y	$z=z_0,\ w=w_0+q$			
y_0+k	-	s	-	
y_0	-	n	t	
y_0-k	-	-	-	
	x_0-h	x_0	x_0+h	x

y	$z=z_0+\mathrm{p},\ w=w_0+\mathrm{q}$			
y_0+k	-	-	-	
y_0	-	u	-	
y_0-k	-	-	-	
	x_0-h	x_0	x_0+h	x

vil der for $w(x,y,z)$ i punktet (x_0,y_0,z_0) gælde:

$$w=w_0,\quad \frac{\partial w}{\partial x}\approx\frac{(b-e)q}{(r-n)h},\quad \frac{\partial w}{\partial y}\approx\frac{(c-f)q}{(r-n)k},\quad \frac{\partial w}{\partial z}\approx\frac{(g-i)q}{(r-n)p}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\approx\left[\frac{b+e}{r-n}+2\frac{(t-b-n)(b-e)}{(r-n)^2}+\frac{(n+r)(b-e)^2}{(r-n)^3}\right]\frac{2q}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\approx\left[\frac{c+f}{r-n}+2\frac{(s-c-n)(c-f)}{(r-n)^2}+\frac{(n+r)(c-f)^2}{(r-n)^3}\right]\frac{2q}{k^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\approx\left[\frac{q+i}{r-n}+2\frac{(u-g-n)(g-i)}{(r-n)^2}+\frac{(n+r)(g-i)^2}{(r-n)^3}\right]\frac{2q}{p^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\approx\left[\frac{d-b-c}{r-n}+\frac{(t-b-n)(c-f)}{(r-n)^2}+\frac{(s-c-n)(b-e)}{(r-n)^2}+\frac{(n+r)(b-e)(c-f)}{(r-n)^3}\right]\frac{2q}{hk}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\approx\left[\frac{j-c-g}{r-n}+\frac{(s-c-n)(g-i)}{(r-n)^2}+\frac{(u-g-n)(c-f)}{(r-n)^2}+\frac{(n+r)(c-f)(g-i)}{(r-n)^3}\right]\frac{2q}{hp}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}\approx\left[\frac{m-g-b}{r-n}+\frac{(u-g-n)(b-e)}{(r-n)^2}+\frac{(t-b-n)(g-i)}{(r-n)^2}+\frac{(n+r)(g-i)(b-e)}{(r-n)^3}\right]\frac{2q}{ph}\ .$$

FACITLISTE

KAPITEL 8

8.1 –, ingen af delene

8.2 –, lokalt minimum, –, –

8.3 $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 9\}$, –, –, –

8.4 –, saddelpunkt, –

8.5 –, –, –, ingen af delene

8.6 $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\{(x,y) \mid x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$

8.7 nej, ja, nej, nej, nej, nej

8.8 (1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2+4xy$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y+2x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2+4y$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2y+4x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3$

(2) $\frac{\partial f}{\partial x} = y(x-y)^{-\frac{1}{2}}(x+y)^{-\frac{3}{2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -x(x-y)^{-\frac{1}{2}}(x+y)^{-\frac{3}{2}}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(-2x+y)(x-y)^{-\frac{3}{2}}(x+y)^{-\frac{5}{2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (x^2+y^2-xy)(x-y)^{-\frac{3}{2}}(x+y)^{-\frac{5}{2}}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x(x-2y)(x-y)^{-\frac{3}{2}}(x+y)^{-\frac{5}{2}}$

(3) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3}{2}\sqrt{e^{3x-y}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}\sqrt{e^{3x-y}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{9}{4}\sqrt{e^{3x-y}}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{3}{4}\sqrt{e^{3x-y}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{4}\sqrt{e^{3x-y}}$

(4) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{xy^4}{1+x^2y^4}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^2y^3}{1+x^2y^4}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^4(1-x^2y^4)}{(1+x^2y^4)^2}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{4xy^3}{(1+x^2y^4)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2y^2(3-x^2y^4)}{(1+x^2y^4)^2}$

(5) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2z^2+yz^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3yz^2+xz^3$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 2x^3y^2z+3xyz^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2z^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3z^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2x^3y^2 + 6xyz,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2yz^2 + z^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 6x^2y^2z + 3yz^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 4x^3yz + 3xz^2$$

(6) $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \cos(xz) \cdot z + 2^{xyz} \cdot yz \cdot \ln 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin(xz) + 2^{xyz} \cdot xz \ln 2,$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y \cdot \cos(xz) \cdot x + 2^{xyz} \cdot xy \cdot \ln 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y \cdot \sin(xz) \cdot z^2 + 2^{xyz} \cdot y^2z^2(\ln 2)^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2^{xyz} \cdot x^2z^2(\ln 2)^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -y \cdot \sin(xz) \cdot x^2 + 2^{xyz} \cdot x^2y^2(\ln 2)^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos(xz) \cdot z + 2^{xyz} \cdot z \ln 2 + 2^{xyz} \cdot xyz^2(\ln 2)^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = y \cdot \cos(xz) - y \cdot \sin(xz) \cdot xz + 2^{xyz} \cdot y \cdot \ln 2 + 2^{xyz} \cdot xy^2z(\ln 2)^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \cos(xz) \cdot x + 2^{xyz} \cdot x \cdot \ln 2 + 2^{xyz} \cdot x^2yz(\ln 2)^2$$

(7) $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1^3x_2^3x_3^2x_4 + 17, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_1^4x_2^2x_3^2x_4, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_1^4x_2^3x_3x_4,$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = x_1^4x_2^3x_3^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 12x_1^2x_2^3x_3^2x_4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 6x_1^4x_2x_3^2x_4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 2x_1^4x_2^3x_4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_4^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 12x_1^3x_2^2x_3^2x_4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = 8x_1^3x_2^3x_3x_4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_4} = 4x_1^3x_2^3x_3^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 6x_1^4x_2^2x_3x_4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_4} = 3x_1^4x_2^2x_3^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_4} = 2x_1^4x_2^3x_3$$

8.9 (1) $\frac{-nRT}{(V-nb)^2} + \frac{2an^2}{V^3}, \quad \frac{nR}{V-nb}, \quad \frac{VRT}{(V-nb)^2} - \frac{2an}{V^2}$

(2) $\frac{-nRT}{(V-nb)^2} + \frac{an^2(2V+nb)}{\sqrt{T}\,V^2(V+nb)^2}, \quad \frac{nR}{V-nb} + \frac{an^2}{2T\sqrt{T}\,V(V+nb)},$

$\frac{VRT}{(V-nb)^2} - \frac{an(2V+nb)}{\sqrt{T}\,V(V+nb)}$ (3) $-\frac{T}{n}, \quad \frac{1}{T}, \quad -\frac{P}{V}$

8.10 (1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 - 3x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y$

(2) 0, 0, −6, −3, −6 (3) ja

8.11 (1) $(6x+2)dx$ (2) $(8\ln 2 + 6)dx$ (3) $(e^{(x^2)} \cdot 2x)dx$

(4) $16x^3y\,dx + (4x^4+2y)\,dy$ (5) $2\cdot\ln 2\,dx + 2\cdot\ln 2\,dy$

(6) $(\ln x)^{(y^z)}\cdot\left[\frac{y^z}{x\cdot\ln x}\,dx + z\cdot y^{z-1}\cdot\ln(\ln x)\,dy + y^z\cdot\ln y\cdot\ln(\ln x)\,dz\right]$

(7) $x_2^4x_3^2x_4^3\,dx_1 + 4x_1x_2^3x_3^2x_4^3\,dx_2 + 2x_1x_2^4x_3x_4^3\,dx_3 + 3x_1x_2^4x_3^2x_4^2\,dx_4$

8.12 $55\Delta T - 1.8\cdot 10^5\Delta V$

8.13 $0.19\pi\Delta h + 0.01\pi\Delta r$

8.14 $\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta a + \frac{40}{3}\Delta \mathrm{v}$

8.15 $\Delta V \approx \frac{200\pi}{3}\Delta r + \frac{100\pi}{3}\Delta h$; 0.05 (dvs. 5%)

8.16 $7.25\Delta r + 2.46\Delta L + 34.64\Delta h$

8.17 $13\,dx + 2\,dy$

8.18 $-dx+8dy,\ 2dx+0\cdot dy,\ \frac{5}{9}dx-\frac{1}{9}dy,\ -5dx-2dy,\ \frac{13}{8}dx+\frac{1}{8}dy,\ -\frac{9}{4}dx+\frac{9}{4}dy$

8.19 0

8.20 $2\pi r\frac{dr}{dt} + 2\pi h\frac{dh}{dt}$, 22π

8.21 76

8.22 $-1.88\cdot 10^6$

8.23 (1) $4 + 4(x-2) + 12(y-1) + (x-2)^2 + 12(x-2)(y-1) + 12(y-1)^2$

(2) $(x-1) - (y-1) + (x-1)^2 - (y-1)^2$ (3) $1 - x - y + x^2 + y^2 + 2xy$

(4) $1 - \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2(y-1)^2 - 2(x-2)(y-1)$

(5) $-4 - 4(x-2) - 12(y-1) + 12(z+1) + (x-2)^2 - 12(y-1)^2 - 12(z+1)^2$
$- 12(x-2)(y-1) + 12(x-2)(z+1) + 36(y-1)(z+1)$

(6) $x - 1 - (z-1) + (x-1)^2 - (z-1)^2 + (x-1)(y-1) - (y-1)(z-1)$

(7) $1 - x - y - z + x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

(8) $1 + (x-1) + (y-1) - (z-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{2}(z-1)^2$
$+ (x-1)(y-1) - (x-1)(z-1) - (y-1)(z-1)$

8.24 (1) $8 + 2x - y$ (2) $2x + 3y - 24$ (3) $2 + 2x + y$

(4) $1+\frac{1}{2}(x-1)+\frac{3}{2}(y-1)+\frac{3}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}(y-1)^2+(x-1)(y-1)$

(5) $2-\frac{1}{2}x+x^2-y^2+xy$

(6) $2-\frac{1}{2}(y-1)-\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{3}{2}(y-1)^2+\frac{1}{2}(x-2)(y-1)$

8.25 2.435 , 2.44

8.26 2.435823 , 2.442404

8.27 4.959 3.928

8.H1 – , –

8.Eksam27a e , $\frac{1}{49\cdot(\ln 7)^2}$, $\frac{17}{8}dx_1-\frac{1}{8}dx_2+\frac{1}{8}dx_3-\frac{1}{8}dx_4$

8.Eksam32a 4 , 64

8.Eksam40a $\frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}dy-\frac{1}{4}dz, \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)-\frac{1}{4}(z-1)$
$-\frac{1}{4}(x-1)^2-\frac{1}{4}(y-1)^2$
$-\frac{1}{2}(x-1)(y-1)+\frac{1}{4}(x-1)(z-1)+\frac{1}{4}(y-1)(z-1)$

8.Eksam50a $\frac{\sqrt{2}}{36}dx-\frac{\sqrt{2}}{36}dy-\frac{\sqrt{2}}{18}dz$

8.Eksam52 $8+8\cdot\ln 2$

8.Eksam61a $\approx 5.08,\ 0.220\Delta V-0.661\Delta h$

8.Eksam164 $df=-\frac{3}{4}dx-\frac{3}{4}dy$

8.Eksam228 $6dx+2dy$

8.Eksam241 $h'(0)=20$

8.Eksam256 $1+2(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}(y-1)^2-(x-1)(y-1)$
$\left(=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-xy+4x-2\right)$

8.Eksam280 $1+\frac{1}{4}(x-2)-\frac{23}{4}(y-1)+\frac{31}{64}(x-2)^2-\frac{1}{64}(y-1)^2-\frac{129}{32}(x-2)(y-1)$

8H.Eksam74a $4t\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}$

KAPITEL 9

9.1 $-$; $\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-4\\11\end{pmatrix}, u\in\mathbb{R}$; $\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$; $\frac{-1}{3}, 0, \frac{1}{3}$; $-$

9.2 $-$; $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}, u\in\mathbb{R}$; $\frac{\pi}{4}$; $-$

9.3 $m\vec{v}\cdot\vec{a}$, $\frac{\pi}{2}$

9.4 27, $\vec{0}$

9.5 $(11, 2, -10)$, 15

9.6 3

9.7 0

9.8 $\frac{11}{3}$

9.9 $\frac{7}{3}$

9.10 -2π

9.11 3

9.12 0

9.13 4

9.14 ja, x^3y+C; nej; ja, $\frac{x}{y}+C$; ja, $\ln\left(\frac{x}{y}\right)+C$

9.15 (a) ja, x^2y+x+C (b) ja, $x\cdot\ln y+C$ (c) nej (d) ja, $x\cdot\text{Arctan}y+x^2y+C$
(e) ja, $y2^x+xy^2+C$

9.16 (1a) ja, $-\text{Arctan}\frac{y}{x}+C$, (1b) ja, $-\text{Arctan}\frac{y}{x}+C$
(2a) ja, $\ln(x^2+y^2)+C$, (2b) ja, $\ln(x^2+y^2)+C$
(3a) ja, $\sqrt{x^2+y^2}+C$, (3b) ja, $\sqrt{x^2+y^2}+C$

9.17 34, $q=1$

9.18 0

9.19 nej

9.20 $\frac{1}{2}$, 33

9.21 (a) $\frac{1}{2}(x^2+y^2-z^2)$ (b) $u(x,y,z)=(e^x+y^2)z$ (c) nej (d) nej
(e) $x^2yz+xz^2+y^2$ (f) $\ln(x+y^2z)$

9.22 (a) 12 (b) nej (c) 5 (d) 3 (e) 19

9.Eksam53a ja , $x^2 + xy + 2x - 2y^2 + z - 2xz + 2yz$, 3

9.Eksam57a 32 , $32 - 12\cdot\ln 3$

9.Eksam68a kontrollér selv u

9.Eksam81a nej , $\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{(\ln 2)^2} - \ln 2 + \frac{1}{4}(\ln 2)^2$

9.Eksam142 $x^2e^y + x\sin y + x^3 + y^2 + C$

9.Eksam161 ja , -16

9.Eksam167 - , $17 - \frac{\pi}{4}$

9.Eksam175 - , 17

9.Eksam207 $h(y) = \cos y$, $x\sin y$, 1

9.Eksam223 *b*) $2x^2 + y^3 + \mathrm{Arctan}(xy) + C$

9.Eksam236 $x^2 + x\ln y + 2\cdot e^y + C$

9.B1 (a) $(1,2,2), (0,2,4)$ (b) $\frac{22}{3}$ (c) $\frac{2}{9}, \frac{9}{2}$

9.B2 (a) - (b) $2\sqrt{3}\sinh(2\pi)$ (c) $(1,1,1), (0,2,1)$ (d) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

9.B3 -, 2.220, 1.645

9.B4 $(11,2,-10), (8,1,-6)$, 15, 225

9.B5 (a) $\left(-t^{-2}, t^{-1}, -\sqrt{2}\,t^{-\frac{3}{2}}\right)$, $t^{-1}+t^{-2}$ (b) $2-\frac{1}{e}$ (c) $4\sqrt{2}$

9.B6 $\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}$

9.C1 $5, \frac{5}{18}\mathrm{Arctan}\,10, \frac{a}{2}, e-1$

9.C2 (a) $\sqrt{5}, \sqrt{5}$ (b) $\sinh 1, \frac{1}{2}$ (c) $5+\sinh 1, 4$ (d) $\frac{5}{3}, \frac{2}{21}$

9.D1 (*a*) $\frac{1}{3}x^3 + xy^2 = C$ (*b*) $x^2 + y^2 = C$ (*c*) $xy + x^2y - \frac{y^3}{3} = C$

9.D2 (*a*) $x^2 + y^2 = C$ (*c*) $x^2 + y^2 = C$ (*e*) $y = -x + C$ (*g*) $y = \frac{C - x}{x^2 + 2}$

(*i*) $3xy^2 + xy + x + y = C$ (*k*) $y = x + C$ (*m*) $y = Cx - xe^x$

(*o*) $x^3y^2 + x^4 + y^3 = C$ (*q*) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 4y^3 - y = C$

KAPITEL 10

10.1 (1) $(0,0)$ $(3,3)$ (2) $(15,-8)$ (3) $(0,\frac{\pi}{2})$ $(\frac{1}{2},0)$ $(-\frac{1}{2},\pi)$
(4) $(-4,-3)$ (5) $(0,0,0)$ $(-2,0,0)$ (6) $(4,1,2)$ $(10,7,-4)$

10.2 $\frac{1}{2}$

10.3 2.4

10.4 $\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$, $\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$

10.5 $70.53°$

10.6 (1) $f(1,1)=-1$ (2) $f(-1,0)=-10$
(3) $f(\frac{4}{9},\frac{2}{3})=f(\frac{4}{9},-\frac{2}{3})=-\frac{128}{27}$ (4) $f(\sqrt{5},5)=f(-\sqrt{5},5)=35$
(5) $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{8}$ (6) $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}}$
(7) $f\left(1,\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{3}$ (8) $f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

10.7 $x=4\sqrt[3]{25}$, $y=4\sqrt[3]{25}$, $z=5\sqrt[3]{25}$

10.8 (1) lok. min. punkt. $(0,0)$ (2) lok. min. pkt. $(\pm 2\sqrt{2},\sqrt{2})$
(3) ingen (4) ingen (5) lok. min. pkt. $(1,0)$ (6) lok. min. pkt. $(0,0)$
(7) lok. min. pkt. $(2,0)$ (8) lok. min. pkt. $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ og $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$
(9) lok. max. pkt. $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ (10) ingen.

10.9 (1) lok. max. pkt. $(3,2,3)$ (2) lok. min. pkt. $(0,0,0)$ (3) ingen

10.Eksam19a $[0;8]$

10.Eksam23a $a=2-q^2$, $b=4-2\cdot q$

10.Eksam34 $(4,4)$ for $q\in[0;\frac{1}{16}]$, $(4,\frac{1}{\sqrt{q}})$ for $q\in[\frac{1}{16},\frac{1}{4}]$, $(4,2)$ for $q\in[\frac{1}{4},1]$

10.Eksam.37a $\left[\ln 5-\frac{5}{2};\ln 2-\frac{1}{2}\right]$

10.Eksam.42 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)=1$

10.Eksam.46 $-$, 192 og -16

10.Eksam.55a $f\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{1}{4}-q$ for $q\in\left]0;\frac{1}{4}\right]$ og $f(0,0)=0$ for $q\in\left[\frac{1}{4};\infty\right[$

10.Eksam.58 $f\left(\frac{5}{2},\frac{5}{12}\right)=-\frac{625}{192}$

10.Eksam65a 6, 12, 15

10.Eksam.77a $\left[\frac{3}{2}+\ln 2\,;\,\frac{17}{8}+3\cdot\ln 2\right]$

10.Eksam83a $-1\,,\,-\frac{3}{2}\;-\;5\cdot\text{Arctan}\,3\;\approx\;-7.745$

10.Eksam.100 -2, $(2.13,0.57)$, saddelpunkt, $1+2T+\frac{1}{2}p^2+2T^2-2pT$

10.Eksam.117 $f\left(\frac{1}{\ln 2},-\frac{1}{\ln 2}\right)=-\frac{1}{(e\cdot\ln 2)^2}$, $f\left(\frac{1}{\ln 2},2\right)=\frac{8}{e\cdot\ln 2}$

10.Eksam.145 -15

10.Eksam.163 (a) $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(\sqrt{6},2)$, $(-\sqrt{6},2)$
(b) $(0,0)$ er saddelpunkt, $(0,-1)$ er lokalt maks. pkt.,
de resterende punkter er lokale min. pkt.

10.Eksam.176 (a) $(0,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$
(b) $-\ln 2+x^2-4y^2$ (c) $-\frac{1}{2}$, $\ln\left(\frac{3}{2}\right)-4$

10.Eksam.188 $-$, $f(-2,0)=-\frac{2}{3}$

10.Eksam.209 208, -48

10.Eksam.215 $(0,0)$ lok. min. pkt., $(-2,5)$ saddelpkt., $(2,5)$ saddelpkt.

10.Eksam.225 $-$, $f(4,1)=-5\cdot e^{-17}$

10.Eksam.230 (a) $(0,1)$, $(2,2)$, $(-2,2)$ (b) lok. maks.

10.A1 (1) $f(2,0)=2$ (2) $f(0,\pm 1)=2e^{-1}$ $f(0,0)=1$ (4) $f(2,0)=1$
(5) $f(1,-1)=2+\ln 2$

10.B1 (1) $f(\pm 1,0)=1$ (2) $f(0,0)=1$ (3) $f(-6,\pm 4)=72$ (4) $f(1,\sqrt{2})=0.1036$
(5) $f\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=3$ (6) $f(-1,0,0)=-1$ (7) $f(2,2,2,1)=13$

10.B2 $r=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt[3]{25\pi}}$ $h=\frac{6}{\sqrt[3]{25}}$ $a=\frac{3}{\sqrt[3]{25\pi}}$

10.B3 $r=\frac{3}{\sqrt[3]{\pi(3+\sqrt{5})}}$ $h=\frac{6}{\sqrt[3]{\pi(3+\sqrt{5})\cdot\sqrt{5}}}$ $a=\frac{3(\sqrt{5}+1)}{\sqrt[3]{\pi(3+\sqrt{5})\cdot\sqrt{5}}}$

10.B4 $b=s=2\sqrt[4]{3}$ $\text{v}=\frac{2\pi}{3}$

10.C1 (1) $f(1,1)=-1$ (2) $f(0,1)=1$ (3) $f(1,4)=19$ (4) -1

10.C2 $3\frac{1}{2}$ ton R_1+1 ton R_2

10.C3 overskud 300 000 kr. for 60 hektar A og 25 hektar B

10.D1 (1) $(2.333,-0.333)$ (2) $(-1.708,-3.021)$ (3) 2.905 (4) $(1.661,3.331)$
(5) $(1.944,8.977)$

10.D2 (1) $(1.465,0.353)$ (2) $(3.56,5.13)$

10.D3 $f(1.44834,0.36208)=4.449407579$

KAPITEL 11

11.1 (a) $1, \frac{3}{5}$ (b) $2, 16$ (c) 4

11.2 (a) $10, \frac{1}{100}$ (b) $e^2, \sqrt{e}$ (c) $1, \frac{\ln 2}{\ln 3} - 3$ (d) 20 (e) 4

11.3 (1) 2.26 (2) $-4.86, -3.25, -0.855$ (3) 1.11 (4) 0.209
(5) $a = 2$, 0.85, $a = 4$, 1.2, $a = 10$, 1.7 (6) $-0.942, -0.200, 1.04$

11.4 0.9855

11.5 0.786

11.6 -1.492

11.7a (1) (0.8404510116, 0.8010704293) (-0.5214445619, -0.9122902319)
(2) (0.7465758859, 0.9225658353) (-0.769604427 , 1.638972499)
(3) (0.4820227156, 0.9058662343) (-1.335969462 , -0.6010120131)

11.7 $-$, $-$

11.8 (1) $1 - 0.7155x - 0.2845x^2$ (2) $1.1575x - 0.1575x^2$
(3) $\frac{7}{6}x - \frac{1}{6}x^2$ (4) $-2 + 1.0438x - 0.1314x^2 + 0.0438x^3$

11.9 (1) $-3(x-1) + 26(x-1)^3$ (2) $1 + (x-2) - \frac{17}{10}(x-2)^2 - \frac{23}{75}(x-2)^3$
(3) $1 + \frac{5}{4}(x-1) + \frac{1}{64}(x-1)^2 - \frac{11}{512}(x-1)^3$ (4) $1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$
(5) $1 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^3$ (6) $-1 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3$

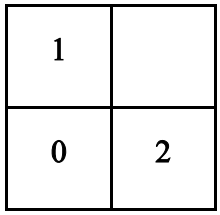
11.10 (1) $1 - \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}x^2 - \frac{6}{5}x^3$ (2) $2 - 3x + \frac{5}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ (3) $3 - 4x + \frac{7}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3$
(4) $4 - \frac{5}{2}x + \frac{9}{20}x^2 - \frac{1}{40}x^3$

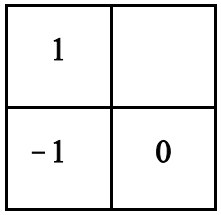
11.11 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{17}{24}$ (3) -1 (4) -1

11.12 (1) 2 lok. min. -2 lok. max. (2) -1 lok. max. 0 vendepunkt
(3) 1 lok. min. 2 lok. max. (4) 1 lok. min.

11.13 (1) max. 1, min. 0 (2) max. 1.533, min. -1 (3) max. 0.3289, min. 0
(4) 1 lok. min.

11.14

(1) $-$, 

, $\frac{2}{5}x+y$ (2) 

, $-\frac{19}{10}+\frac{1}{2}x+\frac{2}{5}y$

(3) nej, f.eks. 2 løsninger for $(x,y)=(1,0)$ (4) $2-3x-y$

11.15 (1) $1-x+\frac{1}{4}y-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}xy-\frac{3}{64}y^2$ (2) $4-4x^2+3xy-64y^2$

(3) $-2(x-2)-\frac{1}{2}(x-2)^2$

(4) $2-\frac{20}{13}(x-1)+\frac{2}{13}(y-2)+\frac{2332}{2197}(x-1)^2-\frac{503}{2197}(y-2)^2+\frac{3756}{2197}(x-1)(y-2)$

(5) $\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{4}(y-2)+\frac{3}{16}(x-1)^2+\frac{7}{16}(y-2)^2-\frac{5}{8}(x-1)(y-2)$

(6) $1-\frac{1}{2}(y-2)-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{3}{16}(y-2)^2$

11.16 2

11.17 (1) $(0,0)$ lok. min. (2) $(0,0)$ lok. max.

(3) $(0,2)$ lok. max. (4) $(1,0)$ saddelpunkt

11.18 (1) $z_{max}=z(0,0)=1$, $z_{min}=z_{rand}=0$

(2) $z_{max}=z(0,\pm1)=1.213$, $z_{min}=z(0,0)=1$

(3) $z_{max}=z(\pm2,0)=4$, $z_{min}=z(0,0)=0$

(4) $z_{max}=z(0,-1)=34$, $z_{min}=z(0,3)=2$

11.19 (1) $1-\frac{1}{3}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)-\frac{1}{12}(z-2)$ (2) $1-\frac{1}{2}(z-1)$

(3) $1-\frac{1}{2}(z-1)$ (4) $-\frac{3}{2}(x-1)-\frac{1}{2}y+(z-1)$

11.Eksam.16 $-$, $-1-(x-1)-\frac{5}{4}(x-1)^2$

11.Eksam.20 $-$, -2, -2, $1-2(x-2)-2(y-2)$

11.Eksam.28 $1+bP+(c-b^2)P^2+(2b^3-3bc)P^3$

11.Eksam.35 $\frac{1}{60}+\frac{13}{12}(x-1)+\frac{10}{6}(x-1)^2$, ja, $\frac{2}{9}$

11.Eksam.43 32

11.Eksam.44 1, 1.895

11.Eksam.48 2, $1-6(x-2)^2$

11.Eksam.56 1.10, -0.10, 0.34

11.Eksam.60 $-$, -4.2, $\frac{-6}{15+8\cdot\ln 2}$, $\frac{-27}{15+2\cdot\ln 2}$

11.Eksam.63 (1) $-$, (2) 2.7, 0, -0.22, -0.50,

(3) $e^y+ye^{x-1}=0$, $xe^y+ye^{x-1}=1$ (4) $\frac{7}{16}$

11.Eksam.70 -0.25, $(1,0)$, lok. min.

11.Eksam.84 $-$, $1+\frac{1}{4}(y-1)-\frac{1}{16}(y-1)^2-\frac{5}{16}(x-1)(y-1)$

11.Eksam.105 1, 1.95, $1+\frac{1}{4}(x-2)^2$

11.Eksam.109 $-$, voksende, $\frac{4}{5}x$

11.Eksam125 $u(t,y)=C-te^{\frac{y}{t}}-y$, $1-te^{\frac{y}{t}}-y=0$, $-\frac{1}{2}$,

$y(t)=-\frac{1}{2}\cdot(t-1)-\frac{1}{16}(t-1)^2$

11.Eksam.153 *a*) $-1+2t-t^2$, -0.81, -0.64 *b*) -0.809, -0.633

11.Eksam.155 $z(0,0)\approx -0.5851$

11.Eksam.168 $-$, $4+\frac{7}{9}(x-3)$

11.Eksam.194 $-$, $-\frac{a}{2}$, $\frac{3a}{4}-\frac{1}{a}$, $2-x+\frac{1}{2}x^2$

11.Eksam.195 *a*) $1.29\,\mathrm{m}$ *b*) $-7\,\mathrm{mm}$

11.Eksam.204 0.406, $\ln 2-2$, 2, 1, 1

11.Eksam.218 $-$, $-$, $-\frac{4}{3}(x-1)-\frac{17}{9}(x-1)^2$

KAPITEL 12

12.1 $2.8,\ 3.38,\ 1.26$

12.2 $2,\ 3,\ 5$

12.3 $20\pi,\ 240\pi,\ 18\pi,\ 0$

12.4 (1) $\frac{19}{10}$ (2) 6 (3) $\frac{97}{35}$ (4) 5.03 (5) $\frac{19}{10}$

12.5 $\frac{9}{8}\pi,\ \frac{3\pi}{4}$

12.6 $3,\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{2}$

12.7 (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{\pi}{8}$ (3) $\frac{15\pi}{8}$ (4) $\frac{243\pi}{64}$ (5) $\frac{11}{28}$

12.8 $\left(0,\frac{8}{3\pi}\right),\ \frac{9}{20},\ \left(\frac{6}{5},0\right),\ \left(\frac{2}{3(\pi-2)},\frac{2}{3(\pi-2)}\right)$

12.9 $\frac{4}{3}$

12.10 964007

12.11 0.0314

12.12 $-\frac{1}{2},\ 0$

12.13 $8\pi,\ \frac{79}{105},\ 200\pi,\ 2\pi(8+\ln 5)$

12.14 $\frac{40}{7},\ \frac{4\sqrt{3}+124}{\sqrt{5}}\pi$

12.15 (1) $\frac{16}{15}\pi$ (2) 20 (3) $\frac{3}{10}\pi$ (4) $\frac{\pi}{15}$ (5) $\frac{32}{15}\pi$

12.16 $\left(\frac{5}{16},\frac{5}{16},\frac{11}{16}\right),\ \left(0,0,\frac{3}{2}\right),\ \left(0,0,\frac{25}{21}\right)$

12.17 (1) $\frac{4\pi}{3}a^3$ (2) $\frac{4\pi}{15}a^5$

12.18 (1) $\frac{128\pi}{3}$ (2) 0

12.19 (1) $\frac{8\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$ (2) 2π

12.Eksam18a $\frac{1}{12}\ ,\ \frac{1}{3}$

12.Eksam39a $\frac{7\,\pi}{10} m^3 \approx 2.199\, m^3$

12.Eksam47a $\frac{4}{3}\pi\ m^3 \approx 4.189\, m^3\ ,\ \frac{64}{35}\pi\ \text{ton} \approx 5.745\,\text{ton}$

12.Eksam59a $-\frac{5}{4}\ ,\ \frac{28}{3}\pi\ \text{kg}$

12.Eksam64a $(0,0,0.91)\,\text{m}$

12.Eksam69a $2\pi\ ,\ \frac{\pi}{4}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$

12.Eksam72a $\frac{5}{24\cdot\ln 2\ -\ 6}\,\text{m} \approx 0.47\,\text{m}$

12.Eksam79a $\frac{9\sqrt{3}\ -\ 8}{3\sqrt{3}\ +\ 2\pi}\,\text{m} \approx 0.661\,\text{m}$

12.Eksam82a $-\ ,\ e^y\cdot\cosh x\ ,\ \frac{1}{4}e^3\ -\ \frac{1}{4}e\ +\ \frac{1}{2e}$

12.Eksam113 $\text{JA},\ \left\{(r,\theta)\,|\,\text{Arctan}\frac{1}{2} \le \theta \le \text{Arctan}2\ \wedge\ \sqrt{\frac{2}{\sin\theta\cdot\cos\theta}} \le r \le \sqrt{5}\right\},\ 2.759$

12.Eksam124 $\frac{12800}{3}\pi$

12.Eksam136 2

12.Eksam146 $I \approx 0.032$

12.Eksam165 $\frac{76}{3}$

12.Eksam183 $\frac{1}{6}$

12.Eksam203 $\left(\frac{\pi}{2}\ +\ \frac{4}{3}\right)a^3$

12.Eksam212 *b*) 68

12.Eksam224 $\frac{\pi}{10}$

12.Eksam233 $-\ ,\ \frac{1}{2}\ +\ \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}\ -\ \frac{1}{2}\text{Arctan}\frac{1}{2}$

12.Eksam237 *b*) 0

KAPITEL 13

13.1 $-\ ,\ -\ ,\ x+z\ =\ 1+\sqrt{2}$

13.2 $-\ ,\ -\ ,\ x+\frac{\pi}{2}y+\frac{\pi}{2}z+1\ =\ 0$

13.3 $-\ ,\ -\ ,\ -\ ,\ 3x\ -\ 3\sqrt{3}y\ +\ 4z\ -\ 2\pi\ =\ 0$

13.4 $-\ ,\ -\ ,\ x\ +\ 3y\ -\ z\ =\ 3$

13.5 $-\ ,\ 3x\ +\ 4y\ -\ 5z\ =\ 0$

13.6 $-\ ,\ -\ ,\ 2\sqrt{\frac{2}{3}}$

13.7 $-\ ,\ -\ ,\ \frac{5\sqrt{5}}{24}\ -\ \frac{7\sqrt{7}}{60}\ \approx\ 0.157$

13.8 $\frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}\ -\ 1)$

13.9 $5\ln(2+\sqrt{5})$

13.10a $4\pi R^2$

13.10b $2\pi Rh$

13.10c 24π

13.10d $\frac{16\pi}{3}(4-\sqrt{2})$

13.10 $3\ +\ \frac{5}{4}\ln 5$

13.11a $\frac{2\pi}{3}$

13.11b π

13.11c $12\pi,\quad 0$

13.11 0.9504

13.12 4.4901

13.Eksam13 $(6\cos u\,,6v\sin u\,,6u)\ ,\ \left(\sqrt{\frac{2}{3}},0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ ,\ 18+9\pi$

13.Eksam14 $\pi\left(3-\frac{2}{e}\right)\ \approx\ 7.11332$

13.Eksam15 $7x\ +\ y\ -\ 5z\ -\ 19\ =\ 0\ ,\ 0$

13.Eksam16 71.7

13.Eksam17 724529.8

KAPITEL 14

14.1 $16\ ,\ 16\ ,\ (2x,4y,16z)\ ,\ (0,16,0)\ ,\ (4,8,-16\sqrt{2})$

14.2 $-\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ ,\ -\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ ,\ \bar{0}$

14.3 $-\ ,\ 1\ ,\ \bar{0}\ ,\ -$

14.4 $-5\ ,\ 9\ ,\ -6\ ,\ 4\ ,\ (-2,32,2)$

14.5 $(-2,5,0)\ ,\ (7,-10,-5)\ ,\ (3,3,3)\ ,\ (18,6,-18)\ ,\ \bar{0}$

14.6 $0\ ,\ 0\ ,\ 8\pi$

14.7a $0,\quad 0,\quad 0$

14.7b 0

14.7c $256\pi,\quad 400\pi,\quad 0$

14.7d $250\pi,\quad 0$

14.7 $2z\ ,\ (1,2x,2x)\ ,\ 22\frac{2}{3}\ ,\ -$

14.8 8000π

14.9 $(0,y-z)\ ,\ 52\frac{2}{21}$

14.10 $(-2x-z\ ,\ 2y\ ,\ -x)\ ,\ 0\ ,\ \bar{0}\ ,\ \frac{47}{105}\ ,\ \frac{1}{10}$

14.11 $\left(0,\frac{3}{5},\frac{3}{5}\right)\ ,\ 1333\frac{1}{3}$

14.12 24π

14.13 $\{(u,v)\,|\,0 \le u \le \frac{4}{3} \wedge 0 \le v \le 2\pi\}\ ,\ 70.6\pi,\ 80\pi$

14.14 $z = x^2 + 2xy - y^2\ ,\ \frac{13}{6}\pi\ ,\ \frac{11}{3}$

14.15 $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4}\right)\ ,\ 0\ ,\ \bar{0}\ ,\ 200\pi$

14.16 $\frac{128}{15},\ 30,\ 0$

14.17 4π

14.18 $2x + 2\ ,\ (x^2-2xz,y^2-2xy,z^2-2yz),\ -48$

14.19 $(-4x^3,-4y^3,-2)\ ,\ -12x^2-12y^2\ ,\ (0,0,0)\ ,\ -196\pi+\frac{768}{5} = -462.152\ ,\ \frac{11}{3}$

14.20 $1\ ,\ (0,-3y,1+3z)\ ,\ -\frac{1}{3}$

14.21 $-\ ,\ -\frac{\pi}{4}\ ,\ -\frac{\pi}{2}$

SYMBOLLISTE (Se også symbollisten i bind 1.)

SYMBOL	BETYDNING	BEMÆRKNINGER
$\lvert\bar{x}\rvert$	normen eller længden: $\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$	Se afsnit 8.1 . Hvis $\bar{x}=(4,-3)$, er $\lvert\bar{x}\rvert=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$.
df	differentialet af funktionen $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$: $df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$	Se afsnit 8.7 . Hvis $f(x,y)=x^2y^3$, fås $df=2xy^3dx+3x^2y^2dy$.
$[\sim\sim\sim\sim\sim]^{(n)}$	symbolsk potensopløftning	Se afsnit 8.10 .
$\bar{r}(t)$	vektorfunktionen $(x(t),y(t),z(t))$	Se afsnit 9.1.
$\bar{r}'(t)=\frac{d\bar{r}}{dt}(t)$	vektorfunktionen $(x'(t),y'(t),z'(t))$	Se afsnit 9.1.
κ	kurves krumning $\left(=\frac{1}{\rho}\right)$	Se supplement 9B.
ρ	kurves krumningsradius $\left(=\frac{1}{\kappa}\right)$	Se supplement 9B.
$\min_{\bar{x}\in S} f(\bar{x})$	globalt minimum af funktionen f på mængden S.	Se afsnit 10.1.
$\bar{\nabla}$	$\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$	Kaldes "nabla".
$\bar{\nabla}f=\overline{\text{grad}}f$	gradienten af f: $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$	Se afsnittene 8.5, 8.9 og 14.2 .
$\bar{\nabla}\cdot\bar{v}=\text{div}\,\bar{v}$	divergensen af $\bar{v}$: $\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}$	Se afsnit 14.2 .
$\bar{\nabla}\times\bar{v}=\overline{\text{rot}}\,\bar{v}$	rotationen af $\bar{v}$: $\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z},\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x},\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$	Se afsnit 14.2 .

SYMBOL	BETYDNING	BEMÆRKNINGER
$\int_k \bar{F} \cdot d\bar{r}$	kurveintegral af vektorfelt $\bar{F}$ langs kurven k	Se afsnittene 9.3 og 14.3 .
$\oint_k \bar{F} \cdot d\bar{r}$	kurveintegral af vektorfelt $\bar{F}$ langs en lukket kurve k	Se afsnittene 9.5 og 14.3 .
$\int_k f(x,y,z)\, ds$	kurveintegral af $f(x,y,z)$ langs kurven k	Se supplement 9C .
$\iint_S f(x,y)\, dA$	planintegral af $f(x,y)$ over en plan mængde S	Se afsnit 12.1 .
$\iint_F f(x,y,z)\, dF$	fladeintegral af $f(x,y,z)$ over en flade F	Se afsnit 13.2 .
$\iint_F \bar{v} \cdot \bar{n}\, dF$	strøm af vektorfelt $\bar{v}$ gennem en flade F	Se afsnit 14.3 .
$\oiint_F \bar{v} \cdot \bar{n}\, dF$	strøm af vektorfelt $\bar{v}$ ud gennem en lukket flade F	Se afsnit 14.4 .
$\iiint_S f(x,y,z)\, dV$	rumintegral af $f(x,y,z)$ over en rumlig mængde S	Se afsnit 12.1 .

STIKORDSREGISTER

accelerationsvektor 63
akseparallel kurve 68
algoritme
  rodsøgning 251
approksimation
  af implicit funktion 144
  Taylorpolynomium 243, 245
arbejde 65
areal 165
begrænset mængde 39
bisektionsmetoden 252
blandede partielle afledede 16, 43
cirkulation 79
cylinderkoordinater 178
differential 19
  for funktion af 1 variabel 19
  for funktion af 2 variable 20
  for funktion af *n* variable 22
differentialform 69
differentialligning 88
  eksakt 88
  løsning 88
  singulært punkt 88
differentiation
  af implicit given funktion 145
  af sammensat funktion 23
  definition 18
  implicit 143, 147
  kæderegel 24, 46
  partiel 13
  retningsafledet 30
  under integraltegn 49
differentiationsregler for vektorfunktioner 63
divergens 220
divergensfelt 220
eksplicit given funktion 140
ekstremum (se optimering)
enkelt-sammenhængende mængde 77
facitliste 263
fejlvurdering 22
feltlinier 218
fixpunkt 137
fixpunktmetoden 137, 150
flader 197
  parameterfremstilling 198
  fladeareal 208
  fladeintegral 205
  strøm gennem flade 225
funktion
  af 2 variable 4
  af 3 variable 6
  af flere variable 1
  af *n* variable 6
  differentiabel 18
  eksplicit 140
  implicit 140, 141, 146
  maksimum 4
  minimum 4, 110
  niveauflade 6
  niveaukurve 4
  saddelpunkt 4
følsomhed 22
Gauss's sætning 229
gradient 13, 29, 79, 220
  geometrisk betydning 31, 222
  gradientfelt 220
graf for funktion af 2 variable 4, 7, 8
Greens sætning i planen 225
grænseværdi 10, 41
  definition 10
  regneregler 10
hastighedsvektor 63
implicit given funktion 141, 146
  approksimation 144
  differentiation 143, 145, 147, 253, 258, 259
implicit-sætningen 144, 148
inertimoment 208, 262
integration
  af kontinuert funktion 165
  definition 165
integrations-differentiationsmetode 72
interpolation 2 variable 38
interval
  lukket 40
  åbent 40
kildetæthed 220
kollokationspolynomium 243, 245, 247
kompakt mængde 40
konservativt kraftfelt 79
kontinuitet 11
  definition 11
  geometrisk betydning 11
  regneregler 11
koordinater 2
krumning 82
krumningscirkel 83
krumningsradius 83
krydsdifferentiationsregel 70, 76
kuglekoordinater 179
kurve 62
  akseparallel 68
  krumning 82
  krumningsradius 83
  kurve i planen 62
  kurve i rummet 64
  længde 81
  parameterfremstilling 62, 64
  regulær 63
  skruelinie 64
  tangent 63
kurveintegral 65, 85, 86
  cirkulation 79
  differentialform 69
  krydsdifferentiationsregel 70
  langs stykkevis kurve 68
  numerisk metode 79
  strøm langs kurve 225
  uafhængighed af vejen 73, 74, 79
kurvelængde 81

kæderegel 24, 46
Lagranges metode 107, 115
ligning
  fixpunktmetoden 137, 150
  med én ubekendt 134
  Newtons metode 136
lineær programmering 107, 117
lukket interval 40
lukket mængde 39
maksimum 4
  egentligt 109
  globalt 101
  lokalt 110
  maksimumspunkt 101
Maple
  differentiation 10
  ekstremum 106
  løsning af ligning 135
  mindste kvadraters metode 108
  numerisk løsning af ligning 137
  partiel differentiation 16
  stationære punkter 103
  tegning af funktion af 2 variable 4
masse 262
massemidtpunkt 262
midtpunktsformel for plan- og rumintegral 260
mindste kvadraters metode 107
minimum 4
  egentligt 109
  globalt 101
  lokalt 109, 110
  minimumspunkt 101
mængde 2
  af reelle tal 2
  begrænset 39
  enkelt-sammenhængende 77
  kompakt 40
  lukket 3, 39
  omegn 3, 39
  sammenhængende 39
  åben 3, 39
Newtons metode 136, 138, 251
niveauflade 6, 218
niveaukurve 4, 8
niveaukurvediagram 8
norm 2
normalvektor til flade 203
numerisk
  beregning af plan- og rumintegral 260
  optimering 248, 249
numerisk metode 107
objektfunktion 101
omegn 3, 39
  kugleomegn 39
  udprikket 39
optimering
  definition 101
  globalt minimum 101
  globalt minimumspunkt 101
  i lukket begrænset mængde 104
  i mængde der ikke er lukket og begrænset 107, 114
  Lagranges metode 107, 115
  lineær programmering 107, 117
  mindste kvadraters metode 107
  numerisk metode 119, 120, 248, 249
parameterfremstilling 62, 64, 198
parameterkurver 201
partiel
  differentialkvotient 13
partiel differentiation 16, 42
partielle afledede 13
Pegasusmetoden 257
planintegral 162
  definition 165
  numerisk 162, 164, 260
  opløsning i polære koordinater 172
  opløsning i retvinklede koordinater 167
  opløst i retvinklede koordinater 166
polynomiekollokation
  2 variable 37
polære koordinater 171
punkt
  indre 2, 39
  randpunkt 39
rand 39
regneregler
  for differentialer 23
  grænseværdi 10
regning
  med kontinuerte funktioner 11
regulær kurve 63
retningsafledet 29, 30
rotationsfelt 221
rumintegral 162, 176
  definition 165
  numerisk 162, 260
  opløsning i kuglekoordinater 180
  opløst i cylinderkoordinater 178
  opløst i retvinklede koordinater 177
saddelpunkt 4
sammenhængende mængde 40
sekantmetoden 251
simplexmetoden 117
skalarprodukt 2
skalarfelt 217
skalering
  af ligninger 108
  af variable 121
skruelinie 64
stamfunktion 69
  af 3 eller *n* variable 76
  af to variable 69
  integrations-differentiationsmetode 71, 77
  kurvemetode 71, 72, 77, 78
stationære punkter 102
stedvektor 2
Stokes's sætning 232
straffefunktion 121
strøm 225
  gennem flade 225, 229
  langs kurve 225
symbolliste 278
tangent 63

tangentplan 14, 202
Taylorpolynomium 2 variable 32, 243
    3 eller flere variable 36, 245
tredimensional tegning 7, 9
tyngdepunkt 262
uafhængighed af vejen 73
variabelskift
    i differentialligning 47
    i differential 48
vektor 2
    længde 2
    norm 2
    skalarprodukt 2
vektorfelt 217
    strøm 225
vektorfunktion 62
vektorprodukt 203
volumen 165
åben mængde 39
åbent interval 40