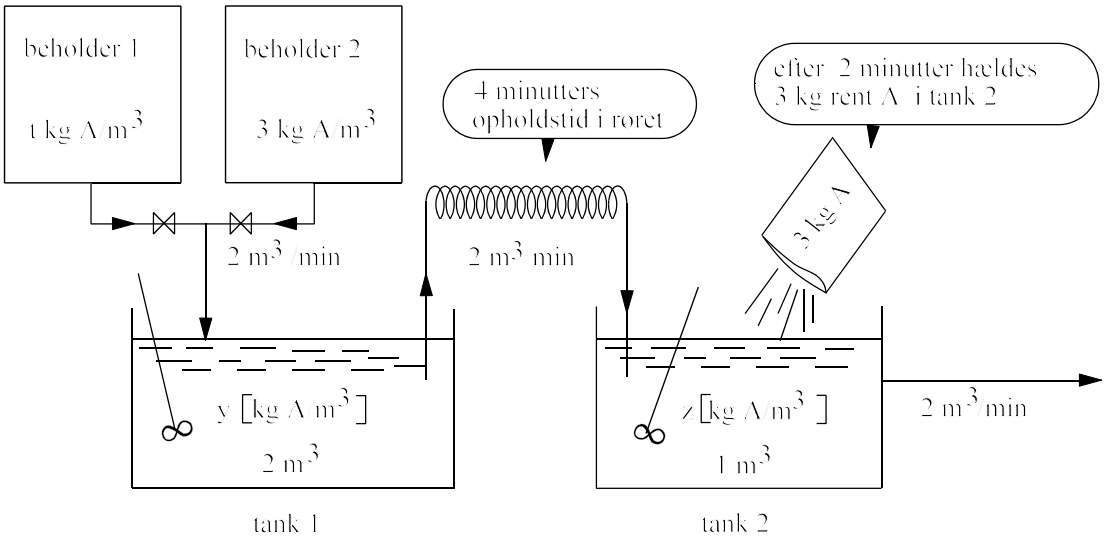
BJARNE HELLESEN og
MOGENS ODDERSHEDE LARSEN

MATEMATIK FOR INGENIØRER

BIND 3

4. UDGAVE



DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
INSTITUT FOR ANVENDT KEMI
2000

FORORD

Med nærværende bind 3 er forfatternes lærebogsserie "Matematik for ingeniører " afsluttet. Dette bind er opbygget på samme måde som bind 1 og 2.

Læserens forudsætninger. Bind 3 forudsætter noget kendskab til bind 1 og bind 2. Især vil dele af kapitlerne 15, 19, 20 og 21 kræve kendskab til differentialligninger fra bind 1.

Indhold. Bind 3 omhandler 3 hovedemner:

- Laplace-transformation (kapitel 15)
- Lineær algebra (kapitlerne 16, 17, 18 og 19
- Rækker, herunder Fourier-rækker (kapitel 20 og 21)

Læsning. De ovennævnte hovedemner kan læses uafhængigt af hinanden.

Undervisning. Bind 3 kan gennemgås i løbet af et modulkursus, dvs. ca. 50 undervisningstimer suppleret med regning af opgaver. Opgaver mærket med "T" (tavleopgaver) er egnede til korte øvelser.

Yderligere bemærkninger. Vi siger tak til kolleger og studerende for inspirerende kritik gennem årene. En særlig tak rettes til lektor Preben Alsholm, som har givet inspiration til mange forbedringer. Kapitel 19 er således kraftigt inspireret af hans bog "Egenværdier og Egenvektorer", DIA-K, 1989, og han har skrevet oplægget til supplement 19B om komplekse egenværdier.
Endvidere bringer vi en tak til fru Annette Karlsson for den omhu og tålmodighed hun gennem årene har udvist ved skrivningen af de forskellige udgaver. Endelig takker vi Den Private Ingeniørfond for stor imødekommenhed ved udgivelsen.

Lyngby, 1989 - 1997 (udgave 1-3) Bjarne Hellesen og Mogens Oddershede Larsen

4. udgave. Ændringer i forhold til forrige udgave har rykket sidetallene. Men med lidt omhu fra underviserens side kan bogen bruges sammen med forrige udgave. Vi takker teknisk tegner Pernille Zeiler Nielsen for med stor dygtighed at have omtegnet en stor del af bogens figurer.

Lyngby, januar 2000 Bjarne Hellesen og Mogens Oddershede Larsen

INDHOLD

15 LAPLACE-TRANSFORMATION

15.1 INDLEDNING 1
15.2 LAPLACE-TRANSFORMATION 1
15.3 LINEARITETSREGEL 4
15.4 DIFFERENTIATIONSREGEL 6
15.5 FORSINKELSESREGEL 12
15.6 DELTAFUNKTION 16
15.7 FLERE REGNEREGLER 22
15A BEVIS FOR SÆTNING 15.1 27
15B BEVIS FOR SÆTNING 15.5 28
15C PARTIELLE DIFFERENTIALLIGNINGER 29
15D NUMERISK TILBAGETRANSFORMATION 34
OPGAVER 39

16 LINEÆRE LIGNINGSSYSTEMER

16.1 INDLEDNING 47
16.2 INDLEDENDE DEFINITIONER 48
16.3 GAUSS' ELIMINATION, LØSNING AF LINEÆRT LIGNINGSSYSTEM . 53
16A BEVIS FOR SÆTNING 16.1 63
16B BEVIS FOR SÆTNING 16.2 64
16C PIVOTERING 65
OPGAVER 66

17 MATRIXREGNING

17.1 INDLEDNING 74
17.2 ADDITION OG MULTIPLIKATION 74
17.3 LIGNINGSSYSTEM PÅ MATRIXFORM 77
17.4 REGNEREGLER FOR MATRICER, TRANSPONERET MATRIX 78
17.5 INVERS MATRIX, MATRIXLIGNINGER 80
17.6 LØSNING AF OVERBESTEMT LIGNINGSSYSTEM 85
OPGAVER 89

18 DETERMINANTER

18.1 DEFINITION AF DETERMINANT 96
18.2 REDUKTION AF DETERMINANT 98
18.3 ANDRE SÆTNINGER OM DETERMINANTER 102
18.4 CRAMER'S SÆTNING 105
18A BEVIS: EN DETERMINANTS VÆRDI ER UAFHÆNGIG AF OPLØSNINGSMÅDEN 107
OPGAVER 110

19 EGENVÆRDI, EGENVEKTOR, DIAGONALISERING
19.1 INDLEDNING 116
19.2 EGENVÆRDIER OG EGENVEKTORER 120
19.3 DIAGONALISERING 123
19.4 EGENVEKTORER FOR SYMMETRISKE MATRICER 128
19A BEVIS FOR SÆTNING 19.3 132
19B KOMPLEKSE EGENVÆRDIER 134
19C SINGULÆR VÆRDI DEKOMPOSITION 138
OPGAVER 140

20 RÆKKER
20.1 BEHOV FOR RÆKKER 144
20.2 KONVERGENS OG SUM 145
20.3 KONVERGENSKRITERIER 149
20.4 POTENSRÆKKER 158
20.5 TILNÆRMET BEREGNING AF EN KONVERGENT RÆKKES SUM 170
OPGAVER 176

21 FOURIERRÆKKER
21.1 INDLEDNING 186
21.2 FOURIERRÆKKER 186
21.3 FOURIERRÆKKER FOR LIGE OG ULIGE FUNKTIONER 192
21.4 KOMPLEKS FOURIERRÆKKE, FOURIERTRANSFORMATION 194
21A LØSNING AF VARMELEDNINGSLIGNING VED FOURIERRÆKKER . . 198
21B FUNKTIONER SOM VEKTORER, ORTOGONALSYSTEM 205
21C PARSEVALS LIGNING 206
OPGAVER 207

APPENDIX
15.1 TABEL 1 OVER LAPLACE-TRANSFORMEREDE 215
15.2 TABEL 2 OVER $\mathfrak{L}^{-1}$ (BRUDDEN RATIONAL FUNKTION) 221
15.3 REGNEREGLER FOR LAPLACE-TRANSFORMATION 223
15.4 TABEL OVER KONSTANTER VED NUMERISK LAPLACE-TILBAGETRANSFORMATION 225

LITTERATUR 226

FACITLISTE 228

SYMBOLLISTE 249

STIKORD 251

15 LAPLACE-TRANSFORMATION

15.1 INDLEDNING

I praksis skal man ofte løse differentialligninger for at beregne nogle fysiske størrelsers ændringer **fremad** i tiden. Er der tale om lineære differentialligninger med konstante koefficienter, kan de løses særlig nemt ved en teknik, der kaldes Laplace-transformation.

Fordele ved Laplace-transformation

1) Differentialligninger forvandles til ligninger, som ikke indeholder afledede.
2) Man finder direkte den partikulære løsning, som svarer til begyndelsesbetingelserne (uden først at skulle opstille og løse ligninger for de arbitrære konstanter).
3) Funktioner med spring (se figur 15.1) bliver nemme at behandle.

Vi vil senere forklare, at der yderligere er følgende fordele:

4) Differentialligninger med forsinkelser (se figur 15.5) kan løses.
5) Man kan på en nem måde løse differentialligninger, der indeholder deltafunktioner (se figur 15.7).
6) Partielle differentialligninger kan forvandles til sædvanlige differentialligninger.

I faget reguleringsteknik anvendes Laplace-transformation særlig meget, jævnfør eksempelvis lærebogen Thomas Heilmann og L. Alfred Hansen: Reguleringsteknik, Akademisk forlag, 1987.

15.2 LAPLACE-TRANSFORMATION

En mængde K af funktioner, der kan Laplace-transformeres

I dette kapitel vil vi kun undersøge fysiske størrelsers ændringer **fremad** i tiden. Da starttidspunktet altid kan vælges som $t = 0$, behøver vi kun at se på funktioner i tidsintervallet $[0\ ;\ \infty\ [$.

Skal funktionerne kunne bruges i realistiske beregninger, må de kunne gengive pludselige **spring** i de fysiske størrelser, f.eks. hidrørende fra åbning af en ventil, afbrydelse af en elektrisk kontakt eller tilsætning af en katalysator.

Vi ledes herved til at betragte en bestemt mængde K af funktioner. En typisk sådan funktion er vist på figur 15.1.

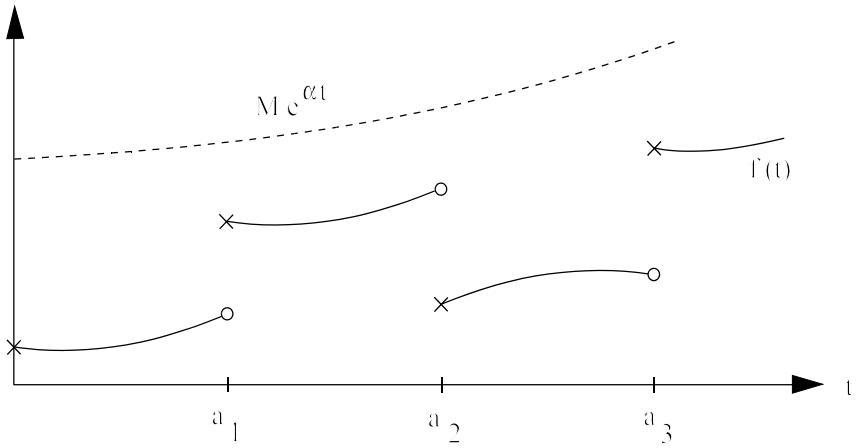


Fig. 15.1. *Grafen for en typisk funktion* $f \in K$.

Det karakteristiske er, at funktionen er stykkevis kontinuert og begrænset af en eksponentialfunktion af typen $Me^{\alpha t}$. I diskontinuitetspunkterne har det ikke megen fysisk mening at angive nogen funktionsværdi, og det er heller ikke matematisk nødvendigt. I denne bog har vi dog lidt tilfældigt valgt at lade funktionerne i mængden K være stykkevis kontinuerte fra højre (andre valg kunne være ligeså gode, f.eks. vil man ofte lade funktionen være udefineret i diskontinuitetspunkterne).

Præcis definition af mængden K. Mængden kunne vælges på flere måder. Vi definerer K således:

DEFINITION af mængden K. *K er mængden af alle eksponentielt begrænsede reelle (eller komplekse) funktioner $f(t)$, $t \in [0; \infty[$, der er stykkevis kontinuerte og kontinuerte fra højre.*

En funktion f kaldes **eksponentielt begrænset** i intervallet $[0; \infty[$, hvis der eksisterer to tal $M, \alpha \in \mathrm{R}$, sådan at $|f(t)| < Me^{\alpha t}$ for ethvert $t \in [0; \infty[$.

En funktion f kaldes **stykkevis kontinuert** i intervallet $[0; \infty[$, hvis der gælder:

1) i ethvert begrænset delinterval $[a; b] \subset [0; \infty[$ findes der højst et endeligt antal diskontinuitetspunkter $a_1, a_2, \ldots, a_n$ for f,
2) i ethvert diskontinuitetspunkt a for f har $f(t)$ en grænseværdi fra højre $\lim\limits_{t \to a+} f(t) \equiv f(a+)$,
3) i ethvert diskontinuitetspunkt $a > 0$ for f har $f(t)$ en grænseværdi fra venstre $\lim\limits_{t \to a-} f(t) \equiv f(a-)$.

En funktion f kaldes **kontinuert fra højre** i intervallet $[0; \infty[$, hvis der for ethvert punkt $t \in [0; \infty[$ gælder, at funktionsværdien $f(t)$ er defineret og lig med grænseværdien fra højre $\lim\limits_{\theta \to t+} f(\theta) \equiv f(t+)$. Eksempelvis er t^0 kontinuert fra højre i $[0; \infty[$, når vi definerer $0^0 = 1$.

Funktioner i K. Af definitionen på K følger, at hvis f og g tilhører K, så vil også produktet $f \cdot g$ og enhver liearkombination $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ tilhøre K (α , β $\in$ C). Da nu funktionerne givet ved

$$t^k \text{ og } e^{at} \qquad (k \in [0; \infty[\text{ og } a \in \mathrm{C})$$

opfylder betingelserne for at tilhøre K, kan vi slutte, at dette også gælder funktionerne givet ved

$$t^k e^{at}, \quad \cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}, \quad t^k \cos(\omega t), \quad t^k e^{at}\cos(\omega t), \quad t^k e^{at}\sin(\omega t),$$
$$t^k e^{at}\cosh(ct), \quad t^k e^{at}\sinh(ct) \qquad (\omega, c) \in \mathbb{I}$$

samt alle produkter og linearkombinationer af disse.

SÆTNING 15.1

1) (Laplace-transformationen $\mathcal{L}$). Lad $f \in K$ og lad $s \in \mathbb{R}$ (eller C). Så kan der defineres en "Laplace-transformeret" funktion (betegnet ved det tilsvarende store bogstav F):

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

for de s-værdier, hvor s (eller realdelen Re(s)) er tilstrækkelig stor.

2) (Eksistens af $\mathcal{L}^{-1}$). I mængden K er der ikke andre funktioner end f, som har den Laplace-transformerede F.

Bevis. Se supplement 15A.

Bemærkninger til sætning 15.1.

a) Sammenhængen mellem f og F skrives på flere måder:

$$F = \mathcal{L}\{f\}, \qquad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}, \qquad \mathcal{L}^{-1}\{F\} = f, \qquad \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t).$$

Man kalder $\mathcal{L}$ for "Laplace-transformations-operatoren" og $\mathcal{L}^{-1}$ for "den inverse Laplace-transformations-operator" eller "tilbage-transformations-operatoren".

Den Laplace-transformerede af $f(t)$ kan også betegnes ved en streg over funktionsnavnet $\bar{f}(s)$. Nogle benytter stort bogstav $F(t)$ for den oprindelige funktion og lille bogstav for den Laplace-transformerede funktion $f(s)$.

b) Af beviset fremgår, at sætningen gælder uændret, hvis s er en kompleks variabel ($s \in$ C). Hele kapitlet er skrevet sådan, at læseren overalt kan opfatte s som en reel eller en kompleks variabel efter eget behag.

c) Ved anvendelserne vil vi altid underforstå, at $t \in [0; \infty[$, og at s (eller Re(s)) skal være tilstrækkelig stor (nemlig større end det tal α, som optræder i den eksponentielle begrænsning $|f(t)| < Me^{\alpha t}$).

d) Man kan vise, at tilbagetransformationen også kan udtrykkes ved et integral:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{\lambda \to \infty} \int_{\gamma - i\lambda}^{\gamma + i\lambda} e^{st} F(s)\, ds \qquad (\text{vælg } \gamma \geq \alpha),$$

hvor integrationen sker langs en lodret linie Re (s) = γ i den komplekse s-plan.

Eksempel 15.1. Udregning af $\mathcal{L}\{e^{-at}\}$.

Lad $a \in \mathbb{R}$ (eller C) og lad $f(t) = e^{-at}$, $t \in [0;\infty[$. Den Laplace-transformerede F ønskes bestemt ved integration.

LØSNING:
Vi finder

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{-at}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\,dt = \left[\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right]_0^{t\to\infty}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-(s+a)t} - 1}{-(s+a)} = \underline{\underline{\frac{1}{s+a}}} \qquad (s+a>0)$$

Sammenhængen skrives

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a} \qquad \text{eller} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$$

eller som en tabel:

$F(s)$	$f(t)$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at} $(a \in \mathrm{C})$
$\frac{1}{s}$	1 (fås for $a = 0$)

15.3 LINEARITETSREGEL

Man kan bruge tabeller til at udføre Laplace-transformationen $\mathcal{L}$ og Laplace-tilbagetransformationen $\mathcal{L}^{-1}$. Der findes tabeller i Schaums håndbog og i slutningen af denne bog. Endnu større tabeller findes i speciallitteraturen (litteraturlisten punkt 5 og 6). Man må imidlertid have nogle regneregler for rigtig at få gavn af tabellerne. En anden mulighed er at benytte et matematikprogram som eksempelvis Maple.

SÆTNING 15.2 *(linearitetsreglen). Lad $f, g \in K$ og lad $a, b \in R$ (eller C). Så gælder*

$$\mathcal{L}\{a\cdot f(t) + b\cdot g(t)\} = a\,\mathcal{L}\{f(t)\} + b\,\mathcal{L}\{g(t)\}$$

og

$$\mathcal{L}^{-1}\{a\cdot F(s) + b\cdot G(s)\} = a\,\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\,\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

NB: Sædvanligvis gælder derimod $\mathcal{L}\{f(t)\cdot g(t)\} \neq \mathcal{L}\{f(t)\}\cdot\mathcal{L}\{g(t)\}$.

Bevis for sætning 15.2.

$$\int_0^\infty e^{-st}(a\cdot f(t) + b\cdot g(t))\,dt = a\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt + b\int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt \qquad \text{(ifølge regler for integration)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{L}\{a\cdot f(t) + b\cdot g(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} \qquad \text{(1. del er hermed bevist)}$$

$$\Leftrightarrow \quad a\cdot f(t) + b\cdot g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}\} \qquad \text{(da } \mathcal{L} \text{ er éntydig)}$$

$$\Leftrightarrow \quad a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{a\cdot F(s) + b\cdot G(s)\} \qquad \text{(2. del er hermed bevist).}$$

Eksempel 15.2. Tabeller og linearitetsregel.

1) Lad $x(t) = 9 + e^{-3(t+2)} + 2^{2-t}$. Find $X(s)$.

2) Lad $Y(s) = \dfrac{6}{s^2+4s+13} + \dfrac{1}{3s+6}$. Find $y(t)$.

LØSNING:

1) Vi finder $\mathcal{L}\{9 + e^{-3(t+2)} + 2^{2-t}\}$

$$= \mathcal{L}\{9\cdot 1 + e^{-3t}\cdot e^{-6} + 2^2\cdot 2^{-t}\} \qquad \text{(omskrivning)}$$

$$= 9\cdot\mathcal{L}\{1\} + e^{-6}\cdot\mathcal{L}\{e^{-3t}\} + 2^2\cdot\mathcal{L}\{2^{-t}\} \qquad \text{(linearitetsregel)}$$

$$= 9\cdot\mathcal{L}\{1\} + e^{-6}\cdot\mathcal{L}\{e^{-3t}\} + 4\cdot\mathcal{L}\{e^{-(\ln 2)\cdot t}\} \qquad \text{(omskrivning).}$$

Idet vi fra appendix 15.1 benytter formel 1, formel 5 med a=3 og igen formel 5 med $a = \ln 2$, fås

$$\underline{\underline{X(s) = 9\cdot\frac{1}{s} + e^{-6}\cdot\frac{1}{s+3} + 4\cdot\frac{1}{s+\ln 2}}}\ .$$

2) For at kunne benytte tabel 2 i appendix 15.2 må vi skrive nævnerpolynomiet $s^2+4s+13$ på samme måde som i tabellen. Polynomiet har rødderne

$$s = \frac{-4 \pm i\sqrt{|4^2-4\cdot 1\cdot 13|}}{2\cdot 1} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i\,.$$

Polynomiet kan derfor omskrives således

$$s^2+4s+13 = [s-(-2-3i)]\cdot[s-(-2+3i)] = [(s+2)+3i)]\cdot[(s+2)-3i]$$

$$= (s+2)^2-(3i)^2 = (s+2)^2+3^2\,.$$

Vi finder da

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^2+4s+13} + \frac{1}{3s+6}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{(s+2)^2+3^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+2}\right\} \qquad \text{(omskrivning)}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{(s+2)^2+3^2}\right\} + \frac{1}{3}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \qquad \text{(linearitetsregel).}$$

Idet vi fra appendix 15.2 benytter formel 82 med $B = 6$, $a = 2$, $b = 3$ og formel 78 med A=1, a=2, fås

$$\underline{\underline{y(t) = 2\cdot\sin(3t)\cdot e^{-2t} + \frac{1}{3}\cdot e^{-2t}}}\ .$$

Edb-løsning. I programmet Maple udføres de tilsvarende transformationer på følgende måde:

```
with ( inttrans ) ;
[addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, laplace, mellin]
laplace( 9 + exp(-3*(t+2)) + 2^(2-t),  t,  s) ;
```

$$\frac{9}{s} + \frac{e^{-6}}{s+3} + \frac{4}{s+\ln 2}$$

```
invlaplace( 6/(s^2+4*s+13) + 1/(3*s+6),  s,  t ) ;
```

$$2\,e^{-2t}\sin(3t) + \frac{1}{3}e^{-2t}.$$

15.4 DIFFERENTIATIONSREGEL

Den følgende "differentiationsregel" gør det muligt at Laplace-transformere lineære differentialligninger med konstante koefficienter.

SÆTNING 15.3 *(differentiationsreglen). Lad* $f \in K$ *have en n'te afledet* [1] $\frac{d^n f}{dt^n} \in K$ *og lad* $f, \frac{df}{dt}, \frac{d^2f}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}} \in K$ *være kontinuerte* $(n \in \{1, 2, 3, \ldots\})$.

Så gælder

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = s\cdot F(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f}{dt^2}\right\} = s^2\cdot F(s) - s\cdot f(0) - \frac{df}{dt}(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^3f}{dt^3}\right\} = s^3\cdot F(s) - s^2\cdot f(0) - s\cdot\frac{df}{dt}(0) - \frac{d^2f}{dt^2}(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^4f}{dt^4}\right\} = s^4\cdot F(s) - s^3\cdot f(0) - s^2\cdot\frac{df}{dt}(0) - s\cdot\frac{d^2f}{dt^2}(0) - \frac{d^3f}{dt^3}(0)$$

. . .

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^nf}{dt^n}\right\} = s^n\cdot F(s) - s^{n-1}\cdot f(0) - s^{n-2}\cdot\frac{df}{dt}(0) - \ldots - s\cdot\frac{d^{n-2}f}{dt^{n-2}}(0) - \frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}(0)\ .$$

---

1 I diskontinuitetspunkter for $\frac{d^nf}{dt^n}$ sættes værdien lig med grænseværdien fra højre. (Det samme resultat opnås ved kun at arbejde med afledede fra højre).

NB: Ved anvendelserne er $f(0), \frac{df}{dt}(0), \ldots, \frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}(0$ ofte alle 0. Operationen $\frac{d^n}{dt^n}$ på $f(t)$ svarer da blot til at gange $F(s)$ med s^n.

Bevis for sætning 15.3. Sætningen vises først for $n = 1$. Ved delvis integration fås

$$\int_0^k e^{-st}\frac{df}{dt}\,dt = e^{-sk}f(k) - f(0) + s\int_0^k e^{-st}f(t)\,dt \qquad (k \text{ positivt reelt tal}).$$

Når s (eller Re(s)) er tilstrækkelig stor, fås heraf for $k \to \infty$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = -f(0) + s\cdot F(s), \tag{1}$$

idet $e^{-sk}f(k) \to 0$ for $k \to \infty$, da f er eksponentielt begrænset $(|f(k)| < Me^{\alpha k})$.

Hermed er sætningen bevist for $n = 1$.

Ved to gange at anvende formel (1) fås

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f}{dt^2}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right)\right\} = s\,\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} - \frac{df}{dt}(0) = s\left(s\cdot F(s) - f(0)\right) - \frac{df}{dt}(0).$$

Hermed er sætningen også bevist for $n = 2$.

Derefter anvendes formel (1) tre gange, så fire gange osv. På denne måde kan det indses, at sætningen gælder for ethvert $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Løsning til differentialligning. Ved en løsning til differentialligningen

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0y(t) = x(t) \qquad (a_n \neq 0)$$

forstås en funktion y, hvor

1) $y \in K$ og er kontinuert i $[0; \infty[$,
2) y har afledede $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \in K$, som er kontinuerte i $[0; \infty[$,
3) y har en n'te afledet $\frac{d^ny}{dt^n} \in K$ (i diskontinuitetspunkterne for x vil vi forstå $\frac{d^ny}{dt^n}$ som grænseværdi af $\frac{d^ny}{dt^n}$ fra højre), og
4) y tilfredsstiller differentialligningen i $[0; \infty[$.

Med denne definition af en løsning y er det klart, at vi kan Laplace-transformere differentialligningen, uden at løsninger går tabt.

Integration. Da differentiation af $f(t)$ bevirker multiplikation med s på den Laplace-transformerede $\mathcal{L}\{f(t)\}$, er det ikke overraskende, at den omvendte operation, integration, bevirker division med s.

Der gælder

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}\cdot\mathcal{L}\{f(t)\} \qquad \text{(integrationsreglen)}$$

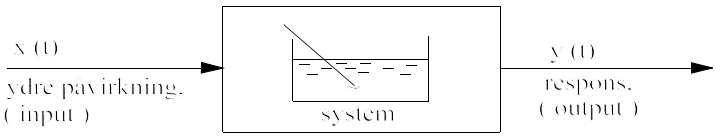
(reglen indgår i sætning 15.6 og bevises der).

Eksempel 15.3. Differentialligning af 3. orden.

Der foreligger et fysisk system i et produktionsanlæg. Lad sammenhængen mellem en tidsafhængig ydre påvirkning $x(t)$ og en af systemets variable $y(t)$ være givet ved differentialligningen

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

eller skematisk:



Find $y(t)$ for ethvert $t \in [0\,;\,\infty\,[$, idet input er $x(t) = 60\cdot\sin t$, og begyndelsesbetingelserne er

$$y(0) = 1\ , \quad \frac{dy}{dt}(0) = -2 \quad \text{og} \quad \frac{d^2y}{dt^2}(0) = 4\ .$$

LØSNING:

Ved hjælp af linearitetsreglen og differentiationsreglen Laplace-transformeres både venstre og højre side af differentialligningen:

$$\left[s^3\cdot Y(s) - s^2\cdot 1 - s\cdot(-2) - 4\right] + 2\left[s^2\cdot Y(s) - s\cdot 1 - (-2)\right] - \left[s\cdot Y(s) - 1\right] - 2\cdot Y(s) = X(s)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[s^3 + 2\cdot s^2 - s - 2\right] Y(s) = X(s) + s^2 - 1\ .$$

Ved rodsøgning (f. eks. gætning findes)

$$s^3 + 2\cdot s^2 - s - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s = 1 \ \vee\ s = -1 \ \vee\ s = -2\ .$$ [1]

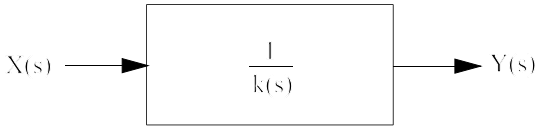
Vi får derfor (idet $X(s) = \frac{60}{s^2+1}$)

$$(s-1)(s+1)(s+2)\,Y(s) = \frac{60}{s^2+1} + s^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{60}{(s^2+1)(s-1)(s+1)(s+2)} + \frac{1}{s+2}\ .$$

---

1 Karakteristisk polynomium. Polynomiet $k(s) = s^3 + 2\cdot s^2 - s - 2$ kaldes differentialligningens **karakteristiske polynomium** (det er det samme, som optræder i karakterligningen). Hvis alle begyndelsesbetingelserne var 0, ville der gælde $Y(s) = \frac{1}{k(s)}\cdot X(s)$ svarende til det viste blokdiagram, således at input $X(s)$ ved multiplikation med $\frac{1}{k(s)}$ føres over i output $Y(s)$. Funktionen $\frac{1}{k(s)}$ kaldes derfor **overføringsfunktionen.**



Her optræder et nævnerpolynomium af højere end 4. grad, så vi må først dekomponere den ene brøk i stambrøker, inden tabel 2 i appendix 15.2 kan anvendes til tilbagetransformationen.

Dekomponering. Som vist i bind 1 afsnit 3.5 kan vi skrive brøken som en sum af stambrøker:

$$\frac{60}{(s+1)(s-1)(s+2)(s^2+1)} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s-1} + \frac{c}{s+2} + \frac{ds+e}{s^2+1} .$$

Ved at multiplicere ligningen med fællesnævneren fås:

$$60 = a(s-1)(s+2)(s^2+1) + b(s+1)(s+2)(s^2+1) + c(s+1)(s-1)(s^2+1) + (ds+e)(s+1)(s-1)(s+2) .$$

Indsættes rødderne $s = -1$, $s = 1$ og $s = -2$, fås

$s = -1$: $60 = a(-1-1)(-1+2)((-1)^2+1) \Leftrightarrow a = -15$

$s = 1$: $60 = b(1+1)(1+2)(1^2+1) \Leftrightarrow b = 5$

$s = -2$: $60 = c(-2+1)(-2-1)((-2)^2+1) \Leftrightarrow c = 4 .$

For at bestemme d og e indsættes to små hele tal, som ikke tidligere har været indsat, f. eks. $s = 0$ og $s = 2$:

$s = 0$: $60 = -15(-1)\cdot 2\cdot 1 + 5\cdot 2\cdot 1 + 4\cdot 1(-1)\cdot 1 + e\cdot 1(-1)2 \Leftrightarrow e = -1$

$s = 2$: $60 = -15\cdot 1\cdot 4\cdot 5 + 5\cdot 3\cdot 4\cdot 5 + 4\cdot 3\cdot 1\cdot 5 + (2d-12)\cdot 3\cdot 1\cdot 4 \Leftrightarrow d = 6 .$

Vi har altså

$$Y(s) = \frac{-15}{s+1} + \frac{5}{s-1} + \frac{4}{s+2} + \frac{6s-12}{s^2+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{-15}{s+1} + \frac{5}{s-1} + \frac{5}{s+2} + \frac{6s-12}{s^2+1} .$$

Tilbagetransformation. Ved at benytte formlerne 78 og 82 i tabel 2 i appendix 15.2 fås

$$\underline{\underline{y(t) = -15\cdot e^{-t} + 5\cdot e^{t} + 5\cdot e^{-2t} + 6\cos(t) - 12\sin(t)}} \quad , \quad t \in [0\,;\,\infty\,[$$

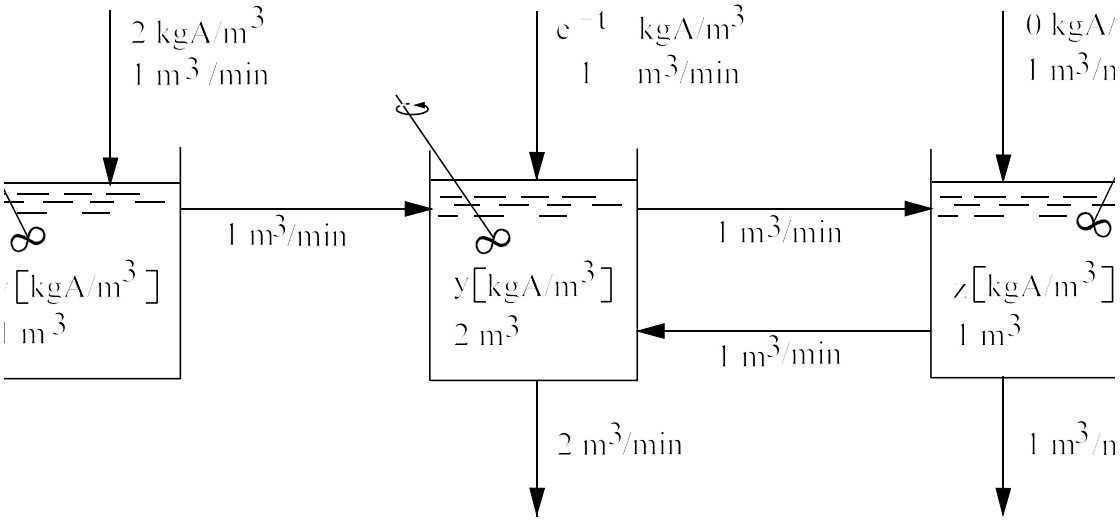
eller $$\underline{\underline{y(t) = -15\cdot e^{-t} + 5\cdot e^{t} + 5\cdot e^{-2t} + \sqrt{6^2+(-12)^2}\,\sin(t+\phi)}} \quad , \quad t \in [0\,;\,\infty\,[,$$

hvor $\phi = \arg(-12, 6) = -\pi + \operatorname{Arctan}\left(\frac{6}{-12}\right) .$

Eksempel 15.4. System af differentialligninger.

Figuren viser et system af tanke, hvori der foregår en opblanding af et stof A. Koncentrationerne $\mathrm{v}(t)$, $y(t)$ og $z(t)$ [kg A/m^3] i tankene er funktioner af tiden t. Systemet startes til tiden $t=0$ med v(0) = 1 kg A/m^3, $y(0)=0$ og $z(0)=0$.

Find $z(t)$ for alle $t\in[0;\infty[$.



LØSNING:

Differentialligninger. For hver af de 3 tanke opstilles balancen

IND + PRODUCERET = UD + AKKUMULERET

som et differentielt regnskab over, hvor mange kg A der passerer ind og ud i et tidsinterval $[\,t\,;\,t+\,dt\,]$ [1]:

$$\begin{aligned}
&\text{tank1:} && 2\cdot 1\,dt && +\ 0 && = && \mathrm{v}(t)\cdot 1\,dt \ +\ d(1\cdot \mathrm{v}(t))\\
&\text{tank2:} && \left[\mathrm{e}^{-t}\cdot 1+\mathrm{v}(t)\cdot 1+z(t)\cdot 1\right]dt && +\ 0 && = && y(t)\cdot 3\,dt \ +\ d(2\cdot y(t))\\
&\text{tank3:} && \left[y(t)\cdot 1+0\cdot 1\right]dt && +\ 0 && = && z(t)\cdot 2\,dt \ +\ d(1\cdot z(t))\ .
\end{aligned}$$

Ved division med dt fås differentialligningerne:

$$2 = \mathrm{v}(t) + \frac{d\mathrm{v}}{dt} \qquad (1)$$

$$\left[\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{v}(t)+z(t)\right] = 3\cdot y(t) + 2\,\frac{dy}{dt} \qquad (2)$$

$$y(t) = 2\cdot z(t) + \frac{dz}{dt}\ . \qquad (3)$$

[1] Ved opstilling af sådanne balancer vil vi antage, at omrøringen er perfekt, og at koncentrationerne af A er så små, at de kun giver negligeable rumfangsændringer af væsken.

Laplace-transformation. Ved hjælp af tabel 1 i appendix 15.1, linearitetsreglen og differentiationsreglen Laplace-transformeres både venstre og højre side af hver differentialligning. Herved fås de rent algebraiske ligninger:

$$\frac{2}{s} = V(s) + \left[s\cdot V(s) - 1\right] \qquad (1L)$$

$$\frac{1}{s+1} + V(s) + Z(s) = 3\cdot Y(s) + 2\left[s\cdot Y(s) - 0\right] \qquad (2L)$$

$$Y(s) = 2\cdot Z(s) + \left[s\cdot Z(s) - 0\right]. \qquad (3L)$$

Løsning af ligninger. For at eliminere $V(s)$ og $Y(s)$ kan vi f.eks. isolere $V(s)$ i ligning (1*L*) og $Y(s)$ i ligning (3*L*):

$$V(s) = \frac{1}{s+1}\left(\frac{2}{s}+1\right) \qquad (1L)$$

$$Y(s) = (s+2)\cdot Z(s). \qquad (3L)$$

Indsættes dette i ligning (2*L*) fås

$$\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+1}\left(\frac{2}{s}+1\right) + Z(s) = (2s+3)\cdot(s+2)\cdot Z(s)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{s+1}\left(\frac{2}{s}+2\right) = (2s^2+7s+5)\cdot Z(s) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{s+1}\frac{2(1+s)}{s} = 2\left(s+\frac{5}{2}\right)(s+1)\cdot Z(s)$$

$$\Leftrightarrow \quad Z(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+\frac{5}{2})}.$$

Tilbagetransformation. I tabel 2 i appendix 15.2 bruges formel 85 med $b=1,\quad c=\frac{5}{2}$ og $C=1$ til tilbagetransformationen:

$$z(t) = \frac{1}{1\cdot\frac{5}{2}}e^{0} + \frac{1}{-1(\frac{5}{2}-1)}e^{-t} + \frac{1}{-\frac{5}{2}(1-\frac{5}{2})}e^{-\frac{5}{2}t} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{z(t) = \frac{2}{5} - \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{4}{15}e^{-\frac{5}{2}t}}}.$$

15.5 FORSINKELSESREGEL

En fysisk størrelse kan pludselig ændres fra én værdi til en anden (f. eks. trykket ved åbning af en ventil, reaktionshastigheden ved tilsætning af en katalysator, den elektriske strøm ved afbrydelse af en kontakt). Selv om ændringen i virkeligheden sker over et kort tidsinterval af længden ε, f.eks som vist på figur 15.2, tillader man ofte at regne ændringen for momentan, som vist på figur 15.3.

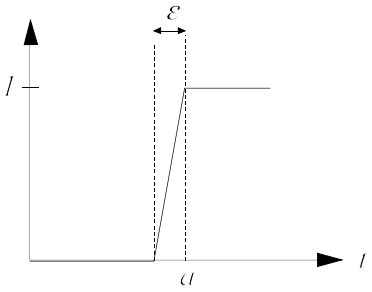


Fig 15.2. *Pludselig ændring.*

Hertil benyttes **enhedstrinfunktionen** u:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad t < 0 \\ 1 & \text{for} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Bemærk, at u's værdi kun afhænger af fortegnet på t.
Ved anvendelserne skal ændringen ske i et givet punkt a.

Vi taler da om **enhedstrinfunktionen med spring i** a (se figur 15.3):

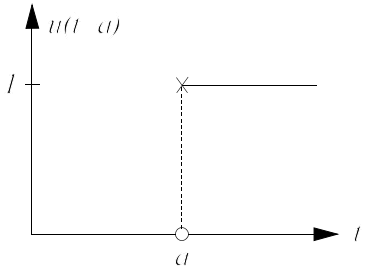


Fig. 15.3. *Enhedstrinfunktion med spring i* a.

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad t < a \\ 1 & \text{for} \quad t \geq a. \end{cases}$$

En **stykkevis defineret funktion** f (se figur 15.4) givet ved

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{for} \quad t \in [0; a_1[\ , & f_1 \in K \\ f_2(t) & \text{for} \quad t \in [a_1; a_2[\ , & f_2 \in K \\ \ldots & \ldots \quad \ldots & \ldots \\ f_{n+1}(t) & \text{for} \quad t \in [a_n; \infty[\, , & f_{n+1} \in K \, . \end{cases}$$

kan udtrykkes ved hjælp af enhedstrinfunktioner:

$$f(t) = f_1(t) + u(t-a_1)\cdot\left[-f_1(t)+f_2(t)\right] + u(t-a_2)\cdot\left[-f_2(t)+f_3(t)\right] + \ldots$$

$$+ \ u(t-a_n)\cdot\left[-f_n(t)+f_{n+1}(t)\right] .$$

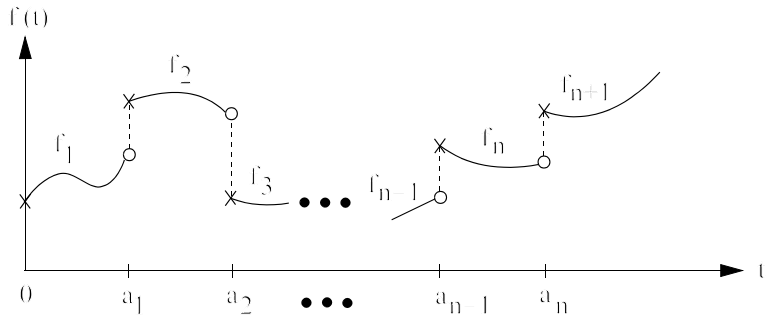


Fig 15.4. *Graf for en stykkevis defineret funktion.*

Eksempelvis kan funktionen $f(t) = \begin{cases} t & \text{for} \quad t \in [0;2[\\ e^{-t} & \text{for} \quad t \in [2;3[\\ \sin t & \text{for} \quad t \in [3;\infty[\end{cases}$

omskrives til $f(t) = t + u(t-2)\cdot\left[-t + e^{-t}\right] + u(t-3)\cdot\left[-e^{-t} + \sin t\right]$.

Funktionen givet ved $u(t-a)\cdot f(t-a)$ siges at være "forsinket med *a*" i forhold til $f(t)$, og vi vil ofte blot skrive $[f(t)]_{\text{forsinket } a}$. Sammenhængen forstås bedst ved at sammenligne graferne på figur 1.5.

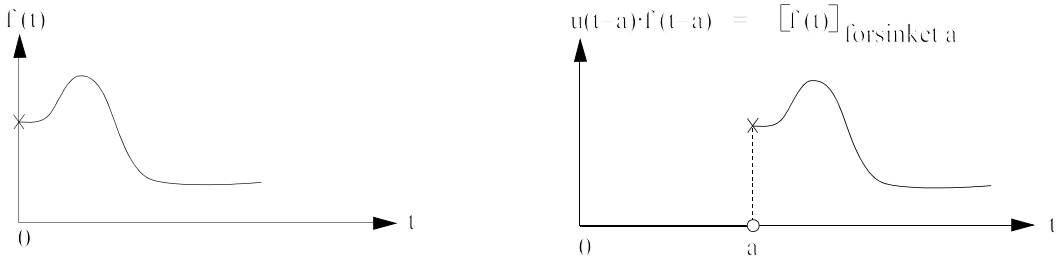


Fig 15.5. *Grafen for f og grafen for "f forsinket med a".*

Den følgende sætning gør det muligt på en nem måde at løse differentialligninger, der indeholder stykkevise funktioner og/eller tidsforsinkelser.

SÆTNING 15.4 *(forsinkelsesreglen). Lad* $f \in K$, *lad* $a \in [0;\infty[$ *og lad* $g(t) = f(t-a)$.

Så gælder reglen

$$\mathcal{L}\{[f(t)]_{\text{forsinket } a}\} = e^{-as} \cdot F(s),$$

der ofte er nemmere at anvende på formen

$$\mathcal{L}\{u(t-a) \cdot g(t)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{g(t+a)\}.$$

Formuleret for tilbagetransformation bliver reglen åbenbart

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} \cdot F(s)\} = [f(t)]_{\text{forsinket } a} = u(t-a) \cdot f(t-a).$$

Bevis. Da *f* tilhører *K*, vil $\mathcal{L}\{[f(t)]_{\text{forsinket } a}\} = \mathcal{L}\{u(t-a) \cdot f(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st} u(t-a) \cdot f(t-a)\,dt$

$= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\,dt = e^{-sa}\int_a^\infty e^{-s(t-a)} f(t-a)\,dt = e^{-sa}\int_0^\infty e^{-s\theta} f(\theta)\,d\theta = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as}F(s).$

Sættes $f(t-a) = g(t)$, kan formlen omskrives til $\mathcal{L}\{u(t-a) \cdot g(t)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{g(t+a)\}$.

Eksempel 15.5. Anvendelse af forsinkelsesreglen.

Find $\mathcal{L}\{u(t-2)\,e^{-3t}\}$ og $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^2+1}\right\}$.

LØSNING:

Bruges forsinkelsesreglen og appendix 15.1 formel 5 med *a*=3, fås

$$\mathcal{L}\{u(t-2)\,e^{-3t}\} = e^{-2s}\mathcal{L}\{e^{-3(t+2)}\} = e^{-2s}e^{-6}\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{e^{-2s-6}}{s+3}.$$

Bruges forsinkelsesreglen og appendix 15.2 formel 82 med *A*=0, *B*=1, *a*=0, *b*=1, fås

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^2+1}\right\} = \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\right]_{\text{forsinket } 3} = [\sin t]_{\text{forsinket } 3} = u(t-3) \cdot \sin(t-3).$$

Edb-løsning. I programmet Maple udføres de tilsvarende transformationer på følgende måde:

```
> with( inttrans ):
> laplace( Heaviside(t-2)*exp(-3*t), t, s ) ;
```

$$\frac{e^{-2s-6}}{s+3}$$

```
> invlaplace( exp(-3*s)/(s^2+1), s, t ) ;
```

Heaviside(t - 3) sin(t - 3).

Eksempel 15.6. Stykkevis funktion i differentialligning.

Figuren viser et system, hvor strømmen til blandetanken kommer fra beholder 1 i den 1. time, fra beholder 2 i den næste time og derefter fra beholder 3. Systemet startes med $y(0)=0$.

Find koncentrationen $y(t)$ kg A/m^3 for alle $t\in[0;\infty[$.

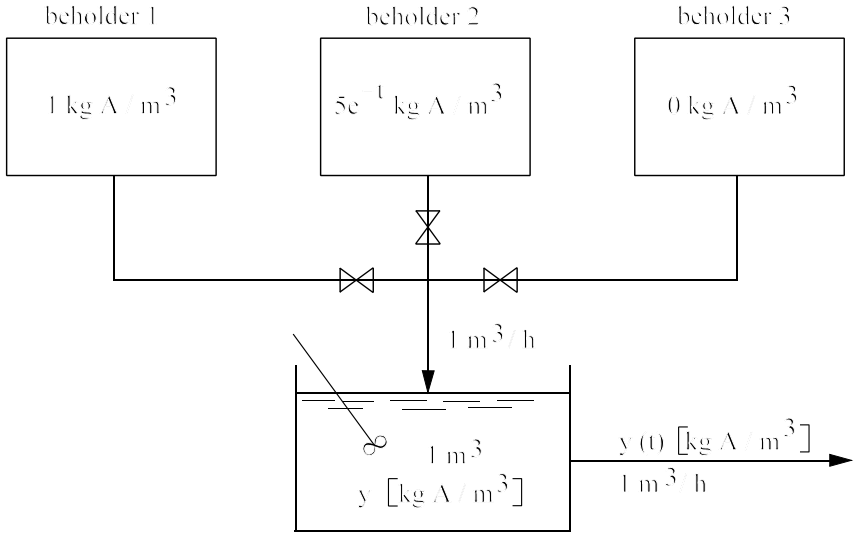


Fig. 1.6. *Der sker omkobling mellem beholderne 1, 2 og 3.*

LØSNING:

Stykkevis defineret funktion. Koncentrationen af A i strømmen til tanken er givet ved

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad t\in[0;1[\\ 5e^{-t} & \text{for} \quad t\in[1;2[\\ 0 & \text{for} \quad t\in[2;\infty[. \end{cases}$$

dvs. $f(t) = 1 + \left[-1+5e^{-t}\right]u(t-1) + \left[-5e^{-t}+0\right]u(t-2)$.

Differentialligning. For blandetanken opstilles balancen

IND + PRODUCERET = UD + AKKUMULERET

som et differentielt regnskab over, hvor mange kg A der passerer ind og ud i et tidsinterval $[\,t\,;\,t+dt\,]$:

$$\left(1+\left[-1+5e^{-t}\right]u(t-1)+\left[-5e^{-t}+0\right]u(t-2)\right)\cdot 1\,dt + 0 = y(t)\cdot 1\,dt + d(1\cdot y(t)).$$

Ved division med dt fås differentialligningen

$$1+\left[-1+5e^{-t}\right]u(t-1) - 5e^{-t}u(t-2) = y(t) + \frac{dy}{dt}.$$

Laplace-transformation. Ved hjælp af forsinkelsesreglen fås

$$\frac{1}{s} + e^{-s}\mathcal{L}\{-1+5e^{-(t+1)}\} - 5e^{-2s}\mathcal{L}\{e^{-(t+2)}\} = Y(s) + [s\cdot Y(s) - 0]$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{s} + e^{-s}\left(-\frac{1}{s} + 5\frac{e^{-1}}{s+1}\right) - 5e^{-2s}\frac{e^{-2}}{s+1} = (s+1)\cdot Y(s)\,.$$

Løsning af ligning. Af den sidste ligning fås

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} + e^{-s}\left(-\frac{1}{s(s+1)} + \frac{5e^{-1}}{(s+1)^2}\right) - e^{-2s}\frac{5e^{-2}}{(s+1)^2}\,.$$

Tilbagetransformation. I tabel 2 i appendix 15.2 bruges formel 81 med b=1, B=1 og formel 80 med a=1, B=$5e^{-1}$, idet formlerne i de 3 sidste tilfælde modificeres ved hjælp af forsinkelsesreglen:

$$y(t) = 1 - e^{-t} + \left[-1 + e^{-t} + 5e^{-1}te^{-t}\right]_{\text{forsinket 1}} - \left[5e^{-2}te^{-t}\right]_{\text{forsinket 2}}$$

$$= 1 - e^{-t} + u(t-1)\left[-1 + e^{-(t-1)} + 5e^{-1}(t-1)e^{-(t-1)}\right] - u(t-2)5e^{-2}(t-2)e^{-(t-2)}$$

15.6 DELTAFUNKTION (Diracs deltafunktion).

Ofte antager en fysisk størrelse store værdier i et kort tidsrum ε, f.eks

stoftilførslen, når en sækfuld salt pludselig tilsættes
den elektriske strøm, når en kondensator kortsluttes
regnstrømmen, når en regnbyge passerer.

Figurerne 15.7a, 15.7b og 15.7c viser eksempler på grafer for sådanne funktioner, der alle har karakter af smalle pulser (spidser).

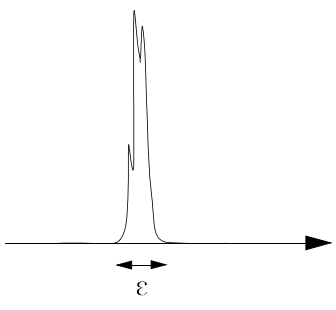


Fig. 15.7a

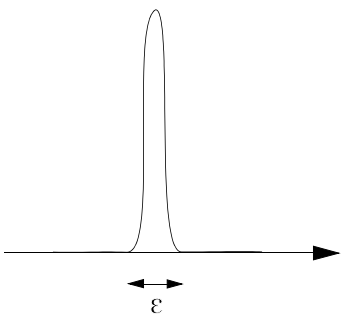


Fig.15.7b

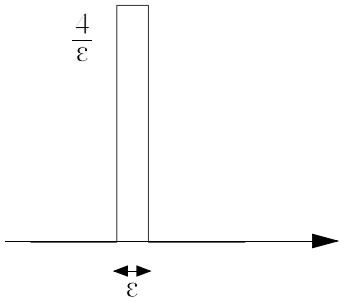


Fig. 15.7c

I praksis er man sædvanligvis ikke interesseret i formen af en sådan smal puls (eller har ingen viden om formen). Hvis man eksempelvis i et kort tidsrum ε tilsætter 4 kg af et stof A, så vil tilførselshastigheden i gennemsnit være $4 \cdot \frac{1}{\varepsilon}$ kg pr. tidsenhed i dette tidsrum, mens den er 0 udenfor tidsrummet. Det vil derfor være rimeligt at erstatte pulser som fig. 15.7a og fig. 15.7b med fig. 15.7c, der er $\frac{4}{\varepsilon}$ i tidsrummet ε og 0 udenfor dette tidsrum. Bemærk, at arealet er 4 under hver af de tre kurver.

Da man alligevel ikke er interesseret i grafernes detaljerede forløb, kan pulserne idealiseres til meget (uendelig) smalle og meget (uendelig) høje pulser, hvor arealet under hver puls forbliver det samme. Sådanne ideale pulser beskrives ved den såkaldte Diracs deltafunktion δ. I det følgende indføres for nemheds skyld en bestemt tilnærmelse δ_ε til δ.

Vi definerer "deltafunktionen" δ_ε ved

$$\delta_\varepsilon(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{for} \quad \theta \in [-\varepsilon; 0[\\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Ved anvendelserne er θ som regel erstattet med $t - a$ (se figur 15.8):

$$\delta_\varepsilon(t-a) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{for} \quad t \in [a-\varepsilon; a[\\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

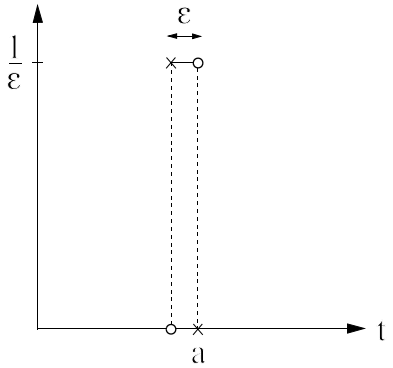


Fig. 15.8. *Deltafunktion.*

Deltafunktionen optræder i differentialligninger. Som regel er den nøjagtige værdi af ε uden praktisk betydning, når blot ε er lille (jævnfør eksempel 15.6). Er løsningen til et differentialligningsproblem givet ved $y_\varepsilon(t)$, vil man derfor være tilfreds med at beregne løsningens grænseværdi $y(t)$ for $\varepsilon \to \infty$. Det giver en stor beregningsmæssig forenkling.

SÆTNING 15.5 *(differentialligning med deltafunktion). Lad der være givet en differentialligning med deltafunktion*

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = x(t) + m \cdot \delta_\varepsilon(t-a), \qquad a>0$$

samt en række begyndelsbetingelser $y(0), \frac{dy}{dt}(0), \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0)$.
Så gælder

1) *løsningen* y_ε har en grænsefunktion y for $\varepsilon \to \infty$,
2) *grænsefunktionen y tilhører mængden K,*
3) *grænsefunktionen y kan bekvemt findes ved at erstatte den Laplace-transformerede deltafunktion* $\mathcal{L}\{\delta_\varepsilon(t-a)\}$ *med* e^{-as}.

Beviset for sætning 15.5 findes i supplement 15B.

Udvidelse til flere deltafunktioner. Sætningen gælder også, hvis der optræder en linearkombination af flere deltafunktioner $m_1 \cdot \delta_{\varepsilon_1}(t-a_1) + m_2 \cdot \delta_{\varepsilon_2}(t-a_2) + \ldots + m_N \cdot \delta_{\varepsilon_N}(t-a_N)$. I så fald findes løsningens grænsefunktion for $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N) \to (0, 0, \ldots, 0)$ ved at erstatte $\mathcal{L}\{\delta_{\varepsilon_j}(t-a_j)\}$ med $e^{-a_j s}$ for ethvert $j \in \{1, 2, 3, \ldots, N\}$.

Nogle egenskaber ved deltafunktionen.

1) Arealet under grafen for deltafunktionen er 1, så vi har $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t-a)\,dt = 1$.

2) Når f er stykkevis kontinuert, gælder $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_c^d f(t) \cdot \delta_\varepsilon(t-a)\,dt = \begin{cases} f(a-) & \text{for } a \in]c;d] \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$
dvs. alle integrationer med deltafunktioner bliver nemme for $\varepsilon \to 0$.

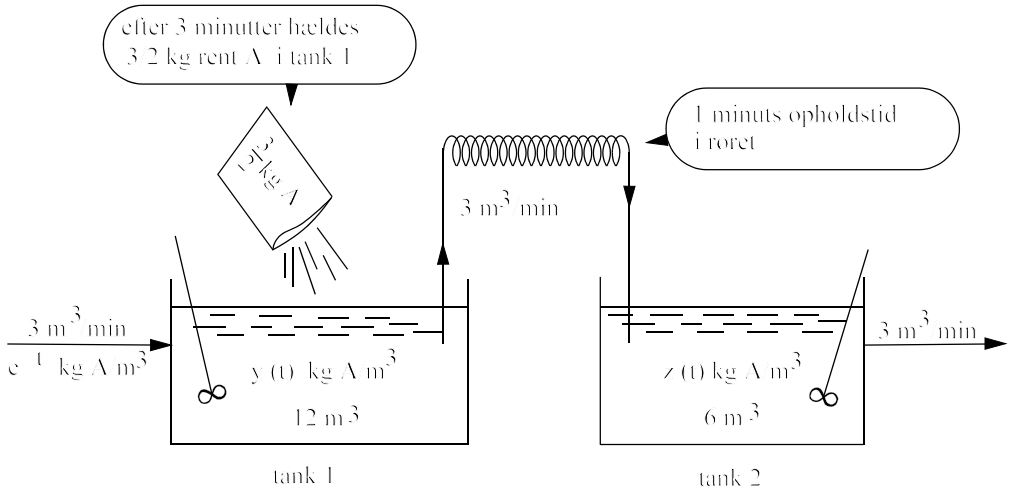
3) I en vis forstand kan $\delta_\varepsilon(t-a)$ for $\varepsilon \to 0$ opfattes som den afledede af enhedstrinsfunktionen, dvs. $\frac{du(t-a)}{dt} = \delta_\varepsilon(t-a)$.

Yderligere detaljer om deltafunktionen findes i ref. 8 og ref. 9 i litteraturlisten.

Eksempel 15.7. System af differentialligninger med deltafunktion og forsinkelse.

Figuren viser et system, hvor der 3 minutter efter starten pludselig hældes $\frac{3}{2}$kg rent A i tank 1. Væske fra tank 1 pumpes gennem et langt rør (kølespiral) til tank 2. Hver væskedel er 1 minut om at gennemløbe røret. Systemet startes til tiden $t=0$ med med $y(0)=0$, $z(0)=0$ og rent vand i kølespiralen.

Find koncentrationen $z(t)$ for alle $t \in [0;\infty[$.



LØSNING:

Deltafunktion. Når der pludselig tilføres $\frac{3}{2}$kg A, kan tilførselshastigheden sættes til $\frac{3}{2}\,\delta_\varepsilon(t-3)$kg A/min. Tilførslen kan nemlig tænkes foretaget i et kort tidsinterval $[3-\varepsilon;\ 3[$ af længden ε, hvor tilførselshastigheden altså i gennemsnit bliver $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon}$ kg A/min, mens der uden for det lille tidsinterval ikke tilføres rent A. Dette beskrives netop ved den nævnte deltafunktion $\frac{3}{2}\,\delta_\varepsilon(t-3)$.

Forsinkelse. Strømmen til tank 2 har ved ankomsten koncentrationen $u(t-1)\cdot y(t-1)$[kg A/m^3]. I det 1. minut modtager tank 2 nemlig væske med koncentrationen 0, fordi røret fra starten var fyldt med rent vand. Og efter det 1. minut modtages koncentrationen $y(t-1)$, nemlig til enhver tid den koncentration, der 1 minut tidligere herskede i tank 1. Dette beskrives netop ved den nævnte forsinkede funktion $u(t-1)\cdot y(t-1)$.

Differentialligninger. For hver af de to tanke opstilles balancen

IND + PRODUCERET = UD + AKKUMULERET

som et differentielt regnskab over, hvor mange kg A der passerer ind og ud i et tidsinterval $[t;\ t+dt]$:

tank 1: $$\left[e^{-t}\cdot 3+\frac{3}{2}\delta_\varepsilon(t-3)\right]dt+0=y(t)\cdot 3\,dt+d\big(12\cdot y(t)\big)$$

tank 2: $$u(t-1)\cdot y(t-1)\cdot 3\,dt+0=z(t)\cdot 3\,dt+d\big(6\cdot z(t)\big).$$

Ved division med $3\cdot dt$ fås differentialligningerne

$$e^{-t}+\frac{1}{2}\delta_\varepsilon(t-3)=y(t)+4\frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

$$u(t-1)\cdot y(t-1)=z(t)+2\frac{dz}{dt}\,. \qquad (2)$$

Laplace-transformation. For nemheds skyld foretager vi nu grænseovergangen $\varepsilon\to 0$, og ifølge sætning 15.5 punkt 3 skal vi da blot erstatte $\mathcal{L}\{\delta_\varepsilon(t-a)\}$ med e^{-as} (jævnfør også formel 75 i appendix 15.1 med $a=3$):

$$\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}e^{-3s}=Y(s)+4\big[s\cdot Y(s)-0\big] \qquad (1L)$$

$$e^{-s}\cdot Y(s)=Z(s)+2\big[s\cdot Z(s)-0\big]\,. \qquad (2L)$$

Løsning af ligninger. Af ligning $(1L)$ fås

$$Y(s) = \frac{1}{4s+1}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}e^{-3s}\right),$$

som indsættes i $(2L)$:

$$\frac{e^{-s}}{4s+1}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}e^{-3s}\right) = (2s+1)\cdot Z(s)$$

$$\Leftrightarrow \quad Z(s) = \frac{1}{8}e^{-s}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{4}\right)\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+1)} + \frac{1}{16}e^{-4s}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{4}\right)\left(s+\frac{1}{2}\right)}.$$

Tilbagetransformation. I tabel 2, appendix 15.2 bruges formel 85 med $a = \frac{1}{4}$,

$b = \frac{1}{2}$, $c = 1$, $C = \frac{1}{8}$, samt formel 81 med $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{16}$, idet begge

formler modificeres ved hjælp af forsinkelsesreglen:

$$z(t) = \left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)}e^{-\frac{1}{4}(t-1)} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{1}{2}(t-1)} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}e^{-(t-1)}\right)u(t-1)$$

$$+ \left(\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{4}(t-4)} - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{2}(t-4)}\right)u(t-4)$$

$$\Leftrightarrow \quad z(t) = \underline{\underline{\left(\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}(t-1)} - e^{-\frac{1}{2}(t-1)} + \frac{1}{3}e^{-(t-1)}\right)u(t-1)}} + \underline{\underline{\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}(t-4)} - \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(t-4)}\right)u(t-4)}}.$$

Edb-løsning. I programmet Maple udføres de tilsvarende transformationer på følgende måde:

```
>with ( inttrans ) ;
```
[addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, laplace, mellin]

```
> ligning1 :=  exp(-t) + 1/2*Dirac(t-3)  =  y(t) + 4*diff( y(t), t ) ;
```

$$ligning1 := e^{(-t)} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Dirac}(t-3) = y(t) + 4\left(\frac{\partial}{\partial t}y(t)\right)$$

```
> ligning2 :=  Heaviside(t-1)*y(t-1)  = z(t) + 2*diff( z(t), t ) ;
```

$$ligning2 := \mathrm{Heaviside}(t-1)\,y(t-1) = z(t) + 2\left(\frac{\partial}{\partial t}z(t)\right)$$

```
> addtable( laplace, z(t), Z(s), t, s ) ;

> addtable( laplace, y(t), Y(s), t, s ) ;

> laplace( {ligning1, ligning2}, t, s ) ;
```

$$\left\{\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}e^{(-3s)} = \mathrm{Y}(s) + 4\,s\,\mathrm{Y}(s) - 4\,\mathrm{y}(0),\quad e^{(-s)}\,\mathrm{Y}(s) = Z(s) + 2\,s\,Z(s) - 2\,z(0)\right\}$$

```
> solve( %, {Y(s), Z(s)} ) ;
```

$$\left\{\mathrm{Y}(s) = \frac{1}{2}\,\frac{2+e^{(-3s)}+e^{(-3s)}s+8y(0)+8y(0)s}{1+5s+4s^2}\ ,\right.$$

$$\left.\mathrm{Z}(s) = \frac{1}{2}\,\frac{2+e^{(-3s)}+e^{(-3s)}s+8y(0)+8y(0)s+4z(0)\,e^{s}+20z(0)s\,e^{s}+16z(0)s^2e^{s}}{e^{s}(1+7s+14s^2+8s^3)}\right\}$$

```
> subs( y(0)=0, z(0)=0, % ) ;
```

$$\left\{\mathrm{Y}(s) = \frac{1}{2}\,\frac{2+e^{(-3s)}+e^{(-3s)}s}{1+5s+4s^2}\ ,\ \mathrm{Z}(s) = \frac{1}{2}\,\frac{2+e^{(-3s)}+e^{(-3s)}s}{e^{s}(1+7s+14s^2+8s^3)}\right\}$$

```
> op( 2, % ) ;
```

$$\mathrm{Z}(s) = \frac{1}{2}\,\frac{2+e^{(-3s)}+e^{(-3s)}s}{e^{s}(1+7s+14s^2+8s^3)}$$

```
> z := invlaplace( %, s, t ) ;
```

$$z := \mathrm{invlaplace}(Z(s), s, t) = \frac{2}{3}\,\mathrm{Heaviside}(t-1)\,e^{\left(-\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}\right)} - \mathrm{Heaviside}(t-1)\,e^{\left(-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)}$$
$$+ \frac{1}{3}\,\mathrm{Heaviside}(t-1)\,e^{(-t+1)} + \frac{1}{4}\,\mathrm{Heaviside}(t-4)\,e^{\left(-\frac{1}{4}t+1\right)} - \frac{1}{4}\,\mathrm{Heaviside}(t-4)\,e^{\left(-\frac{1}{2}t+2\right)}$$

15.7 FLERE REGNEREGLER

Ved anvendelserne af Laplace-transformationen kan der lejligvis blive brug for nogle af de følgende regneregler.

SÆTNING 15.6 (*flere regneregler*). *Lad* $f, g \in K$ *og lad* $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ *og* $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$. *Så gælder*

1) $F(s+a) = \mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\}$, $a \in \mathbb{C}$ (*forskydningsreglen*)

2) $a \cdot F(as) = \mathcal{L}\left\{ f\left(\frac{t}{a}\right)\right\}$, $a > 0$ (*affinitetsreglen*)

3) *hvis* f *er periodisk med perioden* $T > 0$, *så gælder*

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$$ (*periodicitetsreglen*)

4) *hvis der eksisterer en "slutværdi"* $\lim_{t \to \infty} f(t) = A$, *så kan den beregnes af*

$$A = \lim_{s \to 0+} s \cdot F(s)$$ (*slutværdireglen*)

5) $\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$

6) *hvis* f *er kontinuert og har en afledet* $\frac{df}{dt} \in K$ *(fra højre), så gælder*

$$\lim_{s \to \infty} s \cdot F(s) = f(0)$$ (*begyndelsesværdireglen*)

7) $F(s) \cdot G(s) = \mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(t - v)\, g(v)\, dv \right\}$ (*foldningsreglen*)

8) *hvis* f *afhænger af en parameter* $x \in \mathbb{R}$, *så har man under meget generelle betingelser (se beviset)*

$$\frac{\partial^n F(x,s)}{\partial x^n} = \mathcal{L}\left\{ \frac{\partial^n f(x,t)}{\partial x^n} \right\}$$ (*parameter-differentiationsreglen*)

9) $\frac{d^n F(s)}{ds^n} = \mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}$ (*t-multiplikationsreglen*)

10) $\mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(\theta)\, d\theta \right\} = \frac{1}{s} F(s)$. (*integrationsreglen*)

NB: Funktionen givet ved integralet $\int_0^t f(t - v)\, g(v)\, dv$ kaldes foldningen af f med g, og betegnes kort $f * g$. Det kan vises, at der gælder $f * g = g * f$ og $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Bevis.

1) $\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(e^{-at}f(t)\right)dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}f(t)\,dt = F(s+a).$

2) $\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}f\left(\frac{t}{a}\right)dt = a\int_0^\infty e^{-sa\theta}f(\theta)\,d\theta = a\cdot F(as).$

3) $f(t-T) = f(t)$ (periodisk)

$\Rightarrow \quad f(t) - u(t-T)\cdot f(t-T) = [1-u(t-T)]f(t)$ (multipliceret med $-u(t-T)$ og adderet $f(t)$)

$\Leftrightarrow \quad F(s) - e^{-sT}F(s) = \int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$ (ved Laplace-transformation)

$\Leftrightarrow \quad F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$ (divideret med $1-e^{-sT}$).

4) Lad $\varepsilon > 0$. Hvis $\lim_{t\to\infty} f(t) = A$, så eksisterer der et tal $k > 0$, sådan at $|f(t)-A| < \frac{\varepsilon}{2}$ for ethvert $t > k$.

Lad s > 0. Så fås

$$|sF(s)-A| = |s\,\mathcal{L}\{f(t)-A\}| = \left|\int_0^\infty s\,e^{-st}(f(t)-A)\,dt\right| \le \int_0^k s\,e^{-st}|f(t)-A|\,dt + \int_k^\infty s\,e^{-st}|f(t)-A|\,dt$$

$$\le \int_0^k s\,e^{-st}\left(Me^{|\alpha|k}+|A|\right)dt + \int_k^\infty s\,e^{-st}\frac{\varepsilon}{2}dt = \left(Me^{|\alpha|k}+|A|\right)(1-e^{-sk}) + \frac{\varepsilon}{2}e^{-sk} < \varepsilon$$

for ethvert $s < \frac{1}{k}\ln\left(\frac{2\left(Me^{|\alpha|k}+|A|\right)}{2\left(Me^{|\alpha|k}+|A|\right)-\varepsilon}\right)$. Altså gælder $s\cdot F(s) - A \to 0 \quad \text{for} \quad s \to 0+$.

5) $|F(s)| = \left|\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt\right| \le \int_0^\infty e^{-st}Me^{\alpha t}\,dt = \frac{M}{s-a}$, hvoraf $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0.$

6) Af differentiationsreglen fås $\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = s\cdot F(s) - f(0).$ Af den foregående regel 5) anvendt på $\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\}$ følger derfor, at $\lim_{s\to\infty}(s\cdot F(s) - f(0)) = 0.$

7) $$F(s)\cdot G(s) = \int_0^\infty e^{-s\theta}f(\theta)\,d\theta\cdot\int_0^\infty e^{-sv}g(v)\,dv = \int_0^\infty d\theta\int_0^\infty e^{-s(\theta+v)}f(\theta)\,g(v)\,dv$$

$$= \iint_S e^{-s(\theta+v)}f(\theta)\,g(v)\,dA$$ (planintegral).

Substitueres $t = \theta + v$, fås $F(s)\cdot G(s) = \int_0^\infty dt\,e^{-st}\int_0^t f(t-v)\,g(v)\,dv = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-v)\,g(v)\,dv\right\}.$

8) Det antages, at $\frac{\partial f}{dx}, \frac{\partial^2 f}{dx^2}, \ldots, \frac{\partial^{n+2}f}{dx^{n+2}}$ eksisterer, tilhører K og er eksponentielt begrænsede $\left|\frac{\partial^p f(x,t)}{dx^p}\right| < M_p(x)\,e^{\alpha_p(x)\cdot t}$, på en sådan måde, at der svarende til ethvert givet x_0 eksisterer en omegn $\omega_p(x_0)$, i hvilken $M_p(x)$ og $\alpha_p(x)$ begge har en øvre grænse M_p^* og α_p^*.

Først vises reglen for $n = 1$. Vi skal da vise, at

$\frac{F(x_0+\Delta x,s)-F(x_0,s)}{\Delta x} \to \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt$ for $\Delta x \to 0$ eller

$U(x_0,\Delta x,s) \to 0$ for $\Delta x \to 0$, hvor

$$U(x_0,\Delta x,s) = \int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{F(x_0+\Delta x,t)-F(x_0,t)}{\Delta x} - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right)dt.$$

Anvendes differentialregningens middelværdisætning to gange, fås

$$|U(x_0,\Delta x,s)| = \left|\int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x,t)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right)dt\right| = \left|\int_0^\infty e^{-st}\,\theta_1\Delta x\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+\theta_1\theta_2\Delta x,t)\,dt\right|$$
$$\le |\Delta x|\,M_2^*\int_0^\infty e^{-(s-\alpha_2^*)t}dt = \frac{|\Delta x|\,M_2^*}{s-\alpha_2^*} \to 0 \quad \text{for} \quad \Delta x\to 0 \qquad (\theta_1,\theta_2\in\,]0;1[).$$

Derefter kan det indses, at reglen må gælde for ethvert $n\in\{1,2,3,\ldots\}$, idet man blot anvender sætningen for $n=1$ flere gange efter hinanden.

9) I forskydningsreglen $F(s+a) = \mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}$ kan vi ifølge regel 8) differentiere n gange med hensyn til parameteren a. Sættes derpå $a=0$, fås $\frac{d^nF(s)}{ds^n} = \mathcal{L}\{(-t)^nf(t)\}$.

10) Da $f\in K$, vil funktionen g givet ved $g(t) = \int_0^t f(\theta)d\theta$ tilhøre K, have en afledet fra højre $\frac{dg}{dt} = f\in K$ og være kontinuert. Vi kan derfor anvende differentiationsreglen på g.
Af $\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\int_0^t f(\theta)d\theta\right\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$ fås derved $s\,\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\theta)d\theta\right\} - 0 = F(s)$.

Eksempel 15.8. Brug af regneregler.

1) Lad $F(s) = \frac{1}{s-e^{1-s}}$. Her er $F(1)$ ikke defineret. Dan et udtryk for $f(t)$, hvori der kun skal tilbagetransformeres en funktion, som er defineret for alle $s>0$. (Har betydning for numerisk tilbagetransformation, som omtales i supplement 15D.)

LØSNING:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad\Leftrightarrow\quad e^{-t}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s+1)\} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{f(t) = e^t\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1-e^{-s}}\right\}}}.$$

2) Find $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}$, når det oplyses, at $\mathcal{L}\{\sin(t)\} = \frac{1}{s^2+1} = F(s)$.

LØSNING:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{1}{\omega}\cdot F\left(\frac{s}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega\left(\left(\frac{s}{\omega}\right)^2+1\right)} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

3) Lad f være periodisk med perioden T, og lad $f(t) = 1-u(t-a)$ for $t\in[0;T[$ $\quad(a\in\,]0;T[)$.
Find $F(s)$.

LØSNING:

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}(1-u(t-a))dt = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^a e^{-st}dt = \underline{\underline{\frac{1-e^{-as}}{s(1-e^{-sT})}}}.$$

4) Lad $F(s) = \dfrac{as^2+bs+c}{s\left(s+1-\frac{1}{2}e^{-s}\right)}$. Det oplyses, at $f(t)$ har slutværdien $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 2$.

Find konstanten c.

LØSNING:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0+} s\cdot F(s) = \lim_{s\to 0+} \frac{as^2+bs+c}{s+1-\frac{1}{2}e^{-s}} = 2c = 2 \quad \text{for} \quad \underline{\underline{c=1}}.$$

5) Lad $F(s) = \dfrac{as^2+bs+c}{s\left(s+1-\frac{1}{2}e^{-s}\right)}$ være den Laplace-transformerede af en funktion i K.

Find konstanten a.

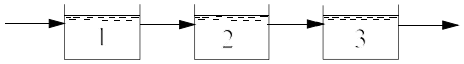
LØSNING:

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{a+\frac{b}{s}+\frac{c}{s^2}}{1+\frac{1}{s}-\frac{1}{2s}e^{-s}} = a = 0 \quad \text{for} \quad \underline{\underline{a=0}}.$$

6) Lad $F(s) = \dfrac{bs+c}{s\left(s+1-\frac{1}{2}e^{-s}\right)}$. Bestem konstanten b, sådan at $f(0)=0$.

LØSNING:

$$\lim_{s\to\infty} s\cdot F(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{b+\frac{c}{s}}{1+\frac{1}{s}-\frac{1}{2s}e^{-s}} = b = 0 \quad \text{for} \quad \underline{\underline{b=0}}.$$

7) For strømningen gennem tre beholdere 

gælder foldningen

$c_{ud} = e_1 * e_2 * e_3 * c_{ind}$, hvor c_{ind} og c_{ud} angiver koncentrationen af et sporstof (tracer) , mens e_1, e_2 og e_3 angiver de tre "aldersfordelinger" [1].

Find funktionen e_2, når c_{ind}, c_{ud}, e_1 og e_3 er kendte funktioner.

LØSNING:

Laplace-transformation giver $C_{ud}(s) = E_1(s)\cdot E_2(s)\cdot E_3(s)\cdot C_{ind}(s)$, hvoraf

$$e_2(t) = \underline{\underline{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_{ud}(s)}{E_1(s)\cdot E_3(s)\cdot C_{ind}(s)}\right\}}}.$$

[1] O. Levenspiel: "Chemical reaction engineering", 1972, Wiley & Sons, side 264.

8) Lad der være givet formlen $\mathcal{L}\{e^{-bt}\cos(\omega t+\phi)\} = \dfrac{(s+b)\cos\phi - \omega\cdot\sin\phi}{(s+b)^2+\omega^2}$ (kan vises ved hjælp af Eulers formler). Forklar, hvordan de fleste formler i tabel 1 bag i bogen kan udledes af denne ene formel.

LØSNING:

Differentiationen $\dfrac{\partial^n}{\partial b^n}$ giver en formel for $t^n e^{-bt}\cos(\omega t+\phi)$. Indsættes heri $\omega = ic$, $\phi = iq$, $\cos(ix) = \cosh(x)$ og $i\cdot\sin(ix) = -\sinh(x)$, fås en formel for $t^n e^{-bt}\cosh(ct+q)$.

Differentiationerne $\dfrac{\partial}{\partial\phi}$ og $\dfrac{\partial}{\partial q}$ giver derefter formler for $t^n e^{-bt}\sin(\omega t+\phi)$ og $t^n e^{-bt}\sinh(ct+q)$. Ved i de fundne formler at sætte én eller flere af parametrene b, ω, Φ, n, c og q lig med 0 fås resten af tabel 1, bortset fra de særlige funktioner i slutningen.

9) Find $F(s) = \mathcal{L}\left\{\dfrac{\sin t}{t}\right\}$, idet det oplyses, at $\mathcal{L}\{\sin t\} = \dfrac{1}{s^2+1}$.

LØSNING:

$\dfrac{dF(s)}{ds} = \mathcal{L}\left\{\dfrac{(-t)\sin t}{t}\right\} = -\dfrac{1}{s^2+1}$, hvoraf $F(s) = -\operatorname{Arctan}(s) + C$.

Da $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = -\dfrac{\pi}{2} + C$, fås af regel 5), at $C = \dfrac{\pi}{2}$. Altså har vi $F(s) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(s)$ eller $F(s) = \underline{\underline{-\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{s}\right)}}$.

10) Find $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \theta^2 e^{-3\theta}\,d\theta\right\}$.

LØSNING:

$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \theta^2 e^{-3\theta}\,d\theta\right\} = \dfrac{1}{s}\mathcal{L}\{t^2 e^{-3t}\} = \underline{\underline{\dfrac{2}{s(s+3)^3}}}$.

SUPPLEMENT: 15A BEVIS FOR SÆTNING 15.1: EKSISTENS AF LAPLACE-TRANSFORMATION

SÆTNING 15.1

1) (Laplace-transformationen $\mathcal{L}$). Lad $f \in K$ og lad $s \in \mathbb{R}$ (eller C). Så kan der defineres en "Laplace-transformeret" funktion F ved

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

for de s-værdier, hvor s (eller Re*(s)) er tilstrækkelig stor.*

2) (Eksistens af $\mathcal{L}^{-1}$). I mængden K er der ikke andre funktioner end f, som har den Laplace-transformerede F.

1) Den første del af sætningen siger, at $\lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-st} f(t)\,dt$ eksisterer. Lad $g(x) = \int_0^x e^{-st} f(t)\,dt$ for alle $x \in [0;\infty[$. Da $f \in K$ er eksponentielt begrænset, findes der to tal M, $\alpha \in R$, sådan at $|f(t)| < Me^{\alpha t}$ for ethvert $t \in [0;\infty[$. Lad Re (s) > α , lad $\varepsilon > 0$ og lad $x, x' \in [0;\infty[$, hvor f.eks $x \geq x'$. Vi finder da

$$|g(x) - g(x')| = \left|\int_0^x e^{-st} f(t)dt - \int_0^{x'} e^{-st} f(t)dt\right| = \left|\int_{x'}^x e^{-st} f(t)dt\right| \leq \int_{x'}^x \left|e^{-st} f(t)\right| dt \leq \int_{x'}^x e^{-\mathrm{Re}(s)t} M e^{\alpha t}\,dt$$

$$= \frac{M}{\mathrm{Re}(s-\alpha)}\left(e^{-(\mathrm{Re}(s)-\alpha)x'} - e^{-(\mathrm{Re}(s)-\alpha)x}\right) < \varepsilon \quad \text{for alle} \quad x, x' > k \qquad \left(k = \frac{1}{\mathrm{Re}(s)-\alpha} \cdot \ln\frac{2M}{(\mathrm{Re}(s)-\alpha)\varepsilon}\right).$$

Ifølge Cauchy's almindelige konvergensprincip[1] har $g(x)$ derfor en grænseværdi for $x \to \infty$.

2) Vi skal vise, at hvis to funktioner f_1 og f_2 har den samme Laplace-transformerede $F_1 = F_2$, så er de selv ens. For simpelheds skyld antages, at f_1 og f_2 er kontinuerte. (Et præcist bevis uden denne antagelse gives af G. Doetsch på side 33-39 i reference 4 i litteraturlisten.)

Idet $\mathcal{L}\{f_1\} = \mathcal{L}\{f_2\}$, har vi $\int_0^\infty e^{-st}\left(f_1(t) - f_2(t)\right)dt = 0$ for Re(s) > α .

Lad $n \in \{0,1,2,3,\ldots\}$, og sæt $s = n + \alpha + 2$. Vi får så

$\int_0^\infty e^{-(n+1)t}\left(e^{-(\alpha+1)t}(f_1(t) - f_2(t))\right)dt = 0$ for ethvert $n \in \{0,1,2,3,\ldots\}$.

Heri substitueres $t = -\ln x$, og idet vi sætter $h(x) = e^{(\alpha+1)\cdot\ln x}\left(f_1(-\ln x) - f_2(-\ln x)\right)$ og $h(0) = 0$, fås

$\int_0^1 x^n h(x)dx = 0$ for ethvert $n \in \{0,1,2,3,\ldots\}$, hvor h er kontinuert i [0 ; 1]. Ifølge den efterfølgende hjælpesætning 15.1A har vi derfor $h(x) = 0$ for alle $\in [0;1]$ dvs. $f_1(t) = f_2(t)$ **for ethvert** $t \in [0;\infty[$

HJÆLPESÆTNING 15.1A *(momentsætning). Lad en funktion h være kontinuert i det lukkede interval* $[a;b]$.
Hvis $\int_a^b x^n h(x)dx = 0$ *for ethvert* $n \in \{0,1,2,3,\ldots\}$, *så er* $h(x) = 0$ *for ethvert* $x \in [a;b]$.
NB: Integralet $\int_a^b x^n h(x)dx$ *kaldes for det* ***n'te moment*** *af h på* $[a;b]$.

Bevis. Der henvises til side 33 - 39 i reference 4 i litteraturlisten. Ved beviset benyttes følgende sætning af Weierstrass om uniform polynomie-approksimation:

Lad en funktion h være kontinuert i det lukkede interval $[a;b]$. *Så vil der for ethvert positivt tal* ε , *eksistere et polynomium* $P_\varepsilon(x)$, *således at* $|P_\varepsilon(x) - h(x)| < \varepsilon$ *for ethvert* $x \in [a;b]$.

Et bevis for Weierstrass's sætning findes på side 273-274 i reference 7 i litteraturlisten.

---

[1] Princippet omtales på side 66 i reference 1 i litteraturlisten.

SUPPLEMENT: 15B BEVIS FOR SÆTNING 15.5: DIFFERENTIALLIGNING MED DELTAFUNKTION

SÆTNING 15.5 *(differentialligning med deltafunktion). Lad der være givet en differentialligning med deltafunktion*

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = x(t) + m\cdot\delta_\varepsilon(t-a), \qquad a>0$$

samt en række begyndelsbetingelser $y(0), \frac{dy}{dt}(0), \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0)$.

Så gælder 1) *løsningen* y_ε *har en grænsefunktion* y *for* $\varepsilon \to \infty$,

2) grænsefunktionen y_ε *tilhører mængden* K,

3) grænsefunktionen y_ε *kan bekvemt findes ved at erstatte den Laplace-transformerede funktion* $\mathcal{L}\{\delta_\varepsilon(t-a)\}$ *med* e^{-as}.

Bevis. Analogt til eksempel 15.3 er løsningen givet ved

$$y_\varepsilon(t) = \mathcal{L}^{-1}\{O(s)\cdot[X(s) + m\cdot\Delta_\varepsilon(s,a) + P(s)]\} \qquad \text{(begyndelsesværdier giver } P(s)\text{)}.$$

Her er overføringsfunktionen $O = O(s) = \frac{1}{k(s)}$ en brudden rational funktion. Den kan derfor dekomponeres, dvs. den har en tilbagetransformeret funktion $o = o(t)$, der tilhører K.

Den Laplace-transformerede af $\delta_\varepsilon(t-a)$ er betegnet $\Delta_\varepsilon(s,a)$. Da vi kun skal undersøge $y_\varepsilon(t)$ for $\varepsilon \to 0$, er det nok at se på det led, der indeholder ε (konstanten m udelades for simpelheds skyld).
Lad for kortheds skyld $y_\varepsilon^*(t)$ betegne $\mathcal{L}^{-1}\{O(s)\cdot\Delta_\varepsilon(s,a)\}$.

1) Først udregnes deltafunktionens Laplace-transformerede:

$$\Delta_\varepsilon(s,a) = \mathcal{L}\{\delta_\varepsilon(t-a)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\varepsilon}[u(t-(a-\varepsilon)) - u(t-a)]\right\} = \frac{1}{\varepsilon s}\left[e^{-(a-\varepsilon)s} - e^{-as}\right].$$

Dette resultat indsættes i udtrykket for $y_\varepsilon^*(t)$, så vi får $y_\varepsilon^*(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{O(s)\frac{1}{s}\frac{1}{\varepsilon}\left[e^{-(a-\varepsilon)s} - e^{-as}\right]\right\}$.

Ved at bruge integrationsreglen $\mathcal{L}^{-1}\left\{O(s)\frac{1}{s}\right\} = \int_0^t o(\theta)\,d\theta$ i forbindelse med forsinkelsesreglen fås nu

$$y_\varepsilon^*(t) = \frac{1}{\varepsilon}\left[u(t-a+\varepsilon)\int_0^{t-a+\varepsilon} o(\theta)d\theta - u(t-a)\int_0^{t-a} o(\theta)\,d\theta\right].$$

Vi skal undersøge dette udtryk for $\varepsilon \to 0$.

For $t < a$ finder vi umiddelbart $y_\varepsilon^*(t) \to 0$ for $\varepsilon \to 0$.

For $t \geq a$ gælder

$$y_\varepsilon^*(t) = \frac{\int_0^{t-a+\varepsilon} o(\theta)d\theta - \int_0^{t-a} o(\theta)d\theta}{\varepsilon} \underset{\substack{T\to 0\\ N\to 0}\}\varepsilon\to 0}{\overset{\text{l'Hospital}}{\sim}} \frac{o(t-a+\varepsilon) - 0}{1} \to o(t-a) \text{ for } \varepsilon \to 0.$$

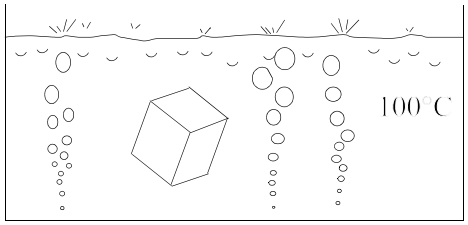
Altså har vi $y_\varepsilon^*(t) \to u(t-a)\cdot o(t-a)$ for $\varepsilon \to 0$.

2) Det ses, at grænsefunktionen givet ved $u(t-a)\cdot o(t-a)$ tilhører K, fordi o tilhører K.

3) Havde vi fra starten benyttet e^{-as} i stedet for $\Delta_\varepsilon(s,a)$, så ville vi straks have fået $y^*(t) = \mathcal{L}^{-1}\{O(s)\,e^{-as}\} = u(t-a)\cdot o(t-a)$, dvs. netop den søgte grænsefunktion.

SUPPLEMENT: 15C PARTIELLE DIFFERENTIAL-LIGNINGER

Vi har set, at differentialligninger kan bruges til at beregne fysiske størrelser som funktioner $f(t)$ af tiden t. I praksis vil mange fysiske størrelser imidlertid afhænge af stedkoordinaterne x, y og z. Hvis man for eksempel opvarmer et fast legeme på overfladen, vil temperaturen inde i legemet blive en funktion $f(x,y,z,t)$, der afhænger både af sted (x,y,z) og tid t.



Opvarmning af en terning i kogende vand.

I fysikken forklares, at temperaturen f i et homogent fast legeme skal søges som en løsning til "varmeledningsligningen" $\frac{\partial f}{\partial t} = \kappa\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right]$, κ = materialets temperaturledningstal.

Den kaldes en partiel differentialligning, fordi der indgår partielle afledede af den ubekendte temperaturfunktion f.

"Diffusionsligningen" er en anden partiel differentialligning:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial f}{\partial z}\right) \quad , \qquad D = \text{"diffusionskoefficienten"}.$$

Den beskriver udbredelsen af et stof gennem diffusion alene (dvs. gennem molekylbevægelser), idet f betegner stoffets koncentration. Ofte kan D regnes for konstant, og diffusionsligningen får da samme udseende som varmeledningsligningen ovenfor.

"Svingningsligningen": $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right]$, c = udbredelseshastigheden

beskriver udbredelsen af elektromagnetiske svingninger eller mekaniske svingninger (f.eks. lydbølger, når f er trykket).

"Schrødingerligningen" bør også nævnes: $i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial f}{\partial t} = \mathrm{H}f$, i = imaginær enhed, h = Plancks konstant.

Den kan benyttes til beregning af atomers og molekylers egenskaber. Her er f den såkaldte bølgefunktion, der beskriver "elektronskyens" form, mens H indeholder differentiationer $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, der virker på f.

I praksis vil man ofte studere problemer, hvor f (af symmetrigrunde) kun afhænger af èn stedkoordinat, f.eks. af x. For simpelheds skyld vil vi derfor i det følgende indskrænke os til at betragte en funktion $f(x,t)$ af én stedkoordinat x og af tiden t.

Funktion af flere variable. En funktion $f(x,t)$ af flere variable kan Laplace-transformeres med hensyn til tiden t:

$$\mathcal{L}\{f(x,t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(x,t)\,dt = F(x,s).$$

1) For en partiel afledet med hensyn til tiden må differentiationsreglen stadig gælde, f.eks

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\} = s\cdot F(x,s) - f(x,0).$$

2) For en partiel afledet med hensyn til enhver anden variabel x gælder den enklere regel:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^p f}{\partial x^p}\right\} = \frac{\partial^p}{\partial x^p}\mathcal{L}\{f(x,t)\}, \quad \text{dvs.} \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^p f}{\partial x^p}\right\} = \frac{\partial^p F}{\partial x^p} \quad \text{(sætning 15.6, regel 8).}$$

3) For en blandet partiel afledet benyttes både 1) og 2), f.eks.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}[s\cdot F(x,s) - f(x,0)]$$

$$= s\cdot\frac{\partial}{\partial x}F(x,s) - \frac{\partial}{\partial x}f(x,0) = s\cdot\frac{\partial F}{\partial x}(x,s) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,0).$$

Partielle differentialligninger, hvor Laplace-transformation kan benyttes.

Laplace-transformation med hensyn til t kan anvendes på lineære partielle differentialligninger, hvor koefficienterne til f og til de afledede af f ikke afhænger af t.

Eksempelvis kan Laplace-transformation med hensyn til t anvendes på ligningen:

$$x\frac{\partial f}{\partial t} + \cos(x)\frac{\partial f}{\partial x} + e^{-x}\cdot f + (xt)^2 = 0,$$

men ikke på ligningerne

$$t\frac{\partial f}{\partial t} + \cos(t)\frac{\partial f}{\partial x} + e^{-t}\cdot f + (xt)^2 = 0 \qquad \text{(koefficienterne afhænger af } t\text{)}$$

$$x\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 + \cos(x)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + e^{-x}\cdot f^2 + (xt)^2 = 0 \qquad \text{(ulineær).}$$

Eksempel 15C.1. Partiel differentialligning.

Lad der være givet følgende partielle differentialligning

$$\frac{\partial f}{\partial t} + x\frac{\partial f}{\partial x} = x\cdot(1+t)\,, \qquad x \ge 1, \quad t \ge 0.$$

Find en løsning $f(x,t)$, som opfylder betingelserne:

a) $f(x,0) = x$ for alle $x \ge 1$

b) $f(1,t) = \mathrm{e}^{-t} + t$ for alle $t \ge 0$.

LØSNING:

1. Laplace-transformation af partiel differentialligning. Ved Laplace-transformation med hensyn til t fås

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\} + x\cdot\mathcal{L}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\} = x\cdot\mathcal{L}\{1+t\} \quad \Leftrightarrow \quad s\cdot F(x,s) - f(x,0) + x\cdot\frac{\partial F}{\partial x} = x\cdot\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right).$$

Heri indsættes begyndelsesbetingelsen a), så vi får

$$s\cdot F - x + x\cdot\frac{\partial F}{\partial x} = x\cdot\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot\frac{\partial F}{\partial x} + s\cdot F = x\cdot\left(1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right).$$

2. Løsning af sædvanlig differentialligning for fastholdt s. For en fastholdt (konstant) værdi af s er den sidste ligning en sædvanlig lineær differentialligning af 1. orden. En sådan differentialligning har vi tidligere lært at løse. Først normeres ligningen: $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{s}{x}\cdot F = 1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$, hvorefter løsningen kan udtrykkes ved integraler:

Idet $P(x) = \int\frac{s}{x}dx = s\cdot\ln|x| = s\cdot\ln x$ (og $C = C(s)$ er en reel funktion), fås

$$F(x,s) = \mathrm{e}^{-P(x)}\left[\int\left(1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)\mathrm{e}^{P(x)}dx + C\right] = \mathrm{e}^{-s\cdot\ln x}\left[\int\left(1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)\mathrm{e}^{s\cdot\ln x}dx + C\right]$$

$$= x^{-s}\left[\left(1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)\int x^s dx + C\right] = x^{-s}\left[\left(1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)\frac{x^{s+1}}{s+1} + C\right] = \left(1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)\frac{x}{s+1} + C\cdot x^{-s}$$

$$= \underline{\underline{\frac{s^2+s+1}{(s+1)s^2}\cdot x + C\cdot x^{-s}}}\,.$$

3. Laplace-transformation af betingelse for at bestemme C. I det fundne udtryk for $F(x,s)$ indgår en arbitrær "konstant" C, der eventuelt kan afhænge af s. Denne "konstant" vil vi bestemme ved hjælp af betingelse b). Ved Laplace-transformation af betingelsen b), fås

$$F(1,s) = \mathcal{L}\{f(1,t)\} = \mathcal{L}\{\mathrm{e}^{-t} + t\} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2} = \frac{s^2+s+1}{(s+1)s^2}\,.$$

Indsættes $x = 1$ i det tidligere fundne udtryk for $F(x,s)$, fås $F(1,s) = \frac{s^2+s+1}{(s+1)s^2} + C$.

For at opfylde betingelsen b) må vi altså sætte $C = 0$. Dermed har vi fundet $F(x,s) = \frac{s^2+s+1}{(s+1)s^2}\cdot x$.

4. Tilbage-transformation af løsningen for fastholdt x. For enhver fastholdt (konstant) værdi af x kan løsningen $F(x,s)$ nu tilbagetransformeres: $f(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+s+1}{(s+1)s^2}\cdot x\right\} = x\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+s+1}{(s+1)s^2}\right\}$.

Ved hjælp af formel 84 med $a = 1$, $A = 1$, $B = 1$ og $C = 1$ fås

$$f(x,t) = x\cdot\left(\frac{1-1+1}{1}\cdot\mathrm{e}^{-t} + \left(\frac{1-1}{1} + \frac{-1}{-1}\cdot t\right)\cdot 1\right) = \underline{\underline{x\cdot\left(\mathrm{e}^{-t} + t\right)}}\,.$$

Eksempel 15C.2. Partiel differentialligning.

INDLEDNING:

Ved at lade C-atomer diffundere et stykke ind i stål ved høj temperatur kan stålmassen ved en efterfølgende afkølingsprocedure hærdes nær overfladen, mens den indre kerne forbliver sej.

Ved hjælp af diffusionsligningen[1] (Ficks 2. lov)

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \qquad \text{med betingelserne} \qquad \begin{cases} c(x,0) = c_i & \text{for} \quad x>0 \\ c(0,t) = c_y & \text{for} \quad t>0 \\ c(\infty,t) = c_i & \text{for} \quad t>0 \end{cases}$$

kan det beregnes, hvordan C-koncentrationen $c(x,t)$ afhænger af den forløbne behandlingstid t og afstanden x fra overfladen på et sted, hvor den er plan, se figur 15C.1.

Her er

c_i = C-koncentrationen i materialet før diffusion, f.eks 0.1 vægt %,

c_y = C-koncentrationen i det alleryderste lag af materialet under diffusionsbehandlingen, f.eks. 1.1 vægt %,

D = diffusionskoefficienten (C-atomer i stål ved 950°C er $D = 7.5 \cdot 10^{-8}$ m^2/h [2]).

Find $c(x,t)$ for alle $x>0$ og $t>0$.

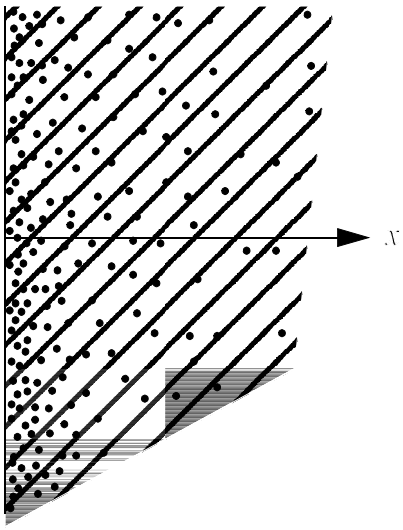


Fig. 15C.1. *Diffusion ind i et materiale.*

LØSNING:

Idet diffusionsligningen Laplace-transformeres med hensyn til t, fås

$$sC - c_i = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \qquad \text{med betingelserne} \qquad \begin{cases} C(0,s) = \dfrac{c_y}{s} \\ C(\infty,s) = \dfrac{c_i}{s}, \end{cases}$$

hvor $C = C(x,s) = \mathcal{L}\{c(x,t)\}$. For enhver fastholdt værdi af s er dette en inhomogen, lineær differentialligning i x med konstante koefficienter. Den kan vi løse efter den i bind 1 angivne metode:

Homogen ligning: $D\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2} - sC = 0,$ karakterligning: $D\lambda^2 - s = 0 \iff \lambda = \pm\sqrt{\dfrac{s}{D}},$

løsning: $C_{\text{hom}} = K_1 e^{-\sqrt{\frac{s}{D}}x} + K_2 e^{\sqrt{\frac{s}{D}}x}.$

[1] Denne ligning omtales i L. Alfred Hansen og P. Søltoft: "Kemiske enhedsoperationer", 1980, side 295.

[2] A. N. Minkewitsch: "Chemisch-thermishe Oberflächenbehandlung von Stahl", 1953, side 55.

Inhomogen ligning: $D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - sC = -c_i$,

gættemetode: $C_{\text{partikulær}} = k$ indsættes $D\cdot 0 - sk = -c_i \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{c_i}{s}$.

Fuldstændig løsning: $C(x,s) = C_{\text{partikulær}} + C_{\text{hom}} = \frac{c_i}{s} + K_1 e^{-\sqrt{\frac{s}{D}}x} + K_2 e^{\sqrt{\frac{s}{D}}x}$

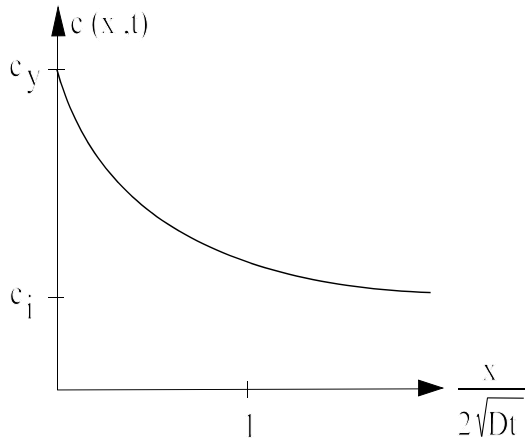
med betingelserne

$$\begin{cases} \frac{c_i}{s} + K_1 + K_2 = \frac{c_y}{s} \\ K_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} K_1 = \frac{c_y - c_i}{s} \\ K_2 = 0. \end{cases}$$

Heraf fås $C(x,s) = \frac{c_i}{s} + \frac{c_y - c_i}{s} e^{-\sqrt{\frac{s}{D}}x}$.

Ved tilbagetransformation fås (benyt f.eks. Schaums håndbog)

$$c(x,t) = c_i + (c_y - c_i)\cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right).$$



Løsningens graf.

Funktionerne erf og erfc. Den såkaldte "fejlfunktion" erf (forkortelse for "error function") er tabelleret nedenfor. Definitionen er

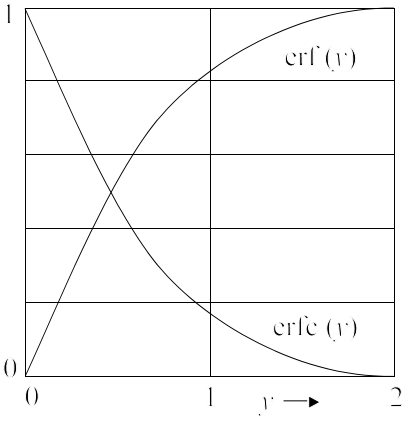
$$\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-u^2} du.$$

Den "komplementære fejlfunktion" erfc defineres ved

$$\operatorname{erfc}(y) = 1 - \operatorname{erf}(y).$$

y	erf (*y*)
0.00	0.00000
0.05	0.05637
0.1	0.11246
0.2	0.22270
0.3	0.32863
0.4	0.42839
0.5	0.52050
0.6	0.60386
0.8	0.74210
1.0	0.84270

y	erf (*y*)
1.2	0.91031
1.4	0.95229
1.6	0.97635
1.8	0.98909
2.0	0.99532
2.5	0.99959
3.0	0.99998
3.5	$1 - 0.74\times10^{-6}$
4.0	$1 - 1.6\times10^{-8}$



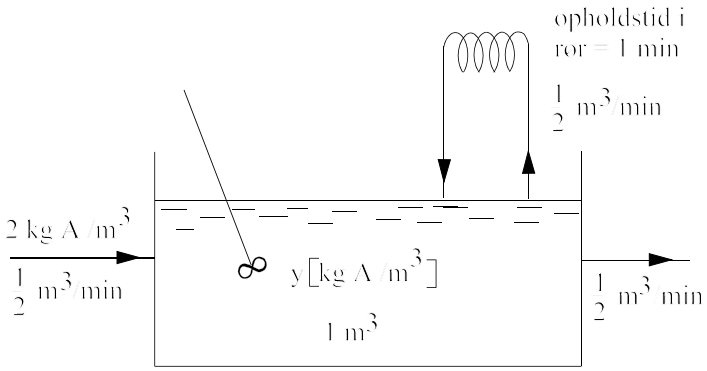
SUPPLEMENT: 15D NUMERISK TILBAGE-TRANSFORMATION

Som det følgende eksempel viser, føres man let til en funktion F(s), som det ikke er muligt at tilbagetransformere ved hjælp af en Laplacetabel.

Eksempel 15D.1. Differentialligning med forsinkelse.

Figuren viser et system, hvor en del af tankens indhold pumpes gennem et rør (f.eks. en varmeveksler eller en rørreaktor), der fører tilbage til tanken. Hver væskedel er 1 minut om at gennemløbe røret. Systemet startes til tiden $t = 0$ med $y(0) = 0$ og rent vand i røret.

Find $Y(s)$.



LØSNING:

Balancen IND + PRODUCERET = UD + AKKUMULERET giver

$$2\cdot\frac{1}{2}dt + \frac{1}{2}u(t-1)\cdot y(t-1)dt + 0 = \frac{1}{2}y(t)dt + dy(t)\,.$$

Ved division med dt fås differentialligningen:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y(t) - \frac{1}{2}u(t-1)\cdot y(t-1) = 1\,.$$

Ved Laplace-transformation fås

$$s\,Y(s) + \frac{1}{2}\,Y(s) - \frac{1}{2}e^{-s}Y(s) = \frac{1}{s} \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s\left(s + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-s}\right)}\,.$$

Denne funktion er det ikke muligt at tilbagetransformere ved hjælp af en Laplacetabel.

Som eksempel 15D.1 viser, kan det ofte være nødvendigt at approksimere den tilbagetransformerede $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ ved en numerisk metode.

Der findes adskillige formler til numerisk tilbagetransformation, men en rimelig god og enkel formel er følgende:

$$y(t) \approx C_1 s_1 Y(s_1) + C_2 s_2 Y(s_2) + \ldots + C_N s_N Y(s_N),$$

hvor

$$s_k(t) = \frac{a\cdot b^k}{t} \quad \text{og} \quad k \in \{1,2,\ldots,N\}.$$

Konstanterne $a, b, C_1, C_2, \ldots, C_N$ er givet i tabellen i appendix 15.4 for $N = 2$, 4, 8, 16, 32 og 64.

"Udledning" af formler. Ved Laplace-transformation af en potensfunktion $f(t) = t^n, \quad n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ fås en ny potensfunktion $F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ (formel 4 i appendix 15.1). Sættes $s_1 = \frac{A_1}{t}$, hvor A_1 er en frit valgt konstant forskellig fra 0, kan potensfunktionen $f(t) = t^n$ derfor omskrives på følgende måde:

$$f(t) = t^n = \frac{A_1}{t} \cdot \frac{A_1^n \cdot n!}{\left(\frac{A_1}{t}\right)^{n+1} \cdot n!} = s_1 \cdot \frac{A_1^n \cdot n!}{s_1^{n+1} \cdot n!} = \frac{A_1^n}{n!} \cdot s_1 \cdot \frac{n!}{s_1^{n+1}} = \frac{A_1^n}{n!} \cdot s_1 \cdot F(s_1) \ .$$

For $f(t) = t^n$ gælder altså eksakt formlen

$$f(t) = C_1 s_1 F(s_1), \qquad \text{hvor} \quad C_1 = \frac{A_1^n}{n!} \ .$$

Sættes eksempelvis $C_1 = \frac{A_1^7}{7!}$, gælder formlen eksakt for $f(t) = t^7$.

For nu også at kunne få en tilsvarende formel for andre polynomier betragtes en linearkombination:

$$f(t) = C_1 s_1 F(s_1) + C_2 s_2 F(s_2) + \ldots + C_N s_N F(s_N) \ , \tag{1}$$

hvor

$$s_1 = \frac{A_1}{t}, \ s_2 = \frac{A_2}{t}, \ldots, \ s_N = \frac{A_N}{t} \ .$$

Idet vi ønsker, at formel (1) er eksakt for $1, t, t^2, t^3, \ldots, t^{N-1}$, fås

$$t^n = C_1 \frac{A_1}{t} \cdot \frac{n!}{\left(\frac{A_1}{t}\right)^{n+1}} + \ldots + C_N \frac{A_N}{t} \cdot \frac{n!}{\left(\frac{A_N}{t}\right)^{n+1}} \ , \qquad n \in \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$$

eller

$$1 = C_1 \cdot \frac{n!}{A_1^n} + C_2 \cdot \frac{n!}{A_2^n} + \ldots + C_N \cdot \frac{n!}{A_N^n} \ , \qquad n \in \{0, 1, 2, \ldots, N-1\} \ .$$

Vælges f.eks. $A_1 = 1, A_2 = 2, \ldots, A_N = N$, kan $C_1, C_2, \ldots, C_N$ bestemmes af de fremkomne N ligninger.

Da den fundne formel er eksakt for alle polynomier $f(t)$ af grad mindre end N, kan det forventes, at den også giver tilnærmet rigtige resultater for funktioner, der kunne tilnærmes med polynomier (Taylorpolynomier, kollokationspolynomier, udglatningspolynomier). Desværre kan funktioner $f(t)$ nær asymptoter (for $t \to \infty$) meget dårligt tilnærmes ved polynomier, og den asymptotiske opførsel er ofte meget vigtig at finde. Derfor indfører vi en substitution $u = \mathrm{e}^{-t}$, hvorved intervallet $0 \le t < \infty$ afbildes over i intervallet $0 < u \le 1$. Derpå søger vi at gøre tilbagetransformationen bedst mulig for polynomier i u, dvs. for funktioner af typen

$$f(t) = a_0 + a_1 \mathrm{e}^{-t} + a_2 \left(\mathrm{e}^{-t}\right)^2 + \ldots + a_{N-1} \left(\mathrm{e}^{-t}\right)^{N-1}$$

altså for

$$f(t) = a_0 + a_1 \mathrm{e}^{-t} + a_2 \mathrm{e}^{-2t} + \ldots + a_{N-1} \mathrm{e}^{-(N-1)t} .$$

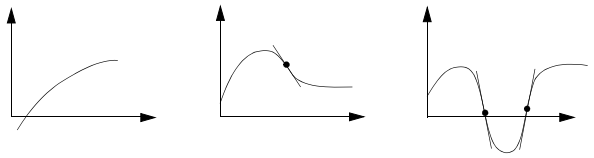
På grund af linearitetsreglen er det nu tilstrækkeligt at gøre tilbagetransformationen optimal for funktioner af typen $f(t) = \mathrm{e}^{-rt}$ for alle $r \in [0; \infty[$ og alle $t \in]0; \infty[$, efter at A_k noget vilkårligt (efter forsøg) er valgt på formen $a \cdot b^k$.

Det ses, at når N er stor, har C'erne meget store værdier med vekslende fortegn, således at der kræves meget nøjagtige regnemidler for at få brugbare resultater. Dette er en karakteristisk egenskab ved alle former for numerisk

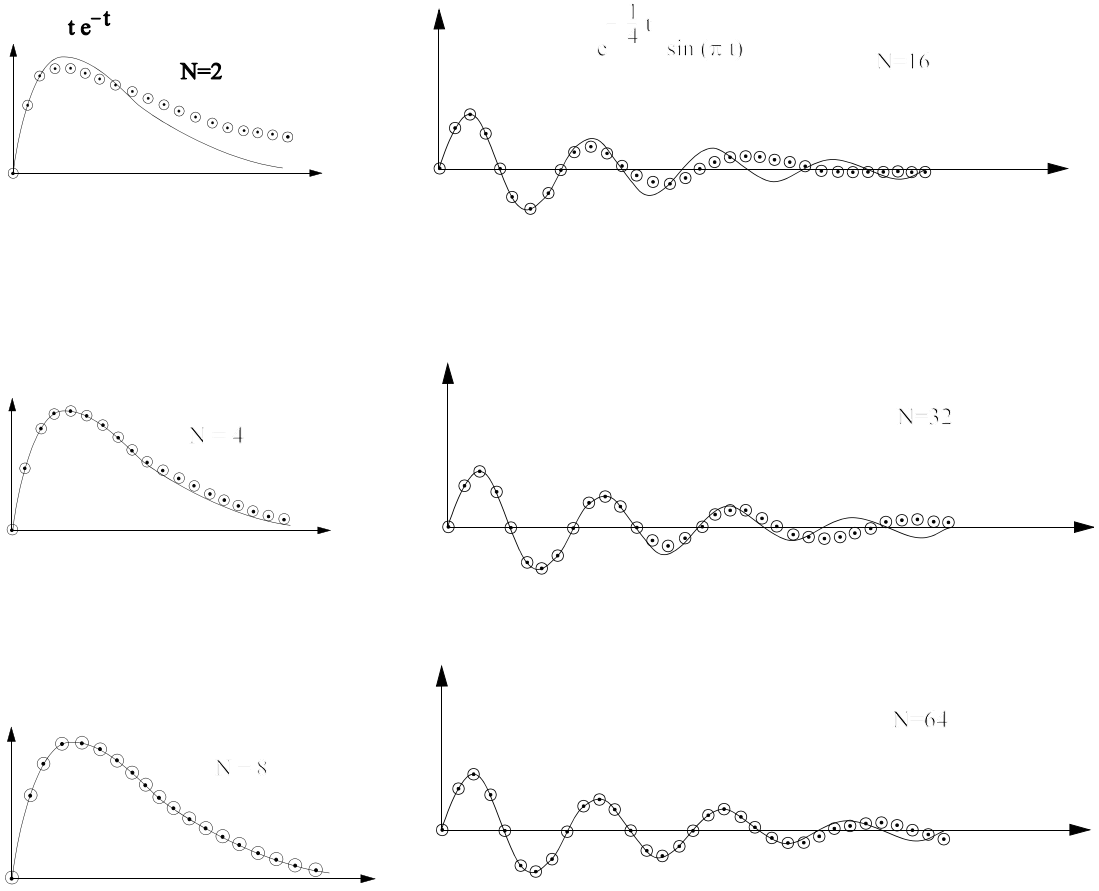
Laplace-tilbagetransformation. Det bliver derved sværere at få rimelige resultater -- men slet ikke umuligt.

Fremgangsmåde. Den numeriske formel bruges til at beregne $y(t)$ for nogle t-værdier $t_1, t_2, \ldots, t_p$, så der kan laves en tabel eller en graf for funktionen $y(t)$. Beregningerne kan gentages med stadig fordobling af N, indtil stabile resultater er opnået. For at opnå størst mulig nøjagtighed kan nogle led i $Y(s)$ eventuelt tilbagetransformeres eksakt ved hjælp af tabel. Forsinkelsesfaktorer af typen e^{-as} skal bortskaffes ved hjælp af forsinkelsesreglen, inden tilbagetransformationen foretages (se det følgende eksempel).

Nøjagtighed. Metoden virker bedst for funktioner $y(t)$ med et simpelt forløb, dvs. med få vendetangenter:



Når t vokser, aftager nøjagtigheden erfaringsmæssigt for hver ny vendetangent, der passeres. Det hjælper at benytte større værdier af N. Nedenstående figurer viser, hvordan beregnede punkter tilnærmer de eksakte grafer:



Eksempel 15D.1. Numerisk tilbagetransformation.

Find ved numerisk tilbagetransformation $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2}\cdot e^{-s}\right\}$ for $t = 0,\ 0.25,\ 0.50, \ldots,\ 4.00$ med en absolut fejl $<$ ca. 0.0010 .

LØSNING:

Da en faktor e^{-as} blot betyder en forsinkelse på a, gælder

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2}\cdot e^{-s}\right\} = \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2}\right\}\right]_{\text{forsinket 1}} .$$

$\underline{N=2:}$ Formlen $y(t) \approx C_1 s_1 Y(s_1) + C_2 s_2 Y(s_2)$ giver nu

$$y(t) \approx \left[C_1 s_1 \frac{s_1}{(s_1+1)^2} + C_2 s_2 \frac{s_2}{(s_2+1)^2}\right]_{\text{forsinket 1}} = \left[\frac{C_1}{\left(1+\frac{1}{s_1}\right)^2} + \frac{C_2}{\left(1+\frac{1}{s_2}\right)^2}\right]_{\text{forsinket 1}} .$$

Indsættes fra tabellen i appendix 15.4 $C_1 = 2.568,\ C_2 = -1.544,\ s_1 = \frac{0.7\cdot 2^1}{t} = \frac{1.4}{t}$ og $s_2 = \frac{0.7\cdot 2^2}{t} = \frac{2.8}{t}$ fås

$$y(t) \approx \left[\frac{2.568}{\left(1+\frac{t}{1.4}\right)^2} - \frac{1.544}{\left(1+\frac{t}{2.8}\right)^2}\right]_{\text{forsinket 1}} = u(t-1)\left[\frac{2.568}{\left(1+\frac{t-1}{1.4}\right)^2} - \frac{1.544}{\left(1+\frac{t-1}{2.8}\right)^2}\right] .$$

$\underline{N=4:}$ Analogt fås for $N = 4$:

$$y(t) \approx u(t-1)\left[\frac{18.8210}{\left(1+\frac{t-1}{3.345}\right)^2} - \frac{37.4849}{\left(1+\frac{t-1}{5.0175}\right)^2} + \frac{25.9963}{\left(1+\frac{t-1}{7.5263}\right)^2} - \frac{6.3282}{\left(1+\frac{t-1}{11.2894}\right)^2}\right] .$$

$\underline{N=8,\ 16, \ldots:}$ Der fortsættes med fordoblede værdier af N, indtil et stabilt resultat er nået for alle de ønskede værdier af $y(t)$. Beregningerne sker lettest på computer eller programmerbar lommeregner, f.eks. ved hjælp af følgende algoritme:

$$s \leftarrow \frac{a}{t}$$

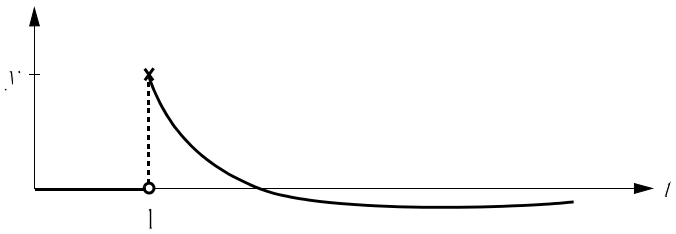
$$y \leftarrow 0$$

$$\textbf{gentag for } k = 1, 2, \ldots, N \begin{cases} s \leftarrow s\cdot b \\ y \leftarrow y + C_k\cdot s\cdot Y(s) \ . \end{cases}$$

Resultater:

t	tilnærmet $y(t)$				eksakt $y(t)$
	$N=2$	$N=4$	$N=8$	$N=16$	
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.50	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.75	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.00	1.0240	1.0042	0.9999	1.0000	1.0000
1.25	0.5475	0.5778	0.5842	0.5841	0.5841
1.50	0.2827	0.3009	0.3030	0.3033	0.3033
1.75	0.1283	0.1223	0.1178	0.1181	0.1181
2.00	0.0355	0.0089	-0.0001	0.0000	0.0000
2.25	-0.0213	-0.0610	-0.0714	-0.0716	-0.0716
2.50	-0.0562	-0.1019	-0.1111	-0.1116	-0.1116
2.75	-0.0077	-0.1234	-0.1298	-0.1303	-0.1303
3.00	-0.0900	-0.1322	-0.1349	-0.1353	-0.1353
3.25	-0.0969	-0.1327	-0.1316	-0.1318	-0.1317
3.50	-0.1000	-0.1279	-0.1232	-0.1231	-0.1231
3.75	-0.1007	-0.1199	-0.1122	-0.1119	-0.1119
4.00	-0.0999	-0.1101	-0.1000	-0.0996	-0.0996

Det ses, at for $N = 16$ er alle $y(t)$**-værdierne** blevet stabile inden for den ønskede nøjagtighed på 0.0010. Derfor accepteres disse $y(t)$**-værdier** som slutresultat. Værdierne af den eksakte tilbagetransformerede $y(t) = u(t-1)\cdot[1-(t-1)]\cdot e^{-(t-1)}$ er anført til sammenligning.



OPGAVER

Opgave 15.1 *(L ved integration)*

Find ved integration

1^{T}) $\mathcal{L}\{1\}$ *2)* $\mathcal{L}\{t^2\}$ *3)* $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}$ *4)* $\mathcal{L}\{t\cdot\cos(\omega t)\}$.

Opgave 15.2 *(L ved tabel)*

Find ved brug af tabel

1^{T}) $\mathcal{L}\{7+5\cdot e^{-2(t-4)}\cdot\sin(3t)+6t\cdot 5^{3-2t}\}$

2) $\mathcal{L}\left\{3+4t\cdot e^{-2t}\cdot\cos(t+\frac{\pi}{4})+6\cdot e^{-2t}-e^{-2(t-3)}+2^{-t}\right\}$

3) $\mathcal{L}\left\{\sin(2t)+t^3+3^t+\cos(2t-\frac{\pi}{4})+\sqrt[3]{2^t}\right\}$

4) $\mathcal{L}\left\{\sqrt{\pi}+t\cdot e^{3-t}+\sqrt{3^t}\cdot\sin t+\sin^2 t+2\cdot\cosh t\cdot\cos t\right\}$.

Opgave 15.3 *(L^{-1} ved tabel)*

Find ved brug af tabel

1^{T}) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+2}+\frac{s}{s^2-6s+8}+\frac{7}{s(s^2+6s+25)}\right\}$

2) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}+\frac{2}{(s+3)^2}+\frac{s}{s^2+2s+26}+\frac{1}{(s^2+2s)^2}\right\}$

3) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-5}+\frac{8}{3s+1}+\frac{1}{s(s+2)(s^2+8s+20)}\right\}$

4) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+10s+29}+\frac{2}{s(s+1)^3}+\frac{1}{(s+1)^5}\right\}$.

Opgave 15.4 *(differentialligninger)*

Find $y = y(t)$ $(t \in [0;\infty[)$ *ved hjælp af Laplace-transformation for hvert af de følgende differentialligningsproblemer:*

1^T) $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\cdot\frac{dy}{dt} - 3\cdot y = 4\cdot e^{-t}, \qquad y(0)=0,\ \frac{dy}{dt}(0)=1$

2) $\frac{dy}{dt} + 3\cdot y = e^{-3t}, \qquad y(0)=7$

3) $\frac{dy}{dt} + y = \sin t, \qquad y(0)=1$

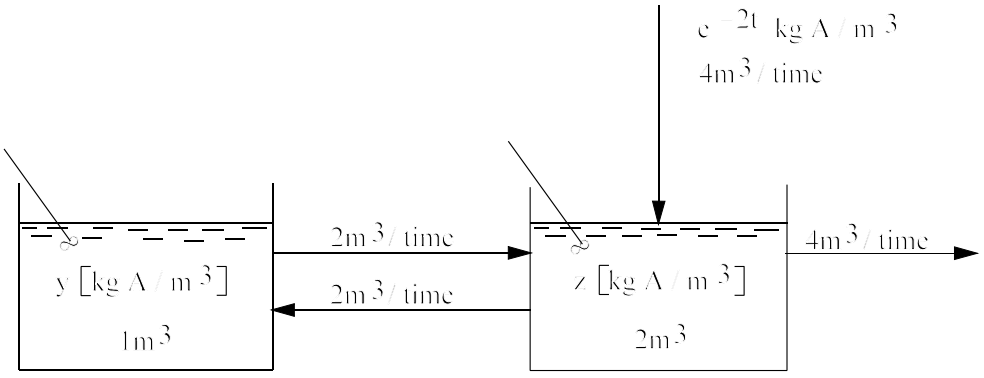
4) $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 2\cdot\sin t - 2\cdot e^{t}, \qquad y(0)=1,\ \frac{dy}{dt}(0)=1$

5) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\cdot\frac{dy}{dt} + y = e^{-t}, \qquad y(0)=1,\ \frac{dy}{dt}(0)=-1$

6) $\frac{d^4y}{dt^4} - y = 60\cdot e^{2t}, \qquad y(0)=0,\ \frac{dy}{dt}(0)=0,\ \frac{d^2y}{dt^2}(0)=6,\ \frac{d^3y}{dt^3}(0)=14.$

Opgave 15.5 ^{T} *(system af differentialligninger)*

Lad $y = y(t)$ *og* $z = z(t)$ *betegne koncentrationerne af et stof A i to tanke:*

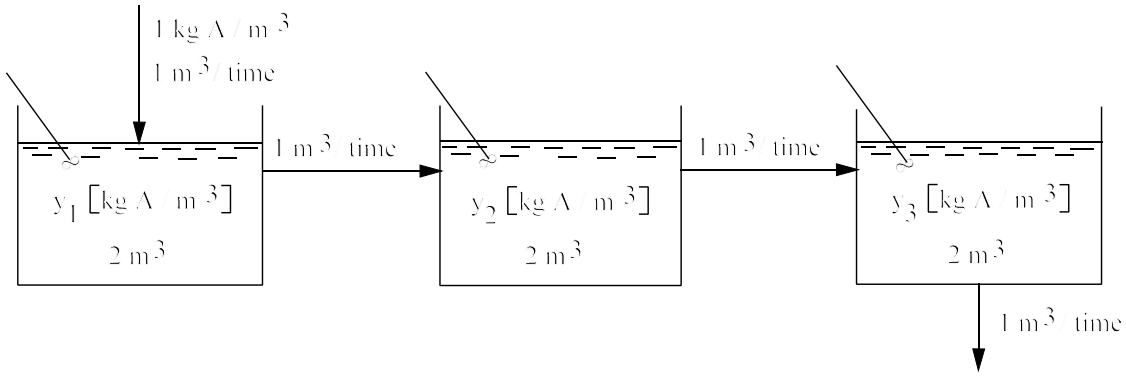


Til tiden t=0 timer er koncentrationerne i tankene $y(0)=0$ *og* $z(0)=0$.

Find $z(t)$ *for alle* $t \in [0;\infty[$ *ved hjælp af Laplace-transformation.*

Opgave 15.6 *(system af differentialligninger)*

Lad $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$ *og* $y_3 = y_3(t)$ *betegne koncentrationerne af et stof A i tre tanke:*

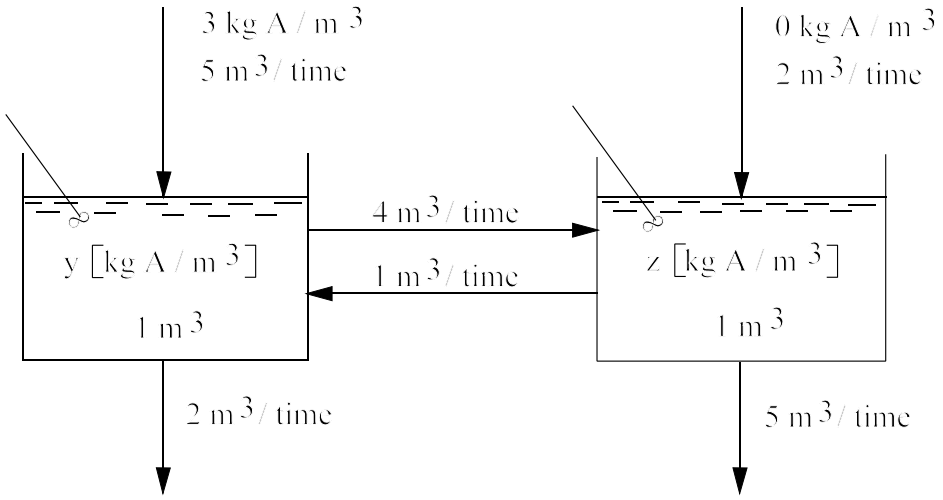


Til tiden t=0 timer er koncentrationerne i tankene $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0$.

Find $y_3(t)$ *for alle* $t \in [0;\infty[$ *ved hjælp af Laplace-transformation.*

Opgave 15.7 *(system af differentialligninger)*

Lad $y = y(t)$ *og* $z = z(t)$ *betegne koncentrationerne af et stof A i to tanke:*



Til tiden t=0 timer er koncentrationerne i tankene $y(0) = z(0) = 1$ *kg A/m*^{3}.

Find $z(t)$ *for alle* $t \in [0;\infty[$ *ved hjælp af Laplace-transformation.*

Opgave 15.8 *(system af differentialligninger)*

Find $y = y(t)$ $(t \in [0;\infty[)$ *ved hjælp af Laplace-transformation for hvert af følgende differentialligningsproblemer:*

1) $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + y - z = \mathrm{e}^{-t} \\ \dfrac{dz}{dt} + y + 3z = 0 \end{cases}, \qquad y(0) = \frac{1}{3},\ z(0) = 0$$

2) $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + 3y - 4z = \mathrm{e}^{-t} \\ \dfrac{dz}{dt} + y + 7z = -2\mathrm{e}^{-t} \end{cases}, \qquad y(0) = 0,\ z(0) = 0$$

3) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 3x + y - z = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} - x + 2y + z = 0 \\ \dfrac{dz}{dt} + x + y + z = 0\ . \end{cases}, \qquad x(0) = 1,\ y(0) = 1,\ z(0) = 0$$

Opgave 15.9 *er flyttet og hedder nu 15.C1.*

Opgave 15.10 *(stykkevis defineret funktion)*
Udtryk funktionen f *ved hjælp af enhedstrinfunktioner i hvert af de følgende tilfælde:*

$1^T)$ $$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{for} \quad t \in [0;\frac{\pi}{2}[\\ 1 & \text{for} \quad t \in [\frac{\pi}{2};\pi[\\ \cos t & \text{for} \quad t \in [\pi;\infty[\ . \end{cases}$$

2) $$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{for} \quad t \in [0;1[\\ \mathrm{e}^{1-t} & \text{for} \quad t \in [1;3[\\ 2 & \text{for} \quad t \in [3;\infty[\ . \end{cases}$$

3) $$f(t) = \begin{cases} t & \text{for} \quad t \in [0;2[\\ 2 & \text{for} \quad t \in [2;3[\\ 2\mathrm{e}^{3-t} & \text{for} \quad t \in [3;\infty[\ . \end{cases}$$

4) $$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{for} \quad t \in [0;1[\\ 3-t & \text{for} \quad t \in [1;2[\\ 1 & \text{for} \quad t \in [2;\infty[\ . \end{cases}$$

Opgave 15.11 *(forsinkelsesreglen)*

Find

1^T) $\mathcal{L}\{u(t-\pi)\sin t\}$ *og* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+5)^3}\,\mathrm{e}^{-4s}\right\}$

2) $\mathcal{L}\{u(t-1)\,t^2\}$ *og* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\,\mathrm{e}^{-s}\right\}$

3) $\mathcal{L}\{u(t-2)\sinh 3t\}$ *og* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\,\mathrm{e}^{-3s}\right\}$

4) $\mathcal{L}\{u(t-4)\,t\,\mathrm{e}^{-t}\}$ *og* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\,\mathrm{e}^{-5s}\right\}$.

Opgave 15.12 *(forsinkelsesreglen)*

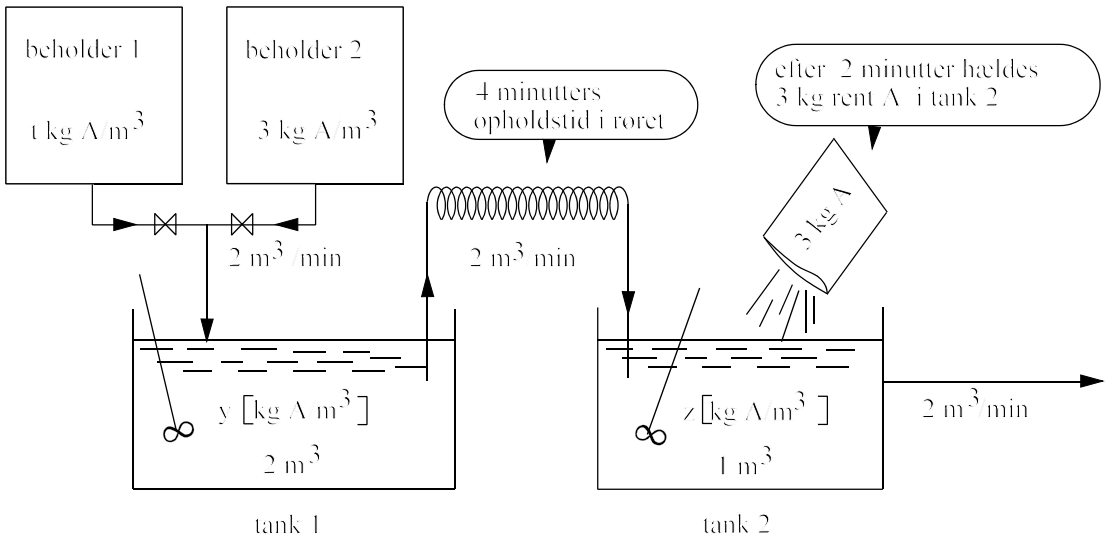
Laplace-transformér f i opgave 15.10.

Opgave 15.13^T *(stykkevis defineret funktion, forsinkelse, deltafunktion)*

Figuren viser et system, hvor strømmen til tank 1 kommer fra beholder 1 i de første 3 minutter og derpå fra beholder 2. Væske fra tank 1 pumpes gennem et langt rør (kølespiral) til tank 2. Hver væskedel er 4 minutter om at gennemløbe røret. To minutter efter starten hældes pludselig 3 kg rent A i tank 2. Systemet startes til tiden $t=0$ med $y(0)=0,\ z(0)=0$ og rent vand i kølespiralen.

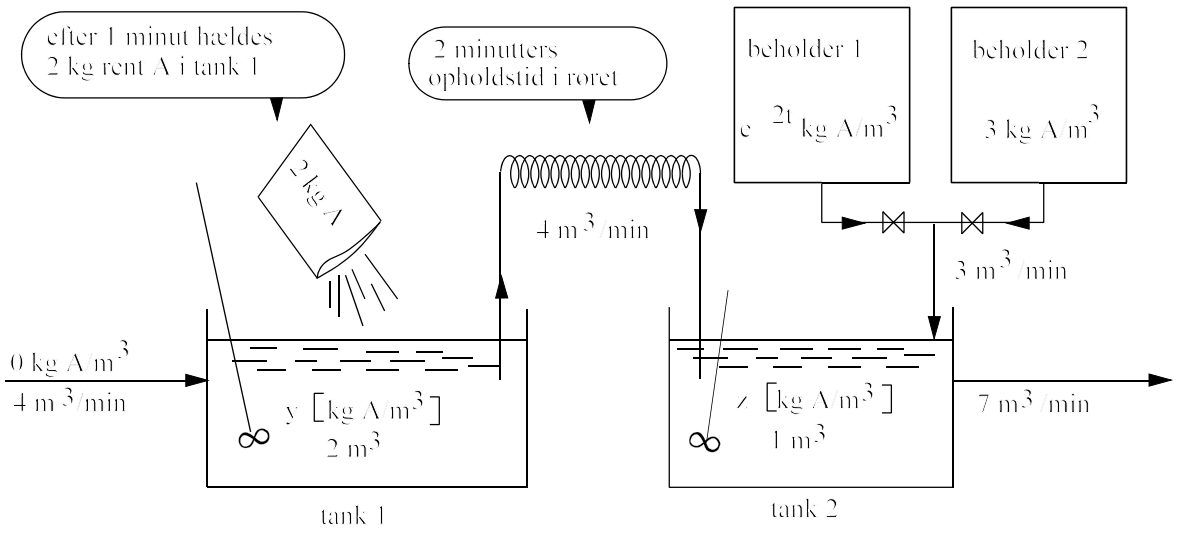
1) Find $y(t)$ for alle $t\in[0;\infty[$.

2) Find $z(t)$ for alle $t\in[0;\infty[$.



Opgave 15.14 *(stykkevis defineret funktion, forsinkelse, deltafunktion)*

Figuren viser et system, hvor der 1 minut efter starten pludselig hældes 2 kg rent A i tank 1. Væske fra tank 1 pumpes gennem et langt rør (kølespiral) til tank 2. Hver væskedel er 2 minutter om at gennemløbe røret. En anden strøm til tank 2 kommer de første 4 minutter fra beholder 1 og derpå fra beholder 2. Systemet startes til tiden t=0 med $y(0)=0,\ z(0)=0$ *og rent vand i kølespiralen. Find* $z(t)$ *for alle* $t\in[0;\infty[$.



Opgave 15.15 *(forsinkelse, deltafunktion)*

Find $y=y(t)$ $(t\in[0;\infty[)$ *ved hjælp af Laplace-transformation for hvert af de følgende differentialligningsproblemer:*

1) $\dfrac{dy}{dt}+y = u(t-1)\cdot e^{t}+\delta_{\varepsilon}(t-1),\qquad y(0)=0,\qquad \varepsilon\approx 0$

2) $\dfrac{dy}{dt}+y = \delta_{\varepsilon}(t-2)+u(t-1),\qquad y(0)=1,\qquad \varepsilon\approx 0.$

Opgave 15.16 *er flyttet og hedder nu 15.D1.*

Opgave 15.17 *(regneregler)*

1) Givet $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\right\}=2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$ *; find* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)^{\frac{3}{2}}}\right\}$ *og* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-3s}}{(2s-1)^{\frac{3}{2}}}\right\}$.

Fortsætter!

2) *Givet* $\mathcal{L}\{\sqrt{t}\} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, s^{-\frac{3}{2}}$ *; find* $\mathcal{L}\{t^{\frac{3}{2}}\}$, $\mathcal{L}\{t^{\frac{5}{2}}\}$, $\mathcal{L}\{t^{\frac{3}{2}}e^{-t}\}$ *og* $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sqrt{\theta}\, e^{-\theta}\, d\theta\right\}$.

3) *Givet* $\mathcal{L}\{t\cdot\ln t\} = \frac{\ln s + \gamma - 1}{s^2}$, *hvor* $\gamma \approx 0.5772$;
find $\mathcal{L}\{t^2\ln t\}$, $\mathcal{L}\{t^2 e^{-t}\ln t\}$ *og* $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \theta\cdot\ln\theta\, d\theta\right\}$.

4) *Givet* $y(t) = e^{-t} + \int_0^t y(v)\cdot\sin(t-v)\, dv$; *find* $y = y(t)$, $t \in [0;\infty[$.

5^T) *Givet* $Y(s) = \frac{\sin s - s}{s^4}$. *Det oplyses, at grænseværdien* $\lim_{t\to\infty} y(t)$ *eksisterer.*
Find denne grænseværdi.

6) *Givet* $Y(s) = \frac{2s+15}{(s+2)(3s+2) - 4e^{-s}}$. *Det oplyses, at grænseværdien* $\lim_{t\to\infty} y(t)$ *eksisterer. Find denne grænseværdi.*

Opgave 15.C1 *(partiel differentialligning)*

Find funktionen $C = C(x,s) = \mathcal{L}\{c(x,t)\}$ *og derpå* $c(x,t)$ $(x \in [0;1],\ t \in [0;\infty[)$ *for hvert af de følgende differentialligningsproblemer:*

1^T) $\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} = e^{-t}$, *idet* $\begin{cases} c(x,0) = e^x - 1 \\ c(0,t) = 0 \quad \textit{for} \quad t>0 \end{cases}$

2) $\frac{\partial^2 c}{\partial t\,\partial x} + 3c = 3xt + 1$, *idet* $\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial x}(x,0) = 3e^{3x} \\ c(0,t) = e^{-t} \quad \textit{for} \quad t>0 \end{cases}$

3) $2\frac{\partial^2 c}{\partial t^2} - \frac{\partial c}{\partial x} = 4 - t$, *idet* $\begin{cases} c(x,0) = e^{2x} \\ \frac{\partial c}{\partial x}(x,0) = -e^{2x} + x \\ c(0,t) = e^{-t} + t^2 \quad \textit{for} \quad t>0 \end{cases}$

4) $\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$, *idet* $\begin{cases} c(x,0) = x \\ c(0,t) = 0 \quad \textit{for} \quad t>0 \\ c(1,t) = -1 \quad \textit{for} \quad t>0 \end{cases}$

5) $\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$, *idet* $\begin{cases} c(x,0) = c_i \\ c(1,t) = c_y \quad \textit{for} \quad t>0 \\ \frac{\partial c}{\partial x}(0,t) = 0 \quad \textit{for} \quad t>0. \end{cases}$

Opgave 15.D1 *(numerisk $\mathcal{L}^{-1}$)*

Find følgende ved numerisk Laplace-tilbagetransformation med $N = 2$ *(samt gerne større værdier af N):*

$1^T)$ $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-3s}}{s\sqrt{s+1}}\right\}$ *for* $t \approx 3.25$

2) $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}e^{-5s-\frac{1}{s}}\right\}$ *for* $t \approx 5.25$

3) $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-4s}}{s^2}\right\}$ *for* $t = 5$

4) $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-\frac{3}{2}}\right\}$ *for alle* $t > 0$

5) $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^{\frac{5}{2}}}\right\}$ *for alle* $t > 0$

6) $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\ln s}{s}\right\}$ *for alle* $t > 0$.

16 LINEÆRE LIGNINGSSYSTEMER

16.1 INDLEDNING

Ved problemer, hvis løsning kræver, at man opererer med et større antal sammenhørende lineære ligninger (førstegradsligninger), kan man med fordel anvende matrixregning.
Da det matematiske problem i sådanne tilfælde alene er bestemt af de konstanter, der forekommer i ligningssystemet, og ikke af de betegnelser vi giver de variable, er det praktisk ved behandlingen af ligningssystemerne blot at se på "skemaer" (såkaldte matricer) indeholdende konstanterne.
Eksempelvis vil man ved behandlingen af ligningssystemet

$$\begin{cases} 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_4 = -2 \end{cases}$$

med fordel kunne se på "koefficientmatricen"

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

eller "totalmatricen"

$$T = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -4 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) .$$

Større systemer af ligninger forekommer f.eks ved mange procestekniske beregninger, hvor man opstiller et system af "balanceligninger" (stofbalancer, energibalancer, økonomiske balancer, . . .), som ofte vil være lineære ligninger.

16.2 INDLEDENDE DEFINITIONER

Vektorrum

En mængde V kaldes et vektorrum, hvis den opfylder følgende regler, der er velkendte fra plane og rumlige vektorer (fra R^2 og R^3):

1) Addition. For alle $\bar{a}, \bar{b} \in V$ er der defineret en addition $\bar{a}+\bar{b}$, således at $\bar{a}+\bar{b} \in V$.

2) Multiplikation. For ethvert $\bar{a} \in V$ og ethvert reelt tal t er der defineret en multiplikation $t\bar{a}$, således at $t\bar{a} \in V$.

3) Regneregler.

$\bar{a}+\bar{b} = \bar{b}+\bar{a}, \qquad t\bar{a} = \bar{a}t$	kommutative love
$\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c}) = (\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}, \qquad s(t\bar{a}) = (st)\bar{a}$	associative love
$s(\bar{a}+\bar{b}) = s\bar{a}+s\bar{b}, \qquad (s+t)\bar{a} = s\bar{a}+t\bar{a}$	distributive love
$\bar{a}+\bar{0} = \bar{a}, \qquad 1\bar{a} = \bar{a}$	neutrale elementer $\bar{0}$ og 1.

Eksempelvis er mængden af 4-vektorer

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

et vektorrum, når addition defineres ved

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) + (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$$

og multiplikation defineres ved

$$t(a_1, a_2, a_3, a_4) = (ta_1, ta_2, ta_3, ta_4).$$

Underrum

Lad $\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}, \ldots, \bar{a}^{(n)} \in V$. Mængden af alle **linearkombinationer**

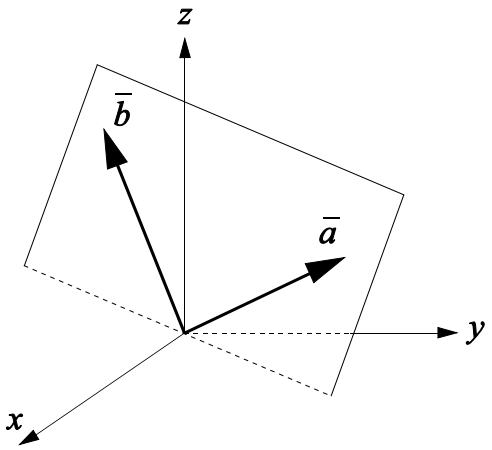
$$t_1\bar{a}^{(1)} + t_2\bar{a}^{(2)} + \ldots + t_n\bar{a}^{(n)}$$

er et **underrum**[1] U til V. Man siger, at vektorrummet U **"udspændes"** af vektorerne $\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}, \ldots, \bar{a}^{(n)}$.

Eksempelvis vil to ikke-parallelle vektorer $\bar{a}$ og $\bar{b}$ i det sædvanlige 3-dimensionale rum udspænde et underrum svarende til en plan, der indeholde $\bar{a}$ og $\bar{b}$, og som går gennem $(0,0,0)$.

---

[1] Et vektorrum U kaldes et underrum til et vektorrum V, hvis:
1) $U \subseteq V$ $(U \neq \emptyset)$ og
2) enhver linearkombination af vektorer fra U selv tilhører U.

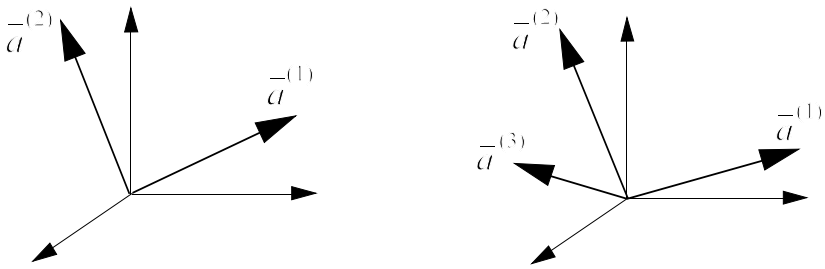


$\bar{a}$ *og* $\bar{b}$ *udspænder et underrum (en plan) i* $\mathbb{R}^3$.

Lineær uafhængighed

Vektorerne $\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}, \ldots, \bar{a}^{(n)} \in V$ kaldes lineært uafhængige, hvis ingen af vektorerne kan udtrykkes som en linearkombination af de øvrige.

Eksempelvis vil 2 vektorer $\bar{a}^{(1)}$ og $\bar{a}^{(2)}$ i det sædvanlige 3-dimensionale rum være lineært uafhængige, hvis de afsat som stedvektorer ikke ligger på samme linie. Analogt vil 3 vektorer $\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}$ og $\bar{a}^{(3)}$ i rummet være lineært uafhængige, hvis de afsat som stedvektorer ikke ligger i samme plan.



Lineært uafhængige vektorer.

Dimension

Et vektorrum V siges at have dimensionen n, hvis n er det største antal lineært uafhængige vektorer, der kan udtages af V.

Basis

Vektorerne $\bar{b}^{(1)}, \bar{b}^{(2)}, \ldots, \bar{b}^{(n)}$ kaldes en basis for vektorrummet V, hvis:

1) $\bar{b}^{(1)}, \bar{b}^{(2)}, \ldots, \bar{b}^{(n)}$ alle tilhører vektorrummet V,
2) $\bar{b}^{(1)}, \bar{b}^{(2)}, \ldots, \bar{b}^{(n)}$ er lineært uafhængige og
3) n er dimensionen af V.

I så fald vil $\bar{b}^{(1)}, \bar{b}^{(2)}, \ldots, \bar{b}^{(n)}$ udspænde hele vektorrummet V, dvs. for enhver vektor $\bar{a} \in V$ eksisterer der et sæt reelle tal $t_1, t_2, \ldots, t_n$, således at $\bar{a}$ kan skrives som en linearkombination

$$\bar{a} = t_1 \bar{b}^{(1)} + t_2 \bar{b}^{(2)} + \ldots + t_n \bar{b}^{(n)}.$$

Ellers ville $\bar{a}, \bar{b}^{(1)}, \bar{b}^{(2)}, \ldots, \bar{b}^{(n)}$ nemlig være $n + 1$ lineært uafhængige vektorer, dvs. flere end det er muligt for et vektorrum af dimensionen n.

Eksempelvis vil vektorerne

$$\begin{aligned}
\bar{b}^{(1)} &= (1, 0, 0, 0) \\
\bar{b}^{(2)} &= (0, 1, 0, 0) \\
\bar{b}^{(3)} &= (0, 0, 1, 0) \\
\bar{b}^{(4)} &= (0, 0, 0, 1)
\end{aligned}$$

udgøre en basis for mængden af 4-vektorer, idet vi kan skrive

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1 \bar{b}^{(1)} + a_2 \bar{b}^{(2)} + a_3 \bar{b}^{(3)} + a_4 \bar{b}^{(4)}.$$

Matricer

Ved en **matrix** forstås et rektangulært skema bestående af tal eller bogstavsymboler:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

De enkelte symboler kaldes matricens **elementer**, og vil i denne bog hovedsagelig være reelle tal. Hvor intet andet er nævnt, gælder alle definitioner og sætninger dog også, når matricens elementer er komplekse tal.

I skemaets m (vandrette) **rækker** og n (lodrette) **søjler** indgår $m \cdot n$ tal, nummererede med dobbelte indices, således at første index angiver rækkenummer, og andet index angiver søjlenummer. Elementet a_{rs} står således i den r`te række og den $s$`te søjle. Man siger kort, at A er en m gange n matrix (skrives $m \times n$), og vil da ofte som symbol for matricen skrive A_{mn}.

Andre betegnelser for matricer er $\overline{\overline{A}}$, $\{a_{rs}\}$ og $\{a_{rs}\}_{mn}$.

To matricer siges at være af **samme type**, hvis de har samme rækkeantal og samme søjleantal.

Elementerne $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ (dvs. elementerne hvor rækkenummeret = søjlenummeret) siges at udgøre matricens **diagonal**.

En kvadratisk matrix af n`te orden er en $n \times n$ matrix.

Det kan i visse tilfælde være praktisk at tænke sig de n søjler som søjlevektorer i R^m:

$$\bar{s}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \bar{s}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \quad \bar{s}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix};$$

de m rækker som rækkevektorer i R^n :

$$\bar{r}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$$
$$\bar{r}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\bar{r}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}).$$

Lineært ligningssystem

Et ligningssystem af formen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &&= b_1 \\ a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &&= b_2 \\ \cdot & \quad \cdot & \cdot & \\ \cdot & \quad \cdot & \cdot & \\ \cdot & \quad \cdot & \cdot & \\ a_{m1}x_1 &+ a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &&= b_m \ , \end{aligned} \tag{1}$$

hvor alle a`er og $b$`er er reelle (eller komplekse) tal, kaldes et lineært ligningssystem med m ligninger og n ubekendte. Hvis $(b_1, b_2, \ldots, b_m) = (0, 0, \ldots, 0)$, siges ligningssystemet at være **homogent**, ellers **inhomogent**.

Ved en **løsning** til (1) forstås et talsæt $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, som tilfredsstiller (1), når det indsættes i stedet for de ubekendte $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Mængden af alle løsninger til (1) kaldes ligningssystemets **fuldstændige løsning**. De enkelte løsninger kaldes undertiden **partikulære løsninger**.

I forbindelse med løsning af ligningssystemet (1) kan det være praktisk at skrive ligningssystemet på matrixform, som en **totalmatrix**:

$$T = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) .$$

Lad

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} .$$

Totalmatrix kan da kort skrives

$$T = (A \mid B) .$$

Matricen A kaldes den til ligningssystemet hørende **koefficientmatrix**.

16.3 GAUSS` ELIMINATION, LØSNING AF LINEÆRT LIGNINGSSYSTEM

Et lineært ligningssystems løsningsmængde ændrer sig ikke, hvis:

a) to ligninger ombyttes - svarende til rækkeombytning i totalmatricen T,

b) en ligning multipliceres med en konstant $k \neq 0$ - svarende til at en række i T multipliceres med $k \neq 0$,

c) en ligning L_p erstattes af ligningen $L_p + k \cdot L_q$ - svarende til at den q`te række i $T$ multipliceres med $k$ og adderes til den $p$`te række ($p \neq q$). Dette kaldes en **rækkeoperation** i T og skrives kort $r_p + k \cdot r_q$.

To matricer A og B er **rækkeækvivalente** (skrives $A \sim B$), hvis de kan overføres i hinanden ved én eller flere af de i punkterne a), b) og c) nævnte ændringer.
Ideen i den såkaldte Gauss` elimination er, at man ved rækkeækvivalente operationer omdanner ligningssystemets totalmatrix til en såkaldt "echelon-matrix", hvorefter ligningssystemets løsning er nem at finde.

Echelon-matrix

En matrix af typen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

kaldes en echelon-matrix (echelon = trinvis opstilling med skrå front). En sådan matrix er karakteriseret ved:

1) at rækker, som består af lutter 0'er er placeret nederst i matricen,

og for de øvrige rækker gælder

2) at i en række er det første fra 0 forskellige tal i rækken et 1-tal. Tallet kaldes for rækkens "ledende" 1-tal,

3) at for to på hinanden følgende rækker vil det ledende 1-tal i den nederste af de to rækker stå længere til højre end det ledende 1-tal i den øverste af de to rækker.

Andre eksempler på echelon-matricer er

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Bemærk: Ethvert ledende 1-tal har lutter 0'er under sig.

Det følgende eksempel vil angive de vigtigste træk ved en Gauss` elimination.

Eksempel 16.1. Gauss`elimination. Løsning af ligningssystem.

Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} 3x_2 - 4x_3 - x_4 &= 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_4 &= -2 \ . \end{aligned}$$

LØSNING:

Totalmatricen opskrives: Kommentarer:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -4 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim \quad r_1 \leftrightarrow r_3$$

Da første rækkes første element er 0, ombyttes r_1 og r_2 for at få et ledende 1-tal.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} r_2 - 3r_1 \\ r_4 + r_1 \end{array}$$

Der skaffes 0′er under det ledende 1-tal i første række.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right) \sim \quad r_2 = -\frac{1}{2} r_2$$

Ovenstående procedure gentages på "undermatricen", der fremkommer ved at se bort fra første række og søjle. Først skaffes ledende 1-tal i anden række.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} r_3 - 3r_2 \\ r_4 - 3r_2 \end{array}$$

Derpå skaffes 0′er under det ledende 1-tal i anden række.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \quad r_3 = (-1) r_3$$

Proceduren gentages på "undermatricen", der fremkommer ved at se bort fra første og anden række og søjle. Først skaffes ledende 1-tal i tredie række.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \quad r_4 - r_3$$

Derpå skaffes 0 under det ledende 1-tal i tredie række.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} \\ \\ \\ r_4 = \frac{1}{6} r_4 \end{matrix}$$

Proceduren gentages.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Denne nye totalmatrix er på "echelonform".

Ligningssystemet løses nedefra:

$$(4)\quad \underline{\underline{x_4 = 1}}$$

$$(3)\quad x_3 - 5x_4 = -5 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x_3 = 0}}$$

$$(2)\quad x_2 - x_3 - 2x_4 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x_2 = 1}}$$

$$(1)\quad x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = 2}}\ .$$

Maple:

Benyt menuen "Matrix" til at indtaste totalmatrix : Vælg 4 rækker, 5 søjler, Insert Matrix,
Benyt tabulator når der flyttes fra en plads til den næste

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -4 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Cursor på matrix, højre musetast, vælg "Solvers and Forms", "Row-Echelon Form", "Reduced"

Resultat:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Heraf ses resultatet umiddelbart.

Eksempel 16.1 har vist, hvorledes en given matrix omdannes til en dermed rækkeækvivalent echelon-matrix. At dette altid er muligt, fremgår af følgende sætning.

SÆTNING 16.1 *(echelonmatrix). Enhver matrix kan omdannes til en rækkeækvivalent echelon-matrix, hvor de ledende 1-taller er entydigt placeret.*

Bevis: Se supplement 15A

Rang af matrix

DEFINITION af rang. *Ved rangen af en matrix A forstås det største antal lineært uafhængige rækkevektorer, som kan udtages fra A.*

Uden bevis nævner vi, at rangen bliver den samme, hvis definitionen baseres på søjlevektorer. Rangen af A skrives kort $\rho(A)$ eller rang(A).

SÆTNING 16.2 *(rang). Rækkeækvivalente matricer har samme rang.*

Bevis. Se supplement 15B.

SÆTNING 16.3 *(rang). Rangen af en matrix A er lig med antallet af ikke-nul rækker i en tilsvarende echelon-matrix.*

Bevis. Lad echelon-matricen være $A' = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ifølge sætning 16.2 og definitionen af rang gælder rang(A) = rang(A`) = maksimalt antal lineært uafhængige rækker i A`. Vi skal da blot vise, at nævnte maksimale antal uafhængige rækker = (antal ikke-nulrækker i A`) = 4.
Der kan højst udtages 4 lineært uafhængige rækker r_1, r_2, r_3 og r_4. Var de lineært afhængige, kunne f.eks. r_2 udtrykkes som $r_2 = ar_1 + br_3 + cr_4$. Tallene i søjle 1 viser, at $a = 0$, så vi ville have $r_2 = br_3 + cr_4$. Imidlertid er dette umuligt på grund af tallene i søjle 2.

Eksempel 16.2. Rang af matrix.

Find rangen af matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 18 & 6 \end{pmatrix}.$$

LØSNING:

Matricen A omdannes til en echelon-matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 18 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ r_2 - 2r_1 \\ \\ r_4 - 2r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 18 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ r_3 + 5r_2 \\ r_4 + 4r_2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{(-1)r_2 \\ \frac{1}{6}r_4 \\ r_3 \leftrightarrow r_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da echelon-matricen har 3 ikke-nulrækker, er $\underline{\underline{\varrho(A) = 3}}$.

Maple: Reducer matricen som beskrevet i eksempel 16.1.

Vi kan nu resumere Gauss` eliminationsmetode.

Gauss`eliminationsmetode er følgende:
1) Totalmatrix T for et ligningssystem opskrives.
2) Ved én eller flere af operationerne
a) rækkeombytning
b) multiplikation af række med konstant $k \neq 0$,
c) rækkeoperation
reduceres T til en echelon-matrix T_1 (jævnfør sætning 16.1)
3) Ligningssystemet, der har T_1 som totalmatrix, opstilles .
4) Det nye ligningssystem løses "nedefra".

Da det oprindelige ligningssystem har samme løsningsmængde som ligningssystemet med totalmatricen T_1, er det oprindelige ligningssystem dermed løst.
Bemærk 1: Ved "håndregninger" venter man ofte med at skaffe 1-taller forrest i hver række, for at undgå for mange brøker (se eksempel 16.2).
Bemærk 2: Ved større ligningssystemer, vil man søge at formindske afrundingsfejl ved såkaldt pivotering (se supplement 16C).

De følgende tre eksempler illustrerer dels, hvorledes man benytter Gauss`metode til løsning af ligningssystemer, dels de tre typer løsningsmængder der kan forekomme. Da der under de forskellige operationer på matricerne let kan laves regnefejl, er det rart ved "håndregning" at føre en kontrol sideløbende med regningerne, så en fejl hurtigt bliver opdaget. Dette kan gøres ved at tilføje en kontrolsøjle, hvis elementer er summen af de øvrige elementer i rækken. Udføres f.eks. en rækkeoperation, kontrolleres, at samme rækkeoperation i kontrolsøjlen giver et element, som er lig med summen af de øvrige elementer i den ændrede række.

Eksempel 16.3. Én løsning.

Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 4 \\ -x_1 \qquad - x_3 &= 2\ . \end{aligned}$$

LØSNING:

Totalmatricen T opskrives og reduceres:

$$T = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ r_2 - r_1 \\ r_3 + \frac{1}{2}r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 2 \end{array}\right)$$

kontrol kontrol

$$\begin{array}{l} \\ r_3 - r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 2 \cdot r_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \left(\frac{1}{2}\right) \cdot r_1 \end{array}$$

Ligningssystemet løses "nedefra":

$$x_3 = -1,$$

$$x_2 - 2x_3 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 1,$$

$$x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -1.$$

Ligningssystemet har altså netop én løsning

$$(x_1, x_2, x_3) = \underline{\underline{(-1, 1, -1)}}\ .$$

Kommentar. Kaldes ligningssystemets koefficientmatrix A, har vi $\rho(A) = \rho(T) = n = 3$, dvs. antallet af uafhængige ligninger er lig med antallet af ubekendte n.

Eksempel 16.4. Uendelig mange løsninger.

Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 - 3x_5 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_5 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 18x_5 &= 6\ . \end{aligned}$$

LØSNING:

Totalmatricen ses at være identisk med den i eksempel 16.2 angivne matrix. Vi har derfor

$$T \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Løses det fremkomne ligningssystem nedefra, fås

$$x_5 = \frac{1}{3},$$

$$x_3 = 1 - 2x_4 - 3x_5, \quad \text{dvs.} \quad x_3 = -2x_4,$$

$$x_1 = -3x_2 + 2x_3, \quad \text{dvs.} \quad x_1 = -3x_2 - 4x_4 .$$

Det ses, at vi kan vælge x_2 og x_3 frit. Sættes $x_2 = s$ og $x_4 = t$, fås løsningen

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-3s - 4t,\ s,\ -2t,\ t,\ \frac{1}{3}), \qquad s,t \in \mathbb{R}\ .$$

Når de to parametre s og t uafhængigt af hinanden gennemløber de reelle tal, vil enhver partikulær løsning til ligningssystemet fremkomme én gang og kun én gang.

Kommentar. Kaldes ligningssystemets koefficientmatrix A, har vi $\rho(A) = \rho(T) = 3$, mens antal ubekendte $n = 5$. Ligningssystemet består derfor kun af 3 uafhængige ligninger med 5 ubekendte. Ligningssystemet siges at have $n - \rho(T) = 5 - 3 = 2$ **frihedsgrader** (eller en dobbelt uendelighed af løsninger) svarende til, at to af de variable kan vælges frit.

Maple:

Lettest er det at omdanne matricen til echalonform som beskrevet i eksempel eksempel 16.1 og løse nedefra

Alternativt kan man gøre følgende:

Skriv A:= og dan som beskrevet i eksempel 16.1 koefficientmatrix

Skriv B : = og dan som beskrevet i eksempel 16.1 højre side

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 18 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Skriv with(LinearAlgebra) Pakkens procedurer ses

Skriv LeastSquares(A,B) Kopier eventuelt navnet fra ovenstående procedurer for at undgå stavefejl

Resultat: $\begin{bmatrix} -3\_t_2 - 4\_t_4 \\ \_t2 \\ -2\_t_4 \\ \_t_4 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Eksempel 16.5. Ingen løsning.

Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 4 \\ -x_1 \quad\; - x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= 2\,. \end{aligned}$$

LØSNING:
Totalmatricen T opskrives og reduceres:

$$T = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{kontrol} \\ 4 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{l} \\ r_2 - r_1 \\ r_3 + \frac{1}{2}r_1 \\ r_4 - \frac{1}{2}r_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{kontrol} \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{l} \\ r_3 - r_2 \\ r_4 + 2r_2 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & \frac{15}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{l} \\ \\ \\ r_4 + 11r_3 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2\,. \end{array}$$

Af den nederste ligning fås $0 \cdot x_3 = 2$, dvs. ligningen og dermed ligningssystemet har ingen løsning.

Kommentar. Tilfældet svarer til, at $\rho(A) < \rho(T)$.

De tre foranstående eksempler illustrerer de tilfælde, der kan forekomme ved løsning af et lineært ligningssystem. Dette ses af følgende:

Lad ligningssystemets koefficientmatrix A have rangen ρ. Reduceres ligningssystemet til echelonform, vil det have følgende principielle udseende:

$$\begin{array}{lll} (1) & x_1 + a_{12}x_2 + \ldots & + a_{1n}x_n = b_1 \\ (2) & \quad x_\alpha + \ldots & + a_{2n}x_n = b_2 \quad (\alpha \geq 2) \\ \ldots & \quad \ldots & \ldots \quad \ldots \\ (\rho) & \quad x_r + a_{\rho,r+1}x_{r+1} + \ldots & + a_{\rho n}x_n = b_\rho \quad (r \geq \rho) \\ (\rho+1) & & 0 = b_{\rho+1} \\ (\rho+2) & & 0 = 0\,. \end{array}$$

Det er klart, at $\rho \le m$ (m = antal ligninger), og at $\rho \le n$ (n = antal ubekendte). Hvis $\rho < m$ og $b_{\rho+1} = 1$, er rangen af T lig $\rho + 1$. Hvis "$\rho < m$ og $b_{\rho+1} = 0$" eller $\rho = m$, er $\rho(T) = \rho(A) = \rho$. Vi kan derfor dele op i de i den følgende sætning 16.4 angivne tre tilfælde:

SÆTNING 16.4 *(løsning).*

1) $\rho(A) = \rho(T) = n$: *Ligningssystemet siges at bestå af* n ***uafhængige*** *ligninger med* n *ubekendte. Det har netop én løsning. Tilfældet svarer til eksempel 16.3, hvor* $\rho(A) = \rho(T) = n = 3\ (= m)$.

2) $\rho(A) = \rho(T) = \rho < n$: *Ligningssystemet har* $n - \rho$ *flere ubekendte, end der er uafhængige ligninger. Ligningssystemet siges at have* $n - \rho$ *frihedsgrader, da* $n - \rho$ *af de ubekendte kan vælges frit. (Løsningen indeholder* $n - \rho$ *parametre). Ligningssystemet siges også at have en* $n - \rho$ *dobbelt uendelighed af løsninger. Tilfældet svarer til eksempel* 16.4*, hvor* $\rho(A) = \rho(T) = 2$ *og* $n = 4$.

3) $\rho(A) < \rho(T)$: *Da* $b_{\rho+1} = 1$, *har ligningssystemet ingen løsning. Tilfældet svarer til eksempel 16.5, hvor* $\rho(A) = 3$ *og* $\rho(T) = 4$.

Geometrisk tolkning

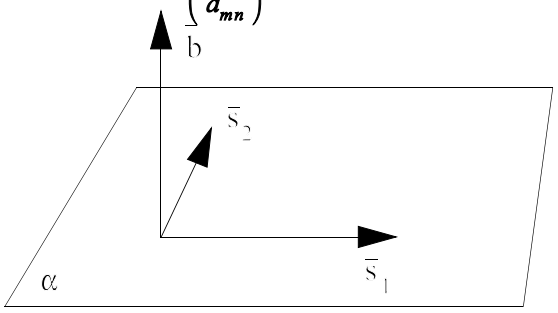
Lad søjlevektorerne i koefficientmatrix A være

$$\bar{s}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \bar{s}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \bar{s}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ligningssystemet med totalmatrix $T = (A \mid \bar{b})$ kan da skrives på vektorform:

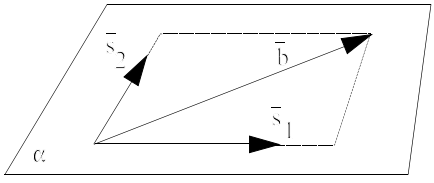
$$x_1\bar{s}_1 + x_2\bar{s}_2 + \ldots + x_n\bar{s}_n = \bar{b}.$$

Lad V være det vektorrum, der udspændes af søjlevektorerne $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_n$.



$\bar{b}$ er ikke en linearkombination af $\bar{s}_1$ og $\bar{s}_2$, da $\bar{b}$ ikke tilhører

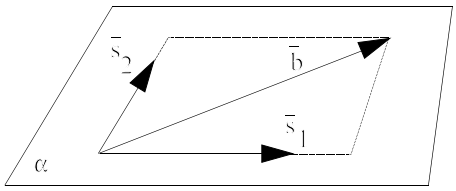
Er $\rho(A) < \rho(T)$, betyder det, at $\bar{b}$ ikke ligger i V ($\bar{b}$ er ikke en linearkombination af $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_n$, da ligningssystemet ikke har nogen løsning).



planenudspændt af $\bar{s}_1$ og $\bar{s}_2$.

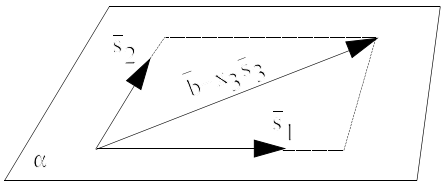
Er $\rho(A) = \rho(T)$, ligger $\bar{b}$ i V (da $\bar{b}$ er en linearkombination af $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_n$) .

Er $\rho(A) = \rho(T) = n$, er $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_n$ lineært uafhængige og udgør derfor en basis for V. Enhver vektor $\bar{b} \in V$ kan på én og kun én måde skrives som en linearkombination af $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_n$ (ligningssystemet har netop én løsning).



$\bar{b}$ er en linearkombination af $\bar{s}_1$ og $\bar{s}_2$, da $\bar{b}$ ligger i planen α udspændt af $\bar{s}_1$ og $\bar{s}_2$.

Er $\rho(A) = \rho(T) = \rho < n$, er $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_n$ lineært afhængige, mens der kan findes ρ søjlevektorer (og ikke flere), der er uafhængige. Lad $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_\rho$ udgøre en basis for V. Vektoren $\bar{b} - x_{\rho+1}\bar{s}_{\rho+1} - x_{\rho+2}\bar{s}_{\rho+2} - \ldots - x_n\bar{s}_n$ kan da skrives som en linearkombination af vektorerne i basis, ligegyldigt hvorledes $x_{\rho+1}, x_{\rho+2}, \ldots, x_n$ vælges.
(Ligningssystemet har en n - ρ dobbelt uendelighed af løsninger).



$\bar{b} - x_3\bar{s}_3$ er en linearkombination af $\bar{s}_1$ og $\bar{s}_2$, da både $\bar{b}$ og $\bar{s}_3$ ligger i planen α udspændt af $\bar{s}_1$ og $\bar{s}_2$.

SUPPLEMENT: 16A BEVIS FOR SÆTNING 16.1: MATRIX KAN OMDANNES TIL ECHELON-MATRIX

SÆTNING 16.1 *(echelon-matrix). Enhver matrix kan omdannes til en rækkeækvivalent echelon-matrix, hvor de ledende 1-taller er entydigt placeret.*

Bevis. Hvis matricen A er en nulmatrix, er sætningen sand. I modsat fald indeholder den mindst ét element forskelligt fra 0.

a) Hvis første søjle i A indeholder lutter 0'er, behøver vi ikke at gøre mere ved denne søjle. Indeholder den anden søjle også lutter 0'er, går vi til tredie søjle osv. Lad den p'te søjle være den første søjle, der ikke indeholder lutter 0'er , f.eks

$$\begin{matrix} & & p \\ & & \downarrow \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vi kan nu, eventuelt efter en rækkeombytning, sikre os, at der står et tal $\alpha \neq 0$ på den p'te plads i den første række. Ved at multiplicere rækken med $\frac{1}{\alpha}$ får vi et ledende 1-tal for den første række. Ved rækkeoperationer (af typen $r_q - a_{qp} \cdot r_1$) kan vi derefter skaffe 0'er under det ledende 1-tal i p'te søjle, f.eks

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Vi betragter nu den undernatrix B, f.eks $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, der fremkommer ved, at vi ser bort fra den første række og de første p søjler.
Hvis alle søjler er 0-søjler, har vi enchelon-matrix. I modsat fald kan vi gentage den under a) angivne procedure.

c) Dette kan nu gentages, indtil vi ender med en echelon-matrix.

d) De indledende 1-taller er entydigt placeret. Eksempelvis kan $\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}$ aldrig omdannes til $\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$ ved rækkeækvivalente operationer.

SUPPLEMENT: 16B BEVIS FOR SÆTNING 16.2: RÆKKEÆKVIVALENTE MATRICER HAR SAMME RANG

SÆTNING 16.2 *(rang). Rækkeækvivalente matricer har samme rang.*

Bevis. Rangen af en matrix er defineret som det største antal lineært uafhængige rækker, der kan udtages af A.

Derfor kan $r_i \leftrightarrow r_j$ og $k \cdot r_j \ (k \neq 0)$ ikke ændre rangen. Lad r_1, r_2, r_3 være et største sæt lineært uafhængige rækker i A, dvs. $\text{rang}(A) = 3$. Vi mangler da at vise, at en rækkeoperation $r_i + k \cdot r_j$ ikke kan ændre rangen.

Beviset føres indirekte: Vi antager, at $r_i + k \cdot r_j$ gør rangen mindre, og ønsker at vise, at dette fører til en modstrid. Da r_1, r_2, r_3 er 3 lineært uafhængige vektorer, må det være en af disse rækker vi har ændret, således at rangen er blevet mindre end 3. Lad det være r_1, der er ændret. Så er rækkeoperationen altså

$$r_1 + k \cdot r_j .$$

Da rangen er antaget mindre end 3, må ethvert sæt af 3 rækkevektorer altid kunne udtrykke en af vektorerne ved de to andre. Betragtes de 3 rækkevektorer

$$r_1 + k \cdot r_j, \ r_2, \ r_3$$

gælder altså mindst en af de tre ligninger:

$$r_1 + k \cdot r_j = a \cdot r_2 + b \cdot r_3 \qquad (1)$$
$$r_2 = p \cdot (r_1 + k \cdot r_j) + q \cdot r_3 \qquad (2)$$
$$r_3 = s \cdot (r_1 + k \cdot r_j) + t \cdot r_2 . \qquad (3)$$

Hvis ligning (2) er sand, kan p ikke være 0, da der så ville gælde $r_2 = q \cdot r_3$ i strid med, at r_2 og r_3 er lineært uafhængige. Af ligning (2) kan vi derfor udlede en ligning af typen (1). Tilsvarende kan vi af ligning (3) udlede en ligning af typen (1). Under alle omstændigheder gælder altså ligning (1).

Betragtes de 3 rækkevektorer

$$r_j, \ r_2, \ r_3$$

kan vi tilsvarende udtrykke r_j ved r_2 og r_3:

$$r_j = c \cdot r_2 + d \cdot r_3 . \qquad (4)$$

Multiplicers ligning (4) med k og subtraheres fra ligning (1), fås

$$r_1 = (a - k \cdot c) \cdot r_2 + (b - k \cdot d) \cdot r_3$$

i strid med at r_1, r_2, r_3 er lineært uafhængige. Rangen kan altså ikke mindskes ved en rækkeoperation.

Rangen øges heller ikke, da "tilbageoperationen" $r_1' - k \cdot r_j$ så skulle mindske rangen, hvilket vi lige har vist ikke er muligt.

SUPPLEMENT: 16C PIVOTERING

Regner man kun med et endeligt antal decimaler, vil afrundingsfejl gøre resultatet usikkert (især for større ligningssystemer). Disse fejl kan formindskes ved følgende fremgangsmåde.

I første søjle findes det største tal (kaldet pivot-elementet), og man ombytter rækkerne, så dette element kommer i række 1. Efter at man har skaffet nuller under dette pivotelement i første søjle, foretages nu en "pivotering" i anden søjle (det største af tallene $a_{22}', a_{32}', \ldots, a_{m2}'$ flyttes ved rækkeombytning op i anden række), og man skaffer nuller under dette pivotelement i anden søjle osv. Ved denne fremgangsmåde sikrer man sig, at man ved rækkeoperationerne altid multiplicerer rækkerne med faktorer, der er numerisk mindre end eller lig med 1.

Eksempel 16C.1 Pivotering.

Ved løsning af følgende ligningssystem regnes med 3 decimaler

$$\begin{aligned} 0.732x_1 + 1.013x_2 - 5.421x_3 &= 4.256 \\ 3.491x_1 + 0.782x_2 + 2.203x_3 &= 7.113 \\ 0.961x_1 + 4.265x_2 - 1.523x_3 &= 3.727\ . \end{aligned}$$

I det følgende er pivotelementet markeret med fed skrift

$$T = \begin{pmatrix} 0.732 & 1.013 & -5.421 & | & 4.256 \\ 3.491 & 0.782 & 2.203 & | & 7.113 \\ 0.961 & 4.265 & -1.523 & | & 3.727 \end{pmatrix} \underset{r_2 \leftrightarrow r_1}{\sim} \begin{pmatrix} \mathbf{3.491} & 0.782 & 2.203 & | & 7.113 \\ 0.732 & 1.013 & -5.421 & | & 4.256 \\ 0.961 & 4.265 & -1.523 & | & 3.727 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_2 - 0.210r_1 \\ r_3 - 0.275r_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 3.491 & 0.782 & 2.203 & | & 7.113 \\ 0.000 & 0.849 & -5.884 & | & 2.762 \\ 0.000 & 4.050 & -2.129 & | & 1.771 \end{pmatrix} \underset{r_2 \leftrightarrow r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 3.491 & 0.782 & 2.203 & | & 7.113 \\ 0.000 & \mathbf{4.050} & -2.129 & | & 1.771 \\ 0.000 & 0.849 & -5.884 & | & 2.762 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3 - 0.210r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 3.491 & 0.782 & 2.203 & | & 7.113 \\ 0.000 & 4.050 & -2.129 & | & 1.771 \\ 0.000 & 0.000 & -5.437 & | & 2.390 \end{pmatrix}\ .$$

Heraf findes $\underline{\underline{x_3 = -0.440}}$, $\underline{\underline{x_2 = 0.206}}$, $\underline{\underline{x_1 = 2.269}}$.

OPGAVER

Opgave 16.1 (*lineær uafhængighed*)

Besvar de efterfølgende spørgsmål a), b), c) og d) for et af de følgende sæt værdier af $\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}, \bar{a}^{(3)}$ *og* $\bar{a}^{(4)}$:

1^T)
$$\bar{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}^{(4)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

2)
$$\bar{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

3)
$$\bar{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}^{(4)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix},$$

4)
$$\bar{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

a) Find en vektor $\bar{b}$ *i det underrum, der udspændes af* $\bar{a}^{(1)}$ *og* $\bar{a}^{(2)}$.

b) Er vektorerne $\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}$ *og* $\bar{a}^{(3)}$ *lineært uafhængige?*

c) Find dimensionen af vektorrummet V, der udspændes af $\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}$ *og* $\bar{a}^{(4)}$.

d) Find en basis for det vektorrum V, der udspændes af $\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}, \bar{a}^{(3)}$ *og* $\bar{a}^{(4)}$.

Opgave 16.2 $^{\mathbf{T}}$ (*lineære ligninger*)

Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + cx_2 + ax_3 &= b \\ x_1 + 2cx_2 + ax_3 &= b \\ 2x_1 + 3cx_2 + 3ax_3 &= 3b - 3 \end{aligned}$$

for

1) $a = 1, \quad b = 6 \quad$ *og* $\quad c = 1$
2) $a = 0, \quad b = 6 \quad$ *og* $\quad c = 1$
3) $a = 0, \quad b = 3 \quad$ *og* $\quad c = 1$
4) $a = 0, \quad b = 3 \quad$ *og* $\quad c = 0$.

Opgave 16.3 (*lineære ligninger*)

Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 + &= c \\ 2x_1 + 3ax_2 + 3bx_3 &= 4c \\ x_1 + 3ax_2 + 4bx_3 &= 6c \end{aligned}$$

for

1) $a = 1$, $b = 1$ *og* $c = 2$

2) $a = 2$, $b = 0$ *og* $c = 2$

3) $a = 3$, $b = 0$ *og* $c = 0$

4) $a = 0$, $b = 0$ *og* $c = 0$.

Opgave 16.4 (*lineære ligninger*)

Givet ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - ax_3 &= 1 \\ -x_1 + ax_3 &= 1 - b \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= b \ . \end{aligned}$$

1) *Løs ligningssystemet for* $(a,b) = (1,2)$.

2) *Bestem for ethvert talsæt* (a,b) *den fuldstændige løsning til ligningssystemet.*

Opgave 16.5 (*lineære ligninger*)

Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - ax_3 + 2x_4 &= c \\ x_1 + x_2 - ax_3 + (3-a)x_4 &= b \\ (a+1)x_1 + (a+1)x_2 - 2x_3 + (a-3)x_4 &= 1 \\ -(a+1)x_2 + 3x_4 &= b - c \end{aligned}$$

for

1) $a = 2$, $b = 3$ *og* $c = 1$

2) $a = -2$ $b = -1$ *og* $c = -2$

3) $a = -3$, $b = 2$ *og* $c = 1$.

Opgave 16.6 (*lineære ligninger*)

På et laboratorium analyseres en blanding af 4 organiske stoffer kvantitativt ved måling af et ultraviolet-spektrogram. Heraf fås følgende ligningssystem for koncentrationerne c_1, c_2, c_3 *og* c_4 (*millimol / liter*) :

$$\begin{aligned} 5.00c_1 + 1.00c_2 + 1.00c_4 &= 30.0 \\ + 6.00c_2 + 2.00c_3 + 1.00c_4 &= 50.0 \\ 1.00c_1 + 1.00c_2 + 5.00c_3 &= 33.0 \\ 5.00c_1 + 1.00c_2 + 5.00c_4 &= 70.0 \ . \end{aligned}$$

Find c_1, c_2, c_3 *og* c_4.

Opgave 16.7 (*lineære ligninger*)

Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_3 &= -5 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\ -x_1 + 5x_2 &= -7 \ . \end{aligned}$$

Opgave 16.8 (*lineære ligninger*)

Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 4 \\ -7x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 4 \ . \end{aligned}$$

Opgave 16.9 (*lineære ligninger, blandingsproblem*)

Man ønsker at fremstille 10 ton af en næringsblanding bestående af 5 komponenter:

	komponent				*ønsket blanding*
	skummetmælk	*kartofler*	*æbler*	*sojamel*	
mængde (ton):	x_1	x_2	x_3	x_4	10
kulhydrat pr. 100 g	5	20	10	25	15
protein pr. 100 g	3	3	0	36	6
C-vitamin pr. 100 g	1	10	7	0	6

For at kunne bestemme x_1, x_2, x_3 *og* x_4, *således at den færdige blanding får det ønskede indhold af kulhydrater, protein og C-vitamin, opstilles ligningssystemet:*

$$\begin{aligned} \textit{mængde}: \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ \textit{kulhydrat}: \quad & 5x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 25x_4 = 150 \\ \textit{protein}: \quad & 3x_1 + 3x_2 + 36x_4 = 60 \\ \textit{C-vitamin}: \quad & x_1 + 10x_2 + 7x_3 = 60 \ . \end{aligned}$$

1) Vis, at ligningssystemet har netop 1 løsning, og find herunder denne løsning.

2) Såfremt man ved løsningen af ligningssystemet havde fundet en negativ værdi for x_3, *hvilken konklusion kunne da drages om den ønskede næringsblanding.*

3) Hvilken ændring sker der i x_1, x_2, x_3 *og* x_4, *hvis der nu kræves* $6 + \frac{h}{10}$ *g protein pr. 100g færdig blanding (h er en given konstant).*

(I det matematiske fag ***"lineær programmering"*** *løses blandt andet nogle vigtige varianter af ovenstående problemtype, f.eks : en blanding ønskes fremstillet billigst mulig ud fra komponenterne, idet der er opgivet mindste tilladelige indhold af visse skadelige stoffer).*

Opgave 16.10^{T} (*rang*)

Find rangen af matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -2 \\ -2 & -4 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 16.11 (*rang*)

Find rangen af matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 16.12 (*rang*)

Find rangen af matricen

$$\begin{pmatrix} 2-i & 3-4i & 5 & 6+2i \\ 2 & 3-2i & 2i & 9-3i \\ -2i & 4-4i & -2 & 4-4i \\ 1+i & 3+i & 5-9i & 12-4i \end{pmatrix}.$$

Opgave 16.13 (*lineære ligninger*)

Indledningen (med petit) kan overspringes,da den ikke er nødvendig for opgavens løsning.

Indledning. *En fabrik får til opgave at fremstille et produkt, der bl.a. skal indeholde 3.2 kg af stoffet I, 3.6 kg af stoffet II og 3.3 kg af stoffet III. Råstofferne A, B, C og D's procentiske indhold af I, II og III fremgår af nedenstående tabel.*

	A	*B*	*C*	*D*
I	*20%*	*50%*	*30%*	*0 %*
II	*10%*	*40%*	*30%*	*20%*
III	*30%*	*0%*	*20%*	*50%*

Forudsat at alle råstofferne kan udnyttes, ønsker man at finde de antal kg x_1, x_2, x_3 *og* x_4 *af henholdsvis A, B, C og D, der skal benyttes ved fremstillingen. Specielt ønskes angivet den af de mulige løsninger, der giver det mindste forbrug af det dyre råstof A.*

Fortsætter!

Givet ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 32 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 36 \\ 3x_1 + 2x_3 + 5x_4 &= 33 \ . \end{aligned}$$

1) Find den fuldstændige løsning til ligningssystemet.

2) Idet det antages, at $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$ *og* $x_4 \geq 0,$ *skal man angive den løsning til ligningssystemet, der har den mindste værdi af* x_1.

Opgave 16.14 (*lineære ligninger*)

Til beregning af fire størrelser $x_1,\ x_2,\ x_3$ *og* x_4 *opstilles følgende ligningssystem*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + (3+a)x_3 + 2x_4 &= 2+b \\ -x_1 + 2x_2 + (2+a)x_3 + 2x_4 &= 5+b \\ 2x_1 + 3x_2 + (1+a)x_3 + 2x_4 &= 3+b \\ 3x_1 + 3x_2 + (1+a)x_3 &= 1+b \ . \end{aligned}$$

Det er meget dyrt (meget vanskeligt) at bestemme koefficienterne til x_3 *og konstanterne på højre side med stor nøjagtighed. Disse er følgelig angivet med en usikkerhed på henholdsvis a og b, og* $x_1,\ x_2,\ x_3$ *og* x_4*´s afhængighed af disse usikkerheder ønskes bestemt.*

1) Angiv de værdier af a, for hvilke ligningssystemet har netop én løsning, og find denne løsning, dvs. find $x_1,\ x_2,\ x_3$ *og* x_4 *udtrykt ved a og b.*

2) Angiv de værdier af a og b, for hvilke ligningssystemets løsningsmængde er tom, og de værdier af a og b for hvilke ligningssystemet har uendelig mange løsninger. I sidste tilfælde skal antallet af frihedsgrader angives.

Opgave 16.15 (*lineære ligninger*)

Mellem variablene x og y gælder den teoretiske sammenhæng

$$y = A + Bx + Cx^2 + D\,2^{3-x} \ .$$

Fra laboratoriet er der kommet følgende måledata:

x	0	1	2	3
y	2	0	4	13

Opstil 4 ligninger til bestemmelse af konstanterne A, B, C, D, og find derpå A, B, C og D.

Opgave 16.16 (*lineære ligninger*)

Til beregning af fire størrelser x_1, x_2, x_3 *og* x_4 *er opstillet følgende ligningssystem:*

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + (a-3)x_3 + (a+1)x_4 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + (2a-1)x_3 &= a \\ (a-1)x_1 + ax_2 + (2a+3)x_4 &= -a-1 \\ 3x_1 + 2x_2 + (a+2)x_3 - x_4 &= a-2\ . \end{aligned}$$

1) Angiv de værdier af a, *for hvilke ligningssystemets løsningsmængde er tom.*

2) Angiv de værdier af a, *for hvilke ligningssystemet har uendelig mange løsninger, og angiv et udtryk for disse.*

Opgave 16.17 (*lineære ligninger, blandingsproblem*)

Der skal fremstilles 100 kg af et produkt ved at blande 4 råvarer. Sammensætningen af de enkelte råvarer er i vægt %:

	råvare nr 1	*råvare nr 2*	*råvare nr 3*	*råvare nr 4*	*ønsket produkt*
protein	10	30	20	10	20
fedt	0	10	20	20	10
kulhydrat	80	10	0	20	30
andet	10	50	60	50	40
i alt %	100	100	100	100	100

Af råvarer bruges der x_1 *kg af nr* 1, x_2 *kg af nr* 2, x_3 *kg af nr* 3 *og* x_4 *kg af nr* 4.

1) Opstil et ligningssystem til bestemmelse af x_1, x_2, x_3 *og* x_4.

2) Find samtlige løsninger til det i spørgsmål 1 opstillede ligningssystem.

Opgave 16.18 (*lineære ligninger*)

Til beregning af fire størrelser x_1, x_2, x_3 *og* x_4 *opstilles følgende ligningssystem:*

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + (2+a)x_3 + 2x_4 &= 2 \\ -x_1 - x_2 - ax_3 + (a-2)x_4 &= 2 \\ x_1 + 4x_2 + (4+2a)x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 + (4+2a)x_3 + (2+a)x_4 &= 5\ . \end{aligned}$$

1) Angiv de værdier af a, *for hvilke ligningssystemet har netop én løsning, og find denne løsning, dvs. find* x_1, x_2, x_3 *og* x_4 *udtrykt ved* a.

2) Angiv de værdier af a, *for hvilke ligningssystemets løsningsmængde er tom. (Husk begrundelse).*

Opgave 16.19 (*lineære ligninger*)

Find for enhver værdi af a *løsningsmængden til ligningssystemet:*

$$\begin{aligned} x_1 + (a-2)x_2 + x_3 + x_4 &= a \\ x_1 + (a-1)x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 2a \\ 2x_1 + 2ax_2 + 10x_3 + 6x_4 &= a^2 + 8 \ . \end{aligned}$$

Opgave 16.20 (*lineære ligninger, kapacitetsudnyttelse*)

En virksomhed fremstiller 4 typer produkter 1, 2, 3 og 4. Under tilblivelsesprocessen skal hvert produkt passere igennem alle virksomhedens 3 afdelinger, men beslaglægger her kapaciteten i forskellig grad:

	1 enhed af type 1	*1 enhed af type 2*	*1 enhed af type 3*	*1 enhed af type 4*
afdeling 1	5 %	10 %	10 %	15 %
afdeling 2	10 %	5 %	10 %	15 %
afdeling 3	20 %	10 %	15 %	10 %

Lad x_j *betegne "antal producerede enheder af type* j*" i en uge.*
Såfremt hver afdelings kapacitet skal udnyttes fuldt ud i denne uge, må der gælde:

$$\begin{aligned} \textit{afdeling } 1: \quad & 5x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 15x_4 = 100 \\ \textit{afdeling } 2: \quad & 10x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 = 100 \\ \textit{afdeling } 3: \quad & 20x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 10x_4 = 100 \ . \end{aligned}$$

1) *Vis, at ligningssystemet har en enkelt uendelighed af løsninger og angiv herunder den fuldstændige løsning ved hjælp af en parameter* u.
Hvilke værdier af u *kan forekomme i virkeligheden (husk, at* $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$*) ?*

2) *Hvad er det største antal emner af produkttype 3, som virksomheden kan fremstille pr. uge, når der ikke må være ledig kapacitet i nogen af de 3 afdelinger ?*

3) *Kan virksomheden uden at få ledig kapacitet i nogen afdeling standse produktionen af type 2 ? Analogt: . . . . af type 1 ?*

(*Bemærk: I det matematiske fag "lineær programmering" behandles sådanne problemtyper -- gerne med mange flere variable, idet der benyttes specielle teknikker i forbindelse med edb*).

Opgave 16.21 (*lineære ligninger, Taylors formel, ekstremum, optimering*)

Man ønsker at bestemme de optimale driftsbetingelser (temperatur T [° C] og tryk P [atm.]) for en kemisk reaktor, idet udbyttet z skal være så stort som muligt. Ved forsøg har man fundet:

temperatur $x = \frac{T-200}{10}$	*tryk* $y = P - 10$	*udbytte* $z = f(x,y)$ $[kg \cdot \min^{-1}]$
0	0	20
1	0	22
-1	0	16
0	1	19
0	-1	19
1	1	22

hvor der er indført bekvemme variable x og y for temperatur og tryk.

Metode: Det antages , at udbyttet $z = f(x,y)$ *kan tilnærmes ved det til udviklingspunktet* $(x_0,y_0) = (0,0)$ *svarende approksimerende polynomium af højst anden grad*:

$$P_2(x,y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + c_5y^2 + c_6xy\,.$$

Af forsøgsresultaterne bestemmes $c_1, c_2, \ldots, c_6$, *hvorefter der kan søges størsteværdi for polynomiet* P_2.

1) Vis, at ligningssystemet til bestemmelse af $c_1, c_2, \ldots, c_6$ *får totalmatricen*

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 22 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 19 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 19 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 22 \end{array}\right) .$$

2) Vis ved reduktion af totalmatricen, at ligningssystemet har netop 1 løsning og bestem herunder denne løsning.

3) Vis, at udbyttet har $(x,y) = (2,1)$ *som eneste stationære punkt, og at størsteværdien antages i dette punkt. Beregn derefter størsteværdien.*

Opgave 16.22 (*lineære ligninger*)

Find for enhver værdi af a løsningsmængden til ligningssystemet:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_4 &= -4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 11 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_4 &= -13 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + ax_4 &= -3\,. \end{aligned}$$

17 MATRIXREGNING

17.1 INDLEDNING

Ved mange anvendelser er det meget nyttigt at erstatte matricer, der måske indeholder mange hundrede elementer, med enkelte **korte** symboler som *A, B* m.m. Man kan så regne med disse symboler, f.eks. danne $A+B$, $A-B$, $A \cdot B$, $\boldsymbol{A^{-1} \cdot B}$, $\boldsymbol{A \cdot X = B}$ osv., hvorved man på overskuelig form omformer og løser problemer, som ellers var ganske uigennemskuelige på grund af de mange tal.

17.2 ADDITION OG MULTIPLIKATION

Lighed

To $\boldsymbol{m \times n}$ matricer A og B kaldes ens (skrives $A=B$), hvis tilsvarende elementer i de to matricer er ens, altså $\boldsymbol{a_{rs} = b_{rs}}$ for alle i betragtning kommende værdier af r og s.

Multiplikation af matrix med tal (skalar)

For et vilkårligt reelt tal k og en vilkårlig matrix A defineres kA som en ny matrix, fremkommet ved at alle A`s elementer er multipliceret med k.
Eksempelvis gælder

$$3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 9 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Addition af matricer

Ved summen af to $m \times n$ matricer A og B forstås den $m \times n$ matrix, der fremkommer ved at tilsvarende elementer i A og B adderes, altså

$$+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Bemærk: Både A og B skal være $m \times n$ matricer.

Eksempelvis gælder

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

Multiplikation af matricer

Lad der være givet to matricer A_{mn} og B_{np}, hvor antallet af søjler i A_{mn} er lig med antallet af rækker i B_{np}:

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B_{np} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} & \cdots & b_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} .$$

Kaldes rækkevektorerne i matricen A_{mn} for $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_r, \ldots, \bar{a}_m$ og søjlevektorerne i B_{np} for $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_s, \ldots, \bar{b}_p$, defineres produktet $C_{mp} = A_{mn} B_{np}$ ved

$$C_{mp} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1\cdot\bar{b}_1 & \bar{a}_1\cdot\bar{b}_2 & \ldots & \bar{a}_1\cdot\bar{b}_s & \ldots & \bar{a}_1\cdot\bar{b}_p \\ \bar{a}_2\cdot\bar{b}_1 & \bar{a}_2\cdot\bar{b}_2 & \ldots & \bar{a}_2\cdot\bar{b}_s & \ldots & \bar{a}_2\cdot\bar{b}_p \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \bar{a}_r\cdot\bar{b}_1 & \bar{a}_r\cdot\bar{b}_2 & \ldots & \bar{a}_r\cdot\bar{b}_s & \ldots & \bar{a}_r\cdot\bar{b}_p \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \bar{a}_m\cdot\bar{b}_1 & \bar{a}_m\cdot\bar{b}_2 & \ldots & \bar{a}_m\cdot\bar{b}_s & \ldots & \bar{a}_m\cdot\bar{b}_p \end{pmatrix} .$$

Elementet c_{rs} i den r`te række og den $s$`te søjle i produktmatricen C_{mp} bestemmes altså ved det skalære produkt $\bar{a}_r\cdot\bar{b}_s$:

$$c_{rs} = \bar{a}_r\cdot\bar{b}_s = a_{r1}b_{1s} + a_{r2}b_{2s} + \ldots + a_{rn}b_{ns} = \sum_{i=1}^{n} a_{ri}b_{is} .$$

Da rækker i første matrix multipliceres med søjler i anden matrix, kaldes multiplikationen ofte for en **række-søjle-multiplikation.**

Eksempel 17.1. Multiplikation af matricer.

Lad $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Beregn *AB* og *BA*, hvis det er muligt.

LØSNING:

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 12 & 9 & -15 \end{pmatrix},$$ mens *BA* ikke er defineret.

Den nedenfor viste opstilling af matricerne kan gøre regningerne mere overskuelige:

			-1	0	-1
			1	2	2
			2	1	-2
5	1	-2	-8	0	1
3	1	7	12	9	-15

Anden faktor

Første faktor Produkt

Opstillingen kan endvidere let udvides til at omfatte produkter af 3 eller flere matricer:

	C	
B	BC	Mellemresultat
A	ABC	Facit

Maple:

Benyt menuen "Matrix" til at indtaste de to matricer : Skriv A:=, I "MATRIX" ,Vælg 2 rækker, 3 søjler, Insert Matrix, Benyt tabulator når der flyttes fra en plads til den næste

$$A:=\begin{bmatrix}5 & 1 & -2\\ 3 & 1 & 7\end{bmatrix} \qquad B:=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

A.B (Bemærk, at man benytter punktum for gange tegn)

Resultat: $\begin{bmatrix}-8 & 0 & 1\\ 12 & 9 & -15\end{bmatrix}$

17.3 LIGNINGSSYSTEM PÅ MATRIXFORM

Det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 &= 2\\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1\\ -x_1 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

kan skrives

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -1\\ 3 & -2 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}$$

eller kort

$$AX = B,$$

hvor A er koefficientmatrix, mens $X = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}$ er søjlevektorer.

Ethvert lineært ligningssystem kan på samme måde skrives på den korte form $AX = B$. Sædvanligvis betegnes søjlematricerne X og B dog som vektorer $\bar{x}$ og $\bar{b}$, dvs. $A\bar{x} = \bar{b}$. For at have glæde af den korte form, må vi kende nogle regneregler for matricer, bl.a. ville det være godt, hvis der eksisterede en "invers " matrix A^{-1}, så $A\bar{x} = \bar{b} \iff \bar{x} = A^{-1}\bar{b}$.

17.4 REGNEREGLER FOR MATRICER, TRANSPONERET MATRIX

DEFINITION af transponeret matrix. *Den transponerede matrix* $\widetilde{A}$ *fremkommer ved, at rækkerne i* A *skrives som søjler i* $\widetilde{A}$ *(1. række bliver til 1. søjle, 2. række bliver til 2. søjle osv.). Den transponerede matrix skrives også* A^T *eller* A'.

Eksempelvis har matricen $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & \pi & 8 \\ 4 & 7 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ den transponerede matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & \pi & 7 \\ 0 & 1 & 8 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Af definitionen følger: $\widetilde{\widetilde{A}} = A$. Er $\widetilde{A} = A$, kaldes A **symmetrisk**.

SÆTNING 17.1 *(regning med matricer). Såfremt matricerne er af en sådan type, at regningerne er mulige, gælder følgende*

1) $A + B = B + A$ (*den kommutative lov*)

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$; $A(BC) = (AB)C$ (*de associative love*)

3) $A(B + C) = AB + AC$ (*den distributive lov*)

4) $\widetilde{A+B} = \widetilde{A} + \widetilde{B}$; $\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$.

Beviserne kan føres ved direkte udregning ud fra definitionerne.

De fleste af disse regneregler er ganske som regnereglerne for de reelle tal. Bemærk dog, at der ikke gælder nogen kommutativ lov for multiplikation, dvs. vi må normalt forvente, at

$AB \neq BA$ (se eksempel 17.1).

Bemærk endvidere rækkefølgen af matricerne i regnereglen

$\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$ (se eksempel 17.2).

Eksempel 17.2. Illustration af regneregel.

Idet $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, vil vi vise, at $\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$.

LØSNING:

Ifølge eksempel 17.1 er $AB = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 12 & 9 & -15 \end{pmatrix}$, dvs. $\widetilde{AB} = \begin{pmatrix} -8 & 12 \\ 0 & 9 \\ 1 & -15 \end{pmatrix}$.

På den anden side finder vi

$$\widetilde{B}\,\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 12 \\ 0 & 9 \\ 1 & -15 \end{pmatrix}.$$

Heraf fås

$$\widetilde{AB} = \widetilde{B}\,\widetilde{A}.$$

Maple:

Benyt menuen "Matrix" til at indtaste de to matricer : Skriv A:=, I "MATRIX" ,Vælg 2 rækker, 3 søjler, Insert Matrix, Benyt tabulator når der flyttes fra en plads til den næste

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Cursor på udskrift, højre musetast, "Standard Operations, "Transpose"

Resultat: $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

Cursor på udskrift, højre musetast, "Assign to a name", vælg navnet AT

Tilsvarende dannes B, B`s transponerede og man giver den navnet BT

$$B := \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

A.B (Bemærk, at man benytter punktum for gange tegn)

Resultat: $\begin{bmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 12 & 9 & -15 \end{bmatrix}$

A.B transponeres $\begin{bmatrix} -8 & 12 \\ 0 & 9 \\ 1 & -15 \end{bmatrix}$

AT.BT $\begin{bmatrix} -8 & 12 \\ 0 & 9 \\ 1 & -15 \end{bmatrix}$

17.5 INVERS MATRIX, MATRIXLIGNINGER

Vi vil i dette afsnit betragte mængden M_n af kvadratiske $n \times n$ matricer.

DEFINITION af enhedsmatrix. *Ved en enhedsmatrix (skrives E eller E_n) forstås en kvadratisk matrix, hvor alle elementer i diagonalen er 1, og alle elementer uden for diagonalen er 0.*

Eksempelvis er $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en enhedsmatrix.

Ved direkte udregning ses, at for en vilkårlig $n \times n$ matrix A gælder $A \cdot E = E \cdot A = A$, dvs. enhedsmatricen E spiller samme rolle i mængden M_n, som 1 gør i de reelle tal. (E er "neutralt element" for multiplikation i M_n).

DEFINITION af invers (reciprok) matrix. *Matricen B kaldes invers matrix til matricen A, hvis* $A \cdot B = B \cdot A = E$.

Man ser, at B spiller den samme rolle i forhold til A, som f. eks. tallet $\frac{1}{2}$ gør i forhold til tallet 2 ($\frac{1}{2} \cdot 2 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$).

Ligesom 0 ikke har noget inverst element i de reelle tal, findes der såkaldte singulære matricer, der ikke har nogen invers matrix.

Man kunne forestille sig, at en matrix kunne have flere forskellige inverse matricer. Dette er imidlertid **ikke** tilfældet:

Bevis. Antag, at B og C begge er inverse matricer til A. Vi ville da få

$$B = B \cdot E = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = E \cdot C = C, \quad \text{dvs. } B = C.$$

En matrix A, der har en invers matrix, kaldes **invertibel**, og A's inverse matrix betegnes A^{-1}. Hvilke matricer der er invertible, og hvorledes man finder A^{-1}, fremgår af følgende sætning:

SÆTNING 17.2 (*invers matrix*). *For en kvadratisk matrix A gælder:*

$$\text{rang}(A) = n \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ er invertibel.}$$

Den inverse matrix A^{-1} *bestemmes på følgende måde:*

"Totalmatricen" $(A|E)$ *reduceres til en dermed rækkeækvivalent matrix af formen* $(E|\ldots)$, *dvs. således at A bliver reduceret til enhedsmatricen E. Matricen på højre side af den stiplede linie er da* A^{-1}. *Kort haves* $(A|E) \sim (E|A^{-1})$.

Bevis. Vi skal for en $n \times n$ matrix A vise, at $\mathbf{rang}(A) = n \Leftrightarrow A$ **er invertibel.** Når en matrix Q består af søjlevektorerne $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_n$, vil vi kort skrive $Q = (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_n)$. Specielt skal $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ betegne søjlerne i enhedsmatricen E, dvs. $E = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$. Vi har

Udledning	Kommentar
$\mathbf{rang}(A) = n$	
$\Leftrightarrow$ Hvert af ligningssystemerne $A\bar{x}_1 = \bar{e}_1,\ A\bar{x}_2 = \bar{e}_2, \ldots,\ A\bar{x}_n = \bar{e}_n$ har netop 1 løsning $\bar{x}_1 = \bar{q}_1,\ \bar{x}_2 = \bar{q}_2, \ldots,\ \bar{x}_n = \bar{q}_n$ $\wedge\ \mathbf{rang}(A) = n$.	Følger af sætning 16.4 punkt 1), idet $\mathbf{rang}(A) = \mathbf{rang}(T) = n$. For at finde x_1 betragtes totalmatricen $(A\|\bar{e}_1)$ for ligningssystemet $A\bar{x}_1 = \bar{e}_1$. Totalmatricen har rangen n og kan derfor reduceres til en echelon-matrix med n ikke-nulrækker (ifølge sætning 16.3). Alle elementer i echelon-matricens diagonal må da være lig med 1. Vi kan derfor yderligere reducere echelon-matricen til en dermed rækkeækvivalent matrix af formen $\left(\begin{array}{ccccc\|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & q_{11} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & q_{12} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & q_{13} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & q_{1n} \end{array}\right)$ eller kort $(E\|\bar{q}_1)$. Analogt findes $\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$.
$\Leftrightarrow$ Matrixligningen $AX = E$ har netop 1 løsning $X = Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ $\wedge\ \mathbf{rang}(A) = n$.	Flere ligningssystemer $A\bar{x}_1 = \bar{e}_1,\ A\bar{x}_2 = \bar{e}_2, \ldots,\ A\bar{x}_n = \bar{e}_n$, kan sammenfattes til en matrixligning $A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ eller kort $AX = E$. For at finde X betragtes totalmatricen $(A\|E)$, og som ovenfor beskrevet reduceres den til en dermed rækkeækvivalent matrix $(E\|Q)$, dvs. $X = Q$.
$\Leftrightarrow$ Der eksisterer netop 1 matrix Q, så $AQ = E$ $\wedge\ \mathbf{rang}(A) = n$.	
$\Leftrightarrow$ Der eksisterer netop 1 matrix Q, så $AQ = E$. Desuden gælder $QA = E$.	Først bevises "$\Longrightarrow$". Vi skal altså vise, at $QA = E$. Da $(A\|E) \sim (E\|Q)$, er Q rækkeækvivalent med E, dvs. $\mathbf{rang}(Q) = n$. Vi anvender nu det tidligere udledte på matricen Q i stedet for A. Så fås "der eksisterer netop 1 matrix P, så $QP = E$". Vi har nu $A = A \Leftrightarrow A(QP) = A$ $\Leftrightarrow (AQ)P = A \Leftrightarrow EP = A \Leftrightarrow P = A$. Derpå bevises "$\Longleftarrow$". Vi skal altså vise, at $\mathbf{rang}(A) = n$. Da $AX = E$ har netop 1 løsning, må $A\bar{x}_1 = \bar{e}_1$ også have netop 1 løsning, og ifølge sætning 16.4 gælder da $\mathbf{rang}(A) = n$.
$\Leftrightarrow$ A er invertibel.	

En følge af forannævnte bevis er, at der for kvadratiske matricer A og B gælder $AB = E \Leftrightarrow BA = E$. For at afgøre om, om B er invers matrix til A, er det altså nok enten at undersøge om $AB = E$ eller om $BA = E$.

Eksempel 17.3. Invers matrix.

1) Find A^{-1}, når $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2) Løs ligningssystemet $A\bar{x} = \bar{b}$, hvor $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

LØSNING:

1) Totalmatricen $(A \mid E)$ opstilles og reduceres:

$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} \text{Kontrol} \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \sim \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - r_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} 4 \\ -3 \\ -3 \\ -2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \sim \\ r_3 - r_2 \\ r_4 - r_2 \\ (-1)r_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \sim \\ r_4 - r_3 \\ (-1)r_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \sim \\ r_1 - r_3 - r_4 \\ r_2 - r_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}} .$$

2) Da A er invertibel, har vi $A\bar{x} = \bar{b} \Leftrightarrow \bar{x} = A^{-1}\bar{b}$. Vi finder da

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}} .$$

Maple
Benyt menuen "Matrix" til at indtaste de to matricer : Skriv A:=, I "MATRIX" ,Vælg 4 rækker, 4 søjler, Insert Matrix, Benyt tabulator når der flyttes fra en plads til den næste

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cursor på udskrift, højre musetast, "Standard Operations", "Inverse"

Resultat:
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Skriv b:= og indtast højre side $b := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Skriv with(LinearAlgebra): Derved hentes de ønskede procedurer frem

LinearSolve(A,B)

Resultat:
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Matrixligning. Ofte skal man løse flere ligningssystemer

$$A\bar{x}=\bar{b}_1,\ A\bar{x}=\bar{b}_2,\ \ldots,\ A\bar{x}=\bar{b}_q$$

med samme koefficientmatrix A. Man kan da sammenfatte ligningssystemet i matrixligningen $AX=B$, hvor B er en $n\times q$ matrix, der har $\bar{b}_1,\ \bar{b}_2,\ \ldots,\ \bar{b}_q$ som søjler.

Er A invertibel, vil matrixligningen $AX=B$ have netop 1 løsning $X=A^{-1}B$, som er en $n\times q$ matrix. Fremfor først at finde A^{-1} er det ofte hurtigere at reducere totalmatricen $T=(A|B)\sim(E|A^{-1}B)$ på tilsvarende måde som i eksempel 17.3 punkt 1.

Eksempel 17.4. Matrixligning.

Løs ligningen $AX=B$, hvor

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\2&-1&1&2\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&2\end{pmatrix}\quad\text{og}\quad B=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&-1&1\\4&0&0\\5&2&2\end{pmatrix}.$$

LØSNING:

Idet A^{-1} er fundet i eksempel 17.3, har vi $AX=B\ \Leftrightarrow\ X=A^{-1}B$. Vi finder da

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}2&-1&2&-1\\3&-2&1&0\\-1&1&-1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\3&-1&1\\4&0&0\\5&2&2\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}4&1&-3\\4&5&-2\\-3&-2&1\\1&2&2\end{pmatrix}}}.$$

Følgende sætning vedrørende inverse matricer er ofte nyttig.

SÆTNING 17.3 (*invers matrix*). *Lad A være en invertibel matrix. Så gælder:*

1) $AB=AC\ \Leftrightarrow\ B=C$ (*forkortningsregel*)

2) $(A^{-1})^{-1}=A$.

Er også B en invertibel matrix, gælder:

3) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ (*BEMÆRK RÆKKEFØLGEN !*)

4) $(\widetilde{A})^{-1}=\widetilde{A^{-1}}$.

Bevis. 1) $B=C\ \Rightarrow\ AB=AC$ **(klart).**

$AB=AC\ \Rightarrow\ A^{-1}(AB)=A^{-1}(AC)\ \Rightarrow\ (A^{-1}A)B=(A^{-1}A)C\ \Rightarrow\ EB=EC\ \Rightarrow\ B=C.$

2) Da $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, er A det inverse element til A^{-1}, dvs. $(A^{-1})^{-1}=A$.

3) $(B^{-1}A^{-1})AB=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E$.

4) Ved anvendelse af sætning 17.1 punkt 4 fås $\widetilde{A^{-1}}\widetilde{A}=\widetilde{AA^{-1}}=\widetilde{E}=E$.

Det følger af sætning 17.1 og 17.3, at vi inden for mængden M_n af kvadratiske $n \times n$ matricer kan regne efter stort set samme regneregler som inden for de reelle tal. Da den kommutative lov **ikke** gælder, skal man dog passe på i hvilken rækkefølge, man multiplicerer. Eksempelvis har ligningen $AX = B$ løsningen $X = A^{-1}B$, mens ligningen $XA = B$ har en **anden** løsning $X = BA^{-1}$. Ligeledes skal man passe på, hvis en matrix A ikke er invertibel. Er A ikke invertibel, er det således ikke sikkert, at $AB = AC \implies B = C$ (jævnfør opgave 17.4).

17.6 LØSNING AF OVERBESTEMT LIGNINGSSYSTEM

I de foregående afsnit har vi antaget, at ligningssystemets konstanter er eksakte tal. I tekniske anvendelser er tallene ofte behæftet med måleusikkerhed og lignende, og så vil løsningen naturligvis heller ikke blive eksakt. For at mindske fejlen benytter man ofte ekstra ligninger, som vist i følgende eksempel (og løser dem ved "mindste kvadraters metode").

Eksempel 17.5. Overbestemt ligningssystem.

På et laboratorium analyseres en blanding af tre organiske stoffer kvantitativt ved måling af et ultraviolet spektrogram. Heraf fås følgende ligningssystem for koncentrationerne c_1, c_2 og c_3 (for overblikkets skyld er her valgt nemme tal) :

$$\begin{aligned} 1.00c_1 + 1.00c_2 + 4.00c_3 &= 6.00 \\ 1.00c_1 + 3.00c_2 + 1.00c_3 &= 8.00 \\ 1.00c_1 + 1.00c_2 + 0.00c_3 &= 4.00\ . \end{aligned}$$

Ligningssystemet har netop én løsning, men da konstanterne er behæftet med uundgåelige småfejl (målefejl m.m.) , ønsker man at forbedre nøjagtigheden af løsningen ved at foretage nogle ekstra målinger. Lad os for simpelheds skyld antage, at der kun forekommer yderligere én ligning: $1.00c_1 + 3.00c_2 + 3.00c_3 = 10.00$.

Den sidste ligning burde være en linearkombination af de tre første, men på grund af målefejlene er dette sjældent tilfældet, så det samlede ligningssystem har normalt ingen eksakt løsning. Opgaven er nu at finde et talsæt (c_1, c_2, c_3), som tilfredsstiller ligningssystemet "bedst muligt", dvs. således at **residualerne** (resterne) r_1, r_2, r_3 og r_4 givet ved

$$\begin{aligned} r_1 &= 1.00c_1 + 1.00c_2 + 4.00c_3 - 6.00 \\ r_2 &= 1.00c_1 + 3.00c_2 + 1.00c_3 - 8.00 \\ r_3 &= 1.00c_1 + 1.00c_2 + 0.00c_3 - 4.00 \\ r_4 &= 1.00c_1 + 3.00c_2 + 3.00c_3 - 10.00 \end{aligned} \qquad (1)$$

bliver "mindst mulige". Ved "mindste kvadraters metode" skal talsættet vælges således, at RMS-fejlen $\mathbf{RMS} = \sqrt{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2)/4}$ bliver mindst mulig (RMS = root mean square error). Bemærk, at RMS vedrører fejl på ligningerne og ikke fejl på løsningen c_1, c_2, c_3.

ADVARSEL: Det givne ligningssystem må **ikke** ændres ved, at man f.eks multiplicerer en ligning med 10, da residualet så multipliceres med 10 (ligningen indgår med en ny "vægt").

"Udledning" af formel. Vi søger minimum for funktionen $f(c_1, c_2, c_3) = r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2$.
Ifølge bind 2 kapitel 10 søges stationære punkter for f, dvs. punkter (c_1, c_2, c_3) for hvilke

$$\frac{\partial f}{\partial c_1} = \frac{\partial f}{\partial c_2} = \frac{\partial f}{\partial c_3} = 0:$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial c_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial c_2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial c_3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(r_1\frac{\partial r_1}{\partial c_1} + r_2\frac{\partial r_2}{\partial c_1} + r_3\frac{\partial r_3}{\partial c_1} + r_4\frac{\partial r_4}{\partial c_1}\right) = 0 \\ 2\left(r_1\frac{\partial r_1}{\partial c_2} + r_2\frac{\partial r_2}{\partial c_2} + r_3\frac{\partial r_3}{\partial c_2} + r_4\frac{\partial r_4}{\partial c_2}\right) = 0 \\ 2\left(r_1\frac{\partial r_1}{\partial c_3} + r_2\frac{\partial r_2}{\partial c_3} + r_3\frac{\partial r_3}{\partial c_3} + r_4\frac{\partial r_4}{\partial c_3}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial c_1} & \frac{\partial r_2}{\partial c_1} & \frac{\partial r_3}{\partial c_1} & \frac{\partial r_4}{\partial c_1} \\ \frac{\partial r_1}{\partial c_2} & \frac{\partial r_2}{\partial c_2} & \frac{\partial r_3}{\partial c_2} & \frac{\partial r_4}{\partial c_2} \\ \frac{\partial r_1}{\partial c_3} & \frac{\partial r_2}{\partial c_3} & \frac{\partial r_3}{\partial c_3} & \frac{\partial r_4}{\partial c_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \widetilde{A}\left(A\bar{c} - \vec{b}\right) = \bar{0} \Leftrightarrow \widetilde{A}A\bar{c} = \widetilde{A}\,\bar{b},$$

hvor A er koefficientmatrix, og $\bar{b}$ er højre side i det givne ligningssystem.
At den af ligningssystemet $\widetilde{A}A\bar{c} = \widetilde{A}\bar{b}$ fundne løsning virkelig er et globlt minimum for f, vil fremgå af sætning 17.4.

Vi vil nu generalisere betragtningerne i eksempel 17.5.
Lad der være givet et overbestemt ligningssystem $A\bar{x} = \bar{b}$, dvs. et ligningssystem, hvor antallet m af uafhængige ligninger er større end antallet n af ubekendte.
For et givet talsæt $\bar{x}$ defineres RMS-fejlen $RMS_{\bar{x}}$ da således:

$$RMS_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} r_i^2}, \quad \text{hvor} \quad r_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - b_i.$$

SÆTNING 17.4 (*løsning til overbestemt ligningssystem*). *For et overbestemt ligningssystem* $A\bar{x} = \bar{b}$ *vil den "løsning", som giver mindst mulig RMS-fejl på ligningssystemet, være en eksakt løsning til det såkaldte* ***normalligningssystem*** $\widetilde{A}A\bar{x} = \widetilde{A}\,\bar{b}$.

Bevis. Det kan vises, at normalligningssystemet altid har en løsning, men vi udelader denne del af beviset. Lad $\bar{x}$ være en eksakt løsning til normalligningssystemet $\widetilde{A}A\bar{x} = \widetilde{A}\bar{b}$. Vi vil da vise, at intet andet talsæt $\bar{x} + \Delta\bar{x}$ giver en mindre RMS-fejl.
Lad $\bar{r} = A(\bar{x} + \Delta\bar{x}) - \bar{b}$.

Bemærk: Da $\bar{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}$ er en søjlematrix, og $\tilde{\bar{r}}$ er en rækkematrix, er $\tilde{\bar{r}}\,\bar{r} = r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_m^2$.

Vi finder

$$(\mathrm{RMS}_{\bar{x}+\Delta\bar{x}})^2 = \frac{1}{m}\bar{r}\cdot\bar{r} = \frac{1}{m}\tilde{\bar{r}}\,\bar{r} \qquad (\text{da } \tilde{\bar{r}}\,\bar{r} = r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_m^2)$$

$$= \frac{1}{m}\left(A(\bar{x}+\Delta\bar{x}) - \bar{b}\right)^{\sim}\left(A(\bar{x}+\Delta\bar{x}) - \bar{b}\right) \qquad (\text{da } \bar{r} = A(\bar{x}+\Delta\bar{x}) - \bar{b})$$

$$= \frac{1}{m}\left(\widetilde{A\bar{x}-\bar{b}} + \widetilde{A\Delta\bar{x}}\right)\left(A\bar{x} - \bar{b} + A\Delta\bar{x}\right) \qquad (\text{da } \widetilde{C+D} = \tilde{C} + \tilde{D})$$

$$= \frac{1}{m}[(\widetilde{A\bar{x}-\bar{b}})(A\bar{x}-\bar{b}) + \widetilde{A\Delta\bar{x}}\,A\Delta\bar{x} + (\widetilde{A\bar{x}-\bar{b}})A\Delta\bar{x} + \widetilde{A\Delta\bar{x}}\left(A\bar{x}-\bar{b}\right)]$$

$$= \frac{1}{m}[(A\bar{x}-\bar{b})^2 + (A\Delta\bar{x})^2 + (\tilde{A}(A\bar{x}-\bar{b}))^{\sim}\Delta\bar{x} + \tilde{\Delta\bar{x}}\tilde{A}\left(A\bar{x}-\bar{b}\right)] \qquad (\text{da } \widetilde{CD} = \tilde{D}\tilde{C})$$

$$= \frac{1}{m}[(A\bar{x}-\bar{b})^2 + (A\Delta\bar{x})^2 + (\tilde{A}A\bar{x} - \tilde{A}\bar{b})^{\sim}\Delta\bar{x} + \tilde{\Delta\bar{x}}\,(\tilde{A}A\bar{x} - \tilde{A}\bar{b})]$$

$$= \frac{1}{m}[(A\bar{x}-\bar{b})^2 + (A\Delta\bar{x})^2] \qquad (\text{da } \tilde{A}A\bar{x} - \tilde{A}\bar{b} = \bar{0})$$

$$\geq \frac{1}{m}(A\bar{x}-\bar{b})^2 \qquad (\text{da } (A\Delta\bar{x})^2 \geq 0)$$

$$= (\mathrm{RMS}_{\bar{x}})^2 .$$

Eksempel 17.6. Overbestemt ligningssystem.

Find den "løsning" til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 1.00c_1 + 1.00c_2 + 4.00c_3 &= 6.00 \\ 1.00c_1 + 3.00c_2 + 1.00c_3 &= 8.00 \\ 1.00c_1 + 1.00c_2 + 0.00c_3 &= 4.00 \\ 1.00c_1 + 3.00c_2 + 3.00c_3 &= 10.00\,, \end{aligned}$$

som giver mindst mulig RMS-fejl.

Find endvidere residualerne og RMS-fejlen.

LØSNING:

Af $A\bar{x} = \bar{b}$ dannes normalligningssystemet $\tilde{A}A\bar{x} = \tilde{A}\bar{b}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 20 & 16 \\ 8 & 16 & 26 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 64 \\ 62 \end{pmatrix}.$$

Totalmatrix for normalligningssystemet opstilles og reduceres:

					Kontrol
4	8	8	|	28	48
8	20	16	|	64	108
8	16	26	|	62	112

$$\sim \begin{matrix} \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 2r_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 8 & 8 & 28 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 6 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ 48 \\ 12 \\ 16 \end{matrix}$$

Heraf fås $\underline{\underline{c_3 = \frac{3}{5},\ c_2 = 2,\ c_1 = \frac{9}{5}}}$.

Ved indsætning i de oprindelige ligninger fås:

$$r_1 = 1\cdot\frac{9}{5} + 1\cdot 2 + 4\cdot\frac{3}{5} - 6 = \underline{\underline{0.20}}$$

$$r_2 = 1\cdot\frac{9}{5} + 3\cdot 2 + 1\cdot\frac{3}{5} - 8 = \underline{\underline{0.40}}$$

$$r_3 = 1\cdot\frac{9}{5} + 1\cdot 2 + 0\cdot\frac{3}{5} - 4 = \underline{\underline{-0.20}}$$

$$r_4 = 1\cdot\frac{9}{5} + 3\cdot 2 + 3\cdot\frac{3}{5} - 10 = \underline{\underline{-0.40}}$$

$$\mathrm{RMS} = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot(0.20^2 + 0.40^2 + 0.20^2 + 0.40^2)} \approx 0.3162 \approx \underline{\underline{0.32}} .$$

Maple:
Skriv A:= og benyt menuen (se evt. eks. 16.1) til at danne matricen
Skriv b : = og dan højre side

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad b := \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Skriv with(LinearAlgebra) Pakkens procedurer ses
Skriv c:= LeastSquares(A,b) Kopier eventuelt navnet fra ovenstående procedurer for at undgå stavefejl

Resultat: $\begin{bmatrix} \frac{9}{5} \\ 2 \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

Residualer: $r = A.c - b$

Resultat: $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$

$RMS = \sqrt{r.r/4}$ Resultat $\frac{\sqrt{10}}{10} = 0.316$

OPGAVER

Opgave 17.1 (*regneregler for matricer*).

Idet $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *og* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *skal man undersøge, om følgende relationer gælder:*

1) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

2) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$.

Opgave 17.2^{T} (*regneregler for matricer*)

Lad $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *og* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Beregn $2A+3B$, $A-2B$, $A\widetilde{B}$ *og* $\widetilde{A}B$.

Opgave 17.3 (*regneregler for matricer*)

Lad $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Udregn $A^3 - 2A^2 - 9A$ *og* $A^2 - 2A - 9E$, *hvor* E *er* 3×3 *enhedsmatricen.*

Opgave 17.4 (*ingen forkortningsregel*)

Lad $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *og* $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vis, at $AB = AC$ (*selv om* $B \neq C$).

Opgave 17.5^{T} (*reciprok matrix, regneregler*)

Lad $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *og* $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Find A^{-1}, $(\widetilde{B})^{-1}$, $(A\widetilde{B})^{-1}$ *og* $(B\widetilde{A})^{-1}$.

Opgave 17.6 (*regneregler m.m.*)

Lad $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *og* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Find $2A + B,\ B + 2A,\ AB,\ BA,\ \widetilde{A}\widetilde{B},\ A^{-1},\ B^{-1},\ (\widetilde{A})^{-1}$ *og* $(AB)^{-1}$.

Opgave 17.7 (*invers matrix*)

Find den inverse matrix til hver af de følgende matricer:

1^{T}) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 11) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 12) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ (*nuller under diagonal, i øvrigt 1-taller*).

Opgave 17.8 (*invers matrix*)

Lad $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Find* A^{-1} *og* $(\widetilde{A})^{-1}$. (*Husk at anføre mellemregninger.*)

Opgave 17.9 (*matrixligning*)

Lad der være givet en invertibel matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Idet

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad og \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \end{pmatrix},$$

skal man løse matrixligningen $AX = B$. *Mellemregninger skal anføres.*

Opgave 17.10 (*invers matrix, matrixligning*)

Lad en matrix A *være givet ved*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

1) *Find den transponerede matrix* $\widetilde{A}$.

2) *Find matricerne* A^{-1} *og* $(\widetilde{A})^{-1}$.

3) *Løs ligningssystemet* $A\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4) *Løs ligningssystemet* $\widetilde{A}A\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Opgave 17.11 (*invers matrix, matrixligning*)

Find A's inverse matrix, og løs matrixligningen $AX = B$ *når:*

1^{T}) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ -33 & 11 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 14 & -2 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$.

3^{T}) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 29 & 87 \\ 58 & 58 \\ -29 & 29 \\ 87 & -29 \end{pmatrix}$.

Opgave 17.12 (*matrixligning*)

Givet $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{66}} & \frac{3}{\sqrt{11}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{7}{\sqrt{66}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{41}{\sqrt{66}} & -\frac{1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$ *og* $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1) *Beregn* $A\widetilde{A}$.

2) *Find* A^{-1}.

3) *Find løsningsmatricen* X *til matrixligningen* $X^{-1}B = \widetilde{A}$.

Opgave 17.13 (*overbestemt ligningssystem*)

Find den "løsning" til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2.0x_1 + 4.0x_2 &= -5.0 \\ 4.0x_1 - 1.0x_2 &= 3.0 \\ 5.0x_1 + 1.0x_2 &= 6.0 \\ 2.0x_1 - 3.0x_2 &= -4.0\,, \end{aligned}$$

som giver mindst mulig RMS-fejl.

Find endvidere residualerne og RMS-fejlen.

Opgave 17.14 (*overbestemt ligningssystem*)

Find den "løsning" til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 1.00x_1 - 1.00x_2 &= 2.00 \\ 1.00x_1 + 1.00x_2 &= 4.00 \\ 2.00x_1 + 1.00x_2 &= 8.00 \ , \end{aligned}$$

som giver mindst mulig RMS-fejl.

Find endvidere residualerne og RMS-fejlen.

Opgave 17.15 ^{T} (*overbestemt ligningssystem*)

To størrelser x og y er målt sammen med deres sum og differens

$$\begin{aligned} x &= 5.00 \\ y &= 2.00 \\ x+y &= 6.00 \\ x-y &= 4.00 \ . \end{aligned}$$

Find den "løsning" til dette overbestemte ligningssystem, som giver mindst mulig RMS-fejl.

Find endvidere residualerne og RMS-fejlen.

Opgave 17.16 (*overbestemt ligningssystem*)

De tre vinkler i en trekant ABC er målt til 0.53 , 1.34 og 1.32 .

Find den "løsning" til det overbestemte ligningssystem

$$\begin{aligned} A &= 0.53 \\ B &= 1.34 \\ \pi - A - B &= 1.32 \ , \end{aligned}$$

som giver mindst mulig RMS-fejl.

Find endvidere residualerne og RMS-fejlen.

Opgave 17.17 (*overbestemt ligningssystem*)

Mellem de variable x, y, z, w gælder den teoretiske sammenhæng

$$w = Ax + By + Cz \ .$$

Fra laboratoriet er der kommet følgende måledata:

x	*y*	*z*	*w*
1	0	0	0.0
0	1	0	1.0
0	0	1	0.1
0	1	1	0.9
1	1	0	1.2

1) Opstil 5 ligninger til bestemmelse af konstanterne A, B, C.

2) Find derpå konstanterne A, B, C, idet RMS-fejlen på de 5 ligninger skal være mindst mulig.

3) Find endvidere residualerne og RMS-fejlen.

Opgave 17.18 (*overbestemt ligningssystem*)

To tryk p_1 *og* p_2 *samt differencen* $p_1 - p_2$ *er målt med samme nøjagtighed:*

$$\begin{aligned} p_1 &\approx 10 \\ p_2 &\approx 5 \\ p_1 - p_2 &\approx 6 \ . \end{aligned}$$

Find p_1 *og* p_2 *"bedst muligt".*

Opgave 17.19 (*overbestemt ligningssystem*)

1) Er følgende tre ligninger uafhængige? (Husk begrundelse.)

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 - 2y_3 - y_4 &= 0 \\ 2y_3 + 2y_4 - y_5 &= 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 &= 1 \ . \end{aligned}$$

Forklaring (kan overspringes). For systemer med samtidigt fortløbende kemiske reaktioner, f. eks.

$$\begin{aligned} &\mathrm{C(s)} + \tfrac{1}{2}\mathrm{O_2(g)} \rightarrow \mathrm{CO(g)} \\ &\mathrm{H_2(g)} + \tfrac{1}{2}\mathrm{O_2(g)} \rightarrow \mathrm{H_2O(g)} \ , \\ &\mathrm{C(s)} + \mathrm{O_2(g)} \rightarrow \mathrm{CO_2(g)} \end{aligned} \qquad \textit{startblanding:} \begin{cases} \frac{1}{2}\ \text{kmol}\ \mathrm{O_2(g)} \\ 1\ \text{kmol}\ \mathrm{H_2O(g)} \\ 2\ \text{kmol}\ \mathrm{N_2(g)} \\ \textit{overskud af}\ \mathrm{C(s)} \end{cases}$$

skal man afgøre, om fundne molbrøksligninger er uafhængige (*i ovenstående er* $y_1 = y_{CO}$, $y_2 = y_{CO_2}$, $y_3 = y_{H_2}$, $y_4 = y_{H_2O}$, $y_5 = y_{N_2}$, *mens* $y_{O_2} = 0$ *ved kemisk ligevægt*) .

2) *Lad*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Lad $\widetilde{A}$ *betegne A`s transponerede matrix. Find* A^{-1} *og* $(\widetilde{A})^{-1}$ (*husk at angive mellemregninger*).

Opgave 17.20 (*overbestemt ligningssystem*)

Der skal fremstilles 1 ton af et produkt ved at blande 3 råvarer (*alle tal er i vægt %*):

	råvare nr. 1	*råvare nr. 2*	*råvare nr. 3*	*ønsket produkt*
protein	0 %	10 %	20 %	10 %
fedt	30 %	10 %	0 %	20 %
kulhydrat	20 %	30 %	10 %	20 %

Af råvarer bruges x_1 *ton af nr. 1,* x_2 *ton af nr. 2 og* $1 - x_1 - x_2$ *ton af nr. 3.*

1) *Opstil 3 ligninger til bestemmelse af* x_1 *og* x_2.
2) *Find derpå* x_1 *og* x_2, *idet RMS-fejlen på de* 3 *ligninger skal være mindst mulig.* (*Husk at anføre mellemregninger*).
3) *Find til sidst residualerne og RMS-fejlen.*

Opgave 17.21 (*overbestemt ligningssystem*)

Der foreligger følgende ligningssystem:

$$\begin{aligned} x &= 1.1 \\ x - y &= 1 \\ x + y + z &= 3.1 \\ y + z &= 1.9 \ . \end{aligned}$$

1) Vis, at ligningssystemet ikke har nogen eksakt løsning.

2) Løs ligningssystemet "bedst muligt", (*dvs. således at RMS-fejlen bliver mindst mulig*).

18 DETERMINANTER

18.1 DEFINITION AF DETERMINANT

I forbindelse med bl.a. ligningssystemer spiller determinanter en betydelig rolle.

Til enhver kvadratisk $n \times n$ matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

hører en determinant:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Bemærk, at determinanter kun defineres for kvadratiske matricer.

Værdien af en determinant er et tal, der er defineret ved følgende regneforskrift:

1) Man udvælger en bestemt række r eller en bestemt søjle s (helst én med mange nuller).
2) For hvert element a_{rs} i den valgte række eller søjle dannes et produkt af følgende tre faktorer:
   a) Elementet a_{rs} selv.
   b) Elementets "underdeterminant" D_{rs}, dvs. den determinant af $(n - 1)$'te orden, som fremkommer ved at slette både den række og den søjle, hvori elementet står.

c) Tallet $(-1)^{r+s}$, dvs. +1 eller -1 alt efter om der står + eller - på elementet a_{rs}'s plads i det følgende fortegnsskema

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & . & . & . \\ - & + & - & + & . & . & . \\ + & - & + & - & . & . & . \\ - & + & - & + & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix} .$$

Skemaet har + øverst til venstre samt skiftevis + og - hen gennem rækkerne og ned gennem søjlerne.

3) De dannede produkter adderes:

$$\det A = a_{r1}(-1)^{r+1}D_{r1} + a_{r2}(-1)^{r+2}D_{r2} + \ldots + a_{rn}(-1)^{r+n}D_{rn} .$$

Determinanten siges nu at være "opløst" efter den valgte række (eller søjle).

Komplement. For kortheds skyld defineres $K_{rs} = (-1)^{r+s}D_{rs}$. K_{rs} kaldes **komplementet** til a_{rs}.

Vi har så $\det A = a_{r1}K_{r1} + a_{r2}K_{r2} + \ldots + a_{rn}K_{rn} = a_{1s}K_{1s} + a_{2s}K_{2s} + \ldots + a_{ns}K_{ns}$.

4) De fremkomne determinanter af $(n-1)$'te orden opløses på tilsvarende måde til determinanter af $(n-2)$'te orden, osv. Til sidst fås determinanter af 2. orden, som udregnes efter den velkendte regel $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$.

Et bevis for, at determinanten får samme værdi, ligegyldigt hvilken række eller søjle der opløses efter, kan ses i supplement 18A.

Eksempel 18.1. Determinant.

Find værdien af determinanten

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} .$$

LØSNING:

Vi kan f.eks. vælge at opløse determinanten efter 2. række (som har to nuller !):

$$D = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} .$$

Vi kan nu f.eks opløse efter 3. søjle:

$$D = -2\left(0\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right)$$

$$+3\left(0\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\right)$$

$$= -2(0 - 1\cdot 5 + 2\cdot 1) + 3(0 - 1\cdot 1 + 2\cdot 3) = 6 + 15 = \underline{\underline{21}}\ .$$

Maple: Skriv A:= og dan ud fra menuen "Matrix" den ønskede matrix

$$A := \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Cursor på udskrift, højre musetast, "Standard Operations", Determinant
Resultat 21

18.2 REDUKTION AF DETERMINANT

En udregning af en større determinant direkte ud fra definitionen er sædvanligvis for tidskrævende, medmindre determinanten indeholder mange nuller. Ved hjælp af de regler, som omtales i den følgende sætning 18.1, kan der imidlertid netop skaffes mange nuller i determinanten.

I definitionen på en determinant er der symmetri med hensyn til den måde, hvorpå rækker og søjler indgår. Dette bevirker, at når vi har bevist en sætning vedrørende rækker, kan vi umiddelbart opstille den tilsvarende sætning vedrørende søjler.

SÆTNING 18.1 *(reduktion af determinant). Lad A være en kvadratisk matrix af n'te orden. Der gælder da*

1) *Multipliceres alle elementer i en række* (*søjle*) *med samme konstant k, bliver værdien af determinanten $k\cdot\det A$.*
2) *Ombyttes to rækker* (*søjler*)*, skifter determinanten fortegn.*
3) *En determinant, hvor to rækker* (*søjler*) *er ens, har værdien nul.*
4) *Ændres den p'te række ved rækkeoperationen $r_p + k\cdot r_q$, er determinanten uforandret* (*analogt for en søjleoperation*)*.*

ADVARSEL: Ændres den p'te række til $k\cdot r_p + r_q$, bliver værdien af determinanten $k\cdot\det A$.

Bevis.

Lad $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix} = a_{r1}K_{r1} + a_{r2}K_{r2} + \dots + a_{rn}K_{rn}\ .$

ad 1.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ ka_{r1} & ka_{r2} & \dots & ka_{rn} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = ka_{r1}K_{r1} + ka_{r2}K_{r2} + \dots + ka_{rn}K_{rn} = k \cdot \det A.$$

ad 2.

Beviset gennemføres i to trin, idet vi først viser, at sætningen gælder, når to naborækker ombyttes.
Lad

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \dots & a_{r+1,n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{og} \quad \det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \dots & a_{r+1,n} \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

hvor $\det B$ fremgår af $\det A$ ved, at den r'te og den $r+1$'te række er ombyttet.

Opløses $\det A$ efter r'te række, fås

$$\det A = a_{r1}(-1)^{r+1}D_{r1} + a_{r2}(-1)^{r+2}D_{r2} + \dots + a_{rn}(-1)^{r+n}D_{rn}.$$

Opløses $\det B$ efter $r+1$'te række, fås

$$\det B = a_{r1}(-1)^{r+2}D_{r1} + a_{r2}(-1)^{r+3}D_{r2} + \dots + a_{rn}(-1)^{r+n+1}D_{rn},$$

idet underdeterminanterne bliver de samme ved de to opløsninger.

Af disse to udtryk ses, at $\det B = (-1) \cdot \det A$.

Da sætningen gælder for to naborækker, kan vi nu bevise den generelle sætning på følgende måde:
Lad r_1 og r_2 være to rækker, mellem hvilke der står p andre. Rækken r_1 antages at stå over r_2. Ved p på hinanden følgende ombytninger af naborækker sænkes r_1, så den bliver nabo til r_2. Derpå ombyttes r_1 og r_2, og ved p på hinanden følgende naboombytninger flyttes r_2 op på r_1's oprindelige plads. Det samlede antal ombytninmger er $2 \cdot p + 1$, altså ulige. Da determinanten skifter fortegn ved hver ombytning, er sætningen hermed bevist.

ad 3.

Ved ombytning af de identiske rækker forbliver determinanten uændret samtidig med, at den ifølge sætning 18.1 stk. 2 skifter fortegn, dvs. $\det A = (-1) \cdot \det A \Leftrightarrow \det A = 0$.

ad 4.

Efter rækkeoperationen $r_p + kr_q$ på A har determinanten følgende udseende:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{p1}+ka_{q1} & a_{p2}+ka_{q2} & \cdots & a_{pn}+ka_{qn} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Opløses efter p'te række, fås

$$\begin{aligned} D &= (a_{p1} + ka_{q1})K_{p1} + (a_{p2} + ka_{q2})K_{p2} + \ldots + (a_{pn} + ka_{qn})K_{pn} \\ &= a_{p1}K_{p1} + a_{p2}K_{p2} + \ldots + a_{pn}K_{pn} + k\cdot(a_{q1}K_{p1} + a_{q2}K_{p2} + \ldots + a_{qn}K_{pn}) = \det A + k\cdot\det B, \end{aligned}$$

hvor

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Da $\det B$ har 2 rækker ens, er $\det B = 0$. Sætningen er hermed bevist.

Ved hjælp af reglerne i sætning 18.1 kan vi nu forholdsvis nemt beregne værdien af en $n \times n$ determinant ved en af følgende to metoder.

Udvælgelsesmetoden

a) Udvælg en søjle (række) med det størst mulige antal nuller.

b) Benyt rækkeoperationer (søjleoperationer) til at opnå i alt n -1 nuller i den udvalgte række (søjle).

c) Opløs determinanten efter den udvalgte søjle (række). På grund af de mange nuller fås så blot én $(n-1)\times(n-1)$ determinant gange et tal.

d) Gentag metoden, til der nås én 2×2 determinant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$.

Eksempel 18.2. Udregning af determinant. Udvælgelsesmetoden.

Find værdien af determinanten

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

LØSNING:

Da 3. søjle allerede har 2 nuller, vælges at skaffe yderligere et nul i denne søjle og derefter opløse efter den (for klarheds skyld sættes en pil ud for den for øjeblikket udvalgte søjle eller række):

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & \downarrow 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} \underset{r_4 - 2r_2}{=\!=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & \downarrow 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{opl } s_3}{=\!=} 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \leftarrow + 0 - 0 .$$

Da 3. række allerede har et nul, vælges at skaffe yderligere et nul i denne række og derefter opløse efter den:

$$\det A \underset{s_1 - 2s_2}{=\!=} -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \leftarrow \underset{}{\overset{\text{opl } r_3}{=\!=}} -2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\big(1 \cdot 2 - 3 \cdot (-3)\big) = \underline{\underline{22}} .$$

Diagonalmetoden

Denne metode kan f.eks. benyttes ved edb-beregning af determinanter.

a) Udvælg 1. søjle og benyt rækkeregler fra sætning 18.4 til at skaffe lutter nuller under diagonalelementet a'_{11}.

b) Udvælg derpå 2. søjle og skaf på samme måde lutter nuller under diagonalelementet a'_{22}. (Benyt ikke foregående række(r) - det ville ødelægge opnåede nuller.)

c) Fortsæt således søjle efter søjle, indtil der er lutter nuller under diagonalen:

$$\det A = k \cdot \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & . & . & . & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & . & . & . & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a'_{33} & . & . & . & a'_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & a'_{nn} \end{vmatrix}.$$

d) Værdien er da $\det A = k \cdot a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot a'_{33} \cdot \ldots \cdot a'_{nn}$ eller sagt i ord:
En determinant med lutter nuller under diagonalen er lig med produktet af diagonalelementerne. (Dette indses ved at opløse efter 1. søjle, så igen opløse efter den nye 1. søjle osv.)

Eksempel 18.3. Udregning af determinant. Diagonalmetoden.

Find værdien af determinanten

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

LØSNING:

$$\det A \underset{r_1 \leftrightarrow r_3}{=\!=} -\begin{vmatrix} \downarrow & & & \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} \underset{\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-6r_1}}{=\!=} \begin{vmatrix} & \downarrow & & \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & -9 & 4 & -8 \end{vmatrix} \underset{r_4-3r_2}{\overset{r_3-\frac{5}{3}r_2}{=\!=}} \begin{vmatrix} & & \downarrow & \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_4-\frac{3}{5}r_3}{=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{5} \end{vmatrix} = -(1)\cdot(-3)\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)\cdot\left(-\frac{11}{5}\right) = \underline{\underline{22}}.$$

18.3 ANDRE SÆTNINGER OM DETERMINANTER

De følgende to sætninger har blandt andet betydning i teorien for ligningssystemer.

SÆTNING 18.2 (*determinant forskellig fra nul*). *Lad A være en kvadratisk matrix af n'te orden. Der gælder da, at* $\det A \neq 0$, *hvis og kun hvis rangen ρ af A er lig med n.*

Bevis. Vi skal vise, at $\rho(A) = n \iff \det A \neq 0$. Vi har

$$\rho(A) = n$$
$$\Updownarrow$$
$$\rho(A') = n$$
$$\Updownarrow$$
$$A' = \begin{vmatrix} 1 & * & * & \ldots & * \\ 0 & 1 & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

(A kan omdannes til en echelonmatrix A'. Rangen ændres ikke.)

(Da $\rho = n$ angiver antallet af lineært uafhængige rækker, har A' ingen nulrækker.)

$$\Updownarrow$$

$$\det A' \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\det A \neq 0$$

(Hver af de operationer, hvorved A omdannes til A', vil højst multiplicere determinanten med en konstant $k \neq 0$ eller skifte fortegn på determinanten.)

SÆTNING 18.3 (*alternativ metode til beregning af invers matrix*). *Lad A være en kvadratisk matrix af n'te orden med rangen n. A's inverse (reciprokke) matrix A^{-1} er da bestemt ved*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} K_{11} & K_{21} & . & . & . & K_{n1} \\ K_{12} & K_{22} & . & . & . & K_{n2} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ K_{1n} & K_{2n} & . & . & . & K_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{K},$$

hvor man ved udregningen af A^{-1} har

1) *erstattet hvert element i A med sit komplement, så man får en matrix K,*

2) *dannet den transponerede $\widetilde{K}$, og*

3) *divideret alle elementer i $\widetilde{K}$ med $\det A$.*

Bevis. Ifølge definitionen på en determinant kan $\det A$ findes ved opløsning efter den r'te række:

$$\det A = a_{r1}K_{r1} + a_{r2}K_{r2} + \ldots + a_{rn}K_{rn}, \tag{1}$$

hvor komplementet $K_{rs} = (-1)^{r+s}D_{rs}$. Erstattes $a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn}$ i (1) med elementerne $a_{R1}, a_{R2}, \ldots, a_{Rn}$ fra en anden række, svarer det til opløsning af en determinant, der har to ens rækker (den r'te og den R'te), men en sådan determinant har værdien nul ifølge sætning 18.1.
Vi har derfor

$$a_{R1}K_{r1} + a_{R2}K_{r2} + \ldots + a_{Rn}K_{rn} = \begin{cases} \det A & \text{for } R = r \\ 0 & \text{for } R \neq r. \end{cases}$$

Den sidste ligning kan skrives på matrixform:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11} & K_{21} & . & . & . & K_{n1} \\ K_{12} & K_{22} & . & . & . & K_{n2} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ K_{1n} & K_{2n} & . & . & . & K_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \det A.$$

Altså har vi

$$A\widetilde{K} = E \cdot \det A \iff A^{-1}A\widetilde{K} = A^{-1}E \cdot \det A \iff E\widetilde{K} = A^{-1} \cdot \det A \iff A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{K}.$$

Eksempel 18.4. Beregning af invers matrix.

Find den inverse matrix til

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

LØSNING:

1) Hvert element erstattes af sit komplement

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

2) Matricen transponeres

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

3) Determinanten $\det A$ beregnes, og hvert element divideres med $\det A$. Da $\det A = -1$, fås

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

De følgende to sætninger anføres uden bevis:

SÆTNING 18.4 (*regneregler for determinanter*). *Lad A og B være kvadratiske matricer af n'te orden. Så gælder*

$$\det \widetilde{A} = \det A$$
$$\det(AB) = (\det A)\cdot(\det B) .$$

SÆTNING 18.5 (*formel for determinant*). *For en vilkårlig* $n \times n$ *matrix*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kan determinanten $\det A$ *beregnes efter formlen*

$$\det A = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot a_{1 i_1} \cdot a_{2 i_2} \cdot \ldots \cdot a_{n i_n} ,$$

hvor

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} 1 & \textit{hvis } i_1, i_2, \ldots, i_n \textit{ kan omordnes til } 1, 2, \ldots, n \\ & \textit{ved et lige antal naboombytninger } (\textit{f.eks. er } \varepsilon_{312} = 1) \\ -1 & \textit{hvis } i_1, i_2, \ldots, i_n \textit{ kan omordnes til } 1, 2, \ldots, n \\ & \textit{ved et ulige antal naboombytninger } (\textit{f.eks. er } \varepsilon_{321} = -1) \\ 0 & \textit{ellers } (\textit{f.eks. er } \varepsilon_{113} = 0) . \end{cases}$$

18.4 CRAMER`S SÆTNING

Vi betragter nu et ligningssystem $A\bar{x} = \bar{b}$ bestående af n ligninger med n ubekendte. Vi vil antage, at $\det A \neq 0$ (dvs. A har rangen n).

SÆTNING 18.6 (*Cramer`s sætning*). *Et ligningssystem* $A\bar{x} = \bar{b}$ *med* $\det A \neq 0$ *har én løsning bestemt ved*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\det A}(\det B_1, \det B_2, \ldots, \det B_n),$$

hvor B_i *er den matrix, man får ved at erstatte den* i*`te søjle i* A *med* $\bar{b}$*, altså*

$$B_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Bevis. Da A har rangen n, eksisterer der en invers matrix A^{-1}. Vi finder da

$$A\bar{x} = \bar{b} \iff A^{-1}A\bar{x} = A^{-1}\bar{b} \iff E\bar{x} = A^{-1}\bar{b} \iff \bar{x} = A^{-1}\bar{b}.$$

Af sætning 18.3 fås $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{K}$, dvs.

$$\bar{x} = \frac{1}{\det A}\tilde{K}\bar{b} = \frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} K_{11} & K_{21} & \ldots & K_{n1} \\ K_{12} & K_{22} & \ldots & K_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{1n} & K_{2n} & \ldots & K_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} K_{11}b_1 + K_{21}b_2 + \ldots + K_{n1}b_n \\ K_{12}b_1 + K_{22}b_2 + \ldots + K_{n2}b_n \\ \vdots \\ K_{1n}b_1 + K_{2n}b_2 + \ldots + K_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Betragtes den i`te række $K_{1i}b_1 + K_{2i}b_2 + \ldots + K_{ni}b_n$ ses, at dette netop er determinanten for den matrix $B_i$, der fremkommer ved at den $i$`te søjlevekor erstattes af $\bar{b}$. Altså har vi

$$\bar{x} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det B_1 \\ \det B_2 \\ \vdots \\ \det B_n \end{pmatrix}.$$

Denne determinantmetode (Cramer`s metode) har stor teoretisk interesse, men er sædvanligvis for besværlig at anvende i praksis, da man skal udregne $n + 1$ determinanter af n`te orden.
Er man kun interesseret i at finde én ubekendt, er determinantmetoden dog velegnet (jævnfør eksempel 18.5).

Eksempel 18.5. Løsning af ligningssystem ved determinantmetoden (Cramer`s metode).

Find x_2 af ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 4 \\ -x_1 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 &= -1 \,. \end{aligned}$$

LØSNING:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}} \overset{\substack{r_3 - r_1 \\ r_4 - 3r_1}}{=} \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 3 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\overset{\text{opl } s_4}{=} \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -3 & -2 & 0 \\ -5 & -4 & 3 \end{vmatrix}} \overset{r_3 + r_1}{=} \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -3 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\overset{\text{opl } s_3}{=} \frac{-3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}{-3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{-3} = \underline{\underline{-1}} \,.$$

SUPPLEMENT: 18A BEVIS: EN DETERMINANTS VÆRDI ER UAFHÆNGIG AF OPLØSNINGS-MÅDEN

SÆTNING 18A.1 *(determinants værdi). Ved udregning af en determinant fås samme værdi, uanset hvilke rækker eller søjler der opløses efter.*

<u>Bevis.</u> Beviset føres ved induktion efter determinantens orden n.

$\boxed{n=2}$ Man kan direkte efterprøve, at påstanden gælder for determinanter af 2. orden, idet man får $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, uanset hvilken række eller søjle der opløses efter (det er her underforstået, at en determinant af første orden defineres som identisk med dens eneste element). Eksempelvis fås ved opløsning efter 2. række $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

$\boxed{n=2, 3, 4, \ldots, p-1}$ Induktionsantagelsen er nu: "for alle determinanter til og med (p-1)'te orden er det ligegyldigt, hvilken række eller søjle der opløses efter".

$\boxed{n=p}$ Vi skal da blot vise, at det samme gælder for enhver determinant af p'te orden

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{pp} \end{vmatrix} .$$

Først vil vi vise, at

"determinanten opløst efter række nr. R = determinanten opløst efter søjle nr. S", (1)

dvs.

$$\sum_{s=1}^{p} (-1)^{R+s} \cdot a_{Rs} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & s & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \| & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \| & \cdot & \cdot \\ = & = & = & \# & = & = \\ \cdot & \cdot & \cdot & \| & \cdot & a_{pp} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ R \\ \\ \end{array} = \sum_{r=1}^{p} (-1)^{r+S} \cdot a_{rS} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & S & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \| & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \| & \cdot & \cdot \\ = & = & = & \# & = & = \\ \cdot & \cdot & \cdot & \| & \cdot & a_{pp} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ r \\ \\ \end{array} \qquad (2)$$

hvor

a) a_{Rs} betegner det element, som står i den R'te række og den s'te søjle af D,

b) $\begin{array}{c} s \\ \| \end{array}$ og $= R$ skal betegne, at hele s'te søjle og R'te række er slettet,

c) $(-1)^{R+s}$ er det fortegn, som står i R'te række og s'te søjle i fortegnsskemaet

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & . & . & . \\ - & + & - & + & . & . & . \\ + & - & + & - & . & . & . \\ - & + & - & + & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix},$$

idet fortegnet netop skifter, hvis række- eller søjlenummeret øges med 1. I ligning (2) optræder leddet

$$(-1)^{R+S}\cdot a_{RS}\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & \overset{\triangledown S}{\|} & . & . \\ . & . & . & \| & . & . \\ = & = & = & \# & = & = \\ . & . & . & \| & . & a_{pp} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \triangleleft R \\ \\ \end{matrix}$$

i summationen på begge sider af lighedstegnet. Ved at slette det fælles led forenkles ligning (2) til

$$\sum_{\substack{s=1\\(s\neq S)}}^{p} (-1)^{R+s}\cdot a_{Rs}\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & \overset{\triangledown s}{\|} & . & . \\ . & . & . & \| & . & . \\ = & = & = & \# & = & = \\ . & . & . & \| & . & a_{pp} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \triangleleft R \\ \\ \end{matrix} = \sum_{\substack{r=1\\(r\neq R)}}^{p} (-1)^{r+S}\cdot a_{rS}\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & \overset{\triangledown S}{\|} & . & . \\ . & . & . & \| & . & . \\ = & = & = & \# & = & = \\ . & . & . & \| & . & a_{pp} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \triangleleft r \\ \\ \end{matrix} \qquad (3)$$

hvor der kun summeres over numrene $1, 2, \ldots, S-1, S+1, \ldots, p$ og $1, 2, \ldots, R-1, R+1, \ldots, p$. Determinanterne i ligning (3) er kun af p - 1'te orden, så ifølge induktionsantagelsen kan vi frit vælge, hvilken række eller søjle de videre skal opløses efter. På venstre side i ligning (3) vælger vi at opløse efter S'te søjle fra D, og på højre side opløses efter den R'te række fra D. Derved omformes ligning (3) til

$$\sum_{\substack{s=1\\(s\neq S)}}^{p} (-1)^{R+s}\cdot a_{Rs} \sum_{\substack{r=1\\(r\neq R)}}^{p} (-1)^{r^{*}+S^{*}}\cdot a_{rS}\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & \overset{\triangledown S}{\|} & . & \overset{\triangledown s}{\|} & . \\ . & . & . & \| & . & \| & . \\ = & = & = & \# & = & \| & = \\ . & . & . & \| & . & \| & . \\ = & = & = & \# & = & \| & = \\ . & . & . & \| & . & \| & a_{pp} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \triangleleft r \\ \\ \triangleleft R \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \sum_{\substack{r=1 \\ (r\neq R)}}^{p} (-1)^{r+S} \cdot a_{rS} \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq S)}}^{p} (-1)^{R^*+s^*} \cdot a_{Rs} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \| & \cdots & \| & \cdots \\ \cdots & \cdots & \| & \cdots & \| & \cdots \\ = & = = & \# & = & \| & = \\ \cdots & \cdots & \| & \cdots & \| & \cdots \\ = & = = & \# & = & \| & = \\ \cdots & \cdots & \| & \cdots & \| & a_{pp} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \blacktriangleleft r \\ \\ \blacktriangleleft R \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \blacktriangledown S \\ \\ \blacktriangledown s \\ \\ \end{matrix} \tag{4}$$

hvor * skal erindre om et lille fortegnsproblem, der stammer fra, at vi tidligere har slettet en række og en søjle: således må r^* regnes 1 mindre end r, hvis $R<r$, mens omvendt R^* skal være 1 mindre end R, hvis $r<R$; dvs. enten r^* eller R^* indeholder en korrektion på -1, men ikke begge. Analogt skal enten s^* eller S^* være mindsket med 1, men ikke begge. Det ses , at summerne på de to sider af lighedstegnet i ligning (4) er ens, hvis blot fortegnene er ens, dvs. hvis $(-1)^{R+s} \cdot (-1)^{r^*+S^*} = (-1)^{r+S} \cdot (-1)^{R^*+s^*}$, eller enklere $(-1)^{R-R^*-(r-r^*)} = (-1)^{S-S^*-(s-s^*)}$. Her er venstre side altid -1, fordi netop et af tallene R^* og r^* er mindsket med 1 i forhold til R og r. Analogt er højre side -1. Vi har altså bevist ligning (4) og dermed ligning (1).
Også for en determinant af p'te orden er det altså ligegyldigt, hvilke rækker eller søjler der opløses efter (eksempelvis vil opløsning efter en række R_1 give samme resultat som opløsning efter en række R_2, fordi ifølge ligning (1) vil begge give det samme som opløsning efter søjle S). Dermed er induktionsbeviset gennemført, og sætningen altså bevist.

OPGAVER

Opgave 18.1 (*determinant*)

Find værdien af hver af determinanterne

1^{T}) $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 2) $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 3) $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

4) $D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 5) $D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 6) $D_6 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$.

Opgave 18.2^{T} (*determinant*)

Find værdien af hver af determinanterne

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad og \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Opgave 18.3 (*determinant*)

Find værdien af determinanten

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Opgave 18.4 (*determinant*)

Find værdien af hver af determinanterne

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & 6 & 3 \\ -3 & 1 & -7 \end{vmatrix} \quad og \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 15 & 3 \end{vmatrix}.$$

Opgave 18.5 (*determinant*)

Find værdien af hver af determinanterne

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad og \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} .$$

Opgave 18.6 (*determinant*)

Find værdien af determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ n-2 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & 0 \\ n-1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & 1 \\ n & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & 1 \end{vmatrix} .$$

Opgave 18.7 (*determinant med komplekse tal*)

Find værdien af determinanten

$$\begin{vmatrix} i & 1+i & 1-2i \\ 2i & 2-i & 3+i \\ 3i & 1+2i & 2 \end{vmatrix} .$$

Opgave 18.8 (*determinantligning*)

Løs ligningen

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 1 & 0 \\ -x & 0 & x & 1 \\ -1 & -x & 0 & x \\ 0 & -1 & -x & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Opgave 18.9 (*determinant, interpolation*)

Et præcisionsinstruments fejlvisning w *afhænger af 3 variable:* x (*temperatur*), y (*barometerstand*) *og* z (*luftfugtighed*). *I 4 tilfælde kendes fejlvisningen* w*:*

i	x_i	y_i	z_i	w_i
1	0	760	0	-2
2	10	800	0	0
3	0	800	50	-5
4	10	760	50	13

Ved "lineær interpolation" mellem disse værdier skal man i tilfældet (x, y, z) = (5, 770, 30) *beregne fejlvisningen* w*:*

1) *Forklar ved hjælp af en kendt sætning om determinanter, at ligningen*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & w_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & w_4 \\ 1 & x & y & z & w \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

er opfyldt for (x, y, z, w) = (x_i , y_i , z_i , w_i) , $i \in \{ 1, 2, 3, 4 \}$.

2) *Vis, ved opløsning efter sidste række i determinanten, at ligning* (1) *udtrykker en lineær sammenhæng af formen*

$$c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 z + c_5 w = 0$$

(*værdierne af konstanterne* c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 *ønskes ikke udregnet*).

3) *Lineær interpolation: Beregn derefter den søgte fejlvisning* w *ved hjælp af determinantligningen*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 760 & 0 & -2 \\ 1 & 10 & 800 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 800 & 50 & -5 \\ 1 & 10 & 760 & 50 & 13 \\ 1 & 5 & 770 & 30 & w \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Opgave 18.10 (*determinant,* $\mathcal{L}^{-1}$)

I forbindelse med løsningen af fire sammenhørende differentialligninger fremkommer følgende Laplace-transformerede funktion $\bar{x}(s)$:

$$\bar{x}(s) = \frac{1}{D}, \quad \textit{hvor} \quad D = \begin{vmatrix} -1 & s+3 & 0 & s+2 \\ 3 & 0 & -4 & s-2 \\ -s & 5-s & 2s & 2s+5 \\ 1 & s+3 & -2 & s \end{vmatrix} .$$

Find $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{D}\right\}$.

Opgave 18.11 (*determinant*)

Udregn determinanten

$$\begin{vmatrix} 2x+y & 2x & x & 2x \\ x+y & x+y & y & 2y \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} .$$

Opgave 18.12 (*determinant, rødder i polynomium*)

Der er givet følgende ligning

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 & 1 & 1 \\ x & x & x & 0 & 1 \\ x & x & x & x & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Udregn venstre side af ligningen, og vis derved, at ligningen har rødderne 0, -1, *i og* -*i* .

Opgave 18.13 (*overbestemt ligningssystem*)

I laboratoriet har man fundet følgende overbestemte ligningssystem:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ y + z + w &= 1 \\ x + y &= 1 \\ z + w &= 1 \\ y + z &= 1 . \end{aligned}$$

1) *Opstil normalligningssystemet (eventuelt på matrixform) for det overbestemte ligningssystem.*

2) *Udtryk den "bedste" løsning for* y *som et forhold mellem 2 determinanter.*

3) *Udregn det i spørgsmål 2 fundne udtryk.* (*Mellemregninger skal anføres.*)

Opgave 18.14 (*determinant, invers matrix*)

Lad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

1) Beregn $|A|$.

2) Beregn A^{-1}.

Opgave 18.15^{T} (*Cramers sætning*)

Benyt Cramers sætning til at finde y *af ligningssystemet*

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 5 \\ x - y + z &= 2 \\ 2x + y - z &= 1 . \end{aligned}$$

Opgave 18.16 (*Cramers sætning*)

Benyt Cramers sætning til at finde z *af ligningssystemet*

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ x + 2y + 2z &= 6 \\ x + 3y + 3z &= 9 . \end{aligned}$$

Opgave 18.17 (*overbestemt ligningssystem, Cramers sætning*)

Med et apparat i laboratoriet har man målt sig frem til et overbestemt ligningssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 1.0 \\ x_2 + x_4 &= 2.0 \\ x_3 + x_4 &= 1.0 \\ x_1 + x_3 &= 1.0 \\ x_2 + x_3 &= 1.0 . \end{aligned}$$

Man ønsker kun at finde x_3.

1) *Udtryk den "bedste" løsning for* x_3 *som et forhold mellem to determinanter.*

2) *Udregn det i spørgsmål 1 fundne udtryk* (*husk at angive mellemregninger*).

Opgave 18.18 (*determinant, ligningssystem*)

1) Beregn determinanten

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & a & 1 \\ a-3 & 2 & 2a & 0 \\ -4a+7 & -2 & 0 & 0 \\ -2a+6 & -6 & -3a & -2 \end{vmatrix}.$$

2) Givet ligningssystemet

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + ax_3 + x_4 &= 2 \\ (a-3)x_1 + 2x_2 + 2ax_3 &= 2 \\ (-4a+7)x_1 - 2x_2 &= -2 \\ (-2a+6)x_1 - 6x_2 - 3ax_3 - 2x_4 &= -6 \ . \end{aligned}$$

For de værdier af a, for hvilke ligningssystemets determinant er forskellig fra 0, skal ligningssystemet løses. Den fuldstændige løsning ønskes ikke angivet, men kun værdien af x_2.

Opgave 18.19 (*determinant, ligningssystem*)

1) *Beregn determinanten*

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & a+1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

2) Givet ligningssystemet

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_2 + (a+1)x_3 &= 1 \\ x_1 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_2 + ax_4 &= 1 \end{aligned} \quad , \qquad a \in \mathbb{R} \ .$$

For de værdier af a, hvor der er præcis 1 løsning, ønskes værdien af x_2 *bestemt.*

19 EGENVÆRDI, EGENVEKTOR, DIAGONALISERING

19.1 INDLEDNING

Det er som regel særlig nemt at løse problemer, hvori de optrædende matricer er såkaldte **diagonalmatricer**, dvs. kvadratiske matricer med luttet 0 'er uden for diagonalen.

Differentialligningssystem

Systemet $\frac{d\bar{y}}{dt} = D\bar{y}$, hvor D er en diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

kan skrives

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \bar{y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -2y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = 3y_2 \\ \frac{dy_3}{dt} = 2y_3 \end{cases}.$$

Systemet lader sig umiddelbart løse, idet de tre enkelte differentialligninger ikke er koblede til hinanden.

Det mere generelle problem $\frac{d\bar{y}}{dt} = A\bar{y}$, hvor A er en vilkårlig $n \times n$ matrix, ville derfor blive stærkt forenklet, hvis vi kunne indføre nye koordinater $\bar{z}$ ved en substitution $\bar{y} = S\bar{z}$, således at differentialligningssystemet $\frac{d\bar{y}}{dt} = A\bar{y}$ går over i et differentialligningssystem $\frac{d\bar{z}}{dt} = D\bar{z}$, hvor D er en diagonalmatrix. I så fald vil vi sige, at A er "diagonaliseret".

Lad

$$\bar{y} = S\bar{z},$$

hvor S er en invertibel $n \times n$ matrix, der ikke afhænger af t. Indsættes i differentialligningen

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = A\bar{y},$$

fås

$$S\frac{d\bar{z}}{dt} = AS\bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\bar{z}}{dt} = S^{-1}AS\bar{z}.$$

Hvis det er muligt at bestemme S, så $S^{-1}AS = D$, hvor D er en diagonalmatrix, så har vi fået den ønskede forenkling.

Da $S^{-1}AS = D \Leftrightarrow AS = SD$, gælder det om at finde en matrix S og en diagonalmatrix D, så $AS = SD$. Lad os for nemheds skyld tænke os, at A er matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

og lad

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad S = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Idet søjlevektorerne i S benævnes

$$\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

kan S kort skrives

$$S = \left(\bar{x}^{(1)} \ \bar{x}^{(2)} \right).$$

Vi har nu

$$AS = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot a_1 + 2\cdot a_2 & 1\cdot b_1 + 2\cdot b_2 \\ -1\cdot a_1 + 4\cdot a_2 & -1\cdot b_1 + 4\cdot b_2 \end{pmatrix} = \left(A\bar{x}^{(1)} \ A\bar{x}^{(2)} \right)$$

$$SD = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\lambda_1 & b_1\lambda_2 \\ a_2\lambda_1 & b_2\lambda_2 \end{pmatrix} = \left(\lambda_1\bar{x}^{(1)} \ \lambda_2\bar{x}^{(2)} \right).$$

Vi ser derfor, at

$$AS = SD \quad \Leftrightarrow \quad A\bar{x}^{(1)} = \lambda_1 \bar{x}^{(1)} \ \wedge \ A\bar{x}^{(2)} = \lambda_2 \bar{x}^{(2)} .$$

Når vektorerne $\bar{x}^{(1)}$ og $\bar{x}^{(2)}$ multipliceres med matricen A, forbliver vektorerne altså parallelle med deres **egen** retning. Man kalder $\bar{x}^{(1)}$ og $\bar{x}^{(2)}$ for **egenvektorer** til matricen A, mens λ_1 og λ_2 kaldes for de tilhørende **egenværdier**. Jævnfør figur 19.1.

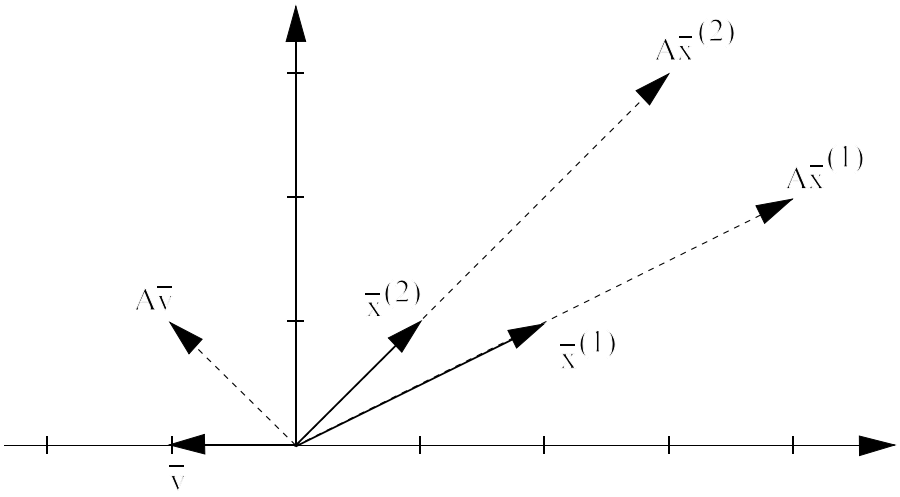


Fig. 19.1. *Vektorerne* $\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *og* $\bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *er egenvektorer for matricen* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ *med egenværdierne* $\lambda_1 = 2$ *og* $\lambda_2 = 3$, *mens vektoren* $\bar{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *ikke er egenvektor for* A.

Ovenstående kan generaliseres til kvadratiske $n \times n$ matricer af vilkårlig orden n: egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ i diagonalen i D og egenvektorerne $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(n)}$ i S er løsninger til ligningen $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ (egenværdiproblemet). Der findes numeriske metoder og edb-programmer til bestemmelse af egenværdier og egenvektorer for en kvadratisk matrix A -- også i det tilfælde hvor der optræder komplekse tal i egenværdier og egenvektorer.

Kvadratisk form

Lad en funktion af tre variable $f(x,y,z)$ have det 2. Taylorpolynomium

$$\tilde{f}(x,y,z) = c_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2a_4x_1x_2 + 2a_5x_2x_3 + 2a_6x_1x_3 .$$

Også her kan man opnå en forenkling ved at skifte til nye koordinater.

Betragtes kun andengradsleddene, dvs. leddene af typen $a x_i x_j$, fås en såkaldt "kvadratisk form":

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2a_4x_1x_2 + 2a_5x_2x_3 + 2a_6x_1x_3 .$$

Den kvadratiske form kan omskrives:

$$x_1\left(a_1x_1+a_4x_2+a_6x_3\right)+x_2\left(a_4x_1+a_2x_2+a_5x_3\right)+x_3\left(a_6x_1+a_5x_2+a_3x_3\right)$$

$$=\ (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_1x_1+a_4x_2+a_6x_3 \\ a_4x_1+a_2x_2+a_5x_3 \\ a_6x_1+a_5x_2+a_3x_3 \end{pmatrix}\ =\ (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_6 \\ a_4 & a_2 & a_5 \\ a_6 & a_5 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\ =\ \tilde{\bar{x}}A\bar{x}\ .$$

Ligesom ved differentialligningssystemet er det nu ønskeligt at foretage et koordinatskifte $\bar{x}=S\bar{z},$ så den kvadratiske form $\tilde{\bar{x}}A\bar{x}$ går over i

$$(z_1,z_2,z_3)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\ =\ \lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\lambda_3z_3^2\ .$$

Her er alle produktled forsvundet, og udtrykket er derfor enklere at behandle.

Funktion af matrix

Antag, at en kvadratisk matrix A kan diagonaliseres til en diagonalmatrix $D=S^{-1}AS.$ Heraf fås

$$SD=AS\quad\Leftrightarrow\quad AS=SD\quad\Leftrightarrow\quad A=SDS^{-1},\qquad \text{dvs.}\quad A\ =\ S\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}S^{-1}.$$

En funktion f kan da generaliseres til at have diagonalisérbare matricer som argument, idet man definerer $f(A)$ ved :

$$f(A)\ =\ S\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}S^{-1}\ . \qquad (1)$$

Hermed har vi udvidet funktionsbegrebet til f. eks. at omfatte $A^k,\ \mathrm{e}^A,\ \sin A,\ \mathrm{Arctan}A$.
At definitionen er rimelig, ses ved at betragte potensfunktionen $f(A)=A^k,\ \ k\in\{1,2,3,\ldots\}$.
Af $A=SDS^{-1}$ fås

$$A^2=(SDS^{-1})(SDS^{-1})=SDDS^{-1}=$$

$$S\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}S^{-1}=S\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^2 \end{pmatrix}S^{-1}.$$

Analogt fås

$$A^k=(SDS^{-1})^k=SD^kS^{-1}=S\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^k \end{pmatrix}S^{-1}.$$

Dette illustrerer, at definitionen (1) er rimelig.

19.2 EGENVÆRDIER OG EGENVEKTORER

DEFINITION af egenværdi og egenvektor. *Lad A være en $n \times n$ matrix. Et tal λ kaldes en egenværdi for A, hvis der findes en vektor $\bar{x} \neq \bar{0}$, så $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$. Vektoren $\bar{x}$ kaldes da for en egenvektor for A (hørende til egenværdien λ).*

Idet E er en enhedsmatrix af n'te orden, kan der foretages følgende omskrivning:

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \quad \Leftrightarrow \quad A\bar{x} = \lambda E\bar{x} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0} \ . \tag{1}$$

Vi vil nu vise, at der gælder følgende sætning:

SÆTNING 19.1 (*bestemmelse af egenværdier og egenvektorer*).
Egenværdier. *Et tal λ er egenværdi for en $n \times n$ matrix A, hvis og kun hvis $\det(A - \lambda E) = 0$.*
(Ligningen kaldes "karakterligningen for A").
Egenvektorer. *De til egenværdien λ hørende egenvektorer er løsninger $\bar{x} \neq \bar{0}$ til ligningssystemet $(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}$.*

Bevis.

Egenværdier. Vi skal vise, at

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \text{ er en egenværdi for } A \ .$$

Vi har

Udledning	Kommentarer
$\det(A - \lambda E) = 0$	
$\Leftrightarrow$ $\text{rang}(A - \lambda E) < n$	Følger af sætning 18.2
$\Leftrightarrow$ $\text{rang}(A - \lambda E) = \text{rang}(A - \lambda E \mid \bar{0}) < n$	En ekstra $\bar{0}$ - søjle kan ikke ændre rangen.
$\Leftrightarrow$ $(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}$ har uendelig mange løsninger	Følger af diskussionen om løsningsmængde sidst i afsnit 16.3.
$\Leftrightarrow$ der eksisterer $\bar{x} \neq \bar{0}$, så at $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$	Da der er uendelig mange løsninger, er der andre løsninger end nulløsningen.
$\Leftrightarrow$ λ er en egenværdi for A.	Følger af definitionen på egenværdi.

Hermed er første del af sætningen bevist.

Egenvektorer. Ifølge definitionen er $\bar{x}$ en egenvektor hørende til egenværdien λ, hvis og kun hvis $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ og $\bar{x} \neq \bar{0}$. Ved omskrivningen (1) fås umiddelbart, at $\bar{x}$ er en egenvektor hørende til egenværdien λ, hvis og kun hvis $(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}$ og $\bar{x} \neq \bar{0}$. Hermed er anden del af sætningen bevist.

Eksempel 19.1. Bestemmelse af egenværdier og egenvektorer.

Lad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1) Find alle egenværdierne for A.
2) Find alle tilhørende egenvektorer for A.

LØSNING:

1) Egenværdier. Karakterligningen er

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 2-\lambda & 4 \\ 1 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2-\lambda)\left[(1-\lambda)(4-\lambda)+2\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\lambda = 3}} \ \vee \ \underline{\underline{\lambda = 2}} \text{ (dobbeltrod).}$$

2a) Egenvektorer hørende til $\lambda = 3$. Ligningssystemet $A\bar{x} = \lambda\bar{x} \Leftrightarrow (A-\lambda E)\bar{x} = \bar{0}$ har totalmatricen T, der omdannes til en echelonmatrix:

$$T = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ r_2 + r_1 \\ r_3 + \frac{1}{2}r_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} \\ \left(-\frac{1}{2}\right)r_1 \\ (-1)r_2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ligningssystemet har 1 frihedsgrad. Sættes $x_3 = t$, fås

$$x_2 - 2t = 0 \Leftrightarrow x_2 = 2t, \qquad x_1 + t = 0 \Leftrightarrow x_1 = -t.$$

Egenvektorer er følgelig $\underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \neq 0}}$.

Det ses, at til enkeltroden $\lambda = 3$ hører egenvektoren $\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (de øvrige egenvektorer hørende til $\lambda = 3$ er proportionale med $\bar{x}^{(1)}$).

2b) **Egenvektorer hørende til $\lambda = 2$.** Ligningssystemet $(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}$ har totalmatricen T, der omdannes til en echelonmatrix:

$$T = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ r_2 + 2r_1 \\ r_3 + r_1 \\ (-1)r_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Det ses, at ligningssystemet har 2 frihedsgrader. Sættes $x_3 = t$ og $x_2 = s$, fås

$$x_1 + 2t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -2t.$$

Egenvektorer er følgelig $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s, \quad t \text{ og } s \text{ ikke begge } 0$.

Enhver egenvektor hørende til egenværdien 2 kan altså skrives som en linearkombination af to uafhængige (ikke parallelle) egenvektorer:

$$\bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \bar{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Maple:

Skriv A:= og benyt menuen "Matrix" til indtastningen (se evt. eks. 16.1)

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Cursor på udskrift, højre musetast, Vælg "Eigenvalues etc.", Eigenvectors"

Resultat: $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Egenværdier er 2,2 3 og de tilhørende egenvektorer stå i samme rækkefølge

Ønskes kun egenværdierne vælges "Eigenvalues"

19.3 DIAGONALISERING

Som det fremgår af afsnit 19.1 er det væsentligt, at kunne "diagonalisere" en kvadratisk matrix A.

DEFINITION af diagonalisérbar matrix. *En* $n \times n$ *matrix* A *siges at være diagonalisérbar, hvis der findes en invertibel* $n \times n$ *matrix* S, *således at matricen* $D = S^{-1}AS$ *er en diagonalmatrix* [1].

Følgende sætning viser, hvilke matricer der er diagonalisérbare, og angiver, hvorledes man i bekræftende fald kan finde S.

SÆTNING 19.2 (*diagonalisering*). *Lad* A *være en* $n \times n$ *matrix. Så gælder:*

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ er diagonalisérbar} \\ \text{med diagonaliserende matrix} \\ S = \left(\bar{x}^{(1)}\,\bar{x}^{(2)} \ldots \bar{x}^{(n)}\right) \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} A \text{ har } n \text{ lineært} \\ \text{uafhængige egenvektorer} \\ \bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(n)}. \end{array}\right.$$

En diagonaliserende matrix S *er altså* $S = \left(\bar{x}^{(1)}\,\bar{x}^{(2)} \ldots \bar{x}^{(n)}\right)$, *dvs. en matrix, der har egenvektorerne som søjlevektorer*[2]
Diagonalmatricen $D = S^{-1}AS$ *er*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

hvor $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *er egenværdierne hørende til egenvektorerne* $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(n)}$
($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *behøver ikke at være forskellige*).

Man kan undersøge, om $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(n)}$ er lineært uafhængige ved at undersøge, om determinanten $\det\left(\bar{x}^{(1)}\,\bar{x}^{(2)} \ldots \bar{x}^{(n)}\right)$ er forskellig fra nul (jævnfør sætning 18.2) .

---

[1] Der må gerne indgå komplekse tal i S, D, egenværdierne og egenvektorerne.

[2] Der må gerne indgå komplekse tal i S, D, egenværdierne og egenvektorerne, se eventuelt eksempel 19.6

Bevis. Vi skal vise, at **A er diagonalisérbar $\Leftrightarrow$ A har n lineært uafhængige egenvektorer**.

Vi har

Udledning	Kommentarer
A er diagonalisérbar	
$\Leftrightarrow$ der eksisterer en invertibel matrix S, så at $D = S^{-1}AS$	Følger af definitionen på diagonalisérbar matrix.
bliver en diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$	
$\Leftrightarrow$ der eksisterer en invertibel matrix S, så at $SD = AS$,	
hvor D er en diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$	
$\Leftrightarrow$ der eksisterer en invertibel matrix $S = \left(\bar{x}^{(1)}\bar{x}^{(2)}\ldots\bar{x}^{(n)}\right)$, så at $\left(\bar{x}^{(1)}\bar{x}^{(2)}\ldots\bar{x}^{(n)}\right)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = A\left(\bar{x}^{(1)}\bar{x}^{(2)}\ldots\bar{x}^{(n)}\right)$	Her er S blot udtrykt ved sine søjlevektorer.
$\Leftrightarrow$ der eksisterer en invertibel matrix $S = \left(\bar{x}^{(1)}\bar{x}^{(2)}\ldots\bar{x}^{(n)}\right)$, så at $\left(\lambda_1\bar{x}^{(1)}\ \lambda_2\bar{x}^{(2)}\ \ldots\ \lambda_n\bar{x}^{(n)}\right) = \left(A\bar{x}^{(1)}\ A\bar{x}^{(2)}\ \ldots\ A\bar{x}^{(n)}\right)$	Regningerne svarer til dem, der er vist i indledningen (afsnit 19.1) for 2×2 matricer.
$\Leftrightarrow$ der eksisterer n lineært uafhængige vektorer $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(n)}$, så at $\left(\lambda_1\bar{x}^{(1)}\ \lambda_2\bar{x}^{(2)}\ \ldots\ \lambda_n\bar{x}^{(n)}\right) = \left(A\bar{x}^{(1)}\ A\bar{x}^{(2)}\ \ldots\ A\bar{x}^{(n)}\right)$	S er invertibel, netop når S har rangen n (sætning 17.3), dvs. netop når søjlevektorerne er lineært uafhængige (jævnfør definitionen på rang).
$\Leftrightarrow$ A har n lineært uafhængige egenvektorer $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(n)}$.	Følger af definitionen på egenvektor.

De øvrige påstande i sætningen følger også af udledningen ovenfor.

Eksempel 19.2. Diagonalisering.

Undersøg, om matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

kan diagonaliseres, og find i bekræftende fald en diagonalmatrix D samt en diagonaliserende matrix S.

LØSNING:

Af eksempel 19.1 fremgik det, at A havde egenvektorerne

$$\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \bar{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da determinanten $\det S = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, er de tre vektorer lineært uafhængige, og A er følgelig **diagonalisérbar**.

I eksempel 19.1 fandt vi ligeledes, at A havde egenværdierne $\lambda = 3$ (tilhørende egenvektor $\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$) og $\lambda = 2$ (tilhørende egenvektorer $\bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\bar{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$).

Af sætning 19.2 fås da, at

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

og en diagonaliserende matrix er

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi kunne naturligvis have byttet om på rækkefølgen af λ-værdierne i D, blot vi tilsvarende byttede om på rækkefølgen af søjlerne $\bar{x}^{(1)}$, $\bar{x}^{(2)}$ og $\bar{x}^{(3)}$ i S.

Eksempel 19.3. Løsning af differentialligningssystem.

Find den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= y_1 - 2y_3\\ \frac{dy_2}{dt} &= 2y_1 + 2y_2 + 4y_3\\ \frac{dy_3}{dt} &= y_1 + 4y_3\ .\end{aligned}$$

LØSNING:

Differentialligningssystemet kan skrives:

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \\ \frac{dy_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = A\bar{y}, \quad \text{hvor} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Indføres substitutionen $\bar{y} = S\bar{z}$ og dermed $\frac{d\bar{y}}{dt} = S\frac{d\bar{z}}{dt}$, fås

$$S\frac{d\bar{z}}{dt} = AS\bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\bar{z}}{dt} = S^{-1}AS\bar{z}.$$

Af eksempel 19.2 fås, at hvis $S = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, så er $D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Vi har derfor

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = D\bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = 3z_1 \\ \frac{dz_2}{dt} = 2z_2 \\ \frac{dz_3}{dt} = 2z_3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z_1 = C_1 e^{3t} \\ z_2 = C_2 e^{2t} \\ z_3 = C_3 e^{2t} \end{cases}, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Nu kan $\bar{y}$ findes:

$$\bar{y} = S\bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_1 = -z_1 - 2z_2 \\ y_2 = 2z_1 + z_3 \\ y_3 = z_1 + z_2 \end{cases}, \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} y_1 = -C_1 e^{3t} - 2C_2 e^{2t} \\ y_2 = 2C_1 e^{3t} + C_3 e^{2t} \\ y_3 = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} \end{cases}, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Sammenfatning af resten af kapitlet

For at vise, at en given kvadratisk $n \times n$ matrix A er diagonalisérbar, kan man ifølge sætning 19.2 finde de tilhørende egenvektorer og vise, at de er lineært uafhængige (jævnfør eksempel 19.2). Ofte kan man imidlertid på en nemmere måde indse, at A er diagonalisérbar, idet der gælder:

1) hvis A har n **forskellige** egenværdier, så er A diagonalisérbar (jævnfør sætning 19.3 punkt b)

2) hvis A er en reel symmetrisk matrix ($\tilde{A} = A$ jævnfør sætning 19.4 punkt a), så er A diagonalisérbar.

SÆTNING 19.3 (*egenvektorer, diagonalisérbarhed*). *Lad A være en* $n \times n$ *matrix. Så gælder:*

a) *Hvis* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *er k* ***forskellige*** *egenværdier (*$k \le n$*), og* $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}$ *er tilhørende egenvektorer, så vil disse være lineært uafhængige.*

b) *Hvis A har n* ***forskellige*** *egenværdier, så er A diagonalisérbar.*

c) *A er diagonalisérbar, hvis og kun hvis der til enhver egenværdi* λ_i *hører lige så mange lineært uafhængige egenvektorer, som det antal gange* λ_i *er rod i karakterligningen (dvs. til en dobbeltrod hører to lineært uafhængige vektorer, osv.*).

Bevis for sætningen findes i supplement 19A.

Komplekse egenværdier. Har karakterligningen komplekse rødder, vil der også indgå komplekse tal i egenvektorerne. Alle metoder og sætninger gælder imidlertid lige så godt i dette tilfælde (en nærmere forklaring findes i supplement 19B).

Ikke-diagonalisérbare matricer. Kan en matrix A ikke diagonaliseres (heller ikke ved brug af komplekse tal), kan man vise, at der altid eksisterer en matrix S, således at $D = S^{-1}AS$ bliver en næsten diagonal matrix, nemlig en matrix på såkaldt Jordan-normalform. Matricen D får da egenværdierne (eventuelt komplekse) i diagonalen, men også ét eller flere 1-taller umiddelbart under diagonalen, f.eks.

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Singulær værdi dekomposition. I supplement 19C omtales den såkaldte **s**ingulær **v**ærdi **d**ekomposition (SVD), som kan minde lidt om diagonalisering.

19.4 EGENVEKTORER FOR SYMMETRISKE MATRICER

En $n \times n$ matrix A kaldes som tidligere nævnt symmetrisk, hvis den ved transponering går over i sig selv, dvs. $\widetilde{A} = A$.

Eksempelvis er $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ en symmetrisk matrix.

Det erindres, at to vektorer $\bar{a}$ og $\bar{b}$ kaldes **ortogonale**, hvis det skalære produkt $\bar{a} \cdot \bar{b}$ er 0.

For symmetriske matricer gælder følgende sætning, der anføres uden bevis.

SÆTNING 19.4 (*symmetrisk matrix*). *Lad A være en reel symmetrisk $n \times n$ matrix. Da gælder:*

a) *A er diagonalisérbar.*

b) Alle A's egenværdier er reelle.

c) Der findes n indbyrdes ortogonale vektorer $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$, som er egenvektorer til A.

d) *Som diagonaliserende matrix S kan altid bestemmes en såkaldt **ortogonal matrix**, dvs. en matrix, hvor søjlevektorerne $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ er indbyrdes ortogonale enhedsvektorer* (*metode: gør de ortogonale vektorer fra punkt c til enhedsvektorer og benyt disse som søjler i S*).

En ortogonal matrix, f.eks. $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, er særlig bekvem at arbejde med.

Den har således en invers matrix S^{-1}, der er nem at finde, idet den blot er den transponerede $\widetilde{S}$. Herom handler den følgende sætning:

SÆTNING 19.5 (*ortogonal matrix*). *En kvadratisk matrix S er en ortogonal matrix, hvis og kun hvis $\widetilde{S} = S^{-1}$.*

Bevis. Lad $S = \left(\bar{x}^{(1)}\, \bar{x}^{(2)} \ldots \bar{x}^{(n)}\right)$. Vi har da

$$\widetilde{S} = S^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{S}\,S = E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \widetilde{\bar{x}}^{(1)} \\ \widetilde{\bar{x}}^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \widetilde{\bar{x}}^{(n)} \end{pmatrix} \left(\bar{x}^{(1)}\, \bar{x}^{(2)} \ldots \bar{x}^{(n)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \quad \tilde{\bar{x}}^{(i)} \cdot \tilde{\bar{x}}^{(j)} = \begin{cases} 1 \text{ for } i = j \\ 0 \text{ for } i \neq j \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(n)}$ er indbyrdes ortogonale enhedsvektorer

$\Leftrightarrow \quad S = \left(\bar{x}^{(1)} \; \bar{x}^{(2)} \; \ldots \; \bar{x}^{(n)} \right)$ er en ortogonal matrix..

Eksempel 19.4. Symmetrisk matrix

Diagonalisér matricen $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, og find en diagonaliserende ortogonal matrix S.

LØSNING:
Da matricen er en reel, symmetrisk matrix, ved vi fra sætning 19.4, at den er diagonalisérbar, at egenværdierne er reelle, og at den diagonaliserende matrix S kan vælges som en ortogonal matrix.
Karakterligningen er

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda = 5 \;\vee\; \lambda = 10 .$$

Egenvektorerne svarende tilhørende til $\lambda = 5$ findes:

$$\begin{pmatrix} 9-5 & -2 \\ -2 & 6-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad 4x_1 - 2x_2 = 0 .$$

Systemet har 1 frihedsgrad. Sættes $x_1 = t$, fås $x_2 = 2t$.

Egenvektorer er følgelig $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t, \quad t \neq 0$. Enhedsvektor $\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Egenvektorerne svarende tilhørende til $\lambda = 10$ findes:

$$\begin{pmatrix} 9-10 & -2 \\ -2 & 6-10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad -x_1 - 2x_2 = 0 .$$

Systemet har 1 frihedsgrad. Sættes $x_2 = t$, fås $x_1 = -2t$.

Egenvektorer er følgelig $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \neq 0$. Enhedsvektor $\bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Vi har altså $\underline{\underline{D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}}}$ og $\underline{\underline{S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}}$.

Eksempel 19.5. Reduktion af kvadratisk form

Lad der være givet ligningen

$$9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 = 5. \qquad (1)$$

Undersøg, om ligningen fremstiller en ellipse eller en hyperbel, og skitsér kurven i koordinatsystemet.

LØSNING:

Lad $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ og $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, hvor koefficienterne til x_1^2 og x_2^2 er placeret i diagonalelementerne a_{11} og a_{22}, og halvdelen af koefficienten til $x_1 \cdot x_2$ placeret i elementerne a_{12} og a_{21} (se eventuelt under "kvadratiske former" i afsnit 19.1).

Ligning (1) kan nu kort skrives

$$\tilde{\bar{x}} A \bar{x} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5 \quad \text{(ses ved udregning).}$$

Ifølge eksempel 19.4 kan A diagonaliseres med den ortogonale matrix $S = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ til diagonalmatricen $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Indføres nye variable $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ved ligningen $\bar{y} = \tilde{S}\bar{x}$, fås $\bar{x} = S\bar{y}$ (da $\tilde{S} = S^{-1}$).

Indsættes dette i ligningen $\tilde{\bar{x}} A \bar{x} = 5$, fås

$$\tilde{\bar{x}} A \bar{x} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{S\bar{y}} A S\bar{y} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\bar{y}}\tilde{S} A S\bar{y} = 5 \qquad (\text{da } \tilde{S\bar{y}} = \tilde{\bar{y}}\tilde{S})$$

$$\Leftrightarrow \quad \tilde{\bar{y}} D \bar{y} = 5 \qquad (\text{da } \tilde{S} A S = D)$$

$$\Leftrightarrow \quad (y_1, y_2)\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 5y_1^2 + 10y_2^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y_1^2}{1^2} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1,$$

dvs. i (y_1, y_2)-koordinatsystemet fremstiller ligningen (1) en ellipse med centrum i (0,0) og halvakser 1 og $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

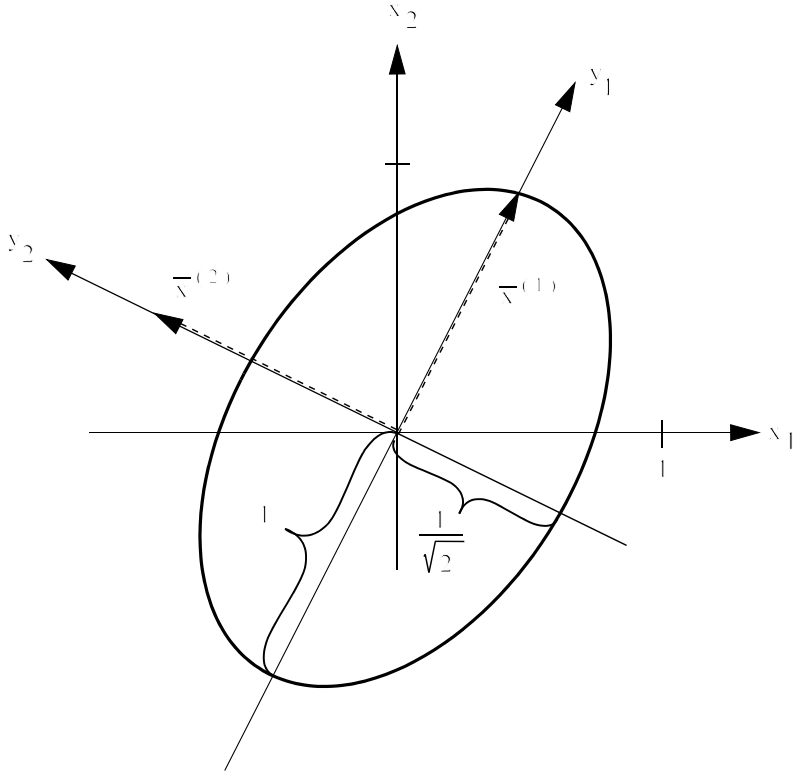
Det indførte (y_1, y_2) – koordinatsystem er bestemt ved, at

$$\bar{x} = S\bar{y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} y_2 \ ,$$

dvs. førsteaksen har basisvektoren $\bar{x}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, og andenaksen har basisvektoren

$\bar{x}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (søjlevektorerne i S).



SUPPLEMENT: 19A BEVIS FOR SÆTNING 19.3

SÆTNING 19.3 (*egenvektorer, diagonalisérbarhed*). *Lad A være en $n \times n$ matrix. Så gælder:*

*a) Hvis $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ er k **forskellige** egenværdier ($k \le n$), og $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}$ er tilhørende egenvektorer, så vil disse være lineært uafhængige.*

*b) Hvis A har n **forskellige** egenværdier, så er A diagonalisérbar.*

c) A er diagonalisérbar, hvis og kun hvis der til enhver egenværdi λ_i hører lige så mange lineært uafhængige egenvektorer, som det antal gange λ_i er rod i karakterligningen (dvs. til en dobbeltrod hører to lineært uafhængige vektorer, osv.).

Bevis:

a) Beviset føres ved induktion for stigende værdier af k.

1) For $k = 1$ er påstanden indlysende.

2) Lad påstanden være sand for et tal k, hvor $1 \le k < n$.

Vi ved da, at de tilhørende egenvektorer $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}$ er lineært uafhængige, dvs. ligningen

$c_1\bar{x}^{(1)} + c_2\bar{x}^{(2)} + \ldots + c_k\bar{x}^{(k)} = \bar{0}$ har kun løsningen $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$.

Lad nu λ_{k+1} være en egenværdi forskellig fra $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, og lad $\bar{x}^{(k+1)}$ være en tilsvarende egenvektor.

Vi danner nu ligningen

$$a_1\bar{x}^{(1)} + a_2\bar{x}^{(2)} + \ldots + a_k\bar{x}^{(k)} + a_{k+1}\bar{x}^{(k+1)} = \bar{0}. \qquad (1)$$

Multipliceres ligning (1) med A, fås

$$a_1A\bar{x}^{(1)} + a_2A\bar{x}^{(2)} + \ldots + a_kA\bar{x}^{(k)} + a_{k+1}A\bar{x}^{(k+1)} = \bar{0}.$$

Idet $A\bar{x}^{(i)} = \lambda_i\bar{x}^{(i)}$, fås

$$a_1\lambda_1\bar{x}^{(1)} + a_2\lambda_2\bar{x}^{(2)} + \ldots + a_k\lambda_k\bar{x}^{(k)} + a_{k+1}\lambda_{k+1}\bar{x}^{(k+1)} = \bar{0}. \qquad (2)$$

Ved at multiplicere ligning (1) med λ_{k+1} og subtrahere ligning (2) fra ligning (1), fås

$$a_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)\bar{x}^{(1)} + a_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2)\bar{x}^{(2)} + \ldots + a_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\bar{x}^{(k)} = \bar{0}. \qquad (3)$$

Da $\lambda_{k+1} \neq \lambda_1$, $\lambda_{k+1} \neq \lambda_2$, $\ldots$, $\lambda_{k+1} \neq \lambda_k$, og $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}$ er lineært uafhængige, må

$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$.

Indsættes dette i ligning (1), fås $a_{k+1}\bar{x}^{(k+1)} = \bar{0}$, dvs. $a_{k+1} = 0$. Vi har dermed vist det ønskede.

b) Er alle n egenværdier indbyrdes forskellige, vil de tilhørende egenvektorer være lineært uafhængige (ifølge sætningens punkt a). Ifølge sætning 19.2 er A da diagonalisérbar.

c) Vi skal vise, at

$$A \text{ er diagonalisérbar} \iff \begin{cases} \text{til enhver } p \text{ gange rod } \lambda_i \text{ i karakterligningen} \\ \text{for } A \text{ hører } p \text{ lineært uafhængige egenvektorer,} \\ p \in \{1, 2, \ldots, n\}. \end{cases}$$

1) Først bevises implikationen $\Longleftarrow$.

Vi skal altså vise, at A er diagonalisérbar. Ifølge sætning 19.2 behøver vi blot at vise, at de i alt n nævnte egenvektorer er lineært uafhængige. Egenværdierne opstilles i en sådan rækkefølge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, at ens egenværdier følger lige efter hinanden, f.eks. 2,2,2,3,3,5,5,5,5,8,9,9, og beviset kan så føres ved induktion efter antallet af grupper.

Lad det være sandt, at alle egenvektorerne $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(k)}$ til og med den j'te gruppe er lineært uafhængige (det gælder i hvert fald for $j = 1$), og lad den (j+1)'te gruppe have p ens egenværdier $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_{k+p}$ (forskellige fra alle andre egenværdier).

Vi danner nu følgende ligning

$$a_1\vec{x}^{(1)} + a_2\vec{x}^{(2)} + \ldots + a_k\vec{x}^{(k)} + a_{k+1}\vec{x}^{(k+1)} + \ldots + a_{k+p}\vec{x}^{(k+p)} = \vec{0}. \qquad (4)$$

Multipliceres ligning (4) med $A - \lambda_{q+1}E$, fås som under punkt a:

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\vec{x}^{(1)} + a_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\vec{x}^{(2)} + \ldots + a_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\vec{x}^{(k)} = \vec{0}.$$

Da $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(k)}$ er lineært uafhængige, må (som under punkt a) $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$.

Indsættes dette i ligning (4), fås $a_{k+1}\vec{x}^{(k+1)} + \ldots + a_{k+p}\vec{x}^{(k+p)} = \vec{0}$..

Da vi er gået ud fra, at egenvektorerne $\vec{x}^{(k+1)}, \vec{x}^{(k+2)}, \ldots, \vec{x}^{(k+p)}$ i en enkelt gruppe er lineært uafhængige, så må også $a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots = a_{k+p} = 0$.

Hermed har vi vist, at alle egenvektorerne $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(k+p)}$ til og med den (j+1)'te gruppe er lineært uafhængige. Induktionsbeviset er derfor gennemført.

2) Nu bevises implikationen $\Longrightarrow$.

Vi går altså ud fra, at A er diagonalisérbar. Der eksisterer da en invertibel matrix

$S = \left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(n)}\right)$ og en diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \lambda_n \end{pmatrix}$, således at

$A = SDS^{-1}$. Da S er invertibel, må vektorerne $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(n)}$ være **lineært uafhængige**.

Af ligningen $AS = SD$ følger endvidere, at

$A\vec{x}^{(1)} = \lambda_1\vec{x}^{(1)}$, $A\vec{x}^{(2)} = \lambda_2\vec{x}^{(2)}$, $\ldots$, $A\vec{x}^{(n)} = \lambda_n\vec{x}^{(n)}$, dvs.

$\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(n)}$ er **egenvektorer**, og $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ er de tilhørende **egenværdier**.

Til sidst betragtes karakterligningen:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(SDS^{-1} - \lambda E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(S(D - \lambda E)S^{-1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \det(S)\cdot\det(D - \lambda E)\cdot\det(S^{-1}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(D - \lambda E) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda) = 0.$$

Den sidste ligning viser, at $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ netop er **rødderne i karakterligningen** regnet med multiplicitet.

SUPPLEMENT: 19B KOMPLEKSE EGENVÆRDIER

Har karakterligningen komplekse rødder, vil der også indgå komplekse tal i egenvektorerne. Alle metoder og sætninger fra afsnit 19.1 og 19.2 gælder imidlertid også i dette tilfælde.

Eksempel 19B.1. Kompleks diagonalisering.

Lad $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Find alle egenværdierne for A.
2) Find egenvektorer for A svarende til de fundne egenværdier.
3) Find en diagonalmatrix D og en diagonaliserende matrix S.

LØSNING:

1) Egenværdier. Karakterligningen er

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\lambda = 1 \pm i}}.$$

2a) En egenvektor hørende til $\lambda = 1 + i$.

Ligningssystemet $(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}$ har totalmatricen T:

$$T = \left(\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{array}\right) \underset{r_2 - ir_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{ir_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Systemet har 1 frihedsgrad. Sættes $x_2 = t$, fås $x_1 - it = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = it$.

En egenvektor er følgelig $\bar{x}^{(1)} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}}}$.

2b) En egenvektor hørende til $\lambda = 1 - i$.

Ligningssystemet $(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}$ har totalmatricen T:

$$T = \left(\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{array}\right) \underset{r_2 + ir_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{-ir_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Systemet har 1 frihedsgrad. Sættes $x_2 = t$, fås $x_1 + it = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -it$.

En egenvektor er følgelig $\bar{x}^{(2)} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}}}$.

3) A kan diagonaliseres til

$$D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \quad \text{med} \quad S = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der er således intet principielt nyt, når blot vi er villige til at acceptere komplekse tal, hvor de måtte forekomme. Er vi imidlertid ikke det, gælder følgende sætning om, hvordan man i stedet kan finde en "næsten-diagonal" reel matrix $D = S^{-1}AS$ ved hjælp af en reel substitution S.

SÆTNING 19B.1 (*reel "næsten-diagonalisering"*). *Lad A være en reel kvadratisk matrix. Antag, at A som kompleks matrix betragtet er diagonalisérbar. Lad $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ være de reelle egenværdier for A, og lad de ikke-reelle egenværdier være $a_1 + ib_1, a_1 - ib_1, a_2 + ib_2, a_2 - ib_2, \ldots, a_k + ib_k, a_k - ib_k$, hvor $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k \in \mathbb{R}$. (Alle egenværdier er nævnt med gentagelser efter multiplicitet.) Så findes der en invertibel, reel matrix S, således at $S^{-1}AS = D$,* hvor D er "næsten" diagonal:

$$D = \begin{pmatrix}
\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_2 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_k & b_k \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_k & a_k
\end{pmatrix}.$$

Søjlerne i S er egenvektorerne hørende til de reelle egenværdier fulgt af skiftevis realdel og imaginærdel af egenvektorerne hørende til $a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \ldots, a_k + ib_k$.

Beviset for sætningen udelades, men for at forstå dens indhold betragtes det følgende eksempel.

Eksempel 19B.2. Reel næsten-diagonalisering.

Lad $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Find alle egenværdierne for A.
2) Find egenvektorer for A svarende til de fundne egenværdier.

3) Find en næsten-diagonalmatrix D og en næsten-diagonaliserende matrix S.

LØSNING:

1) Egenværdier. Karakterligningen er

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-\lambda)(\lambda^2+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\lambda = 1 \ \vee \ \lambda = \pm\sqrt{2}\,i}} \ .$$

2a) **En egenvektor hørende til $\lambda = 1$.**

Ligningssystemet $(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}$ har totalmatricen $T = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$.

Systemet har 1 frihedsgrad, idet x_1 kan vælges frit. Vi får af første ligning $x_3 = 0$ og derpå $x_2 = 0$.

En egenvektor er følgelig $\bar{x}^{(1)} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$.

2b) **En egenvektor hørende til $\lambda = \sqrt{2}\,i$.**

Ligningssystemet $(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}$ har totalmatricen

$$T = \left(\begin{array}{ccc|c} 1-\sqrt{2}\,i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}\,i & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2}\,i & 0 \end{array}\right) \underset{r_3 + \frac{1}{\sqrt{2}\,i} r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1-\sqrt{2}\,i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}\,i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Systemet har 1 frihedsgrad. Sættes $x_1 = t$, fås $(1-\sqrt{2}\,i)t + x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = (-1+\sqrt{2}\,i)t$

og $-\sqrt{2}\,i\,x_2 - 2(-1+\sqrt{2}\,i)t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = (-2-\sqrt{2}\,i)t$.

En egenvektor er følgelig $\bar{x}^{(2)} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -2-\sqrt{2}\,i \\ -1+\sqrt{2}\,i \end{pmatrix}}}$.

2c) **En egenvektor hørende til $\lambda = -\sqrt{2}\,i$.**

Ligningssystemet $(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}$ har totalmatricen

$$T = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}\,i & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & +\sqrt{2}\,i & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & +\sqrt{2}\,i & | & 0 \end{pmatrix} \underset{r_3 - \frac{1}{\sqrt{2}i} r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}\,i & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & +\sqrt{2}\,i & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Systemet har 1 frihedsgrad. Sættes $x_1 = t$, fås $(1+\sqrt{2}\,i)t + x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = (-1-\sqrt{2}\,i)\,t$

og $\sqrt{2}\,i\,x_2 - 2(-1-\sqrt{2}\,i)t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = (-2+\sqrt{2}\,i)\,t$.

En egenvektor er følgelig $\bar{x}^{(3)} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -2+\sqrt{2}\,i \\ -1-\sqrt{2}\,i \end{pmatrix}}}$.

Bemærk, at til kompleks konjugerede egenværdier hører altid kompleks konjungerede egenvektorer, da A er reel.

3) Ifølge sætning 19B.2 fås den næsten-diagonale matrix D ud fra egenværdierne:

$$D = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}}}.$$

Endvidere følger det af sætningen, at søjlerne i S er

$$\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Re}\left(\bar{x}^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathrm{Im}\left(\bar{x}^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Vi har altså $S = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -\sqrt{2} \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}}$.

At sætningen er rigtig i dette tilfælde, kan ses af følgende udregning:

$$AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -\sqrt{2} \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & -2\sqrt{2} \\ 0 & -2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$SD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -\sqrt{2} \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & -2\sqrt{2} \\ 0 & -2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Vi har altså $AS = SD$, så $D = S^{-1}AS$.

SUPPLEMENT: 19C SINGULÆR VÆRDI DEKOMPOSITION

Singulær **v**ærdi **d**ekomposition (SVD) af A. Man kan vise at enhver reel $m\times n$ matrix A kan dekomponeres (omskrives) på formen (se reference 15 i litteraturlisten)

$$A = USV^T, \tag{1}$$

hvor

U er en ortogonal $m\times m$ matrix $\Leftrightarrow$ U's søjler er indbyrdes ortogonale enhedsvektorer $\Leftrightarrow U^T = U^{-1}$,

V er en ortogonal $n\times n$ matrix $\Leftrightarrow$ V's søjler er indbyrdes ortogonale enhedsvektorer $\Leftrightarrow V^T = V^{-1}$,

S er en $m\times n$ matrix med lutter nuller, bortset fra de r første elementer i diagonalen , som alle er positive og ordnet efter faldende værdi:

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \dots \ge \sigma_r > 0, \qquad r = \text{rang}(A).$$

Singulær værdierne for A. Elementerne $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, 0, 0, \dots, 0$ i diagonalen af S kaldes A's **singulær værdier**, og de er entydigt bestemt, når A er givet.

Eksempel 19C.1.

Foretag SVD af matricen $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

LØSNING:

Med matematikprogrammet Maple fås:

```
> with( linalg):      A := matrix( 3, 4, [ 3,4,1,2,  2,3,2,1,  1,1,-1,1 ] ) :
  S = evalf ( Svd( A, U, V) );     [ A=evalm(A),  U=evalm(U),  V=evalm(V) ] ;
```

$$S = [6.967,\ 1.860,\ .1927\ 10^{-15}]$$

$$\left[A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} -.7838 & .2288 & -.5774 \\ -.5900 & -.5644 & .5774 \\ -.1938 & .7932 & .5774 \end{bmatrix},\ V = \begin{bmatrix} -.5347 & .1885 & -.1421 & -.8114 \\ -.7319 & .008101 & .5616 & .3858 \\ -.2541 & -.9101 & -.3271 & .01324 \\ -.3375 & .3689 & -.7466 & .4388 \end{bmatrix} \right]$$

Heraf ses, at A's singulær værdier er $\sigma_1 = 6.967,\ \sigma_2 = 1.860,\ \sigma_3 = 0$, dvs. A har rangen $r = 2$.

Singulær **v**ærdi **d**ekomposition (SVD) af A. Lad $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m$ betegne søjlevektorerne i U. Og lad $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ betegne søjlevektorerne i V. Så kan dekompositionen (1) udtrykkes på formen:

$$A = \bar{u}_1 \sigma_1 \bar{v}_1^T + \bar{u}_2 \sigma_2 \bar{v}_2^T + \dots + \bar{u}_r \sigma_r \bar{v}_r^T. \tag{2}$$

Er en singulær værdi, f.eks. σ_2, forskellig fra de øvrige, er $\bar{u}_2$ og $\bar{v}_2$ entydigt bestemt på nær et fortegn, således at skiftes fortegn på $\bar{u}_2$, skal der også skiftes fortegn på $\bar{v}_2$.

Geometrisk tolkning af A. Ligningen $\bar{y} = A\bar{x}$ definerer en afbildning af vektorer $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ over i vektorer $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$. Man kan identificere A med denne afbildning. Ligning (2) fortæller, at A kan karakteriseres fuldstændigt som en lineær afbildning, hvor de r ortogonale vektorer $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_r$ afbildes over i hver sin af de r ortogonale vektorer $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_r$ og samtidig forstørres med den tilsvarende af singulær værdierne $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$.

Egenværdier og SVD. Er $A = US\tilde{V}$, så har $A\tilde{A}$ og $\tilde{A}A$ egenværdier $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2$ samt 0'er for resten. Søjlerne i U og V er egenvektorer for henholdsvis $A\tilde{A}$ og $\tilde{A}A$. Er A en $n \times n$ symmetrisk matrix med egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, gælder $|\lambda_i| = \sigma_i$, hvorved diagonaliseringen $A = OD\tilde{O}$ og SVDen $A = US\tilde{V}$ bliver næsten identiske for $V = O$ og $U =$ "O med modsat fortegn på de søjler, som svarer til $\lambda_i < 0$".

Pseudoinvers til A. Herved forstås matricen $A^+ \equiv \bar{v}_1 \frac{1}{\sigma_1} \tilde{\bar{u}}_1 + \bar{v}_2 \frac{1}{\sigma_2} \tilde{\bar{u}}_2 + \ldots + \bar{v}_r \frac{1}{\sigma_r} \tilde{\bar{u}}_r$.

Hvis A er $n \times n$ matrix med rangen n ("fuld rang"), fås den sædvanlige inverse matrix til A, dvs. $A^+ = A^{-1}$.

Løsning af ligningssystem. Lad A være en vilkårlig $m \times n$ matrix. Ligningssystemet $A\bar{x} = \bar{b}$ har da den fuldstændige bedste løsning (den som opfylder ligningssystemet med mindst mulig RMS-fejl):

$$\bar{x} = A^+\bar{b} + C_{r+1}\bar{v}_{r+1} + C_{r+2}\bar{v}_{r+2} + \ldots + C_n\bar{v}_n, \tag{3}$$

hvor C'erne er arbitrære konstanter. Sættes alle C'erne til 0, fås $\bar{x} = A^+\bar{b}$, som kan vises at være den af alle løsningerne, som har den mindste længde $|\bar{x}|$.

Konditionstallet for A. Forholdet mellem den største og mindste blandt de positive singulær værdier kaldes A's konditionstal: konditionstal(A) $\equiv \frac{\sigma_1}{\sigma_r}$

Er konditionstallet f.eks. 10^9, må man forvente at miste ca. 9 betydende cifre ved numeriske beregninger med A (løsning af ligningssystemer, pseudoinvers matrix, ...). Dvs. at kan computeren regne med en nøjagtighed på 15 betydende cifre, så mistes de 9 sidste cifre overalt, således at der kun bliver 6 pålidelige cifre tilbage overalt i resultatet.

Effektiv rang af A. Er A en 5×5 matrix med singulær værdierne $\sigma_1 = 9,\ \sigma_2 = 4,\ \sigma_3 = 1,\ \sigma_4 = \sigma_5 = 0$, så har A rangen $r = 3$, og et ligningssystem $A\bar{x} = \bar{b}$ vil have uendelig mange bedste løsninger givet ved ligning (3). Men hvis elementerne i A er måletal med små målefejl, vil rangen normalt ændres til 5, og ligning (3) giver kun 1 bedste løsning. Dvs. de små ubetydelige målefejl kan skjule løsningernes sande karakter. Det er naturligvis ikke godt. Men her kan singulær værdierne heldigvis hjælpe. Hvis de er $\sigma_1 = 9.0001,\ \sigma_2 = 3.9999,\ \sigma_3 = 1.0001,\ \sigma_4 = 0.0002,\ \sigma_5 = 0.0001,$ så er der et afslørende kraftigt fald fra σ_3 til σ_4, som viser, at vi dykker ned på niveauet for de rene målefejl. Den effektive numeriske rang er altså $r_{\text{effektiv}} = 3$, og rangen 3 bør genetableres eksakt, f.eks. ved at vi **sætter** $\sigma_4 = \sigma_5 = 0$ i (2) eller (1), således at vi igen får en matrix A med den helt rigtige rang. Derved sænkes samtidig konditionstallet fra 90000 til 9, hvilket også er godt.

Kvadratsum af A. Man kan vise, at kvadratsummen af alle A's elementer er lig med kvadratsummen af alle singulær værdierne: $\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_r^2$ (det samlede "indhold" af matricen A).

Determinanten af A. For en kvadratisk $n \times n$ matrix er den numeriske værdi af A's determinant lig med produktet af alle dens n singulær værdier: $|\det(A)| = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_n$.

OPGAVER

Opgave 19.1 *(substitution, egenvektorer)*

Besvar de følgende spørgsmål a), b) og c) for ét af de følgende sæt værdier af A og S, idet det er givet, at S er en invertibel matrix.

1[T]) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 15 & -4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6) $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 10 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) *Vis ved indsættelse, at substitutionen* $\bar{y} = S\bar{z}$ *forenkler differentialligningssystemet* $\frac{d\bar{y}}{dt} = A\bar{y}$ *til* $\frac{d\bar{z}}{dt} = D\bar{z}$, *hvor D er en diagonalmatrix. Angiv D.*

b) *Lad n være antallet af søjler i A.*
Angiv egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *for A, samt et sæt tilhørende egenvektorer* $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(n)}$.

c) *Kontrollér ved direkte udregning, at resultatet i spørgsmål b) er korrekt, dvs. at*
$A\bar{x}^{(1)} = \lambda_1\bar{x}^{(1)}$, $A\bar{x}^{(2)} = \lambda_2\bar{x}^{(2)}, \ldots,$ $A\bar{x}^{(n)} = \lambda_n\bar{x}^{(n)}$,
såfremt denne udregning ikke blev foretaget under spørgsmål b).

Opgave 19.2 *(funktion af matrix)*

Besvar de følgende spørgsmål, idet det oplyses, at $D = S^{-1}AS$ *er en diagonalmatrix:*

1) *Find* 2^A *for* $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2) *Find* $\cos(\pi A)$ *for* $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) *Find* $\sqrt{A}$ *for* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Opgave 19.3 (*egenværdi, egenvektor*)

Find alle egenværdier og egenvektorer for de følgende matricer :

1[T]) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 11) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 12) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 14) $\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$ 15) $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

16[T]) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 17) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 18) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

19) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 20) $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ 21) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & -2 \\ 18 & -9 & 1 \end{pmatrix}$

22) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 23) $\begin{pmatrix} -9 & -15 & 12 \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & -9 & 5 \end{pmatrix}$ 24) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

25) $\begin{pmatrix} 16 & 9 & -33 \\ 14 & 9 & -30 \\ 10 & 6 & -21 \end{pmatrix}$ 26) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

27) $\begin{pmatrix} 25 & -18 & -18 & 18 \\ 48 & -35 & -36 & 36 \\ 36 & -27 & -38 & 36 \\ 48 & -36 & -48 & 46 \end{pmatrix}$ 28) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -12 & 0 \\ 3 & 7 & -12 & 0 \\ 2 & 4 & -7 & 0 \\ 2 & 4 & -9 & 2 \end{pmatrix}$.

Opgave 19.4 *(diagonalisering)*

Undersøg for hver af matricerne i opgave 19.3, om matricen kan diagonaliseres, og find i bekræftende fald en diagonalmatrix D samt en diagonaliserende matrix S.

Opgave 19.5 *(løsning af differentialligningssystem)*

Find for hver matrix A i opgave 19.3 den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet $\frac{d\bar{y}}{dt} = A\bar{y}$.

Opgave 19.6 *(symmetrisk matrix)*

Diagonalisér hver af de følgende matricer A, og find en tilsvarende diagonaliserende matrix S.

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ 3) $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ 5) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$ 6) $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 10 & 5 & 8 \\ -2 & 8 & 11 \end{pmatrix}$.

Opgave 19.7 (*reduktion af kvadratisk form*)

Undersøg for hver af de følgende ligninger, hvilken kurve (ellipse eller hyperbel) ligningen fremstiller, og skitsér kurven i koordinatsystemet.

1) $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 9$

2) $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 = 28$

3) $6x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_2^2 = 21$

4) $4x_1^2 + 12x_1x_2 - x_2^2 = 80$

5) $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 12x_2^2 = 52$.

Opgave 19.8 (*reduktion af kvadratisk form*)

Lad det 2. Taylorpolynomium for en funktion være

$$2x_1^2 + 5x_2^2 + 11x_3^2 + 20x_1x_2 - 4x_1x_3 + 16x_2x_3 \ .$$

Reducér polynomiet til et udtryk af formen

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2$$

ved en substitution $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, *og angiv S.*

Opgave 19B.1 (*komplekse egenværdier*)

a) *Find samtlige egenværdier og tilhørende egenvektorer for de følgende matricer .*

b) *Angiv derpå matricerne på reel "næsten-diagonalform". Angiv både D og S.*

1^{T}) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2 & 10 & -6 \\ -4 & -6 & 8 \\ -4 & -5 & 7 \end{pmatrix}$.

20 RÆKKER

I dette kapitel omtales de såkaldte rækker, der er summer bestående af uendelig mange led.

20.1 BEHOV FOR RÆKKER

Beregning af funktioner. Der er behov for rækker til udregning af nøjagtige værdier af funktioner. Vi er vant til, at lommeregnere og computere "kender" visse standardfunktioner, f.eks. e^x, og kan beregne værdier af disse. Beregningerne må imidlertid dybest set foregå ved hjælp af de fire elementære regneoperationer + - · / . Eksempelvis kan en funktion $f(x)$ være tilnærmet ved det n'te Taylorpolynomium med udviklingspunkt x_0:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n .$$

For funktionen $f(x) = e^x$ og udviklingspunktet $x_0 = 0$ fås således

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} .$$

Jo flere led der medtages i denne sum, desto nøjagtigere tilnærmes e^x. Medtages led i det uendelige, fås en **række** (engelsk: "series"):

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots ,$$

hvor de sidste tre prikker markerer, at der skal adderes uendelig mange led på samme måde. Man kan vise, at denne Taylorrække eksakt giver x for enhver værdi af $x \in \mathbb{R}$ Derfor kan e^x beregnes med en vilkårlig stor nøjagtighed, når blot der medtages tilstrækkelig mange led af rækken.

Vanskelige integrationer. Der er behov for rækker ved vanskelige integrationer. Eksempelvis kan integralet $\int e^{-t^2} dt$ beregnes eksakt ved at benytte rækken for e^x, så vi får:

$$\int e^{-t^2} dt = \int \left(1 + \frac{-t^2}{1!} + \frac{(-t^2)^2}{2!} + \frac{(-t^2)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-t^2)^n}{n!} + \ldots \right) dt$$

$$= t - \frac{t^3}{1!\,3} + \frac{t^5}{2!\,5} - \frac{t^7}{3!\,7} + \ldots + \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} + \ldots$$

Vanskelige differentialligninger. Der er endvidere behov for rækker til at løse vanskelige differentialligninger. Eksempelvis kan differentialligningen

$$t\frac{d^2y}{dt^2} - y(t) = 0\,, \qquad y(0) = 0\,, \qquad y'(0) = 1$$

løses eksakt ved at gætte på en rækkeløsning:

$$y(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_n t^n + \ldots \quad .$$

(Gættet indsættes i differentialligningen, hvorved koefficienterne $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ kan bestemmes under brug af begyndelsesbetingelserne $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.)

Udvidelse af funktioner. Der er også behov for rækker til at udvide definitionsmængderne for mange kendte funktioner, så de kommer til at omfatte komplekse tal og kvadratiske matricer. Eksempelvis kan man definere, at e^A for $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ skal være givet ved rækken:

$$e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots$$

(kan f.eks. benyttes i kvantemekanik og ved løsning af systemer af lineære differentialligninger).

20.2 KONVERGENS OG SUM

En række er et udtryk af formen

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad .$$

Ofte skrives blot $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ eller $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eller Σa_n.

Definitioner

Ved den n'te **delsum** s_n (kaldes også n'te "afsnit") forstås summen af leddene op til og med det n'te led a_n, dvs.

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad .$$

I det følgende vil vi opfatte s_n som en funktion $s(n)$ af n, hvor $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

DEFINITION 20.1 *(konvergens, sum). En række*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

siges at være ***konvergent****, hvis og kun hvis den n'te delsum*

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

har en grænseværdi for $n \to \infty$. *Grænseværdien s kaldes rækkens* ***sum****.*

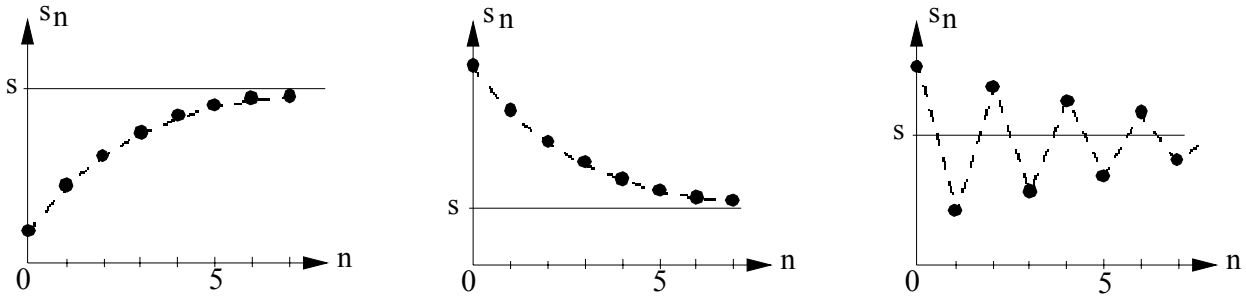


Fig. 20.1. *Delsummer for tre konvergente rækker.*

En række kaldes **divergent**, hvis den ikke er konvergent.

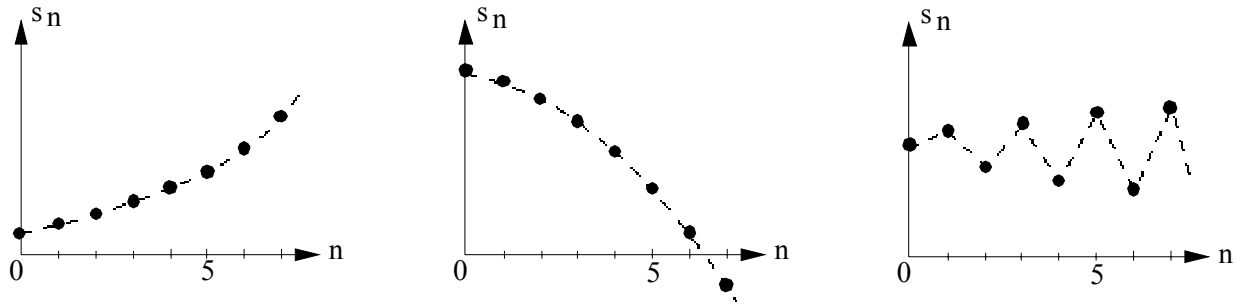


Fig. 20.2. *Delsummer for tre divergente rækker.*

Eksempel 20.1. Konvergens.

Undersøg hvilke af de følgende rækker, der er konvergente.

1) $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$

2) $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1 + \ldots$

3) $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ (den "harmoniske" række)

4) $\frac{c}{1} + \frac{c}{2} + \frac{c}{3} + \frac{c}{4} + \ldots + \frac{c}{n} + \ldots$ ($c \neq 0$)

LØSNING:

1) Idet $a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \ldots,$ bliver den n'te delsum

$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n + 1$.

Heraf ses, at $s_n \to \infty$ for $n \to \infty$. Derfor er rækken **divergent**.

2) Idet $a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -1, \ldots,$ bliver den n'te delsum

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \begin{cases} 0 \text{ for } n \text{ ulige} \\ 1 \text{ for } n \text{ lige} \end{cases} .$$

Da delsummen s_n ustandselig springer mellem 0 og 1, har den ingen grænseværdi for $n \to \infty$. Derfor er rækken **divergent.**

3) Vi har $s_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ Lad eksempelvis n have værdien 5. Af figuren ses, at s_5 er arealet af de på figuren indtegnede rektangler. Vi har derfor klart, at

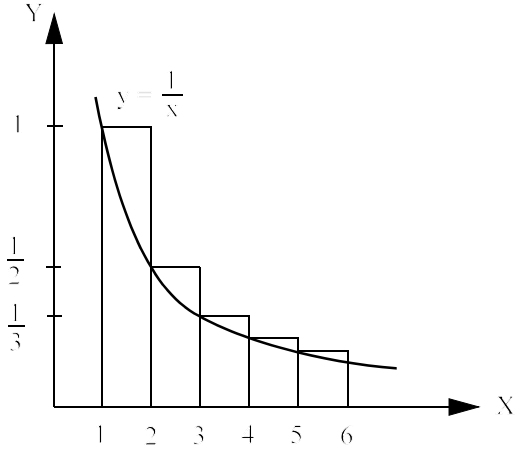
$$s_5 > \int_1^6 \frac{1}{x}\,dx = \ln 6 .$$

Analogt fås, at

$$s_n > \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1) .$$

Da $\ln n \to \infty$ for $n \to \infty$, er den **harmoniske række** $\sum \frac{1}{n}$ **divergent.**

(Sammenligning mellem række og integral omtales senere i integralkriteriet.)



4) I forhold til den harmoniske række er den n'te delsum nu blot $c \cdot s_n$ $(c \neq 0)$, og vil derfor stadig ikke have nogen grænseværdi for $n \to \infty$. Rækken er altså **divergent.**

Kvotientrække

Ved en kvotientrække forstås en række af formen

$$c + cq + cq^2 + cq^3 + \ldots + cq^n + \ldots \quad , \qquad c \neq 0 .$$

Rækken siges at have kvotienten q, fordi forholdet $\frac{cq^n}{cq^{n-1}}$ mellem ethvert led $(n \geq 1)$ og dets foregående led er lig med q.

SÆTNING 20.1 *(kvotientrække). Kvotientrækken*

$$c + cq + cq^2 + \ldots + cq^n + \ldots \quad , \qquad c \neq 0$$

er konvergent for $|q| < 1$ *med summen* $\frac{c}{1-q}$ *og divergent for* $|q| \geq 1$.

Eksempelvis er $\sum_{n=5}^{\infty} 2^{-n}$ en kvotientrække med $c = 2^{-5}$ og $q = \frac{1}{2}$. Da $|q| = \frac{1}{2} < 1$, er rækken konvergent med summen $\frac{c}{1-q} = \frac{2^{-5}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{16}$.

Bevis. Den n'te delsum undersøges:

$$s_n = c + cq + cq^2 + \ldots + cq^n = c(1 + q + q^2 + \ldots + q^n)$$

$$= \frac{c}{1-q}(1-q)\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^n\right) \qquad (q \neq 1)$$

$$= \frac{c}{1-q}\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^n - q - q^2 - q^3 - \ldots - q^{n+1}\right)$$

$$= \frac{c}{1-q}\left(1 - q^{n+1}\right) \underset{(n \to \infty)}{\longrightarrow} \frac{c}{1-q} \qquad \text{for} \quad |q| < 1 \,.$$

Rækken er altså konvergent med summen $\frac{c}{1-q}$ for $|q| < 1$.

For $|q| \geq 1$ har vi $|cq^n| \geq |c|$, sådan at delsummen $c + cq + cq^2 + \ldots + cq^n$ ændres med mindst $|c|$ for hver ny n-værdi og derfor ikke kan have nogen grænseværdi for $n \to \infty$.

Moderat ændring af række

Det fremgår af definitionen på konvergens, at konvergens / divergens af en given række ikke ændres ved, at man

1) indføjer eller udelader led med værdien nul,
2) ændrer på et endeligt antal led,
3) multiplicerer hvert led med samme tal $k \neq 0$.

Eksempelvis vil rækken

$$3 + 0 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

være konvergent, da rækken bortset fra de 3 første led er en kvotientrække med kvotienten $\frac{1}{2}$.

(Summen af de tre første led er 5, og til hvert s_n for kvotientrækken er der derfor blot adderet 5. Der eksisterer derfor stadigvæk en grænseværdi for $n \to \infty$; grænseværdien er blot blevet 5 større.)

Parenteser

Af definitionen på konvergens følger, at man **i en konvergent række**, f.eks.

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \ldots$, **gerne må sætte parenteser**, f.eks. så man får

$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}\right) + \ldots$ eller $\frac{3}{2} + \frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^5} + \ldots$, idet de nye delsummer $s_0^*, s_1^*, s_2^*, \ldots$ også vil konvergere mod s, fordi de fremkommer ved blot at slette nogle af de gamle delsummer $s_0, s_1, s_2, \ldots$. Derimod kan en konvergent række, f.eks. $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots$, dvs. $0 + 0 + 0 + \ldots$, blive divergent, hvis man forsøger at hæve parenteser, f.eks. så man får $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$.

Andre regneregler

I appendix 20.1 forklares udførligt, i hvilken udtrækning man kan tillade sig at regne med kon-vergente rækker på samme måde, som man regner med udtryk bestående af et endeligt antal led.

Eksempelvis gælder:

SÆTNING 20.2 *(addition og multiplikation). Hvis* Σa_n *og* Σb_n *er konvergente med summerne a og b, så vil rækkerne* $\Sigma(a_n+b_n)$ *og* $\Sigma c\cdot a_n$ *være konvergente med summerne a + b og* $c\cdot a$.

Bevis. Da delsummerne $s_n' = \sum_{i=0}^{n} a_i$ og $s_n'' = \sum_{i=0}^{n} b_i$ har grænseværdierne *a* og *b* for $n\to\infty$, vil

delsummerne $\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i) = s_n'+s_n''$ og $\sum_{i=0}^{n} c\cdot a_i = c\cdot s_n'$ have grænseværdierne *a* + *b* og $c\cdot a$.

20.3 KONVERGENSKRITERIER

I det følgende vises en række sætninger, "konvergenskriterier", som kan være til hjælp ved afgørelse af, om rækker er konvergente eller divergente.

n'te-ledskriteriet

SÆTNING 20.3 *(n'te-ledskriteriet). Hvis* a_n ***ikke*** *går mod 0 for* $n\to\infty$, *så er rækken* Σa_n *divergent.*

NB: Selv om $a_n\to 0$ for $n\to\infty$, kan man dog ikke heraf slutte, at rækken Σa_n er konvergent (eksempel: den harmoniske række $\Sigma\frac{1}{n}$).

Bevis. Vi vil føre et indirekte bevis for sætningen. Antag, at a_n ikke går mod 0 for $n\to\infty$, og at rækken alligevel er konvergent med en sum *s*. Da

$$a_n = (a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n) - (a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}) = s_n - s_{n-1},$$

vil $a_n\to s-s$ for $n\to\infty$. Vi har følgelig, at $a_n\to 0$ for $n\to\infty$, hvilket er i strid med det antagne.

Eksempel 20.2. n'te-ledskriteriet.

Undersøg, om rækken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ er konvergent.

LØSNING:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = n^{-\frac{1}{n}} = e^{\frac{-\ln n}{n}} \to e^0 = 1 \neq 0 \quad \text{for} \quad n\to\infty,$$

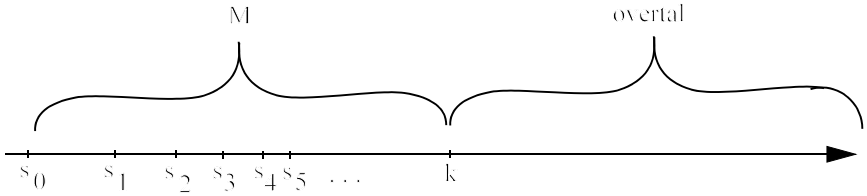
dvs. rækken er **divergent.**

Sammenligningskriteriet

Man kan ofte afgøre, om en række Σa_n er konvergent ved at sammenligne den med en kendt række Σb_n.
En oversigt over kendte rækker findes i appendix 20.2 og i Schaums håndbog.

HJÆLPESÆTNING 20.4 *(positive led, begrænsede delsummer). Lad* Σa_n *være en række med positive led. Lad endvidere mængden af delsummer være opadtil begrænset. Rækken* Σa_n *vil da være konvergent.*

Bevis. Da $M = \{s_0, s_1, s_2, \ldots\}$ er opadtil begrænset, vil der findes "overtal", som er større end eller lig samtlige tal i M. Lad k være det mindste overtal. Der vil da for ethvert $\varepsilon > 0$ findes et nummer N, så $s_n > k - \varepsilon$ for $n > N$. Da rækkens led er positive, må $s_n \le s_{n+1} \le s_{n+2} \le \ldots$, hvilket betyder, at $s_n > k - \varepsilon$ for alle $n > N$. Dette viser netop, at $s_n \to k$ for $n \to \infty$.



SÆTNING 20.5 *(sammenligning ved ulighed). Lad* $0 \le a_n \le A_n$. *Da gælder*

1) Konvergens af ΣA_n *medfører konvergens af* Σa_n.

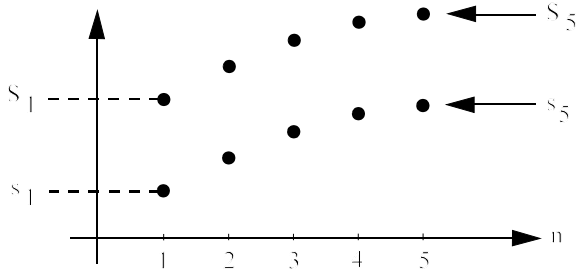
2) Divergens af Σa_n *medfører divergens af* ΣA_n.

Sagt anderledes:

1) Hvis en række med "store" led er konvergent, så vil en række med "mindre" led også være konvergent.

2) Hvis en række med "små" led er divergent, så vil en række med "større" led også være divergent.

Bevis. Lad $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ og $S_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$. Da $0 \le a_n \le A_n$, må $s_n \le S_n$ (se figuren).



1) Hvis ΣA_n er konvergent med sum S, vil $S_n \to S$ for $n \to \infty$.
Da $s_n \le S_n \le S$ for alle n, er $M = \{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$ opadtil begrænset, og ifølge hjælpesætning 20.4 er Σa_n derfor konvergent.

2) Hvis Σa_n er divergent, vil $s_n \to \infty$ for $n \to \infty$. Da $S_n \ge s_n$, må $S_n \to \infty$ for $n \to \infty$, dvs. ΣA_n er divergent.

Eksempel 20.3. Sammenligning af rækker.

Undersøg, om rækken $\sum \frac{|\sin nx|}{2^n}$ er konvergent for enhver værdi af $x \in \mathbb{R}$.

LØSNING:

Da $\frac{|\sin nx|}{2^n} \le \frac{1}{2^n}$, og $\sum \frac{1}{2^n}$ er konvergent (kvotientrække med kvotient $q = \frac{1}{2} < 1$), er den givne række konvergent (ifølge sætning 20.5).

For at undersøge, om Σa_n er konvergent, vil man ofte for store værdier af n kunne tænke sig a_n tilnærmet ved et enklere udtryk b_n. Eksempelvis kan $a_n = \frac{1+10^{-n}}{n}$ tænkes tilnærmet ved $b_n = \frac{1}{n}$ for store værdier af n. Hvis Σb_n er en kendt række (f.eks. kendt fra appendix 20.2 eller Schaums håndbog), kan man da ofte benytte den følgende sætning 20.6 til at afgøre, om Σa_n er konvergent.

SÆTNING 20.6 *(sammenligningskriteriet). Lad* $a_n \ge 0$ *og* $b_n > 0$ *for alle n, og antag, at*

$$\frac{a_n}{b_n} \to c \quad \textit{for} \quad n \to \infty .$$

Hvis $0 < c < \infty$, *så er* Σa_n *og* Σb_n *enten begge konvergente eller begge divergente.*

NB: Hvis $c = 0$, kan dette kriterium ikke hjælpe, men sætning 20.5 kan eventuelt anvendes.

Bevis. Da $\frac{a_n}{b_n} \to c$ for $n \to \infty$, må $\frac{a_n}{b_n} - c \to 0$ for $n \to \infty$. Man kan derfor finde et helt tal n_0, således at $\left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| < \frac{c}{2}$ for $n \ge n_0$. For $n \ge n_0$ gælder nu

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| < \frac{c}{2} \iff -\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} - c < \frac{c}{2} \iff \frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}c \iff \frac{c}{2} b_n < a_n < \frac{3c}{2} b_n .$$

Sætning 20.5 viser da, at Σa_n og Σb_n enten begge er konvergente eller begge divergente.

Eksempel 20.4. Sammenligningskriteriet.

Undersøg, om rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$ er konvergent.

LØSNING:

Da $\frac{1}{n+\ln n}$ for store værdier af n ligger tæt ved $\frac{1}{n}$, er det rimeligt at sammenligne med den velkendte harmoniske række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Vi har $a_n = \frac{1}{n+\ln n} \ge 0$ og

$b_n = \frac{1}{n} > 0$. Da $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n+\ln n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{1 + \frac{\ln n}{n}} \to 1$ for $n \to \infty$,

vil $\Sigma \frac{1}{n+\ln n}$ være divergent, fordi $\Sigma \frac{1}{n}$ er divergent (ifølge eksempel 20.1).

Numerisk-række-kriteriet

Sammen med en række Σa_n betragtes ofte den såkaldte **numeriske række**:

$$|a_0| + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \ .$$

SÆTNING 20.7 *(numerisk-række-kriteriet). Hvis den numeriske række* $\Sigma |a_n|$ *er konvergent, så er rækken* Σa_n *også konvergent.*

Bevis. Vi har $0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$.

Da $\Sigma |a_n|$ er konvergent, er også $2\Sigma |a_n|$ konvergent.

Af sætning 20.5 følger da, at $\Sigma\left(a_n + |a_n|\right)$ er konvergent.

Vi har derfor, at $\Sigma\left[\left(a_n + |a_n|\right) - |a_n|\right] = \Sigma a_n$ er konvergent ifølge sætning 20.2 .

Absolut konvergent række. Hvis den numeriske række $\Sigma |a_n|$ er konvergent, kaldes den givne række Σa_n for **absolut konvergent**. Eksempelvis er rækken

$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \ldots$ absolut konvergent, idet dens numeriske række

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \ldots$ er en konvergent række (kvotientrække med kvotient $\frac{1}{2}$).

Betinget konvergent række. En række Σa_n kaldes **betinget konvergent**, hvis rækken Σa_n selv er konvergent, men den numeriske række $\Sigma |a_n|$ er divergent. Eksempelvis er den konvergente række $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \ldots$ betinget konvergent, idet dens numeriske række $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \ldots$ må være divergent ligesom den harmoniske række.

Rod- og kvotientkriteriet

Fra sætning 20.1 ved vi, at en kvotientrække $c + c\,q + c\,q^2 + \ldots + c\,q^n + \ldots$ er konvergent for $|q| < 1$ og ellers divergent. Der gælder

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|c \cdot q^n|} = |c|^{\frac{1}{n}} \cdot |q| \;\to\; |c|^0 \cdot |q| = |q| \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

og

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|c \cdot q^{n+1}|}{|c \cdot q^n|} = |q| \quad .$$

I denne henseende minder mange numeriske rækker om kvotientrækker, således som det ses af den følgende sætning:

SÆTNING 20.8 *(rod- og kvotientkriteriet). Lad der for rækken* Σa_n *(0-led kan bortkastes) gælde*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \qquad \textit{eller} \qquad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q \quad .$$

Da har man:

Hvis $q < 1$, *er* Σa_n *absolut konvergent.*

Hvis $q > 1$, *er* Σa_n *divergent.*

(Af $q = 1$ *kan der intet sluttes.)*

Bevis.

1) Lad $\sqrt[n]{|a_n|} \to q$ for $n \to \infty$. Hvis $q > 1$, vil der for alle tilstrækkelig store værdier af n gælde $|a_n| > 1$, og rækken Σa_n må da være divergent ifølge n'te-ledskriteriet.

Hvis $q < 1$, kan vi vælge et reelt tal k, hvor $q < k < 1$. For alle tilstrækkelig store værdier af n gælder da $\sqrt[n]{|a_n|} < k$, dvs. $|a_n| < k^n$. Da kvotientrækken Σk^n er konvergent for $|k| < 1$, må rækken $\Sigma |a_n|$ med de numerisk mindre led også være konvergent ifølge sætning 20.5.

2) Lad $|a_{n+1}|/|a_n| \to q$ for $n \to \infty$. Hvis $q > 1$, gælder for alle tilstrækkelig store værdier af n, at $|a_{n+1}|/|a_n| > 1$, dvs. $|a_{n+1}| > |a_n|$, således at $|a_n|$ vokser med n. Heraf ses, at der ikke kan gælde $a_n \to 0$ for $n \to \infty$, og rækken Σa_n må derfor være divergent ifølge n'te-ledskriteriet.

Hvis $q < 1$, kan vi vælge et tal k, hvor $q < k < 1$. For alle tilstrækkelig store værdier af n, lad os sige $n \geq N$, gælder da $|a_{n+1}|/|a_n| < k$. Heraf fås

$$\frac{|a_{N+1}|}{|a_N|} \cdot \frac{|a_{N+2}|}{|a_{N+1}|} \cdot \frac{|a_{N+3}|}{|a_{N+2}|} \cdot \ldots \cdot \frac{|a_{N+p}|}{|a_{N+p-1}|} < k^p \text{, dvs. } \frac{|a_{N+p}|}{|a_N|} < k^p \text{ eller } |a_{N+p}| < k^p\,|a_N| \,.$$

Da kvotientrækken $\Sigma k^p |a_N|$ er konvergent for $|k| < 1$, må rækken $\Sigma |a_{N+p}|$ (og dermed $\Sigma |a_n|$) med de mindre led også være konvergent ifølge sætning 20.5 .

Rod- og kvotientkriteriet er især anvendeligt på mange potensrækker, dvs. på rækker af formen

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \quad .$$

Eksempel 20.5. Rod- og kvotientkriteriet.

Vis, at man for hver af potensrækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right)^n x^n \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} x^n$$

kan bestemme et skel r mellem konvergens og divergens, således at rækken er absolut konvergent for $|x| < r$ og divergent for $|x| > r$ (eventuelt kan r være 0 eller ∞).

LØSNING:

Rodkriteriet.

1) Når rækkens n'te led er et udtryk, der er opløftet til n, vil det ofte være godt at forsøge med rodkriteriet. Idet det n'te led er $a_n = \left(3 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$, finder vi

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^n |x|^n} = \left(3 + \frac{1}{n}\right)|x| \underset{(n \to \infty)}{\longrightarrow} 3|x| = q .$$

Ifølge rodkriteriet er rækken derfor absolut konvergent for $q = 3|x| < 1$, dvs. for $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$, og divergent for $q = 3|x| > 1$, dvs. for $|x| > \frac{1}{3}$. Der er altså et skel $r = \frac{1}{3}$ mellem de x'er som giver konvergens, og de x'er som giver divergens. Denne værdi r kaldes potensrækkens konvergenstal eller dens **konvergensradius**.

Kvotientkriteriet.

2) Når rækken indeholder fakultetsfunktioner, f.eks. $(n+1)!$, vil det ofte være godt at forsøge med kvotientkriteriet. Idet det n'te led er $a_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} x^n$, får vi

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \cdot \frac{\sqrt{n!}}{|x^n|} = \sqrt{\frac{n!}{(n+1)!}}\,|x|$$

$$= \sqrt{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}{(n+1)n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}}\,|x|$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n+1}}\,|x| \underset{(n \to \infty)}{\longrightarrow} 0\cdot|x| = q .$$

Ifølge kvotientkriteriet er rækken derfor absolut konvergent for $q = 0\cdot|x| < 1$, dvs. for $|x| < \infty$. Konvergensradius bliver derfor $r = \infty$.

Alternerende-række-kriteriet

Rækker som

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

og

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

kaldes **alternerende** rækker, idet fortegnet alternerer (= veksler), sådan at leddene bliver reelle tal, der skiftevis er positive og negative.

SÆTNING 20.9 *(alternerende-række-kriteriet). Hvis der for en alternerende række*

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots$$

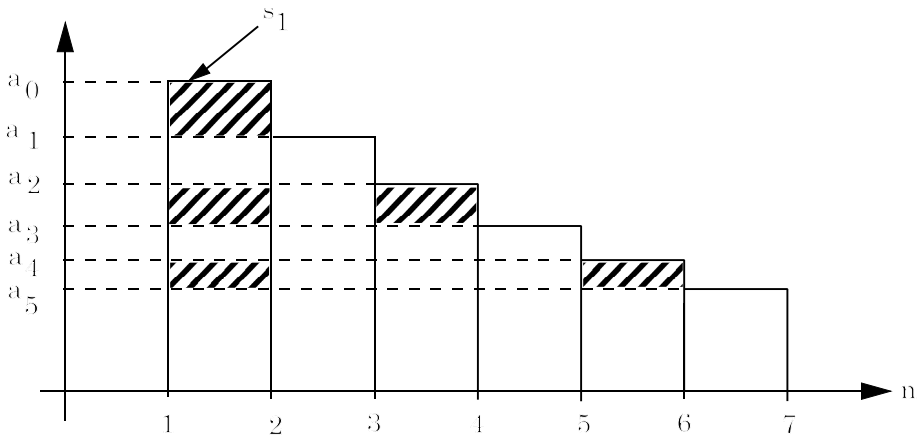
gælder

1) $a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots > 0$ *og*

2) $a_n \to 0 \quad for \quad n \to \infty$,

da er rækken konvergent.

Bevis.



På figuren er afsat rektangler med arealerne $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Vi betragter de tilhørende delsummer $s_0, s_1, s_2, \ldots$. Idet $s_1 = a_0 - a_1$, er s_1 arealet af det øverste skraverede rektangel. Idet $s_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = s_1 + a_2 - a_3$, er s_3 arealet af de to øverste skraverede rektangler tilsammen. Analogt fås, at s_5 er arealet af de tre øverste øverste skraverede rektangler tilsammen. Således kan fortsættes, og vi har følgelig (se figuren)

1) $s_1 < s_3 < s_5 < s_7 < \ldots < s_{2n+1} < \ldots$

2) $0 < s_{2n+1} < a_0$.

Ifølge hjælpesætning 20.4 vil s_{2n+1} derfor have en grænseværdi s for $n \to \infty$. Idet vi ved, at $a_{2n+2} \to 0$ for $n \to \infty$, har vi $s_{2n+2} = s_{2n+1} + a_{2n+2} \to s$ for $n \to \infty$.

Ifølge definitionen på konvergens af række, er rækken $\Sigma (-1)^n a_n$ derfor konvergent.

Eksempel 20.6. Alternerende-række-kriteriet.

Undersøg, om rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ er konvergent.

LØSNING:

Da $\sin\left(\frac{1}{1}\right) > \sin\left(\frac{1}{2}\right) > \sin\left(\frac{1}{3}\right) > \ldots > 0$, og $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ for $n \to \infty$, er den givne række en alternerende række, der opfylder betingelserne i sætning 20.9. Rækken er følgelig konvergent.

Integralkriteriet

En række kan ofte sammenlignes med et integral:

SÆTNING 20.10 *(integralkriteriet). Lad* $f(x)$ *være en aftagende, positiv, kontinuert funktion for* $x \in [1;\infty[$ *(se figur 20.3). Så gælder*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ er konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ er konvergent},$$

dvs. rækken er konvergent, hvis og kun hvis det beslægtede integral er konvergent.

Bevis. Vi har $s_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$.

Lad eksempelvis n have værdien 5. Af figur 20.3 ses, at s_5 er arealet af de på figuren indtegnede rektangler.

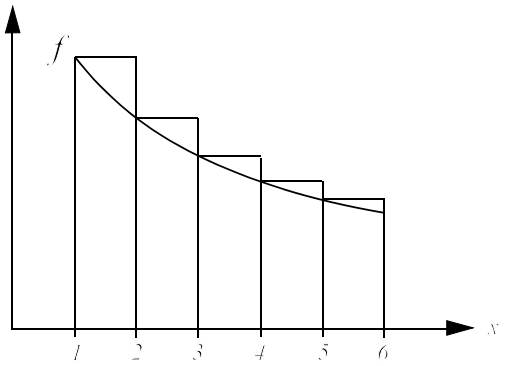


Fig. 20.3. Arealet under kurven er mindre end det totale areal af rektanglerne.

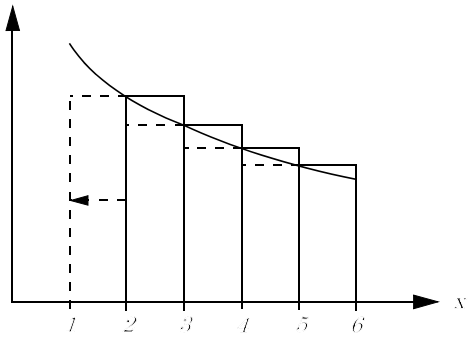


Fig. 20.4. De 4 rektangler kan forskydes til den stiplede position, så de ligger under kurven.

Vi har derfor klart, at $\int_1^6 f(x)\,dx < s_5$. Af figur 20.3 ses endvidere, at $s_5 - f(1)$ er arealet af de 4 mindste rektangler. Tænkes disse forskudt 1 mod venstre, kommer de **under** kurven, se figur 20.4. Vi har derfor

$$s_5 - f(1) < \int_1^5 f(x)\,dx, \tag{1}$$

dvs.

$$s_5 < f(1) + \int_1^5 f(x)\,dx. \tag{2}$$

Af (1) og (2) fås, at

$$\int_1^6 f(x)\,dx \;<\; s_5 \;<\; f(1) + \int_1^5 f(x)\,dx \;. \tag{3}$$

Analogt til (3) fås, at

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \;<\; s_n \;<\; f(1) + \int_1^n f(x)\,dx \;. \tag{4}$$

Af (4) ses, at s_n har en grænseværdi for $n \to \infty$, hvis og kun hvis integralet er konvergent.

Eksempel 20.7. Integralkriteriet.

1) Undersøg, om rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ er konvergent.

2) Undersøg, for hvilke $\alpha \in]0;\infty[$ rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ er konvergent.

LØSNING:

1) Idet $\frac{1}{x^2}$ er en aftagende, positiv, kontinuert funktion for $x \in [1;\infty[$, kan vi benytte integralkriteriet. Vi har

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{x\to\infty} \;=\; 0 - \left(-\frac{1}{1}\right) \;=\; 1 \;.$$

Da integralet er konvergent, er den beslægtede række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ også konvergent.

2) Idet $\frac{1}{x^\alpha}$ er en aftagende, positiv, kontinuert funktion for $x \in [1;\infty[$, kan vi benytte integralkriteriet. Vi har

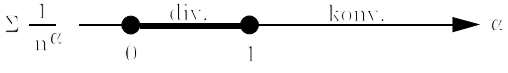
$$\alpha \neq 1: \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \;=\; \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{x\to\infty} \;=\; \frac{1}{-\alpha+1}\left[\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha+1} - 1\right] \;\sim\; \begin{cases} \text{konvergent for } \alpha > 1 \\ \text{divergent for } \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\alpha = 1: \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^1}\,dx \;=\; \left[\ln x\right]_1^{x\to\infty} \;\sim\; \text{divergent for } \alpha = 1 \;.$$

Den beslægtede række $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ er altså

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{konvergent for } \alpha \in]1;\infty[\\ \text{divergent for } \alpha \in]0;1] \;. \end{array}}$$

Den harmoniske række $\sum \frac{1}{n}$ (som selv er divergent) ligger således på randen mellem konvergens og divergens for rækketypen $\sum \frac{1}{n^\alpha}$:



20.4 POTENSRÆKKER

Rækker af formen $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots$ kaldes potensrækker. De spiller en særlig rolle ved anvendelserne.

Fordele

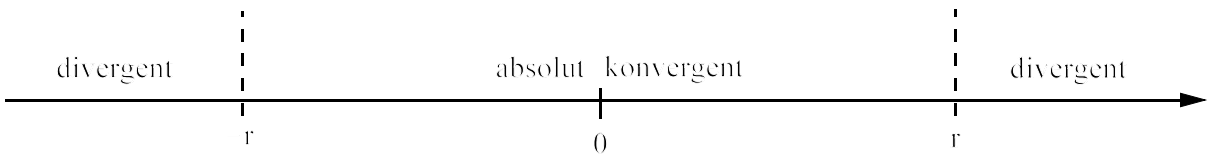
1) Man finder ret nemt **eksakte potensrækkeløsninger** til mange vanskelige problemer (se eksempel 20.8 og 20.9).
2) Mange funktioner kan dårligt defineres praktisk på anden måde end ved en potensrække. Den giver en **eksakt og elementær forskrift**, som er et godt udgangspunkt for beregning, f.eks. på en computer.
3) En potensrækkefunktion $f(x)$ kan naturligt udvides, f.eks. til $f(z)$, hvor z er en **kompleks** variabel, eller til $f(A)$, hvor A er en $n \times n$ **matrix**.

Vi har i eksempel 20.5 set, at der for de nævnte potensrækker eksisterede et skel r, sådan at rækken var konvergent for $|x| < r$ og divergent for $|x| > r$. Den følgende sætning viser, at dette gælder for enhver potensrække.

SÆTNING 20.11 *(konvergens af potensrækker). Hvis* $\Sigma c_n x_0^n$ *er konvergent, så er* $\Sigma c_n x^n$ *absolut konvergent for alle* x *for hvilke* $|x| < |x_0|$.

Bevis. Da $\Sigma c_n x_0^n$ er konvergent, må $c_n x_0^n \to 0$ for $n \to \infty$ (n'te ledskriteriet). Der må følgelig findes et N, så $c_n x_0^n | <$ for $n > N$. For $n > N$ fås derfor $|c_n x^n| = \left| c_n \cdot x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n} \right| \le 1 \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n = \left(\frac{|x|}{|x_0|} \right)^n$. Rækken $\sum \left(\frac{|x|}{|x_0|} \right)^n$ er en kvotientrække med kvotienten $q = \frac{|x|}{|x_0|}$. Hvis $|x| < |x_0|$, er $|q| < 1$, dvs. kvotientrækken er konvergent. Eftersom $|c_n x^n| \le \left(\frac{|x|}{|x_0|} \right)^n$, følger ved sammenligning med kvotientrækken (sætning 20.5), at også $\Sigma |c_n x^n|$ er konvergent.

Af sætningen følger, at der for enhver potensrække må eksistere et "tal" r (eventuelt 0 eller ∞), sådan at rækken er konvergent for $|x| < r$ og divergent for $|x| > r$. Derimod kræver tilfældene $x = -r$ og $x = r$ hver for sig nærmere undersøgelse (ved hjælp af andre kriterier end rod- og kvotientkriteriet). Tallet r kaldes potensrækkens **konvergenstal** eller **konvergensradius**. Konvergensforholdene kan åbenbart illustreres ved skitsen:



Kompleks variabel x. Hvis x er en kompleks variabel $x_1 + ix_2$, kan konvergensforholdene illustreres ved en "konvergenscirkel" med centrum i 0 og "konvergensradius" r. Inden for denne cirkel er rækken absolut konvergent og udenfor divergent.

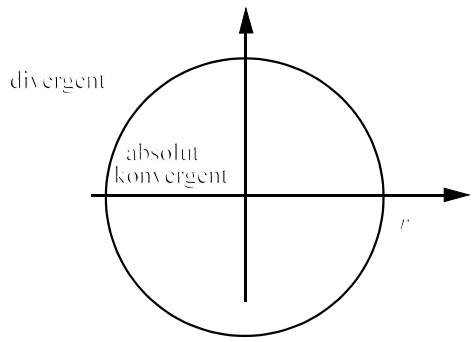


Fig. 20.5. En kompleks potensrække er konvergent inden for en cirkel.

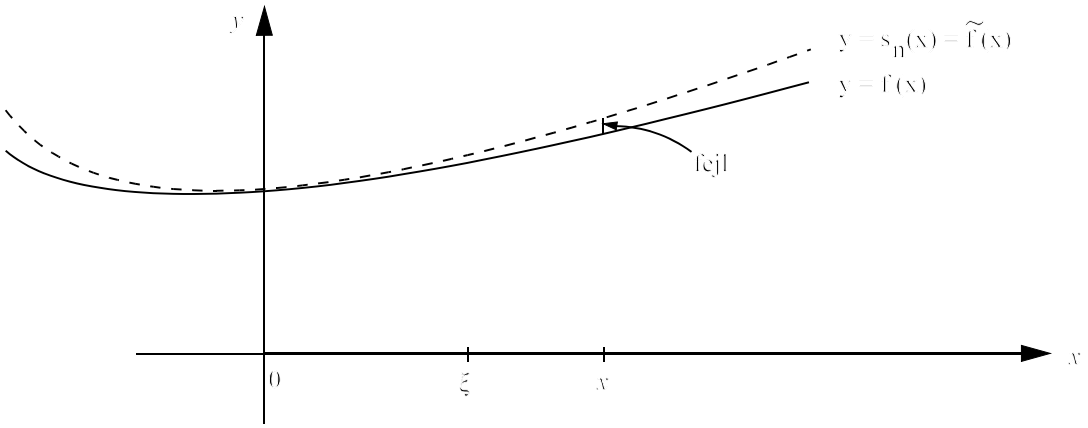
Taylorrækker. Kendte potensrækker. Som det er bekendt fra bind 1, kan mange funktioner approksimeres glimrende ved deres n'te Taylorpolynomium $s_n(x) = \tilde{f}(x)$ med udviklingspunkt $x_0 = 0$:

$$s_n(x) = \tilde{f}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n .$$

Og fejlen kan skrives

$$f(x) - s_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

hvor ξ ligger i det åbne interval mellem 0 og x:



For $n \to \infty$ går Taylorpolynomiet over i en Taylorrække:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots .$$

Ifølge definitionen på konvergens er denne potensrække konvergent med summen $f(x)$ hvis og kun hvis $s_n(x) \to f(x)$ for $n \to \infty$ dvs. hvis restleddet $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \to 0$ for $n \to \infty$. På denne måde kan man for mange funktioner danne en potensrække og finde dens konvergensradius. I oversigter over kendte rækker, f.eks. i appendix 20.2, optræder derfor ret mange potensrækker, og som regel er konvergensradius r og sumfunktionen $f(x) = f(x$ også angivet.

Entydighed. Man kan vise, at en given funktion højst kan fremstilles ved én potensrække af typen $\Sigma c_n x^n$. (Derudover kan funktionen eventuelt også fremstilles ved potensrækker af typen $\Sigma a_n \cdot (x-x_0)^n$, hvor $x_0 \neq 0$. Disse typer vil vi dog ikke omtale særskilt, da de ved substitutionen $y = x - x_0$ går over i $\Sigma a_n y^n$.)

Substitution. Kendte potensrækker kan nemt omskrives til nye potensrækker ved hjælp af en substitution af typen $x = k \cdot t^p$. Eksempelvis kan potensrækken for $\ln(1+2t^3)$ findes ved at substituere $x = 2t^3$ i den følgende kendte potensrække (fra oversigten i appendix):

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad (|x| < 1) \ .$$

Herved fås

$$\ln(1+2t^3) = \frac{2t^3}{1} - \frac{(2t^3)^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(2t^3)^n}{n} + \ldots \qquad (|2t^3| < 1) \ ,$$

dvs.

$$\ln(1+2t^3) = \frac{2}{1}t^3 - \frac{2^2}{2}t^6 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{2^n}{n}t^{3n} + \ldots \qquad \left(|t| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \ .$$

Hermed har vi fundet potensrækken for $\ln(1+2t^3$ og fundet konvergensradius til $' = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Multiplikation med x^p. Ud fra en given potensrække

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \qquad (|x| < r)$$

kan man ved multplikation med x^p (p hel) danne en ny potensrække

$$f(x) \cdot x^p = c_0 x^p + c_1 x^{1+p} + c_2 x^{2+p} + \ldots + c_n x^{n+p} + \ldots \qquad (|x| < r) \ .$$

Konvergensradius r er uændret, fordi multiplikation af alle led med samme tal (som nævnt i afsnit 20.2) hverken kan ændre en konvergent række til en divergent eller omvendt.

Differentiation og integration af potensrækker. Potensrækker kan for $|x| < r$ benyttes i beregninger på lignende måde som polynomier. Specielt gælder følgende sætning:

SÆTNING 20.12 *(differentiation og integration af potensrækker). Lad en funktion* $s(x)$ *være givet ved en potensrække*

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n + \ldots \quad , \qquad |x| < r$$

med konvergensradius $r > 0$.

For $|x| < r$ *er* $s(x)$ *da en vilkårlig ofte differentiabel og integrabel funktion. De afledede funktioner* $s'(x),\ s''(x),\ \ldots$ *og integrerede funktioner* $\int s(x)\,dx,\ \int\left(\int s(x)\,dx\right)dx,\ \ldots$ *er givet ved de tilsvarende ledvis differentierede og integrerede potensrækker, som* ***alle*** *får konvergensradius* r:

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad , \qquad |x| < r$$

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad , \qquad |x| < r$$

$$s''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \quad , \qquad |x| < r$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$\int s(x)\,dx = c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} \quad , \qquad |x| < r$$

$$\int\left(\int s(x)\,dx\right)dx = c_{-2} + c_{-1} x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(n+2)(n+1)} x^{n+2} \quad , \qquad |x| < r$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

hvor $c_{-1},\ c_{-2},\ \ldots$ *er arbitrære konstanter.*

Formlerne i sætningen kan skrives mere udførligt:

$$s(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots + c_n x^n + \ldots \quad , \ |x| < r$$

$$s'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots + n c_n x^{n-1} + \ldots \quad , \ |x| < r$$

$$s''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2 c_3 x + 4\cdot 3 c_4 x^2 + \ldots + n(n-1) c_n x^{n-2} + \ldots \quad , \ |x| < r$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$\int s(x)\,dx = c_{-1} + \frac{c_0}{1} x + \frac{c_1}{2} x^2 + \frac{c_2}{3} x^3 + \ldots + \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} + \ldots \quad , \ |x| < r$$

$$\int\left(\int s(x)\,dx\right)dx = c_{-2} + c_{-1} x + \frac{c_0}{2\cdot 1} x^2 + \frac{c_1}{3\cdot 2} x^3 + \ldots + \frac{c_n}{(n+2)(n+1)} x^{n+2} + \ldots , \ |x| < r$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

Bevis for sætning 20.12. For kortheds skyld nøjes vi med at vise, at konvergensradius hverken ændrer sig ved ledvis differentiation eller integration af en potensrække.

1) Først viser vi, at den ledvis differentierede række $\Sigma n c_n x^{n-1}$ er absolut konvergent for $|x|<r$. Lad x være et reelt tal, som opfylder uligheden $x|<r$ Der eksisterer da et tal x_1, som opfylder uligheden $|x|<|x_1|<r$, hvilket medfører, at $\Sigma c_n x_1^n$ er konvergent. Så må (jævnfør n'te-ledskriteriet) $c_n x_1^n \to 0$ for $n \to \infty$, dvs. for tilstrækkelig store værdier af n gælder $|c_n x_1^n| < 1$. Anvendes nu rodkriteriet på den ledvis differentierede række $\Sigma n c_n x_1^{n-1}$, fås

$$\sqrt[n-1]{|n c_n x^{n-1}|} = \sqrt[n-1]{n|c_n| \cdot |x|^{n-1}}$$

$$\sqrt[n-1]{\frac{|x|^{n-1}}{|x_1|^{n-1}} \cdot \frac{n}{|x_1|}|c_n| \cdot |x_1|^n} = \frac{|x|}{|x_1|} \sqrt[n-1]{\frac{n}{|x_1|}|c_n| \cdot |x_1|^n}$$

$$\le \frac{|x|}{|x_1|} \sqrt[n-1]{\frac{n}{|x_1|}} = \frac{|x|}{|x_1|} \left(\frac{n}{|x_1|}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$= \frac{|x|}{|x_1|} e^{\frac{\ln n - \ln|x_1|}{n-1}} \underset{(n \to \infty)}{\longrightarrow} \frac{|x|}{|x_1|} e^0 = \frac{|x|}{|x_1|} < 1,$$

dvs. den ledvis differentierede række er absolut konvergent for $|x|<r$.

2) Dernæst viser vi, at den ledvis integrerede række $_{-1} + \Sigma \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$ er absolut konvergent for $x|<r$ Dette kan vises ved at sammenligne det almindelige led $\frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$ med det tilsvarende led $c_n x^n$ i den oprindelige række. For en given værdi af x gælder nemlig for $n+1>|x|$, at

$$0 \le \left|\frac{c_n}{n+1} x^{n+1}\right| \le |c_n x^n|,$$

og af sætning 20.5 følger nu, at $\Sigma\left|\frac{c_n}{n+1} x^{n+1}\right|$ er konvergent for $|x|<r$, fordi $\Sigma|c_n x^n|$ er det.

3) Vi har nu vist, at konvergensradius hverken bliver mindre ved ledvis differentiation eller integration. Heraf ses imidlertid indirekte, at konvergensradius heller ikke kan blive større, idet integration efterfulgt af differentiation skal give den oprindelige række, altså uændret konvergensradius.

Eksempel 20.8. Integration ved rækkeudvikling.

Find en potensrække for funktionen $y(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,dt$ (integralet findes ikke i integraltabeller).

LØSNING:

En potensrække for $\cos x$ er

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots ,$$

som gælder for alle $|x| < \infty$.

Heri substitueres $x = t^2$, så vi får en potensrække for $\cos(t^2)$:

$$\cos(t^2) = 1 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{12}}{6!} + \frac{t^{16}}{8!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{t^{4n}}{(2n)!} + \ldots ,$$

som må gælde for alle $|t^2| < \infty$, dvs. for alle $t \in]-\infty;\ \infty[$.

Ved ledvis integration af denne potensrække fås en potensrække, som ifølge sætning 20.12 har samme konvergenstal $r = \infty$ og har summen $\int_0^x \cos(t^2)\,dt$:

$$y(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,dt$$

$$= \int_0^x \left(1 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^8}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{t^{4n}}{(2n)!} + \ldots\right) dt$$

$$= \int_0^x 1\,dt - \int_0^x \frac{t^4}{2!}\,dt + \int_0^x \frac{t^8}{4!}\,dt - \ldots + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{4n}}{(2n)!}\,dt + \ldots$$

$$= [t]_0^x - \left[\frac{t^5}{5\cdot 2!}\right]_0^x + \left[\frac{t^9}{9\cdot 4!}\right]_0^x - \ldots + (-1)^n \left[\frac{t^{4n+1}}{(4n+1)\cdot(2n)!}\right]_0^x + \ldots$$

$$= \underline{\underline{x - \frac{x^5}{5\cdot 2!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)\cdot(2n)!} + \ldots}}$$

$x \in]-\infty;\ \infty[$.

Beregningerne ovenfor kan skrives mere kompakt:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{for} \qquad |x| < \infty ,$$

$$\cos(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(t^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{4n}}{(2n)!} ,$$

$$y(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{4n}}{(2n)!}\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n \cdot \frac{t^{4n}}{(2n)!}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left[\frac{t^{4n+1}}{4n+1} \right]_0^x$$

$$= \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)\cdot(2n)!}}} \quad , \qquad r = \infty \quad .$$

Vi har hermed fundet $y(x)$ eksakt i form af en potensrække, som vil være et godt udgangspunkt for videre beregninger sammen med andre funktioner. ---- For $|x| \lesssim 1$ kan talværdier for $y(x)$ udregnes meget nøjagtigt på computer ved blot at medtage de første få led af rækken (med 5 led bliver $|\text{fejlen}| \lesssim 10^{-8}$; metoder til fejlvurdering omtales senere i dette kapitel).

Løsning af differentialligning ved hjælp af potensrække

Vi betragter en differentialligning af formen

$$p_k(t)\frac{d^k y}{dt^k} + p_{k-1}(t)\frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \ldots + p_1(t)\frac{dy}{dt} + p_0(t)\,y = h(t) ,$$

hvor $p_k, p_{k-1}, \ldots, p_0$ betegner polynomier, og funktionen h kan fremstilles ved en potensrække $\Sigma h_n t^n$. Man vil under visse meget generelle betingelser[1] kunne finde løsninger til en sådan differentialligning ved at gætte på løsninger, der indeholder potensrækker. Fremgangsmåden fremgår af det følgende eksempel.

---

[1] Lad $p_k(0) \neq 0$, og lad $\Sigma h_n t^n$ have konvergensradius $\rho > 0$. Man kan da vise, at der svarende til givne begyndelsesværdier $y(0), y'(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$ eksisterer netop én potensrække (med konvergensradius $r > 0$), som er løsning til differentialligningen. Løsningen er gyldig for $|t| < \min\{\rho, r\}$.

Eksempel 20.9. Potensrækkeløsning til differentialligning.

Lad der være givet differentialligningen

$$(1-t^2)\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt} + 2y = 2t, \qquad y(0)=0,\ y'(0)=1,$$

og lad $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ være en potensrækkeløsning til denne differentialligning.

1) Angiv en rekursionsformel for c_n.

2) Angiv $\tilde{y}(t) = \sum_{n=0}^{6} c_n t^n$, dvs. begyndelsen af rækken op til og med $n=6$.

3) Angiv hele rækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ eksplicit (dvs. sådan at der i udtrykket for rækken kun optræder *n* og *t*).

4) Angiv konvergensradius for den fundne potensrækkeløsning.

LØSNING:

1) Der gættes på en potensrækkeløsning, som antages at have konvergensradius $r>0$ (at $r>0$, eftervises i spørgsmål 4).

Rækken differentieres 2 gange:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \quad , \qquad |t|<r,$$

$$y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot c_n t^{n-1} \quad , \qquad |t|<r,$$

$$y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} \quad , \qquad |t|<r.$$

Ved indsættelse i differentialligningen fås:

$$(1-t^2)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} - 2t\sum_{n=0}^{\infty} n\,c_n t^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 2t$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} - t^2\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2n\,c_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n t^n = 2t$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(n(n-1)c_n + 2nc_n - 2c_n\right)t^n = 2t.$$

Da vi ønsker, at alle summer skal være af typen $\sum_{n=0}^{\infty} (\sim) t^n$, foretages følgende omskrivning:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} \qquad \text{(da } n(n-1)=0 \text{ for } n=0 \text{ og } n=1\text{)}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} (p+2)(p+1)c_{p+2} t^p \qquad \text{(substitueret } n=p+2\text{)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} t^n \qquad \text{(substitueret } p=n\text{)}.$$

Vi har derfor nu:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}t^n - \sum_{n=0}^{\infty}\big(n(n-1)c_n + 2nc_n - 2c_n\big)t^n = 2t$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\big[(n+2)(n+1)c_{n+2} - \big(n(n-1) + 2n - 2\big)c_n\big]t^n = 2t \ . \qquad (1)$$

Denne ligning skal gælde for alle t, hvor $|t| < r$. Derfor må udtrykket i den kantede parentes være 0 for alle $n \neq 1$, og være 2 for $n = 1$.

$n \neq 1$: $\quad (n+2)(n+1)c_{n+2} - \big(n(n-1) + 2n - 2\big)c_n = 0$

$$\Leftrightarrow \quad c_{n+2} = \frac{n(n-1) + 2(n-1)}{(n+2)(n+1)}\, c_n$$

$$\Leftrightarrow \quad c_{n+2} = \frac{n-1}{n+1}\, c_n \ .$$

Rekursionsformlen er følgelig $\underline{\underline{c_{n+2} = \frac{n-1}{n+1}\, c_n}}$ for $n \neq 1$.

2) a) Først findes c_0 og c_1 ved hjælp af begyndelsesbetingelsen.
Indsættes $y(0) = 0$ i

$$y(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \ldots ,$$

fås $\underline{c_0 = 0}$.

Indsættes $y'(0) = 1$ i

$$y'(t) = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \ldots ,$$

fås $\underline{c_1 = 1}$.

b) Ved at indsætte $n = 0$ i rekursionsformlen findes

$$c_2 = \frac{-1}{1}\, c_0 = \underline{0} \ .$$

c) Rekursionsformlen gælder ikke for $n = 1$, men da den kantede parentes i ligning (1) skal være 2 for $n = 1$, fås

$$(1+2)(1+1)c_3 - \big(1\cdot(1-1) + 2\cdot 1 - 2\big)c_1 = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \underline{c_3 = \frac{1}{3}} \ .$$

d) De resterende led kan nu alle findes af rekursionsformlen:

$$c_4 = \frac{1}{3}c_2 = 0$$

$$c_5 = \frac{2}{4}c_3 = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$c_6 = \frac{3}{5}c_4 = 0$$

$$\underline{\underline{\tilde{y}(t) = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{6}t^5\,.}}$$

3) I det følgende angives to metoder til at finde c_n udtrykt alene ved n. Det vil være praktisk, at rekursionsformlen har c_n på venstre side (i stedet for c_{n+2}); dette opnås ved at erstatte n med $n-2$, så rekursionsformlen får udseendet

$$c_n = \frac{n-3}{n-1}c_{n-2}\,, \qquad n \neq 3\,. \tag{2}$$

Eksplicit formel for c_n – Metode 1: Fra små n mod store n. Vi har fundet

$c_0 = c_2 = c_4 = c_6 = 0$ og af rekursionsformlen (2) ses da, at $c_8 = c_{10} = \ldots = 0$ dvs. $c_n = 0$ for alle lige værdier af n.

For n ulige fås

$c_3 = \frac{1}{3}$ (fås af spørgsmål 2c)

$c_5 = \frac{2}{4}c_3 = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ (fås af rekursionsformlen)

$c_7 = \frac{4}{6}c_5 = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ (- - -)

$c_9 = \frac{6}{8}c_7 = \frac{6}{8}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ (- - -).

Vi gætter derfor på, at for n ulige og $n \geq 3$ er

$$c_n = \frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{n-5}{n-3}\cdot\frac{n-7}{n-5}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} \quad\Leftrightarrow\quad c_n = \frac{2}{n-1}\cdot\frac{1}{3}\,.$$

Det kontrolleres, at den sidste formel $c_n = \frac{2}{n-1}\cdot\frac{1}{3}$ giver $c_3 = \frac{1}{3}$, $c_5 = \frac{1}{6}$, $c_7 =$ og $c_9 = \frac{1}{12}$. Faktisk bør man nu indsætte $c_n = \frac{2}{n-1}\cdot\frac{1}{3}$ og $c_{n-2} = \frac{2}{(n-2)-1}\cdot\frac{1}{3}$

i rekursionsformlen (2), for at se om denne er opfyldt, men det undlades ofte, hvis man føler sig sikker.

Vi har hermed bestemt alle c_n:

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n-1} \cdot \dfrac{1}{3} & \text{for} \quad n \in \{3, 5, 7, 9, \ldots\} \\ 0 & \text{for} \quad n \in \{0, 2, 4, 6, \ldots\} \\ 1 & \text{for} \quad n = 1 \ . \end{cases}$$

Eksplicit formel for c_n – Metode 2: Fra store n mod små n. Vi forestiller os, at n er stor. I rekursionsformlen (2)

$$c_n = \frac{n-3}{n-1} c_{n-2} \qquad , \qquad n \neq 3 \tag{2}$$

er c_n udtrykt ved c_{n-2}, som ikke kendes. Ideen er nu, at udtrykke c_{n-2} ved c_{n-4}, udtrykke c_{n-4} ved c_{n-6} osv. indtil alt er udtrykt ved f.eks. c_3 og c_2, som allerede kendes. Først erstattes n med n-2 i formel (2), så vi får $c_{n-2} = \dfrac{n-5}{n-3} c_{n-4}$. Indsættes c_{n-2} herfra i formel (2), fås

$$c_n = \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-5}{n-3} c_{n-4} . \tag{3}$$

Analogt fås $c_{n-4} = \dfrac{n-7}{n-5} c_{n-6}$, som ved indsættelse i ligning (3) giver

$$c_n = \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-5}{n-3} \cdot \frac{n-7}{n-5} c_{n-6} .$$

Gentages denne proces, fås til sidst

$$c_n = \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-5}{n-3} \cdot \frac{n-7}{n-5} \cdot \frac{n-9}{n-7} \cdot \ldots \begin{cases} \cdot \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{2}{4} c_3 = \dfrac{2}{n-1} c_3 = \dfrac{2}{n-1} \dfrac{1}{3} & \text{for } n \text{ ulige} \\ \cdot \dfrac{5}{7} \cdot \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{3} c_2 = 0 & \text{for } n \text{ lige} . \end{cases}$$

Dermed er alle c_n bestemt:

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n-1} \cdot \dfrac{1}{3} & \text{for} \quad n \in \{3, 5, 7, 9, \ldots\} \\ 0 & \text{for} \quad n \in \{0, 2, 4, 6, \ldots\} \\ 1 & \text{for} \quad n = 1 \ . \end{cases}$$

Formel for rækken. På grundlag af de eksplicitte udtryk for c_n (metode 1 eller metode 2) kan vi nu opskrive potensrækkeløsningen:

$$y(t) = t + \sum_{n=3,\, n \text{ ulige}}^{\infty} \frac{2}{3(n-1)} t^n .$$

Da n er ulige, kan vi erstatte n med $2p+1$:

$$y(t) = t + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{3(2p+1-1)} t^{2p+1} = \underline{\underline{t + \frac{1}{3}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} t^{2p+1}}} . \qquad (4)$$

4) **Konvergensradius – Metode 1.** Med henblik på at benytte kvotientkriteriet på rækken (4) finder vi

$$\left|\frac{led_{p+1}}{led_p}\right| = \left|\frac{\frac{1}{3}\frac{t^{2(p+1)+1}}{p+1}}{\frac{1}{3}\frac{1}{p}t^{2p+1}}\right| = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{p+1}}{\frac{1}{3}\frac{1}{p}}\left|\frac{t^{2p+3}}{t^{2p+1}}\right| = \frac{p}{p+1}t^2 \to t^2 \quad \text{for} \quad p \to \infty .$$

Da $t^2 < 1 \iff |t| < 1$, følger af kvotientkriteriet, at konvergensradius $\underline{\underline{r = 1}}$.

Konvergensradius – Metode 2. Rekursionsformlen (2) giver

$$\left|\frac{\text{led}}{\text{foregående led}}\right| = \left|\frac{c_n t^n}{c_{n-2} t^{n-2}}\right| = \frac{n-3}{n-1} t^2 \to t^2 \quad \text{for} \quad n \to \infty ,$$

dvs. kvotientkriteriet giver som under metode 1, at $\underline{\underline{r = 1}}$.

Konvergensradius – Metode 3. Normeres differentialligningen, fås

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2t}{1-t^2}\frac{dy}{dt} + \frac{2}{1-t^2}y = \frac{2t}{1-t^2} .$$

Man kan nu vise[2], at hvis alle de i differentialligningen optrædende funktioner af t: $-\frac{2t}{1-t^2}$ $\frac{2}{1-t^2}$ og $\frac{2t}{1-t^2}$ kan skrives som potensrækker med konvergensradier henholdsvis r_1, r_2 og r_3, så vil den fundne potensrækkeløsning $y(t)$ have en konvergensradius, der er større end eller lig med den mindste af de tre radier r_1, r_2 og r_3. Af oversigten over kendte rækker kan r_1, r_2 og r_3 ofte findes. Vi finder således i appendix 20.2 rækken

$$(1+x)^{\alpha} = \binom{\alpha}{0} 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + \ldots , \qquad |x| < 1 .$$

Indsættes $\alpha = -1$ og $= -t^2$ fås en potensrække for $\frac{1}{1-t^2}$ med konvergensradius bestemt ved $|-t^2| < 1 \iff |t| < 1$. Da en potensrækkes konvergensradius ikke ændrer sig ved multiplikation med -2*t*, 2 eller 2*t*, vil de tre optrædende funktioner $\cdot \frac{2t}{1-t^2}$ $\frac{2}{1-t^2}$ og $\frac{2t}{1-t}$ have $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. Vi har følgelig, at den fundne løsning har konvergensradius $\underline{\underline{r \geq 1}}$.

[2] f.eks. ved hjælp af sætningen i ref. 3, side 163.

20.5 TILNÆRMET BEREGNING AF EN KONVERGENT RÆKKES SUM

Metode og metodefejl

At en række Σa_n er konvergent med summen s, betyder, at den n'te delsum $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ går mod s for $n \to \infty$. En tilnærmelse $\tilde{s}$ til summen s kan derfor findes med så lille en numerisk fejl ε, som det ønskes, ved blot at medtage tilstrækkelig mange led i en delsum $s_N = a_0 + a_1 + \ldots + a_N$. Fejlen ved denne metode bliver

$$e_{\text{metode}} = s - s_N = a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \ldots = \text{restrækkens sum},$$

hvor bogstavet e betyder "error" (latin, engelsk, m.fl.).

I praksis bør N vælges så stor, at **metodefejlen bliver numerisk mindre end cirka** $\frac{\varepsilon}{2}$, hvorved der også bliver et passende spillerum for de andre fejl, som vil komme fra afrundinger under udregningen og fra slutafrunding af resultatet. Valget af N kan foretages ved hjælp af "fejlkriterier", der udbygger nogle af de tidligere omtalte konvergenskriterier. Først omtales og anvendes nogle få af de vigtigste fejlkriterier, og senere sammenfattes alle fejlkriterier overskueligt i én sætning, som derpå bevises.

Rod-fejlkriteriet. Lad $\sqrt{|a_n|} \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} q < 1$ Vi ved da, at for store n-værdier vil $\sqrt[n]{|a_n|}$ ligge tæt ved q, dvs. der må eksistere et tal $Q<1$, således at $\sqrt[n]{|a_n|} \le Q$ for store n-værdier ($n>N$). Vi har da, at

$$|a_{N+1}| \le Q^{N+1}, \quad |a_{N+2}| \le Q^{N+2}, \quad \ldots$$

og dermed

$$|a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \ldots \le Q^{N+1} + Q^{N+2} + Q^{N+3} + \ldots = \frac{Q^{N+1}}{1-Q}.$$

Det sidste følger af sumformlen for en kvotientrække. Der gælder derfor

$$|e_{\text{metode}}| \le \frac{Q^{N+1}}{1-Q},$$

hvor man kan sætte

$$Q = \begin{cases} q & \text{når } \sqrt[n]{|a_n|} \text{ vokser med } n \text{ for } n \in \{N+1, N+2, \ldots\} \\ \sqrt[N+1]{|a_{N+1}|} & \text{når } \sqrt[n]{|a_n|} \text{ aftager med } n \text{ for } n \in \{N+1, N+2, \ldots\}. \end{cases}$$

-- Eksempelvis fås for rækken $\sum \frac{1}{n^n}$ at $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{n}$ aftager mod $0 < 1$ for $n \to \infty$. Vi kan derfor vælge $Q = \sqrt[N+1]{|a_{N+1}|} = \sqrt[N+1]{\frac{1}{(N+1)^{N+1}}} = \frac{1}{N+1}$ og har så fejlvurderingen

$$|e_{\text{metode}}| \le \frac{\left(\frac{1}{N+1}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{N+1}} = \frac{1}{N\cdot(N+1)^N} .$$

Vi skal altså vælge N, sådan at $\frac{1}{N\cdot(N+1)^N} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Kvotient-fejlkriteriet. Lad $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} q < 1$ Der må så findes et tal $Q < 1$, således at $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le Q$ for store n-værdier ($n > N$). Vi har da, at

$$|a_{N+2}| \le Q|a_{N+1}|, \quad |a_{N+3}| \le Q|a_{N+2}| \le Q^2|a_{N+1}|, \quad |a_{N+4}| \le Q^3|a_{N+1}|, \ldots$$

og dermed

$$a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \ldots \le |a_{N+1}| + Q|a_{N+1}| + Q^2|a_{N+1}| + \ldots = |a_{N+1}|\frac{1}{1-Q}$$

Der gælder derfor

$$|e_{\text{metode}}| \le \frac{|a_{N+1}|}{1-Q} ,$$

hvor man kan sætte

$$Q = \begin{cases} q & \text{når } \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \text{ vokser med } n \text{ for } n \in \{N+1, N+2, \ldots\} \\ \left|\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\right| & \text{når } \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \text{ aftager med } n \text{ for } n \in \{N+1, N+2, \ldots\} . \end{cases}$$

-- Eksempelvis fås for rækken $\sum \frac{1}{n\cdot 2^n}$, at $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ vokser mod $\frac{1}{2} < 1$ for $n \to \infty$. Vi kan derfor vælge $Q = \frac{1}{2}$ og har så fejlvurderingen

$$|e_{\text{metode}}| \le \frac{\frac{1}{(N+1)\cdot 2^{N+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(N+1)\cdot 2^N} .$$

Vi skal altså vælge N, sådan at $\frac{1}{(N+1)\cdot 2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alternerende-række-fejlkriteriet. Lad restrækken være

$$u_{N+1} - u_{N+2} + u_{N+3} - u_{N+4} + \ldots$$

eller

$$-u_{N+1} + u_{N+2} - u_{N+3} + u_{N+4} - \ldots ,$$

hvor $u_{N+1} > u_{N+2} > u_{N+3} > \ldots > 0$ og $u_n \to 0$ for $n \to \infty$.

Så gælder

$$|e_{\text{metode}}| \le u_{N+1} .$$

--Eksempelvis fås for den alternerende række $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \cdot \ln n}$, at $u_n = \frac{1}{n^2 \cdot \ln n}$ aftager mod 0 for $n \to \infty$.

Vi har derfor

$$|e_{\text{metode}}| \le \frac{1}{(N+1)^2 \cdot \ln(N+1)} .$$

Vi skal altså vælge N, sådan at $\frac{1}{(N+1)^2 \cdot \ln(N+1)} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Udregning og afrundingsfejl

Efter at N er valgt, beregnes delsummen $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_N$ ved hjælp af et passende regnemiddel, f.eks. en lommeregner eller en computer. Den samlede afrundingsfejl $e_{\text{afrund}} = s_N - s_{N,\text{beregnet}}$, der opbygges af regnemidlet ved additionerne, kan forventes at være begrænset ved uligheden

$$|e_{\text{afrund}}| \le (\text{antal led i delsum } s_N)^2 \cdot 10^{-B+1} \cdot \max|a_i| \quad [1]$$

idet B er antallet af betydende cifre i regnemidlet, og $\max|a_i|$ betegner det største af tallene

$$|a_0|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N| .$$

Nærmere om afrundingsfejl. Hvis regnemidlet i alle sine beregninger medtager B betydende cifre (omregnet til 10-talsystemet), vil hver regneoperation + - · / kunne give et resultat, der fremtræder, som om det fejlagtigt var ganget med et tal af typen $1+\delta$. Tallet δ er den "relative fejl", som er begrænset ved uligheden $|\delta| < D$, hvor $D = G \cdot 10^{-B}$, idet G betegner grundtallet i regnemidlets talsystem. Sædvanligvis er G = 2, 10 eller 16, så ved at sætte G = 16 tages højde for praktisk taget alle regnemidler. Eksempelvis fås for et regnemiddel med 11 betydende cifre i 10-talsystemet:

---

[1] Hertil burde egentlig adderes et skøn for fejlene på de N+1 enkelte led, f.eks. i alt $(N+1) \cdot \max|a_i - a_{i,\text{beregnet}}|$. Men da denne størrelse kun vokser proportionalt med N+1, kan den som regel negligeres for regnemidler af god præcision (f.eks. med 15 betydende cifre).

0.900 000 000 19	0.500 000 000 12 × 2.000 000 000 1
+ 0.100 000 000 19	50 000 000 012
1.000 000 000 3	1.000 000 000 240 000 000 000
	1.000 000 000 2

Ved summationen $s_N = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_N$ fås tilsvarende

$$|e_{\text{afrund}}| = |s_{N,\text{beregnet}} - s_N|$$

$$= \left|[\ldots[[(a_0+a_1)(1+\delta_1)+a_2](1+\delta_2)+a_3](1+\delta_3)+\ldots+a_N](1+\delta_N) - s_N\right|$$

$$\approx \left|[\ldots[[(a_0+a_1)e^{\delta_1}+a_2]e^{\delta_2}+a_3]e^{\delta_3}+\ldots+a_N]e^{\delta_N} - s_N\right|$$

$$= \left|(a_0+a_1)e^{\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_N} + a_2 e^{\delta_2+\delta_3+\ldots+\delta_N} + \ldots + a_N e^{\delta_N} - s_N\right|$$

$$\approx \left|(a_0+a_1)(1+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_N) + a_2(1+\delta_2+\delta_3+\ldots+\delta_N) + \ldots + a_N(1+\delta_N) - s_N\right|$$

$$= \left|(a_0+a_1)(\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_N) + a_2(\delta_2+\delta_3+\ldots+\delta_N) + \ldots + a_N\delta_N\right|$$

$$\le |a_0+a_1|ND + |a_2|(N-1)D + \ldots + |a_N|D$$

$$\le \max|a_i| \cdot D \cdot \left[N+N+(N-1)+(N-2)+\ldots+2+1\right]$$

$$= \max|a_i| \cdot D \cdot \frac{N(N+3)}{2}$$

$$= 8N(N+3)\,10^{-B} \cdot \max|a_i|$$

$$\le \underline{\underline{(N+1)^2\,10^{-B+1} \cdot \max|a_i|}}.$$

Slutafrunding og slutafrundingsfejl

Til sidst afrundes regnemidlets slutresultat $s_{N,\text{beregnet}}$ til et passende antal cifre, hvorved der fås en ny værdi $\tilde{s}$. Den herved begåede fejl

$$e_{\text{slutafrund}} = s_{N,\text{beregnet}} - \tilde{s}$$

kan umiddelbart afgrænses ved en ulighed, se eksempel 20.10.

Resultat og samlet fejl

Resultatet $\tilde{s}$ har nu en samlet fejl:

$$e_{\text{samlet}} = e_{\text{metode}} + e_{\text{afrund}} + e_{\text{slutafrund}}$$

med begrænsningen

$$|e_{\text{samlet}}| \le |e_{\text{metode}}| + |e_{\text{afrund}}| + |e_{\text{slutafrund}}| .$$

Eksempel 20.10. Tilnærmet beregning af en konvergent rækkes sum.

Beregn for den konvergente række $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$ en tilnærmelse $\tilde{s}$ til summen s, således at $|s - \tilde{s}| < \varepsilon$, hvor $\varepsilon = 0.02$.

LØSNING:

Metode og metodefejl. Er rækken Σa_n konvergent, vil en delsum $s_N = a_0 + a_1 + \ldots + a_N$ tilnærme rækkens rigtige sum s med en numerisk fejl $< \frac{\varepsilon}{2}$, når blot N gøres tilstrækkelig stor (ifølge definitionen på konvergens af en række). At den foreliggende række er konvergent, kan vises ved hjælp af kvotientkriteriet:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n+1} = \frac{n+2}{3(n+1)} = \frac{1+\frac{2}{n}}{3\left(1+\frac{1}{n}\right)} \to \frac{1+0}{3(1+0)} = \frac{1}{3} < 1 \text{ for } n \to \infty.$$

Det tilhørende fejlkriterium sætter grænser for størrelsen af metodefejlen $e_{\text{metode}} = s - s_N = a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots$ (i vores metode opstår metodefejlen altid ved, at restrækken bortkastes). Idet

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) = \frac{d}{dn}\left(\frac{n+2}{3(n+1)}\right) = \frac{3(n+1)-(n+2)3}{9(n+1)^2} = \frac{-1}{3(n+1)^2} < 0 ,$$

er $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ en aftagende funktion af n for alle $n \ge N+1$.

Vi kan derfor vælge $Q = \left|\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\right| = \frac{N+3}{3(N+2)}$, og har så fejlvurderingen

$$|e_{\text{metode}}| \le \frac{|a_{N+1}|}{1-Q} = \frac{N+2}{3^{N+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{N+3}{3(N+2)}} \le \begin{cases} 0.041 & (N=4) \\ 0.016 & (N=5) \\ 0.0059 & (N=6) . \end{cases}$$

Vælges N=6, har vi altså $|e_{\text{metode}}| \le 0.0059 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Udregning og afrundingsfejl. Delsummen s_N beregnes nu for N=6 ved hjælp af et passende regnemiddel (lommeregner eller computer):

$$s_N = \frac{1}{3^0} + \frac{2}{3^1} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \frac{6}{3^5} + \frac{7}{3^6} \approx 2.2441700957 \ .$$

Det er her antaget, at det benyttede regnemiddel medtager $B = 11$ betydende cifre i alle sine beregninger. Den samlede afrundingsfejl fra regnemidlet under beregningen af delsummen s_N med N+1 led, kan da forventes at være begrænset ved uligheden

$$|e_{\text{afrund}}| \le (N+1)^2 10^{-B+1} \cdot \max|a_i| = (6+1)^2 10^{-11+1} \cdot 1 = 7^2 \cdot 10^{-10} = 4.9 \cdot 10^{-9} \ .$$

Slutafrunding og slutafrundingsfejl. Til sidst afrundes regnemidlets slutresultat til et passende antal betydende cifre, f.eks. til $\tilde{s} = 2.24$, og den herved begåede fejl $e_{\text{slutafrund}}$ vurderes:

$$|e_{\text{slutafrund}}| = 0.0041700957 < 0.0042 \ .$$

Resultat og samlet fejl. Den samlede fejl e_{samlet} er nu begrænset ved uligheden

$$\begin{aligned} |e_{\text{samlet}}| &= |e_{\text{metode}} + e_{\text{afrund}} + e_{\text{slutafrund}}| \\ &\le |e_{\text{metode}}| + |e_{\text{afrund}}| + |e_{\text{slutafrund}}| \\ &\le 0.0059 + 4.9 \cdot 10^{-9} + 0.0042 \le 0.0102 < 0.02 \ . \end{aligned}$$

Det har interesse at angive både resultatet 2.24 og den kendte begrænsning 0.02 på den samlede fejl. Det kan gøres ved at skrive $\underline{\underline{s = 2.24 \pm 0.02 \ .}}$

OPGAVER

Opgave 20.1 *(konvergens, sum)*

Undersøg, i hvert af de følgende tilfælde, om rækken er konvergent, og find i så fald summen.

1^T) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \ldots + (-1)^{n+1} n + \ldots$

2^T) $\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \ldots$

3) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \ldots$

4) $1 - 1 + 2 - 2 + 3 - 3 + 4 - 4 + \ldots$

5) $(1 - 1) + (2 - 2) + (3 - 3) + (4 - 4) + \ldots$

6) $(1 + 1) - 2 + (2 + 1) - 3 + (3 + 1) - 4 + (4 + 1) - 5 + \ldots$

7) $1 - 1 + 2 - 1 - 1 + 3 - 1 - 1 - 1 + 4 - 1 - 1 - 1 - 1 + \ldots$

8) $1 - 1 + (2 - 1 - 1) + (3 - 1 - 1 - 1) + (4 - 1 - 1 - 1 - 1) + \ldots$

9) $\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + \ldots + \ln\frac{n}{n+1} + \ldots$

10) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi)$.

Opgave 20.2 *(kvotientrække)*

Undersøg, i hvert af de følgende tilfælde, om rækken er konvergent, og find i så fald summen.

1^T) $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \ldots + \frac{2}{3^n} + \ldots$

2^T) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \ldots + \frac{(-1)^n}{2^n} + \ldots$

3^T) $2 + \frac{7}{3^4} + \frac{7}{3^5} + \frac{7}{3^6} + \ldots + \frac{7}{3^n} + \ldots$

4) $e^0 + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + \ldots + e^{-n} + \ldots$

5) $\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^5 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \ldots$

6) $e^{-\frac{2}{11}} + e^{-\frac{3}{11}} + e^{-\frac{4}{11}} + \ldots + e^{-\frac{n}{11}} + \ldots$

7) $8 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$

8) $\frac{1}{3} + (1-1) + \frac{1}{3^2} + (2-2) + \frac{1}{3^3} + (3-3) + \frac{1}{3^4} + (4-4) + \ldots$

9) $7 + \frac{7}{5} + \frac{7}{5^2} + \frac{7}{5^3} + \frac{7}{5^4} + \ldots + \frac{7}{5^n} + \ldots$.

Opgave 20.3 *(n'te - ledskriteriet)*

Undersøg, i hvert af de følgende tilfælde, om rækken er konvergent.

1^T) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^3+1)}{\ln(n^5+1)}$

2) $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{1}\right)^1} + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} + \ldots$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{7^{\ln n}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2n+1)}{\ln(7n+1)}$

6) $\sin 1 - \sin 2 + \sin 3 - \ldots + (-1)^{n+1} \sin n + \ldots$.

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\operatorname{Arctan} n}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n^2 + 1}{2n^3 + 10n^2 + 50}$

9) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot \cos(n\pi)}{\ln n}$.

Opgave 20.4 *(sammenligningskriteriet)*

Undersøg, i hvert af de følgende tilfælde, om rækken er konvergent.

1[T]) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000\,n}{n^3+1}$

2[T]) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+\frac{1}{n}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln 2)^n \cdot \operatorname{Arctan} n$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\ln n - \frac{1}{n}}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1000}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\mathrm{e}^{-n}}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+2}{n^6+1}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^9+4}{n^{10}+n^8+n}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n}$

Opgave 20.5 *(numerisk-række-kriteriet)*

Undersøg, i hvert af de følgende tilfælde, om rækken er absolut konvergent.

1[T]) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \cdot \operatorname{Arctan} n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^4}{n^6+2n^3+12}$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\mathrm{e}^n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{2^n}$

Opgave 20.6 *(rod- og kvotientkriteriet)*

Undersøg, i hvert af de følgende tilfælde, om rækken er konvergent.

1[T]) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot(-1)^n}{n!}$

2[T]) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{8n^2+7}{7n^2+8} \right)^n$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}$

4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(\ln n)^n}$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln 2 + \frac{1}{n} \right)^n$

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Arctan} n)^{-n}$

7) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln(n!))^n}$

8) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{2^n\cdot \ln n}$

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2+4n+2}{(2n+3)!}}$

10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln(7n^8+1)}{\ln(8n^7+1)} \right)^n$.

Opgave 20.7 *(alternerende-række-kriteriet)*

Undersøg, i hvert af de følgende tilfælde, om rækken er konvergent.

1[T]) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\ln n}}$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot \operatorname{Arctan} n}$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{n^2+2n+7}$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n^2+2n)}{\ln(n^3+n^2+1)}$

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{n^2+7}{n^3+2n^2+1}}$

8) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln(\ln n)}$

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\cosh(n\pi)}$

10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\cos(n\pi)}{n} \right)$.

Opgave 20.8 *(integralkriteriet)*

Undersøg, i hvert af de følgende tilfælde, om rækken er konvergent.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{e}^{-(n^2)}$

2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\ln n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)\cdot 2^{-\ln n}}{n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{e}^{-n}$

6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\sqrt{\ln n}}$

7) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln(\ln n)}$

8) $\frac{6}{1^2}+\frac{6}{2^2}+\frac{6}{3^2}+\ldots+\frac{6}{n^2}+\ldots$

9) $\frac{1}{1+\cosh 0}+\frac{1}{1+\cosh 1}+\frac{1}{1+\cosh 2}+\ldots+\frac{1}{1+\cosh n}+\ldots$.

Opgave 20.9 *(konvergenskriterier m.m.)*

Undersøg, i hvert af de følgende tilfælde, om rækken er konvergent.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\ln\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n$

2) $\sum_{n=2}^{\infty} n^{-\frac{n}{\ln n}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^{-n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot 2n}{3n^2+1}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n+3)!}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-7\cdot\ln n}{\ln(8n)}\right)^n$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

Opgave 20.10 *(konvergenskriterier m.m.)*

Undersøg, i hvert af de følgende tilfælde, om rækken er konvergent, og find i givet fald summen.

1) $19 + \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + \ldots$

2) $e^{-2} + e^{-4} + e^{-6} + \ldots + e^{-2n} + \ldots$

3) $\ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} + \ldots$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln 2)^n$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + \sin n}{4n^4 + \cos n}$

6) $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots$

7) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{7}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{7}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{7}} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{7}} + \ldots$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln 3 - \frac{1}{n}\right)^n$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7 + 3n^4 + 1}{n^8 + n}$.

Opgave 20.11 *(konvergenskriterier m .m.)*

Undersøg, i hvert af de følgende tilfælde, om rækken er absolut konvergent, betinget konvergent eller divergent.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \sqrt{n}}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot \cos(n\pi)}{n^2 + 1}$

2) $\frac{7}{1}-\frac{7}{1}+\frac{7}{2}-\frac{7}{2}+\frac{7}{3}-\frac{7}{3}+\frac{7}{4}-\frac{7}{4}+\ldots$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-n)^5}{n^7+1}$.

Opgave 20.12 *(konvergensradius)*

Find konvergensradius r for hver af de følgende potensrækker.

1^T) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\cdot\cos\frac{1}{n}\right)^n x^{2n}$

2^T) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{5^n(n^2+3n)}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}+2\right)^n x^n$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(3+\frac{\ln n}{n}\right)^n x^{2n}$

8) $\sum_{n=0}^{\infty} n^3\cdot x^{5n}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{2}{n}\right)^n x^n$

10) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{\sqrt{n!}}$

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(n!)\,x^n$ *(svær!)* .

Opgave 20.13 *(konvergensradius)*

Bestem konvergensradius r for hver af potensrækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\ln(n+4)}{n^7}x^n \quad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\ln(n+2)\,x^n \quad ,$$

og undersøg, om rækken er konvergent for x = r, samt om den er konvergent for x = - r .

Opgave 20.14 *(givet funktion, find potensrække)*
Find en potensrække for hver af de følgende funktioner, og angiv konvergensradius (oversigt over kendte rækker kan benyttes).

1^T) $y(x) = e^{(x^2)}$

2) $y(x) = x \cdot \operatorname{Arctan}(x^3)$.

3) $y(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Opgave 20.15 *(givet integral, find potensrække)*
Find en potensrække for hver af de følgende funktioner, og angiv konvergensradius (oversigt over kendte rækker kan benyttes).

1) $y(x) = \int_0^x e^{(t^2)}\,dt$

2^T) $y(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$

3) $y(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{2}\right)}{t}\,dt$

4) $y(x) = \int_0^x \frac{e^{2t}-1}{t}\,dt$.

Opgave 20.16 *(givet potensrække, find funktion)*
Det opgives, at summen af rækken $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *er lig med* $\frac{1}{1-x}$ *for* $|x|<1$.
Bestem f.eks. herudfra summen af rækkerne $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$ *og* $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\frac{x^n}{2^n}$.
Beregn konvergensradius for $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\frac{x^n}{2^n}$.

Opgave 20.17 *(givet potensrække, find funktion)*
Det opgives, at summen af rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ *er lig med* $\ln(1+x)$ *for* $|x|<1$.
Bestem f.eks. herudfra for $|x|<1$ *summen af rækkerne*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n}\ , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^{n+2}}{n}\ .$$

Opgave 20.18 *(givet potensrække, find funktion)*
Find for hver af potensrækkerne

1) $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \ldots + \frac{x^n}{2^n} + \ldots$

2) $\frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27} + \ldots + \frac{x^n}{3^n} + \ldots$

3) $\frac{2}{25}x + \frac{3}{125}x^2 + \ldots + \frac{n}{5^n}x^{n-1} + \ldots$

4) $\frac{x^3}{75} + \frac{x^4}{500} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)5^n} + \ldots$

konvergensradius r og summen g(x) for $|x| < r$.

Opgave 20.19^{T} *(differentialligning)*
Lad der være givet differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0,$$

og lad $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ *være en potensrækkeløsning til denne differentialligning.*

1) Angiv en rekursionsformel for c_n.

2) Angiv $\tilde{y}(t) = \sum_{n=0}^{6} c_n t^n$, *dvs. begyndelsen af rækken op til og med n = 6.*

3) Angiv hele rækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ *eksplicit.*

4) Angiv konvergensradius for den fundne potensrækkeløsning.

Opgave 20.20 *(differentialligning)*
Find en potensrækkeløsning til hver af de følgende differentialligninger, og angiv konvergensradius.

1) $\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + y = 6t \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$

2) $(1+t)\frac{d^2y}{dt^2} - t\frac{dy}{dt} - 2y = 2e^t \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ *(svær!)*

3) $(2t^2+3t+1)\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt} - 6y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$

4) $(1-t^2)\frac{d^2y}{dt^2} - t\frac{dy}{dt} - y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

5) $(1-t^2)\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2t\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0 \qquad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0$

6) $(1+2t)\dfrac{dy}{dt} - y = 1 \qquad y(0) = 0$

7) $t\cdot\dfrac{d^2y}{dt^2} - y = 0 \qquad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1$

8) $(t-t^3)\dfrac{d^2y}{dt^2} + (1-t^2)\dfrac{dy}{dt} = 1 \qquad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1$.

Opgave 20.21 *(tilnærmet sum af række)*
Beregn for hver af de følgende rækker (der alle er konvergente) en tilnærmet værdi $\tilde{s}$ *for summen* s *, således at* $|s-\tilde{s}| < 10^{-4}$.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4n}}$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^n+n!}$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$

6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^n$

7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{(2n)!}$

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2\cdot\sqrt[n]{n}}$

9) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^3+1}$ *(kræver over 100 led!)*

10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n\,n!}{n^n}$ *(kræver over 20 led!)*

21 FOURIERRÆKKER

21.1 INDLEDNING

En klasse af funktioner kan fremstilles ved potensrækker. En langt mere omfattende klasse af funktioner f kan imidlertid fremstilles ved **trigonometriske rækker**, dvs.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(\frac{n\pi}{l}t) + b_n \sin(\frac{n\pi}{l}t)\right),$$

hvor t er den uafhængige variable, mens l, a'erne og b'erne er konstanter. Opfattes t som tiden, vil rækkens enkelte led repræsentere **svingninger**, som netop ved mange praktiske anvendelser har en direkte fysisk fortolkning, f. eks. elektromagnetiske svingninger, mekaniske svingninger eller lydsvingninger.

Den systematiske fremstilling af "vilkårlige" funktioner ved trigonometriske rækker er først indført af **Fourier** i værket "Théorie Analytique de la Chaleur" (år 1822), hvor han undersøgte varmeledningsproblemet. Dette problems løsning kan give en god introduktion til teorien om Fourierrækker og bliver derfor gennemgået i supplement 21A.

21.2 FOURIERRÆKKER

En meget stor klasse af funktioner kan udvikles i en uendelig række bestående af sinusled og cosinusled, de såkaldte Fourierrækker.

Ved en **stykkevis differentiabel funktion** f defineret i intervallet $[-l\,;\,l]$, forstås en stykkevis kontinuert [1] funktion f, som har en afledet funktion f', der også er stykkevis kontinuert i $[-l\,;\,l]$ (se figur 21.1).

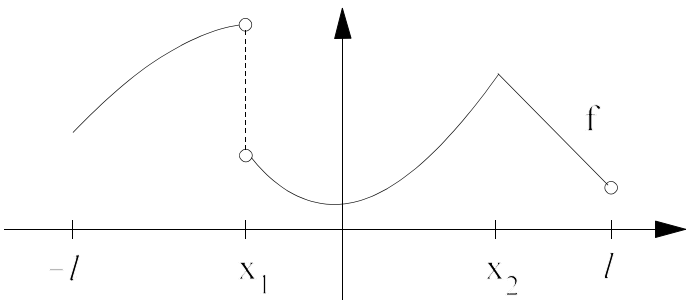


Fig. 21.1. *Stykkevis differentiabel funktion f.*

[1] definition af stykkevis kontinuert funktion findes i bind 1, afsnit 1.5.

Vi vil i det følgende antage, at f er en periodisk funktion med periode $2l$, og at f er stykkevis differentiabel i intervallet $[\,-l\,;\,l\,]$.

DEFINITION *af Fourierrække. Ved f's Fourierrække forstås den uendelige række*

$$\frac{1}{2}a_0 + a_1\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) + b_1\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) + a_2\cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right) + b_2\sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right) + \ldots$$
$$+ a_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + \ldots \quad , \qquad (1)$$

hvor

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx, \qquad n = 0,1,2,\ldots \qquad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx, \qquad n = 1,2,\ldots \quad . \qquad (3)$$

Forklaring af formlerne for koefficienterne a_n og b_n

Hvis rækken (1) er konvergent med summen $f(x)$, må koefficienterne nødvendigvis være bestemt ved (2) og (3). Dette indses ved at multiplicere ligningen (1)

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\frac{n\pi}{l}x) + b_n\sin(\frac{n\pi}{l}x)\right), \qquad (4)$$

med samme funktion, som indgår i det led, der indeholder a_n eller b_n, hvorefter der integreres [1]. Multipliceres således på begge sider af ligning (4) med $\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ og integreres fra $-l$ til l, fås

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx = \int_{-l}^{l}\frac{a_0}{2}\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx +$$
$$\sum_{=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} a_k\cos(\frac{k\pi}{l}x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx + \int_{-l}^{l} b_k\sin(\frac{k\pi}{l}x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx\right)$$

For $n \neq k$ og $n > 0$ fås, ved f.eks. at benytte Schaums håndbog formel 17.18.15 og 17.19.2, at de ovennævnte integraler på højre side af lighedstegnet er 0. Ligningen reduceres derfor til

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx = \int_{-l}^{l} a_n\cos^2\pi\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx + \int_{-l}^{l} b_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

Ved nu at benytte Schaums håndbog formel 17.18.9 og 17.19.1 fås

---

[1] Man kan vise, at funktionerne i Fourierrækken udgør et "ortogonalsystem" (se supplement 21B), og at det er tilladeligt at integrere led for led.

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx = a_n\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)}{4\cdot\frac{n\pi}{l}}\right]_{-l}^{l} + b_n\left[\frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}{2\cdot\frac{n\pi}{l}}\right]_{-l}^{l} = a_n\cdot l \ .$$

Heraf fås

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx, \qquad n = 1,2,\ldots \ .$$

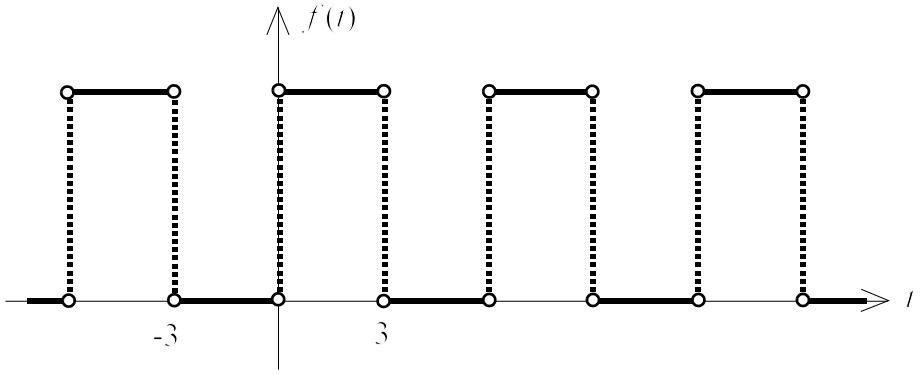
Tilsvarende findes a_0 (ved at multiplicere med $\cos(0\cdot x)$, dvs. med 1) og b_n (ved at multiplicere med $\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$).

Eksempel 21.1. Udvikling af en funktion i en Fourierrække.

Et musikinstrument skaber tryksvingninger ud for øret. Lad trykket være givet ved en funktion f med perioden 6 millisekunder:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \in]-3;0[\\ 5 & \text{for } t \in]0;3[\ . \end{cases}$$

Find f's Fourierrække (grundtone, overtoner).



LØSNING:

Vi finder

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(t)\,dt = \frac{1}{3}\int_{-3}^{0} 0\,dt + \frac{1}{3}\int_{0}^{3} 5\,dt = \frac{5}{3}[t]_0^3 = 5 \ .$$

$$a_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(t)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right)dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-3}^{0} 0\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right)dt + \frac{1}{3}\int_{0}^{3} 5\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right)dt$$

$$= \frac{5}{3}\left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}t\right)}{\frac{n\pi}{3}}\right]_0^3 = 0 .$$

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(t)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{3}t\right)dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-3}^{0} 0\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{3}t\right)dt + \frac{1}{3}\int_{0}^{3} 5\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{3}t\right)dt$$

$$= \frac{5}{3}\left[\frac{-\cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right)}{\frac{n\pi}{3}}\right]_0^3 = \frac{5}{3}\cdot\frac{3}{n\pi}\left[-\cos(n\pi)+\cos 0\right] = \frac{5}{n\pi}\left[-(-1)^n+1\right]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ lige} \\ \frac{10}{n\pi} & \text{for } n \text{ ulige} . \end{cases}$$

Fourierrækken for f er da

$$\frac{5}{2} + \frac{10}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \frac{10}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{3}t\right) + \frac{10}{5\pi}\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right) + \ldots .$$

Da n er ulige, kan vi sætte $n = 2p+1$. Vi har da

$$f(t) = \frac{5}{2} + \frac{10}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{3}t\right)}{2p+1}\right)$$

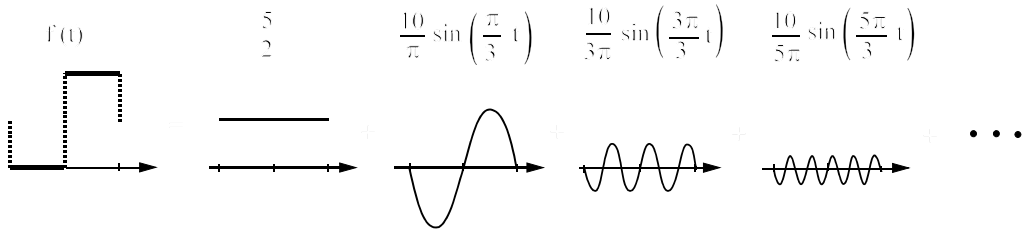


Fig. 21.2. *Symbolsk grafisk fremstilling af f's Fourier-udvikling.*

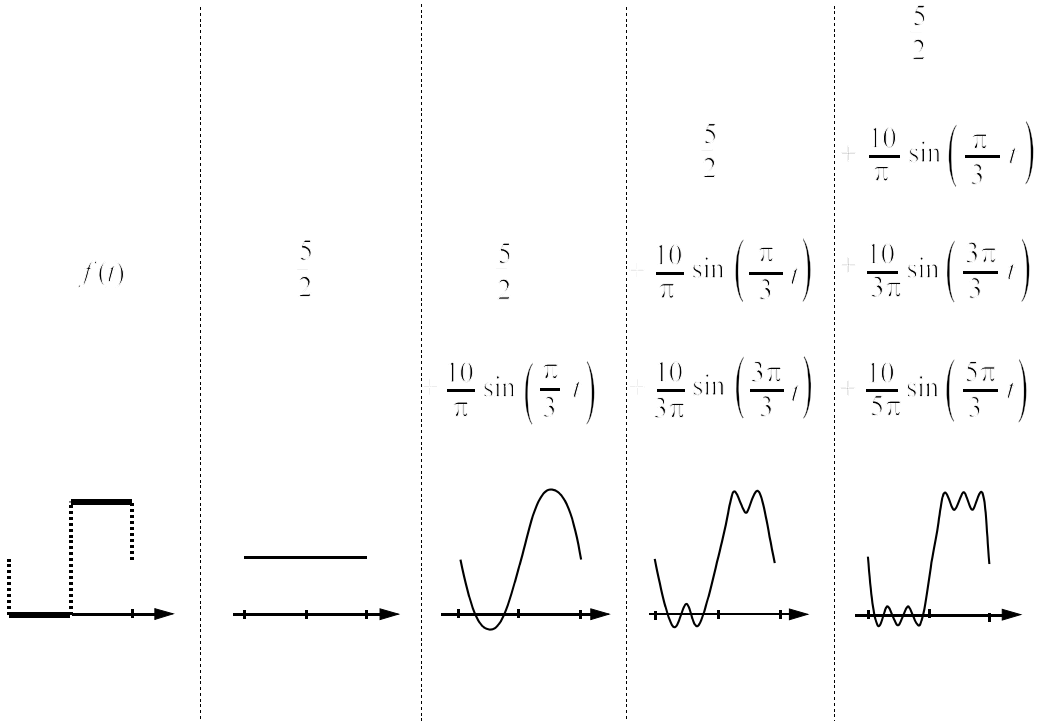


Fig. 21.3. *Grafer for f og de første delsummer for f's Fourierrække.*

Man siger, at funktionen f (periodisk "firkant-impuls") er blevet udtrykt som en **superposition** (overlejring) af indbyrdes harmoniske **rene svingninger**, eller man siger, at der er foretaget en **harmonisk analyse** af f. Grundsvingningen $\frac{10}{\pi}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ har **amplituden** $\frac{10}{\pi}$, **svingningstiden** 6, frekvensen $\frac{1}{6}$ og vinkelfrekvensen $\frac{\pi}{3}$. De følgende rene svingninger i superpositionen, f.eks. $\frac{10}{3\pi}\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{3}t\right)$, er **oversvingninger** (i akustik: overtoner) med frekvenser, der er hele multipla af grundsvingningens frekvens.

EDB-løsning. I Maple løses eksempel 21.1 på følgende måde.

Der findes ikke en direkte ordre til at danne en Fourierrække, men følgende lille Mapleprogram løser problemet:

```
restart ;      fourier := proc(f, x, t, n, L)  local j ;
> collect(combine((add(int(f*cos(j*(x-t)*Pi/L), x=-L..L), j=-n..n))/(2*L),trig), [sin,cos]);  end;    # program er slut

> f := x-> piecewise(x<0, 0, x>0, 5) ;                                    #definition af funktion
> fourier(f(x), x, t, 5, 3) ;          # kald af fourier (nogle af leddene er 0, så 5 angiver ikke nødvendigvis antal led).
```

$$\frac{5}{2}+2\,\frac{\sin\left(\frac{5}{3}t\pi\right)}{\pi}+\frac{10}{3}\,\frac{\sin(t\pi)}{\pi}+10\,\frac{\sin\left(\frac{1}{3}t\pi\right)}{\pi}$$

Bemærk, at rækkefølgen af leddene er tilfældig.

Konvergens af Fourierrække

Som det fremgår af figur 21.3, synes Fourierrækken at konvergere mod $f(x)$ i punkter, hvor f er kontinuert, medens den tilsyneladende i et diskontinuitetspunkt x_0 konvergerer mod "midtpunktet" $\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}$ hvor $f(x_0+) = \lim_{x \to x_0+} f(x$ og $f(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} f(x$ (se figur 21.4).

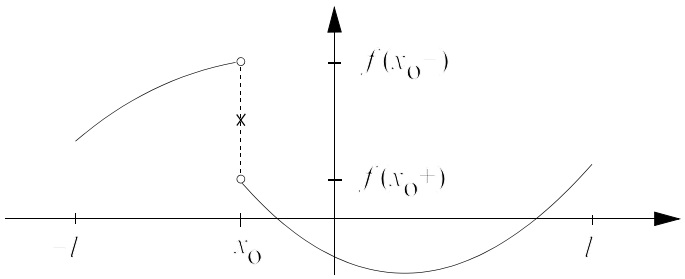


Fig. 21.4. *Diskontinuitetspunkt.*

At det altid forholder sig således, fremgår af følgende sætning, som anføres uden bevis.

SÆTNING 21.1 (*konvergens af Fourierrække*). *Fourierrækken for en stykkevis differentiabel funktion f i intervallet $[-l;l]$ konvergerer mod $f(x)$, hvis f er kontinuert i x, og mod $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$, hvis f er diskontinuert i x. I endepunkterne $x = l$ og $x = -l$ konvergerer Fourierrækken mod $\frac{f(l-)+f(-l+)}{2}$.*

Da $\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ og $\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ er periodiske med perioden $2l$, vil Fourierrækken for alle reelle tal x konvergere mod den periodiske funktion, som i periodeintervallet [-l ; l] svarer til $f(x)$ (jævnfør eksempel 21.1).

21.3 FOURIERRÆKKER FOR LIGE OG ULIGE FUNKTIONER

En funktion f kaldes en **lige funktion**, hvis der gælder $f(-x) = f(x)$ (se figur 21.5) ligesom for potensfunktionerne $x^2, x^4, x^6, \ldots$ med lige potens. Vi vil vise, at for en lige funktion er Fourierrækken en "ren" cosinusrække.

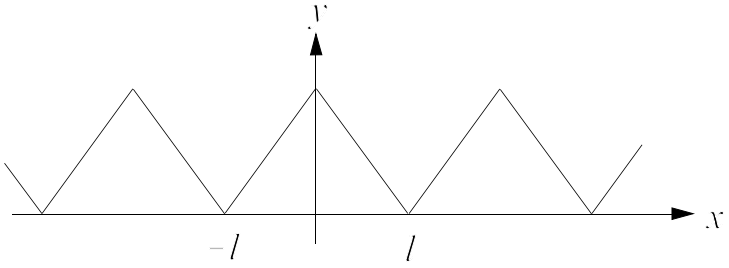


Fig. 21.5. *Lige funktion, dvs.* $f(-x) = f(x)$ *(grafen symmetrisk om y-aksen).*

En funktion f kaldes en **ulige funktion**, hvis der gælder $f(-x) = -f(x)$ (se figur 21.6) ligesom for potensfunktionerne $x^1, x^3, x^5, \ldots$ med ulige potens. Vi vil vise, at for en ulige funktion er Fourierrækken en "ren" sinusrække.

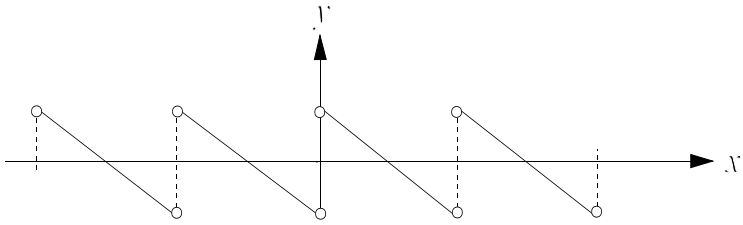


Fig. 21.6. *Ulige funktion, dvs.* $f(-x) = -f(x)$ *(grafen symmetrisk om begyndelsespunktet* (0 ,0)).

Sammenhængen fremgår af den følgende sætning.

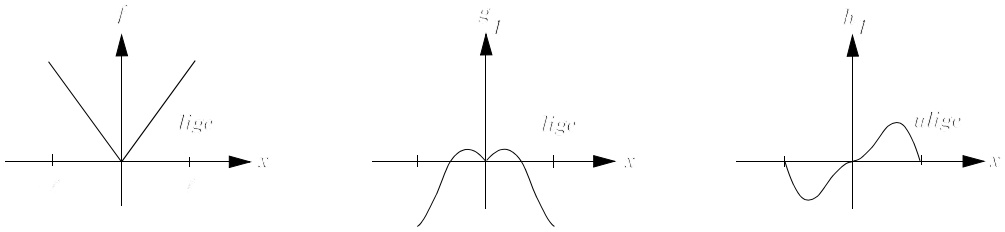
SÆTNING 21.2 (*Fourierrække for lige og ulige funktion*). *Hvis f er en lige funktion med perioden $2l$, har f Fourierrækken*

hvor
$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$
$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Hvis f er en ulige funktion med perioden $2l$, har f Fourierrækken

hvor
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$
$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Bevis. Lad $g_n(x) = f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ og $h_n(x) = f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$. Er f lige, dvs. $f(x) = f(-x)$, fås ved indsættelse, at $g_n(-x) = g_n(x)$ og $h_n(-x) = -h_n(x)$, dvs. g_n er lige og h_n er en ulige funktion.



Af symmetrigrunde (se på de tilsvarende arealer) må

$$\int_{-l}^{l} g_n(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} g_n(x)\,dx \qquad \text{og} \qquad \int_{-l}^{l} h_n(x)\,dx = 0 \ .$$

Hermed er sætningen vist for f lige.

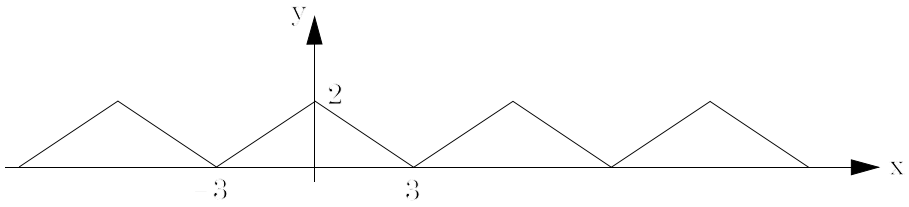
Er f ulige, kan beviset føres på ganske samme måde.

Eksempel 21.2. Fourierrække for lige funktion.

Vi vil finde Fourierrækken for den funktion f, der er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + 2 & \text{for} \quad -3 \le x \le 0 \\ -\frac{2}{3}x + 2 & \text{for} \quad 0 \le x \le 3 \ . \end{cases}$$

LØSNING:



Da f er lige, fås af sætning 21.2

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right),$$

hvor

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 \left(-\frac{2}{3}x + 2\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right) dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Vi får

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 \left(-\frac{2}{3}x+2\right)dx = \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3}x^2+2x\right]_0^3 = 2$$

$$a_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\int_0^3 x\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right)dx + \frac{2}{3}\int_0^3 2\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right)dx \quad \text{Schaum 17.18.2}$$

$$= -\frac{4}{9}\left[\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right)}{\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2} + \frac{x\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right)}{\frac{n\pi}{3}}\right]_0^3 + \frac{4}{3}\left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right)}{\frac{n\pi}{3}}\right]_0^3$$

$$= -\frac{4}{9}\left[\frac{\cos(n\pi)-\cos 0}{\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2}\right] = \frac{4}{n^2\pi^2}\cdot[1-\cos(n\pi)] = \frac{4}{n^2\pi^2}\cdot[1-(-1)^n]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ lige} \\ \frac{8}{n^2\pi^2} & \text{for } n \text{ ulige} \end{cases}.$$

Da n er ulige, kan vi sætte $n = 2p+1$, og vi får da rækken

$$f(x) = 1 + \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos\left(\frac{(2p+1)\pi}{3}x\right).$$

21.4 KOMPLEKS FOURIERRÆKKE, FOURIERTRANSFORMATION

I dette afsnit gives en meget summarisk gennemgang af mere avancerede emner inden for Fourieranalysen (nogle anvendelser kan ses af opgaverne 21.6, 21.7 og 21.8).
Man kan omskrive Fourierrækken

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\frac{n\pi}{l}t) + b_n\sin(\frac{n\pi}{l}t)\right) \tag{5}$$

ved at indsætte cos og sin givet ved Eulers formler

$$\cos u = \frac{e^{iu}+e^{-iu}}{2}, \qquad \sin u = \frac{e^{iu}-e^{-iu}}{2i}.$$

Herved fås den elegante

Fourierrække på kompleks form:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \mathrm{e}^{\frac{-in\pi t}{l}}, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad \text{periode } 2l$$

med komplekse koefficienter:

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t) \cdot \mathrm{e}^{\frac{in\pi t}{l}}\, dt \ .$$

Sættes $\nu_n = \frac{n}{2l}$ (= "frekvensen"), $\Delta\nu = \frac{1}{2l}$ og $F(\nu_n) = c_n \cdot 2l,$ får vi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\nu_n) \cdot \mathrm{e}^{-i2\pi\nu_n t} \cdot \Delta\nu$$

og

$$F(\nu_n) = \int_{-l}^{l} f(t) \cdot \mathrm{e}^{i2\pi\nu_n t}\, dt \ .$$

For $l \to \infty$ fås heraf formelt "Fouriers integralsætning", som anføres uden bevis:

SÆTNING 21.3 (*Fouriertransformation*). *Lad f være en stykkevis differentiabel funktion, som i diskontinuitetspunkterne har værdien* $f(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}$, *og hvor integralet* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ *er konvergent. Så kan f skrives som et "Fourierintegral":*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \cdot \mathrm{e}^{-i2\pi\nu t}\, d\nu \qquad t \in \mathbb{R} \ ,$$

hvor $F(\nu)$ er den (komplekse) "Fouriertransformerede" funktion:

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \mathrm{e}^{i2\pi\nu t}\, dt \qquad \nu \in \mathbb{R} \ .$$

(*Det første integral ovenfor skal forstås som grænseværdien* $\lim_{K\to\infty} \int_{-K}^{K} F(K) \cdot \mathrm{e}^{-i2\pi Kt}\, dK$).

Bemærk: Både $f(t)$ og $F(\nu)$ er defineret for alle reelle tal t og ν -- uden krav om periodicitet.

Bemærk: Fouriertransformationen og tilbagetransformationen er ens bortset fra eksponentens fortegn.

Ved praktiske beregninger vil man ofte nøjes med at betragte værdierne af $f(t)$ for et stort antal ækvidistante værdier af t: $f_0 = f(t_0)$, $f_1 = f(t_0 + \Delta t)$, . . . , $f_{N-1} = f(t_0 + (N-1)\Delta t)$. Man kan da bevise en tilsvarende "diskret Fouriertransformation":

SÆTNING 21.4 (*diskret Fouriertransformation*). *"Funktionen"* f_n *kan skrives som en endelig sum:*

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \cdot e^{-i 2\pi k \frac{n}{N}}, \qquad n \text{ helt tal,} \qquad f_n \text{ har periode } N,$$

hvor F_k *er den " diskret Fouriertransformerede":*

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot e^{i 2\pi k \frac{n}{N}}, \qquad k \text{ helt tal,} \qquad F_k \text{ har periode } N.$$

Bemærk: f_n og F_k kan defineres for alle hele tal n og k, men skal så åbenbart opfattes som periodiske med perioden N.

Bemærk: Transformation og tilbagetransformation er ens bortset fra normeringen $\frac{1}{N}$ og eksponentens fortegn.

Den diskret transformerede F_k benyttes mest ved numerisk tilnærmelse af den "kontinuert" transformerede $F(\nu_k) \approx F_k \cdot \Delta t$, hvor $\nu_k = \frac{k}{N \cdot \Delta t}$. Beregningerne udføres på computer ved hjælp af metoden "Fast Fourier Transform" (forkortet FFT) med en regnetid, der er proportional med $N \cdot \log N$. Sædvanligvis bør N da være en potens af 2, f.eks. $N = 2^{10} = 1024$. Ofte sættes $f(t)$ til nul i en del af intervallet for at undgå gener fra den periodiske fortsættelse i den diskrete approksimation.

Eksempel 21.3. Fouriertransformation. Autokorrelation.

Autokorrelation ("selvmodsvarighed") $c(t')$ for f:

$$c(t') = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot f(t-t')\,dt\,, \qquad t' \in \mathbb{R}\,.$$

Autokorrelationen $c(t')$ er et mål for, hvor meget $f(t)$ ligner sin egen forskudte funktion $f(t-t')$ [1] (man kan vise, at $c(0) \geq c(t')$ for alle t').

Idet der gælder **autokorrelationssætningen**:

$C(\nu) = |F(\nu)|^2$ (store bogstaver betyder Fouriertransformeret),

kan $c(t')$ i praksis hurtigt beregnes ved FFT (først findes $F(\nu)$ ved FFT, og derpå findes $c(t')$ ved invers FFT anvendt på $|F(\nu)|^2$).

Vis, at $c(t')$ er en lige funktion, dvs. at $c(-t') = c(t')$ for alle relle t'.

LØSNING:

Vi har

$$c(-t') = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot f(t+t')\,dt\,.$$

Substitueres $u = t + t'$, dvs. $t = u - t'$ og $dt = du$, fås

$$c(-t') = \int_{-\infty}^{\infty} f(u-t')\cdot f(u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cdot f(u-t')du = c(t')\,.$$

---

[1] Nærmere forklaring af autokorrelation. For at angive hvor meget den forskudte funktion $f(t-t')$ afviger fra $f(t)$, er det nærliggende at betragte afvigelsens kvadrat i et punkt t og derpå integrere (summere) over alle værdier af t: $SAK(t') = \int_{-\infty}^{\infty}[f(t)-f(t-t')]^2\,dt$ (SAK ~ "Sum af Afvigelsers Kvadrater").

Ved udregning fås $SAK(t') = \int_{-\infty}^{\infty}(f(t))^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty}(f(t-t'))^2\,dt - 2\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot f(t-t')\,dt\,.$

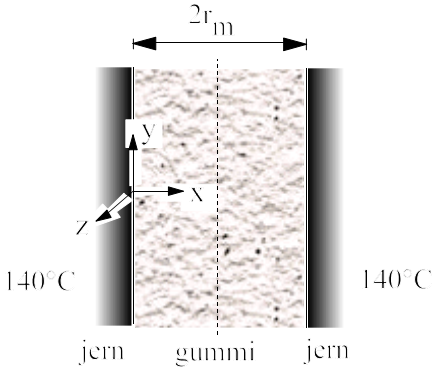
Her er de to første integraler ens (arealet under grafen for $(f(t'))^2$ er lig med arealet under den forskudte graf), og det sidste led er er autokorrelationen $c(t')$: $SAK(t') = 2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(f(t))^2 dt - 2\cdot c(t')\,.$

Da $2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(f(t))^2 dt$ ikke afhænger af t', må afvigelsesmålet $SAK(t')$ altså blive desto mindre, jo større autokorrelationen $c(t')$ er. Det er derfor rimeligt at sige, at $f(t)$ ligner sin forskudte funktion $f(t-t')$ mest for de forskydninger t', hvor autokorrelationen $c(t')$ er størst.

SUPPLEMENT: 21A LØSNING AF VARMELEDNINGS-LIGNING VED FOURIERRÆKKER

Indledning

Den systematiske fremstilling af "vilkårlige" funktioner ved trigonometriske rækker er først indført af Fourier i værket "Theorie Analytiqe de la Chaleur" i 1822, hvor han undersøgte varmeledningsproblemet. Da det er et godt eksempel på anvendelsen af Fourierrækker, gennemgås det i det følgende.



Opvarmning af plade mellem 2 jernflader.

Problem

En industrivirksomhed opvarmer plader mellem 2 jernflader med temperaturen $T_a = 140°C$, f.eks.ved vulkanisering af gummiplader. Forinden har plademateriale overalt temperaturen $T_i = 40°C$. Spørgsmålet er nu: ***Hvor hurtigt stiger temperaturen i de forskellige dybder af materialet under behandlingen?***

Forudsætninger

Pladernes data er:

tykkelse	$2r_m = 0.023\ \mathrm{m}$
varmefylde	$c_p = 1500\ \mathrm{J/(kg\cdot °C)}$
massefylde	$\varrho = 1194\ \mathrm{kg/m^3}$
varmeledningstal	$\kappa = 0.16\ \mathrm{J/(m\cdot s\cdot °C)}$.

Man ser bort fra varmemodstanden i grænsefladen plade/jern. Pladerne er så store, at der kan ses bort fra varmestrømmene ved kanterne. Temperaturen inde i en plade afhænger da kun af afstanden ud til overfladen, således at varmeledningsligningen bliver reduceret til

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\kappa}{\varrho c_p} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

med rand- og begyndelsesbetingelserne

$$\begin{cases} T(0,\tau) = 140°C & \text{for } \tau > 0 \\ T(2r_m,\tau) = 140°C & \text{for } \tau > 0 \\ T(X,0) = 40°C & \text{for } 0 < X < 2r_m\,. \end{cases}$$

Her betegner $T = T(X,\tau)$ temperaturen inde i en plade til tiden τ i afstanden X fra pladens ene sideflade.

Omformning af problem

Normalt vil man gerne slippe for at se en masse fysiske konstanter som faktorer i såvel differentialligning som løsning. Desuden vil man gerne have, at udførte beregninger skal kunne bruges på situationer med andre data. Derfor indføres de 3 dimensionsløse variable

$$x = \frac{X}{2r_m}\pi, \qquad t = \frac{\kappa\pi^2\tau}{\varrho\, c_p (2r_m)^2}\left(= \frac{\tau}{600s} = \frac{\tau}{10\,\text{min}}\right), \qquad q = \frac{T_a - T}{T_a - T_i}\left(= \frac{140 - T}{100}\right).$$

Herefter kan problemet formuleres på følgende måde:

Til den partielle differentialligning

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \tag{1}$$

ønskes fundet en løsning, som tilfredsstiller 2 randbetingelser og 1 begyndelsesbetingelse:

$$\begin{cases} q(0,t) = 0 & \text{for} \quad t > 0 \\ q(\pi,t) = 0 & \text{for} \quad t > 0 \\ q(x,0) = f(x) & \text{for} \quad 0 < x < \pi \end{cases}.$$

I dette eksempel er $f(x) = 1$ for alle $0 < x < \pi$.

Løsning

I det følgende udledes en løsning på problemet. Vi vil dog ikke medtage beviset for, at denne løsning er den eneste mulige.

1. Adskillelse af de variable. En klassisk metode til at forenkle problemet er, at man starter med at søge løsninger af typen $q(x,t) = u(x)\cdot \mathrm{v}(t)$. Ved indsættelse i den partielle differentialligning fås $u(x)\cdot \mathrm{v}'(t) = u''(x)\cdot \mathrm{v}(t)$. Division med $u(x)\cdot \mathrm{v}(t) \quad (\neq 0)$ giver

$$\frac{\mathrm{v}'(t)}{\mathrm{v}(t)} = \frac{u''(x)}{u(x)} = -\lambda.$$

Parameteren λ må være en konstant, fordi $\frac{\mathrm{v}'(t)}{\mathrm{v}(t)}$ er uafhængig af x, og $\frac{u''(x)}{u(x)}$ er uafhængig af t. Vi skal altså finde løsninger til de sædvanlige differentialligninger

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathrm{v}}{dt} + \lambda \mathrm{v} = 0 & (2) \\ \dfrac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0 & (3) \end{cases}$$

for de værdier af λ, hvor der eksisterer løsninger.

2. Differentialligningen i t. Den første ligning $\frac{dv}{dt} + \lambda v = 0$ har løsningen $v(t) = K_0 e^{-\lambda t}$.

3. Differentialligningen i x. Vi skal nu løse den anden differentialligning

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0$$

i det givne interval $[\,0\,;\,\pi\,]$ med de givne randbetingelser:

$$\begin{cases} u(0) = 0 & (\text{jævnfør } q(0,t) = 0) \\ u(\pi) = 0 & (\text{jævnfør } q(\pi,t) = 0) \end{cases}$$

for de værdier af λ, hvor det kan lade sig gøre.

Karakterligningen er

$$\Lambda^2 + \lambda = 0.$$

Vi finder heraf

$$\Lambda = \begin{cases} \pm i\sqrt{|\lambda|} & \text{for } \lambda > 0 \\ \pm\sqrt{|\lambda|} & \text{for } \lambda < 0 \\ 0 & \text{for } \lambda = 0\,. \end{cases}$$

Tilfældet $\boxed{\lambda > 0}$: Differentialligningen $\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0$ har for $\lambda > 0$ den fuldstændige løsning

$$u(x) = a \cdot \cos(\sqrt{\lambda}\,x) + b \cdot \sin(\sqrt{\lambda}\,x), \qquad a,b \in \mathbb{R}\,.$$

Randbetingelsen $u(0) = 0$ giver $a = 0$, og randbetingelsen $u(\pi) = 0$ giver da

$$b \cdot \sin(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0 \ \vee \ \sin(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0\,.$$

For $b = 0$ får vi nulløsningen $u_0(x) = 0$.

For $\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0$ får vi $\sqrt{\lambda} = n$, hvor $n \in \{1,2,3,\ldots\}$, dvs. de mulige løsninger bliver

$$u_1(x) = b_1 \cdot \sin(x)\,, \qquad b_1 \in \mathbb{R}$$

$$u_2(x) = b_2 \cdot \sin(2x), \qquad b_2 \in \mathbb{R}$$

. . .

$$u_n(x) = b_n \cdot \sin(nx), \qquad b_n \in \mathbb{R}$$

. . .

Som det fremgår af nedenstående fodnote [1], vil tilfældene $\lambda < 0$ og $\lambda = 0$ kun give nulløsningen. Vi kan derfor i det følgende begrænse os til tilfældet $\lambda > 0$.

4. Løsning udtrykt ved række. Da $q(x,t) = v(t) \cdot u(x)$, bliver de mulige løsninger til (1)

$$q(x,t) = K_0 e^{-n^2 t} \cdot b_n \cdot \sin(nx) = K_0 \cdot b_n \cdot e^{-n^2 t} \cdot \sin(nx) .$$

For kortheds skyld sættes $K_0 \cdot b_n = c_n$, hvor c_n er en arbitrær konstant.

Vi har derfor uendelig mange løsninger til (1) af formen

$$q(x,t) = c_n \cdot e^{-n^2 t} \cdot \sin(nx) .$$

Enhver sum af de fundne løsninger vil også tilfredsstille den partielle differentialligning og randbetingelserne. Det er derfor nærliggende at fremstille en løsning $q(x,t)$ ved en række

$$q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{-n^2 t} \cdot \sin(nx) ,$$

hvor koefficienterne $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ søges bestemt sådan, at også begyndelsesbetingelsen $q(x,0) = f(x)$ bliver opfyldt, dvs.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \sin(nx) = f(x) \qquad \text{for alle} \quad x \in]0;\pi[. \tag{4}$$

I dette eksempel er $f(x) = 1$ for alle $x \in]0;\pi[$.

---

[1] Tilfældet $\boxed{\lambda < 0}$: Differentialligningen $u'' + \lambda u = 0$ har her den fuldstændige løsning

$$u(x) = a \cdot e^{\sqrt{|\lambda|}x} + b \cdot e^{-\sqrt{|\lambda|}x} , \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Randbetingelsen $u(0) = 0$ giver $a + b = 0$, og randbetingelsen $u(\pi) = 0$ giver

$$a \cdot e^{\sqrt{|\lambda|}\pi} + b \cdot e^{-\sqrt{|\lambda|}\pi} = 0.$$

Af $a + b = 0$ fås $a = -b$, som indsat giver

$$-b \cdot e^{\sqrt{|\lambda|}\pi} + b \cdot e^{-\sqrt{|\lambda|}\pi} = 0,$$

hvoraf vi får $b = 0$ og dermed $a = 0$. Den eneste mulige løsning er altså nulløsningen $u_0(x) = 0$.

Tilfældet $\boxed{\lambda = 0}$: Differentialligningen er her $u'' = 0$, og den har derfor den fuldstændige løsning

$$u(x) = a \cdot x + b , \qquad a, b \in \mathbb{R} .$$

Randbetingelsen $u(0) = 0$ giver $b = 0$, og randbetingelsen $u(\pi) = 0$ giver da $a \cdot \pi = 0$, dvs. $a = 0$. Den eneste mulige løsning er altså nulløsningen $u_0(x) = 0$.

Da $q(x,t) = v(t) \cdot u(x)$, kan nulløsningen $q(x,t) = 0$ i tilfældene $\lambda < 0$ og $\lambda = 0$ ikke skelnes fra nulløsningen $q(x,t) = 0$ i tilfældet $\lambda > 0$.

5. Bestemmelse af konstanterne i rækken (4). For at bestemme c_n får man nu den idé (se eventuelt supplement 21B om ortogonalsystem), at multiplicere ligning (4) med $\sin(nx)$ (altså med samme funktion, som indgår i det led, der indeholder c_n):

$$c_1 \cdot \sin(x) \cdot \sin(nx) + c_2 \cdot \sin(2x) \cdot \sin(nx) + \ldots + c_n \cdot \sin(nx) \cdot \sin(nx) + \ldots = f(x) \cdot \sin(nx)$$

og derefter integrere på begge sider over intervallet fra 0 til π:

$$c_1 \int_0^\pi \sin(x) \cdot \sin(nx)\,dx + c_2 \int_0^\pi \sin(2x) \cdot \sin(nx)\,dx + \ldots + c_n \int_0^\pi \sin(nx) \cdot \sin(nx)\,dx + \ldots$$

$$= \int_0^\pi f(x) \cdot \sin(nx)\,dx .$$

Da

$$\int_0^\pi \sin(mx) \cdot \sin(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq m \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{for } n = m \neq 0 \end{cases} \qquad \text{(Schaum 18.26),}$$

fås $$c_n \cdot \frac{\pi}{2} = \int_0^\pi \sin(nx)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad c_n = \frac{2}{\pi} \cdot \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi = \frac{2}{n\pi} \cdot (-\cos(n\pi) + \cos 0) = \frac{2}{n\pi} \cdot (1 - \cos(nx)).$$

Da

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{for } n \text{ lige} \\ -1 & \text{for } n \text{ ulige,} \end{cases}$$

fås

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ lige} \\ \dfrac{4}{n\pi} & \text{for } n \text{ ulige.} \end{cases}$$

6. Slutresultat. En løsning til differentialligningen er følgelig

$$q(x,t) = \frac{4}{\pi} \left[e^{-t} \cdot \sin x + \frac{e^{-9t}}{3} \cdot \sin(3x) + \frac{e^{-25t}}{5} \cdot \sin(5x) + \ldots \right].$$

Da n er ulige, kan vi sætte $n = 2p+1$. Vi har da

$$q(x,t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2p+1)} \cdot e^{-(2p+1)^2 t} \cdot \sin((2p+1)x) . \qquad (5)$$

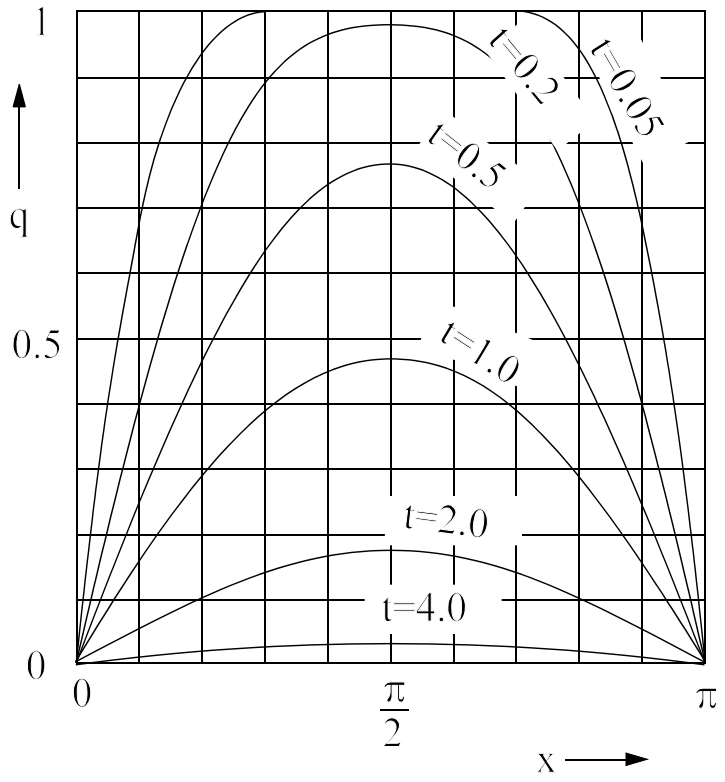
Vi kan naturligvis ikke være sikre på, at vi virkelig har fundet en løsning til differentialligningen, før vi har indset:

a) at den fundne række er konvergent. Dette ses ved at sammenligne rækken med kvotientrækken

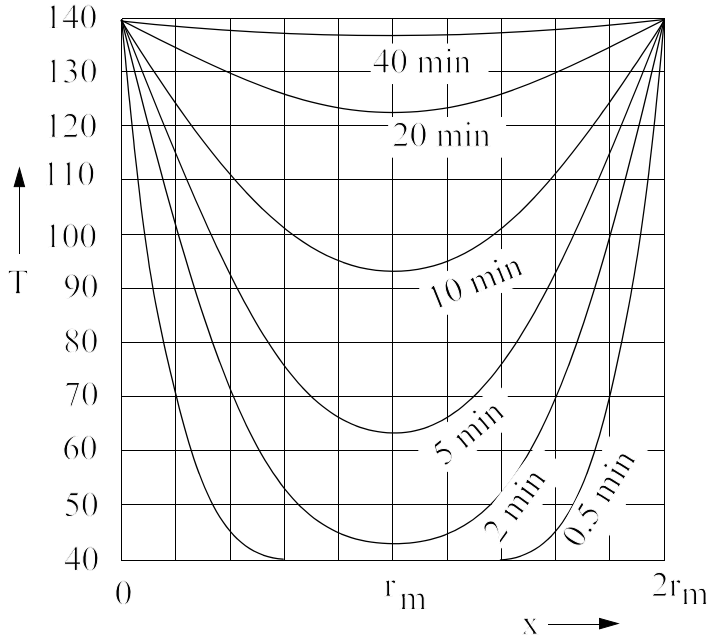
$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-t})^n,$$

b) at der eksisterer partielle afledede $\frac{\partial q}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$, og at differentierer vi rækken (5) med hensyn til x og t, så vil de ledvis differentierede rækker være konvergente med summerne $\frac{\partial q}{\partial t}$ og $\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$. Ifølge appendix 20.1 om rækker er dette opfyldt, hvis de pågældende differentierede rækker har konvergente majorantrækker. Dette er tilfældet, da en majorantrække er $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} n(e^{-t})^n,$

c) at begyndelsesbetingelsen $q(x,t) = 1$ er opfyldt. Dette fremgår af sætning 21.1, idet funktionen $f(x) = 1$ er stykkevis differentiabel, således at Fourierrækken for funktionen 1 vil være konvergent med summen 1 i hele intervallet $]0;\pi[$.



Løsningens afhængighed af x og t.



Resultatet afbildet ved hjælp af de oprindelige variable.

SUPPLEMENT: 21B FUNKTIONER SOM VEKTORER, ORTOGONALSYSTEM

Funktioner som vektorer, skalarprodukt

Kontinuerte funktioner g og h defineret på et interval $[a;b]$ kan opfattes som vektorer med skalarproduktet

$$g \circ h = \int_a^b g(x) \cdot h(x) dx \ .$$

Anskueligt kan det forklares ved, at vektoren $\left(g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n)\right)$ beskriver funktionen g godt, når $a = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ er ækvidistante punkter med afstanden Δx. Eksempelvis kan man ud fra vektoren definere en spline, som tilnærmer g i $[a;b]$.

Da $\int_a^b g(x) \cdot h(x) dx$ tilnærmes ved $\left(g(x_1) \cdot h(x_1) + g(x_2) \cdot h(x_2) + \ldots + g(x_n) \cdot h(x_n)\right) \Delta x$, ses heraf baggrunden for definitionen af skalarproduktet.

Ortogonalsystem

Funktionerne $\sin(x), \sin(2x), \ldots, \sin(nx), \ldots$ siges at udgøre et ortogonalsystem på intervallet $[0;\pi]$, da ethvert par af disse funktioner er indbyrdes ortogonale, dvs. har skalarproduktet 0 (ifølge Schaum 18.26). Funktionerne kan derfor opfattes som basisvektorer i et ∞-dimensionalt vektorrum, ligesom $\bar{i}, \bar{j}$ og $\bar{k}$ er basisvektorer i det 3-dimensionale rum. Enhver vektor $\bar{a}$ i rummet kan som bekendt opløses efter basisvektorerne: $\bar{a} = a_1 \cdot \bar{i} + a_2 \cdot \bar{j} + a_3 \cdot \bar{k}$, hvor f.eks. koordinaten a_2 kan bestemmes ved at multiplicere skalært med $\bar{j}$: $\bar{j} \cdot \bar{a} = 0 + a_2 \cdot 1 + 0$. På samme måde kan "enhver" funktion f, f.eks. $f(x) = 1$, opløses efter "basisvektorer" $\sin(x), \sin(2x), \ldots, \sin(nx), \ldots$ på følgende måde:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \sin(nx),$$

idet "koordinaten" c_n bestemmes ved at multiplicere skalært med $\sin(nx)$:

$$f(x) \circ \sin(nx) = 0 + c_n \cdot \frac{\pi}{2} + 0 \qquad \text{(Schaum 18.26).}$$

SUPPLEMENT: 21C PARSEVALS LIGNING

Lad der over en elektrisk modstand på 1 ohm være en spænding på $f(t)$ volt, der varierer med tiden t. Så vil der i tiden dt afsættes energien $(f(t))^2 \cdot dt$ i modstanden, der bliver varm, og over en periode på $2l$ sekunder vil den gennemsnitlige effekt (energien pr tidsenhed) blive

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}(f(t))^2\,dt \quad \text{watt.}$$

Ved at erstatte $f(t)$ med dens Fourierrække og integrere under anvendelse af ortogonalitetsegenskaberne fås den såkaldte Parsevals ligning:

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}(f(t))^2\,dt \;=\; \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n^2 + b_n^2\right] \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2,$$

som viser, hvordan effekttabet fordeler sig på de enkelte frekvenser i Fourierrækken. Det såkaldte ensidede effektspektrum $P(\nu)$ som funktion af frekvensen $\nu = \frac{n}{2l}$ bliver da

$$P(\nu) = \begin{cases} \frac{1}{4}a_0^2 = |c_0|^2 & \text{for} \quad \nu = 0 \\ \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{1}{2}b_n^2 = 2|c_n|^2 & \text{for} \quad \nu = \frac{n}{2l} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Parsevals ligning gælder også for Fouriertransformationerne:

$$\text{(total energi =)} \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty}(f(t))^2\,dt \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}|F(\nu)|^2\,d\nu \\ \sum_{n=0}^{N-1}|f_n|^2 \;=\; \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|F_k|^2, \end{cases}$$

og her defineres det ensidede energispektrum

$$P(\nu) \;=\; |F(\nu)|^2 + |F(-\nu)|^2.$$

OPGAVER

Opgave 21.1 (*Fourierrække*)

Find Fourierrækken for hver af de følgende funktioner:

1) $$f(x) = \begin{cases} x & for \quad -2 < x \le 0 \\ 0 & for \quad 0 < x < 2 \end{cases}$$

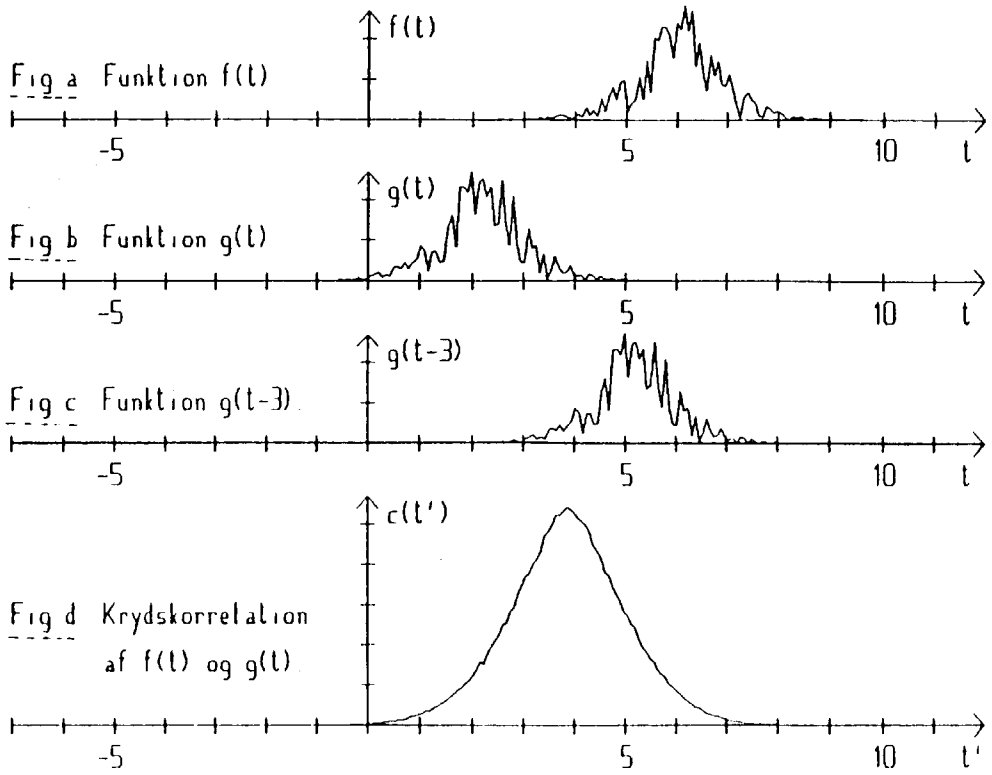
2) $$f(x) = x \qquad for \quad -1 < x < 1$$

3^{T}) $$f(x) = \begin{cases} -x & for \quad -1 < x \le 0 \\ x & for \quad 0 < x \le 1 \end{cases}$$

4) $$f(x) = \begin{cases} 1 & for \quad -2 < x < 0 \\ 0 & for \quad 0 < x < 1 \\ 1 & for \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

5) $$f(x) = \begin{cases} 0 & for \quad -2 < x < 0 \\ e^{-x} & for \quad 0 < x < 2 \end{cases}.$$

Opgave 21.2 (*krydskorrelation, genkendelse af forløb*)



Figur a og b viser målinger af koncentrationerne $f(t)$ *og* $g(t)$ *for et stof A i to strømme. Figur d viser den såkaldte krydskorrelation* $c(t')$ *for* f *og* g *:*

$$c(t') = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(t-t')\, dt, \qquad t' \in \mathbb{R}.$$

Tallet $c(t')$ *er et mål for, hvor meget den forskudte funktion* $g(t-t')$ *ligner* $f(t)$.

Der gælder korrelationssætningen

$$C(\nu) = F(\nu) \cdot \overline{G(\nu)},$$

hvor store bogstaver betyder Fouriertransformeret, og stregen over $G(\nu)$ *betyder kompleks konjugeret.*

Ud fra korrelationssætningen kan $c(t')$ *hurtigt beregnes ved FFT: først findes* $F(\nu)$ *og* $G(\nu)$ *ved FFT, og derpå foretages invers FFT af* $F(\nu) \cdot \overline{G(\nu)}$.

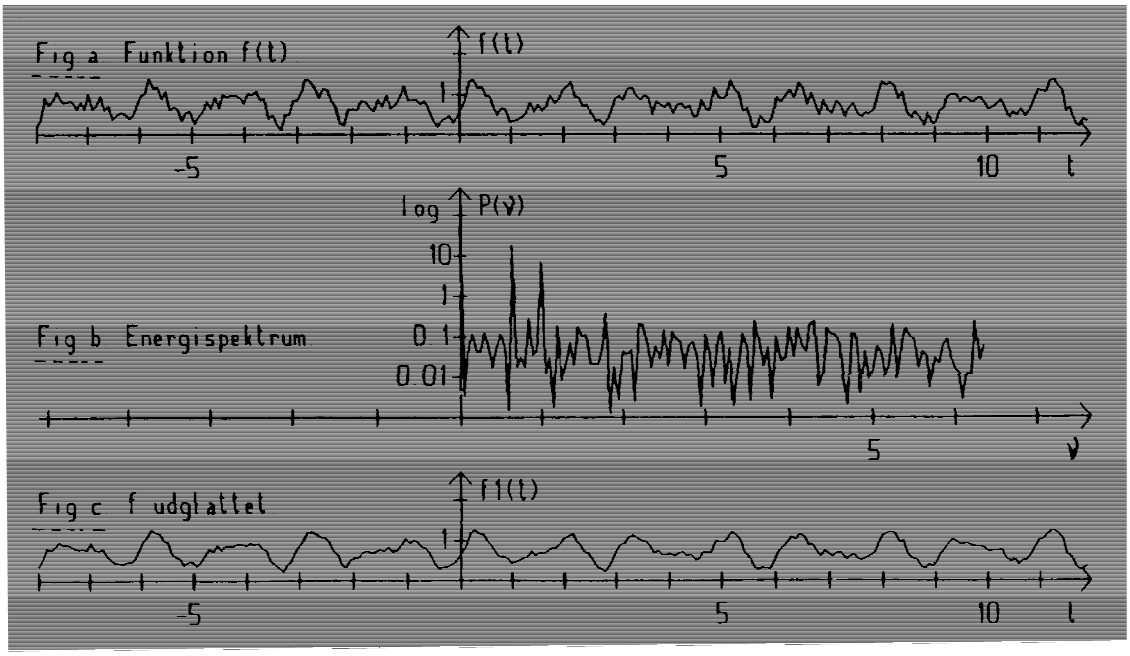
1) *Ved at ombytte* f *og* g *fås en ny krydskorrelation* c_1 *:*

$$c_1(t') = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f(t-t')\, dt, \qquad t' \in \mathbb{R}.$$

Vis, at $c_1(t') = c(-t')$ *for alle* $t' \in \mathbb{R}$. *(Vink: benyt f. eks. en substitution i integralet.)*

2) *Angiv så nøjagtigt som muligt en værdi* t', *for hvilken funktionerne* $f(t)$ *og* $g(t-t')$ *ligner hinanden mest muligt.* (*Vink: betragt figur d*).

Opgave 21.3 (*energispektrum, dataudglatning, optimal filtrering*)



Figur a *viser et målt koncentrationsforløb* $f(t)$ *for et stof A i en strøm.*

Figur b *er et logaritmisk diagram, der viser det såkaldte "energispektrum" for* $f(t)$ [1]

$$P(\nu) = |F(\nu)|^2 + |F(-\nu)|^2 , \qquad \nu \in [0;\infty[,$$

hvor $F(\nu)$ *er den Fouriertransformerede af funktionen* $f(t)$. *Den spektrale energitæthed* $P(\nu)$ *kan derfor i praksis hurtigt beregnes ved FFT: først findes* $F(\nu)$ *ved FFT, og derpå kan* $P(\nu)$ *beregnes.*

Figur c *viser en udglattet version* $f_1(t)$ *af den givne funktion* $f(t)$, *idet meget af "baggrundsstøjen" er fjernet* (*se spørgsmål 2*) .

1) *Afgør om noget af variationen af* $f(t)$ *er periodisk, og angiv i så fald de pågældende frekvenser. (Vink: betragt figur b).*

2) *For energispektret* $P(\nu)$ *af den givne funktion kan man oftest skønne en opspaltning* $P(\nu) = P_s(\nu) + P_n(\nu)$ *i "signal"* $P_s(\nu)$ *og "støj"* $P_n(\nu)$. *Indtegn på figur b en ret linie, som dit skøn over støjniveauet* $P_n(\nu)$ *ved alle frekvenser* $\nu \in [0;\infty[$.

(*Derpå kan en udglattet funktion* $f_1(t)$ *findes ved tilbagetransformation af*

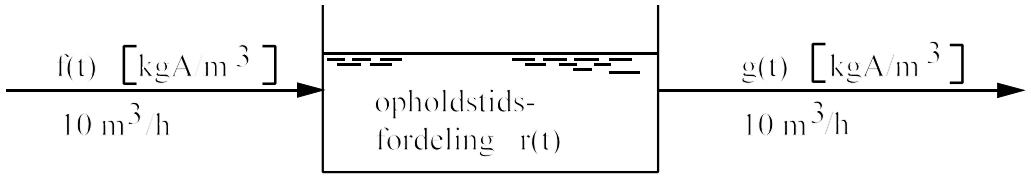
$$\frac{F(\nu)}{1 + \dfrac{P_n(\nu)}{P_s(\nu)}} .$$

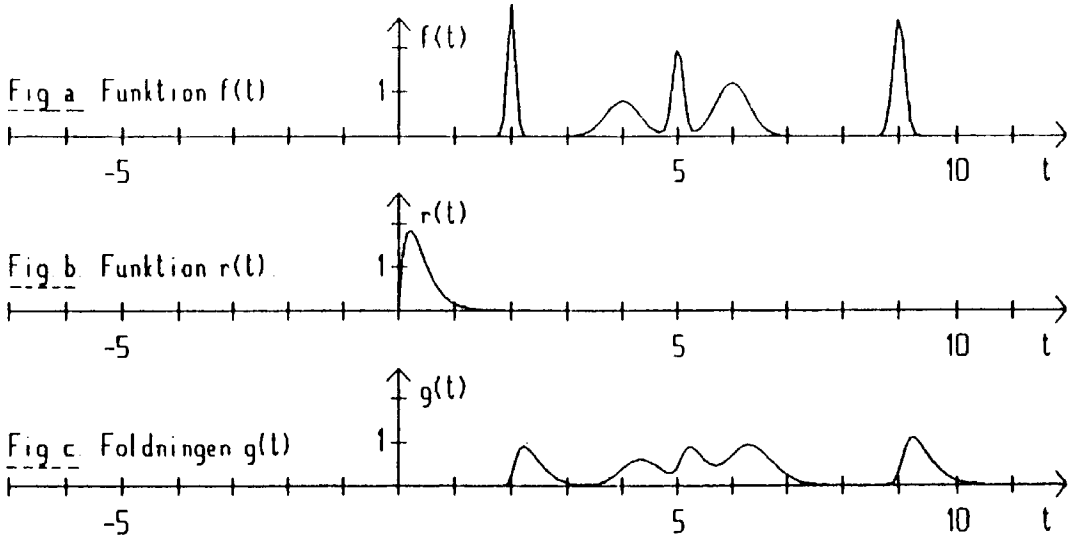
Metoden kaldes optimal filtrering. Er opspaltningen korrekt, fås nemlig en funktion $f_1(t)$ *med mindst mulig RMS-fejl.*)

---

[1] $P(\nu)$ *kaldes også den "ensidede spektrale energitæthed".*

Opgave 21.4 (*foldning, ændring af signal gennem apparatur*)





Figur a viser et målt koncentrationsforløb $f(t)$ *for et stof A i en strøm til en tank, som har god omrøring.*

Figur b viser en tidligere målt opholdstidsfordeling $r(t)$ *for stoffet i tanken (* $r(t')dt'$ *er den brøkdel af molekylerne i udløbet, som har haft opholdstider mellem* t' *og* $t' + dt'$ *i tanken).*

Figur c viser en beregnet funktion $g = f * r$, *den såkaldte foldning (engelsk 'convolution') af funktionerne f og r:*

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \cdot r(t-t')\, dt', \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Der gælder foldningssætningen

$$G(\nu) = F(\nu) \cdot R(\nu),$$

hvor store bogstaver betyder Fouriertransformeret.
Ud fra foldningssætningen kan funktionen $g(t)$ *i praksis hurtigt beregnes ved FFT: først findes de transformerede funktioner* $F(\nu)$ *og* $R(\nu)$ *ved FFT, og derpå findes funktionen* $g(t)$ *ved invers FFT anvendt på funktionen* $F(\nu) \cdot R(\nu)$.

1) *Vis, at foldning er kommutativ:* $f * r = r * f$, *dvs. vis, at*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t') \cdot r(t-t')\, dt' = \int_{-\infty}^{\infty} r(t') \cdot f(t-t')\, dt', \qquad t' \in \mathbb{R}.$$

(Foldning er i øvrigt også associativ: $f * (r * s) = (f * r) * s$*).*

2) *Forklar hvorfor foldningen af* $f(t)$ *og* $r(t)$ *netop giver koncentrationen* $g(t)$ *i udløbet fra tanken.*

(Mange procesenheder, måleapparater m.m. kan beskrives som en foldning. Faktisk gælder: en afbildning af input $f(t)$ *på output* $g(t)$ *er en foldning, hvis og kun hvis afbildningen er lineær og forskydningsinvariant, dvs. hvis:*

$$\begin{cases} f_1 \to g_1 \\ f_2 \to g_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a \cdot f_1 + b \cdot f_2 \to a \cdot g_1 + b \cdot g_2 \\ f_1 \text{ forsinket } k \to g_1 \text{ forsinket } k \end{cases}).$$

3) *Antag, at funktionerne* $r(t)$ *og* $g(t)$ *var kendte. Hvordan kunne man så i praksis forsøge at regne sig tilbage til funktionen* $f(t)$*? (Vink: benyt Fouriertransformation.)*
(Tilbageregningen kaldes affoldning, engelsk 'deconvolution'.)

4) *Hvordan kunne man i praksis nemt måle sig til opholdstidsfunktionen* $r(t)$*, som karakteriserer tanken? (Vink: Vælg en speciel funktion* $f(t)$*, og mål så* $g(t)$ *i udløbet.)*

Opgave 21A.1 (*varmeledning*)
Indledning. Opvarmningen i supplement 21A standses efter 23 minutter (dvs. $t = 2.3$*), og pladerne varmeisoleres fra omgivelserne (så er* $\frac{\partial T}{\partial X} = 0$ *på overfladerne).*
Hvordan varierer temperaturen derefter med tiden t i forskellige dybder af en plade?
Indføres variablen $t_1 = t - 2.3$ *samt x og q som i supplement 21A, kan problemet formuleres som følger:*

Problem. Til den partielle differentialligning

$$\frac{\partial q}{\partial t_1} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

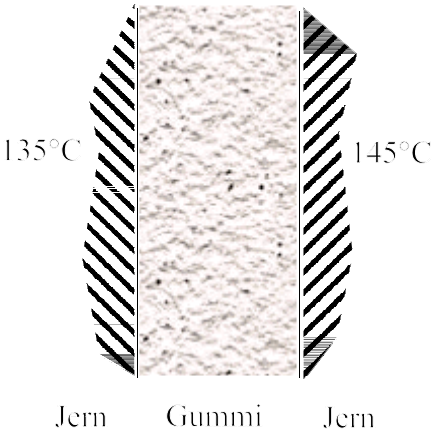
ønskes fundet en løsning, som tilfredsstiller 2 randbetingelser

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial x}(0, t_1) = 0 & \text{for } t_1 > 0 \\ \frac{\partial q}{\partial x}(\pi, t_1) = 0 & \text{for } t_1 > 0 \end{cases}$$

og 1 begyndelsesbetingelse

$$q(x,0) = \frac{4}{\pi} \cdot e^{-2.3} \sin(x) \qquad \text{for alle } x \in [0;\pi].$$

Opgave 21A.2 (*varmeledning*)
Indledning. Der betragtes samme problem som i supplement 21A, men de 2 jernflader har nu uens temperatur, henholdsvis $T_a = 135°C$ *og* $T_b = 145°C$.



Hvor hurtigt stiger temperaturen nu i forskellige dybder af materialet?
Indføres variablene x og t som i supplement 21A samt

$$q = \frac{T_a - T}{T_a - T_i} + p \cdot \frac{x}{\pi} \quad \left(hvor \quad p = \frac{T_b - T_a}{T_a - T_i} \right)$$

kan problemet formuleres som følger.

Problem. Til den partielle differentialligning

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

ønskes fundet en løsning, som tilfredsstiller 2 randbetingelser

$$\begin{cases} q(0,t) = 0 & for \quad t > 0 \\ q(\pi,t) = 0 & for \quad t > 0 \end{cases}$$

og 1 begyndelsesbetingelse

$$q(x,0) = 1 + p \cdot \frac{x}{\pi} \qquad for\ alle \quad x \in]0;\pi[\,.$$

Opgave 21A.3 (*partiel differentialligning*)
Til den partielle differentialligning

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 3t^2 \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

ønskes fundet en løsning, som tilfredsstiller 2 randbetingelser

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial x}(0,t) = 0 & for \quad t > 0 \\ \frac{\partial q}{\partial x}(\pi,t) = 0 & for \quad t > 0 \end{cases}$$

og 1 begyndelsesbetingelse

$$q(x,0) = \sin(x) \qquad for\ alle \quad x \in [0;\pi]\,.$$

Opgave 21A.4 (*partiel differentialligning*)
Til den partielle differentialligning

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \tanh(t) \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

ønskes fundet en løsning, som tilfredsstiller 2 randbetingelser

$$\begin{cases} q(0,t) = 0 & \textit{for} \quad t > 0 \\ q(\pi,t) = 0 & \textit{for} \quad t > 0 \end{cases}$$

og 1 begyndelsesbetingelse

$$q(x,0) = x \quad \textit{for alle} \quad x \in]0;\pi[.$$

APPENDIX

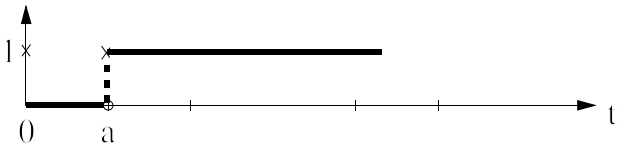
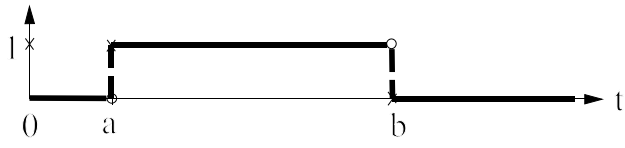
APPENDIX 15.1. TABEL 1 OVER LAPLACE-TRANSFORMEREDE.

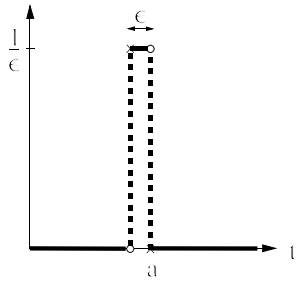
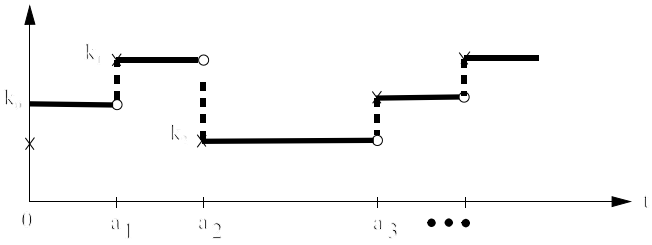
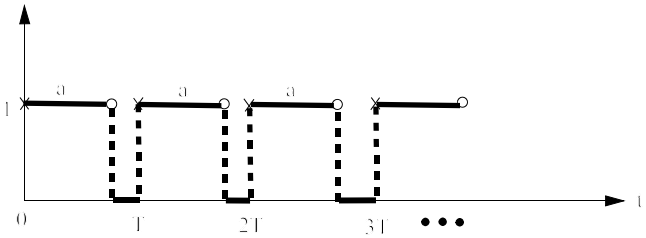
Nr	$f(t)$	$F(s)$
1)	1	$\frac{1}{s}$
2)	t	$\frac{1}{s^2}$
3)	t^2	$\frac{2}{s^3}$
4)	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5)	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6)	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7)	$t^2 \cdot e^{-at}$	$\frac{2}{(s+a)^3}$
8)	$t^n \cdot e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
9)	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
10)	$t \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
11)	$t^2 \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{2s^3-6\omega^2 s}{(s^2+\omega^2)^3}$
12)	$t^3 \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{6s^4-36\omega^2 s^2+6\omega^4}{(s^2+\omega^2)^4}$
13)	$e^{-bt} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{s+b}{(s+b)^2+\omega^2}$
14)	$t \cdot e^{-bt} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{(s+b)^2-\omega^2}{\left[(s+b)^2+\omega^2\right]^2}$
15)	$t^2 \cdot e^{-bt} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{2(s+b)^3-6\omega^2(s+b)}{\left[(s+b)^2+\omega^2\right]^3}$

Nr	$f(t)$	$F(s)$
16)	$t^3 \cdot e^{-bt} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{6(s+b)^4 - 36\omega^2(s+b)^2 + 6\omega^4}{\left[(s+b)^2 + \omega^2\right]^4}$
17)	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
18)	$t \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
19)	$t^2 \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{6\omega s^2 - 2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^3}$
20)	$t^3 \cdot \sin(\omega t)$	$24\,\frac{\omega s^3 - \omega^3 s}{(s^2 + \omega^2)^4}$
21)	$e^{-bt} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+b)^2 + \omega^2}$
22)	$t \cdot e^{-bt} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega(s+b)}{\left[(s+b)^2 + \omega^2\right]^2}$
23)	$t^2 \cdot e^{-bt} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{6\omega(s+b)^2 - 2\omega^3}{\left[(s+b)^2 + \omega^2\right]^3}$
24)	$t^3 \cdot e^{-bt} \cdot \sin(\omega t)$	$24\,\frac{\omega(s+b)^3 - \omega^3(s+b)}{\left[(s+b)^2 + \omega^2\right]^4}$
25)	$\cos(\omega t + \phi)$	$\frac{s \cdot \cos(\phi) - \omega \cdot \sin(\phi)}{s^2 + \omega^2}$
26)	$t \cdot \cos(\omega t + \phi)$	$\frac{(s^2 - \omega^2) \cdot \cos(\phi) - 2\omega s \cdot \sin(\phi)}{(s^2 + \omega^2)^2}$
27)	$t^2 \cdot \cos(\omega t + \phi)$	$\frac{(2s^3 - 6\omega^2 s) \cdot \cos(\phi) + (-6\omega s^2 + 2\omega^3) \cdot \sin(\phi)}{(s^2 + \omega^2)^3}$
28)	$t^3 \cdot \cos(\omega t + \phi)$	$\frac{\left(6s^4 - 36\omega^2 s^2 + 6\omega^4\right) \cdot \cos(\phi) + \left(-24\omega s^3 + 24\omega^3 s\right) \cdot \sin(\phi)}{(s^2 + \omega^2)^4}$
29)	$e^{-bt} \cdot \cos(\omega t + \phi)$	$\frac{(s+b) \cdot \cos(\phi) - \omega \cdot \sin(\phi)}{(s+b)^2 + \omega^2}$
30)	$t \cdot e^{-bt} \cdot \cos(\omega t + \phi)$	$\frac{\left((s+b)^2 - \omega^2\right) \cdot \cos(\phi) - 2\omega(s+b) \cdot \sin(\phi)}{((s+b)^2 + \omega^2)^2}$
31)	$t^2 \cdot e^{-bt} \cdot \cos(\omega t + \phi)$	$\frac{\left(2(s+b)^3 - 6\omega^2(s+b)\right) \cdot \cos(\phi) + \left(-6\omega(s+b)^2 + 2\omega^3\right) \cdot \sin(\phi)}{((s+b)^2 + \omega^2)^3}$

Nr	$f(t)$	$F(s)$
32)	$t^3 \cdot e^{-bt} \cdot \cos(\omega t + \phi)$	$\frac{\left(6(s+b)^4 - 36\omega^2(s+b)^2 + 6\omega^4\right)\cdot\cos(\phi) + \left(-24\omega(s+b)^3 + 24\omega^3(s+b)\right)\cdot\sin(\phi)}{((s+b)^2+\omega^2)^4}$
33)	$\sin(\omega t + \phi)$	$\frac{s\cdot\sin(\phi) + \omega\cdot\cos(\phi)}{s^2+\omega^2}$
34)	$t\cdot\sin(\omega t + \phi)$	$\frac{(s^2-\omega^2)\cdot\sin(\phi) + 2\omega s\cdot\cos(\phi)}{(s^2+\omega^2)^2}$
35)	$t^2\cdot\sin(\omega t + \phi)$	$\frac{(2s^3 - 6\omega^2 s)\cdot\sin(\phi) + (6\omega s^2 - 2\omega^3)\cdot\cos(\phi)}{(s^2+\omega^2)^3}$
36)	$t^3\cdot\sin(\omega t + \phi)$	$\frac{\left(6s^4 - 36\omega^2 s^2 + 6\omega^4\right)\cdot\sin(\phi) + \left(24\omega s^3 - 24\omega^3 s\right)\cdot\cos(\phi)}{(s^2+\omega^2)^4}$
37)	$e^{-bt}\cdot\sin(\omega t + \phi)$	$\frac{(s+b)\cdot\sin(\phi) + \omega\cdot\cos(\phi)}{(s+b)^2+\omega^2}$
38)	$t\cdot e^{-bt}\cdot\sin(\omega t + \phi)$	$\frac{\left((s+b)^2-\omega^2\right)\cdot\sin(\phi) + 2\omega(s+b)\cdot\cos(\phi)}{((s+b)^2+\omega^2)^2}$
39)	$t^2\cdot e^{-bt}\cdot\sin(\omega t + \phi)$	$\frac{\left(2(s+b)^3 - 6\omega^2(s+b)\right)\cdot\sin(\phi) + \left(6\omega(s+b)^2 - 2\omega^3\right)\cdot\cos(\phi)}{((s+b)^2+\omega^2)^3}$
40)	$t^3\cdot e^{-bt}\cdot\sin(\omega t + \phi)$	$\frac{\left(6(s+b)^4 - 36\omega^2(s+b)^2 + 6\omega^4\right)\cdot\sin(\phi) + \left(24\omega(s+b)^3 - 24\omega^3(s+b)\right)\cdot\cos(\phi)}{((s+b)^2+\omega^2)^4}$
41)	$\cosh(ct)$	$\frac{s}{s^2-c^2}$
42)	$t\cdot\cosh(ct)$	$\frac{s^2+c^2}{(s^2-c^2)^2}$
43)	$t^2\cdot\cosh(ct)$	$\frac{2s^3 + 6c^2 s}{(s^2-c^2)^3}$
44)	$t^3\cdot\cosh(ct)$	$\frac{6s^4 + 36c^2 s^2 + 6c^4}{(s^2-c^2)^4}$
45)	$e^{-bt}\cdot\cosh(ct)$	$\frac{s+b}{(s+b)^2-c^2}$
46)	$t\cdot e^{-bt}\cdot\cosh(ct)$	$\frac{(s+b)^2+c^2}{\left[(s+b)^2-c^2\right]^2}$
47)	$t^2\cdot e^{-bt}\cdot\cosh(ct)$	$\frac{2(s+b)^3 + 6c^2(s+b)}{\left[(s+b)^2-c^2\right]^3}$

Nr	$f(t)$	$F(s)$
48)	$t^3 \cdot e^{-bt} \cdot \cosh(ct)$	$\frac{6(s+b)^4 + 36c^2(s+b)^2 + 6c^4}{\left[(s+b)^2 - c^2\right]^4}$
49)	$\sinh(ct)$	$\frac{c}{s^2 - c^2}$
50)	$t \cdot \sinh(ct)$	$\frac{2cs}{(s^2 - c^2)^2}$
51)	$t^2 \cdot \sinh(ct)$	$\frac{6cs^2 + 2c^3}{(s^2 - c^2)^3}$
52)	$t^3 \cdot \sinh(ct)$	$24\,\frac{cs^3 + c^3 s}{(s^2 - c^2)^4}$
53)	$e^{-bt} \cdot \sinh(ct)$	$\frac{c}{(s+b)^2 - c^2}$
54)	$t \cdot e^{-bt} \cdot \sinh(ct)$	$\frac{2c(s+b)}{\left[(s+b)^2 - c^2\right]^2}$
55)	$t^2 \cdot e^{-bt} \cdot \sinh(ct)$	$\frac{6c(s+b)^2 + 2c^3}{\left[(s+b)^2 - c^2\right]^3}$
56)	$t^3 \cdot e^{-bt} \cdot \sinh(ct)$	$24\,\frac{c(s+b)^3 + c^3(s+b)}{\left[(s+b)^2 - c^2\right]^4}$
57)	$\cosh(ct + q)$	$\frac{s \cdot \cosh(q) + c \cdot \sinh(q)}{s^2 - c^2}$
58)	$t \cdot \cosh(ct + q)$	$\frac{(s^2 + c^2) \cdot \cosh(q) + 2cs \cdot \sinh(q)}{(s^2 - c^2)^2}$
59)	$t^2 \cdot \cosh(ct + q)$	$\frac{(2s^3 + 6c^2 s) \cdot \cosh(q) + (6cs^2 + 2c^3) \cdot \sinh(q)}{(s^2 - c^2)^3}$
60)	$t^3 \cdot \cosh(ct + q)$	$\frac{\left(6s^4 + 36c^2 s^2 + 6c^4\right) \cdot \cosh(q) + \left(24cs^3 + 24c^3 s\right) \cdot \sinh(q)}{(s^2 - c^2)^4}$
61)	$e^{-bt} \cdot \cosh(ct + q)$	$\frac{(s+b) \cdot \cosh(q) + c \cdot \sinh(q)}{(s+b)^2 - c^2}$
62)	$t \cdot e^{-bt} \cdot \cosh(ct + q)$	$\frac{\left((s+b)^2 + c^2\right) \cdot \cosh(q) + 2c(s+b) \cdot \sinh(q)}{((s+b)^2 - c^2)^2}$
63)	$t^2 \cdot e^{-bt} \cdot \cosh(ct + q)$	$\frac{\left(2(s+b)^3 + 6c^2(s+b)\right) \cdot \cosh(q) + \left(6c(s+b)^2 + 2c^3\right) \cdot \sinh(q)}{((s+b)^2 - c^2)^3}$

Nr	$f(t)$	$F(s)$
64)	$t^3 \cdot e^{-bt} \cdot \cosh(ct+q)$	$\frac{\left(6(s+b)^4 + 36c^2(s+b)^2 + 6c^4\right)\cdot\cosh(q) + \left(24c(s+b)^3 + 24c^3(s+b)\right)\cdot\sinh(q)}{((s+b)^2 - c^2)^4}$
65)	$\sinh(ct+q)$	$\frac{s\cdot\sinh(q) + c\cdot\cosh(q)}{s^2 - c^2}$
66)	$t\cdot\sinh(ct+q)$	$\frac{(s^2+c^2)\cdot\sinh(q) + 2cs\cdot\cosh(q)}{(s^2 - c^2)^2}$
67)	$t^2\cdot\sinh(ct+q)$	$\frac{(2s^3 + 6c^2 s)\cdot\sinh(q) + (6cs^2 + 2c^3)\cdot\cosh(q)}{(s^2 - c^2)^3}$
68)	$t^3\cdot\sinh(ct+q)$	$\frac{\left(6s^4 + 36c^2s^2 + 6c^4\right)\cdot\sinh(q) + \left(24cs^3 + 24c^3 s\right)\cdot\cosh(q)}{(s^2 - c^2)^4}$
69)	$e^{-bt}\cdot\sinh(ct+q)$	$\frac{(s+b)\cdot\sinh(q) + c\cdot\cosh(q)}{(s+b)^2 - c^2}$
70)	$t\cdot e^{-bt}\cdot\sinh(ct+q)$	$\frac{\left((s+b)^2 + c^2\right)\cdot\sinh(q) + 2c(s+b)\cdot\cosh(q)}{((s+b)^2 - c^2)^2}$
71)	$t^2\cdot e^{-bt}\cdot\sinh(ct+q)$	$\frac{\left(2(s+b)^3 + 6c^2(s+b)\right)\cdot\sinh(q) + \left(6c(s+b)^2 + 2c^3\right)\cdot\cosh(q)}{((s+b)^2 - c^2)^3}$
72)	$t^3\cdot e^{-bt}\cdot\sinh(ct+q)$	$\frac{\left(6(s+b)^4 + 36c^2(s+b)^2 + 6c^4\right)\cdot\sinh(q) + \left(24c(s+b)^3 + 24c^3(s+b)\right)\cdot\cosh(q)}{((s+b)^2 - c^2)^4}$
73)	$u(t-a)$  enhedstrinfunktion	$\frac{1}{s}e^{-as}$
74)	$u(t-a) - u(t-b)$  rektangelfunktion	$\frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$

Nr	$f(t)$	$F(s)$
75)	$\delta_\varepsilon(t-a) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \text{ for } t \in [a-\varepsilon; a[\\ 0 \quad \text{ellers.} \end{cases}$  deltafunktion	e^{-as} for $\varepsilon \approx 0$
76)	$k_0 + (k_1 - k_0)u(t-a_1) + (k_2 - k_1)u(t-a_2) + (k_3 - k_2)u(t-a_3) + \ldots$  tilnærmelse af funktion	$\frac{1}{s}\left(k_0 + (k_1 - k_0)e^{-a_1 s} + (k_2 - k_1)e^{-a_2 s} + (k_3 - k_2)e^{-a_3 s} + \ldots\right)$
77)	$1 - u(t-a) + u(t-T) - u(t-a-T) + u(t-2T) - u(t-a-2T) + u(t-3T) - \ldots$  periodisk rektangel- funktion	$\frac{1 - e^{-as}}{s(1 - e^{-Ts})}$

APPENDIX 15.2 TABEL 2 OVER $\mathfrak{L}^{-1}$ (BRUDDEN RATIONAL FUNKTION)

	F(*s*)	*f*(*t*)
NÆVNER AF 1. GRAD		
78	$\frac{A}{s+a}$	Ae^{-at}
79	$\frac{A}{cs+1}$	$\frac{A}{c}e^{-\frac{t}{c}}$
NÆVNER AF 2. GRAD		**arg(x,y) er vektoren** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **'s retningsvinkel.**
80	$\frac{As+B}{(s+a)^2}$	$\left[(1-at)A+Bt\right]e^{-at}$
81	$\frac{As+B}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{B-aA}{b-a}e^{-at}+\frac{bA-B}{b-a}e^{-bt}$
82	$\frac{As+B}{(s+a)^2+b^2}$	$\left[A\cdot\cos(bt)+\frac{B-aA}{b}\sin(bt)\right]e^{-at}$ eller $\sqrt{A^2+\left(\frac{B-aA}{b}\right)^2}\,e^{-at}\sin(bt+\varphi),\quad \varphi=\arg\left(\frac{B-aA}{b},A\right)$
NÆVNER AF 3. GRAD		**arg(x,y) er vektoren** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **'s retningsvinkel.**
83	$\frac{As^2+Bs+C}{(s+a)^3}$	$\left[A+(B+2aA)t+\left(a^2A-aB+C\right)\frac{t^2}{2}\right]e^{-at}$
84	$\frac{As^2+Bs+C}{(s+a)(s+b)^2}$	$\frac{a^2A-aB+C}{(b-a)^2}e^{-at}+\left[\frac{b(b-2a)A+aB-C}{(b-a)^2}+\frac{-b^2A+bB-C}{b-a}t\right]e^{-bt}$
85	$\frac{As^2+Bs+C}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{a^2A-aB+C}{(b-a)(c-a)}e^{-at}+\frac{b^2A-bB+C}{(a-b)(c-b)}e^{-bt}+\frac{c^2A-cB+C}{(a-c)(b-c)}e^{-ct}$

	F(*s*)	***f*(*t*)**
86	$\frac{As^2+Bs+C}{(s+a)\left[(s+b)^2+c^2\right]}$	$\frac{1}{(a-b)^2+c^2}\left[\left(a^2A-aB+C\right)e^{-at}+\left\{\left(b^2-2ab+c^2\right)A+aB-C\right\}e^{-bt}\cos(ct)\right.$ $\left.+\frac{1}{c}\left\{\left(ab^2-ac^2-b^3-bc^2\right)A+\left(b^2+c^2-ab\right)B+(a-b)C\right\}e^{-bt}\sin(ct)\right]$ eller $\frac{a^2A-aB+C}{(a-b)^2+c^2}e^{-at}+\frac{1}{c}\sqrt{\frac{\left[\left(b^2-c^2\right)A-bB+C\right]^2+c^2(B-2bA)^2}{(a-b)^2+c^2}}e^{-bt}\sin(ct+\varphi)$ hvor $\varphi=\arg\left(\left[b^2-c^2\right]A-bB+C,c\left[B-2bA\right]\right)-\arg(a-b,c)$
87	$\frac{As^2+Bs+C}{s^3+a^3}$	$\frac{1}{3a^2}\left[\left(a^2A-aB+C\right)e^{-at}+\left(2a^2A+aB-C\right)e^{\frac{at}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}at\right)+\sqrt{3}(aB+C)e^{\frac{at}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}at\right)\right]$ eller $\frac{1}{3a^2}\left[\left(a^2A-aB+C\right)e^{-at}+\sqrt{\left(2a^2A+aB-C\right)^2+3(aB+C)^2}\,e^{\frac{at}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}at+\varphi\right)\right]$ hvor $\varphi=\arg\left(\sqrt{3}(aB+C),2a^2A+aB-C\right)$

APPENDIX 15.3 REGNEREGLER FOR LAPLACE-TRANSFORMATION

$F(s)$	$f(t)$		se side
$a\cdot F(s)+b\cdot G(s)$	$a\cdot f(t)+b\cdot g(t)$	linearitet	4
$s\cdot F(s)-f(0)$	$\frac{df}{dt}(t)$		
$s^2\cdot F(s)-s\cdot f(0)-\frac{df}{dt}(0)$	$\frac{d^2f}{dt^2}(t)$		
$s^3\cdot F(s)-s^2\cdot f(0)-s\cdot\frac{df}{dt}(0)-\frac{d^2f}{dt^2}(0)$	$\frac{d^3f}{dt^3}(t)$	**differentiation**	6
$s^4\cdot F(s)-s^3\cdot f(0)-s^2\cdot\frac{df}{dt}(0)-s\cdot\frac{d^2f}{dt^2}(0)-\frac{d^3f}{dt^3}(0)$	$\frac{d^4f}{dt^4}(t)$		
. . .	. . .		
$s^n\cdot F(s)-s^{n-1}\cdot f(0)-s^{n-2}\cdot\frac{df}{dt}(0)-\ldots-\frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}(0)$	$\frac{d^nf}{dt^n}(t)$		
	$\int_0^t f(\theta)\,d\theta$	integration	7
$\frac{1}{s}F(s)$	$u(t-a)\cdot f(t-a)$	forsinkelse	14
$e^{-as}F(s)$	$e^{-at}f(t)$	forskydning	22
$F(s+a)$	$f\left(\frac{t}{a}\right)$	affinitet	22
$a\cdot F(as)$	$u(t-c)\cdot\frac{1}{a}\cdot f\left(\frac{t-c}{a}\right)$	affinitet + forsinkelse	-
$e^{-cs}F(as)$	$u(t-c)\cdot e^{-b(t-c)}\cdot f(t-c)$	forskydn. + forsink.	-
$e^{-cs}F(s+b)$	$\frac{1}{a}\cdot e^{-\frac{b}{a}t}\cdot f\left(\frac{t}{a}\right)$	forskydning + affinitet	-
$F(as+b)$			22
$e^{-cs}F(as+b)$	$u(t-c)\cdot\frac{1}{a}\cdot e^{-\frac{b}{a}(t-c)}\cdot f\left(\frac{t-c}{a}\right)$	forskydn.+affin. + forsinkelse	22
$\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$	$f(t)$ (periode T)	periodicitet	22
$F(s)\cdot G(s)$	$f*g:\ \int_0^t f(t-v)\cdot g(v)\,dv$	foldning	22
$\frac{\partial^n F(x,s)}{\partial x^n}$	$\frac{\partial^n f(x,t)}{\partial x^n}$	differentiation mht. parameter	
$\frac{d^nF(s)}{ds^n}$	$(-t)^n\cdot f(t)$	t-multiplikation	

$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$			22
$\lim_{s \to \infty} sF(s) = f(0)$		begyndelsesværdi	22
$\lim_{s \to 0+} sF(s) = \lim_{t \to \infty} f(t)$	(hvis $\lim_{t \to \infty} f(t)$ eksisterer)	slutværdi	22

APPENDIX 15.4 TABEL OVER KONSTANTER VED NUMERISK LAPLACE - TILBAGETRANSFORMATION

N = 2	a = 0.7 b = 2 C_1 =2.568 C_2 = -1.544
N = 4	a = 2.23 b = 1.5 C_1 =18.8210 C_2 = -37.4849 C_3 = 25.9963 C_4 = -6.3282
N = 8	a = 2.87 b = 1.3 C_1 =-102.25733 C_2 = 748.24393 C_3 =-2026.19854 C_4 = 2890.68823 C_5 =-2440.17420 C_6 = 1244.10618 C_7 =-358.89850 C_8 = 45.49009

LITTERATUR

Se også litteraturlisten i bind 1.

1) T.M. Apostol: "Mathematical Analysis", Addison-Wesley Publishing Company, 1963.
Kapitel 15 er en moderne fremstilling af ortogonalsystemer og Fourieranalysen.

2) E.C. Titchmarsh: "The Theory of Functions", Oxford University Press, 1939.
Bogen er et kendt standardværk. Kapitel 13 handler om Fourieranalysen. Det er især betingelserne for Fourierrækkers konvergens, der på en dybtgående og levende måde forklares her.

3) W.E. Boyce and R.C. DiPrima: "Elementary Differential Equations", Wiley, 1977.
Kapitel 4 omhandler rækkeløsninger til differentialligninger.

4) G. Doetsch: "Theorie und Anvendung der Laplace-Transformation", Springer, 1937.
Et kendt standardværk.

5) G.E. Roberts and H. Kaufman: "Table of Laplace-Transforms", W.B. Saunders Company, 1966.
Et meget righoldigt tabelværk på 367 sider.

6) A.Erdelyi (editor): "Tables of Integral Transforms", Vol. I, McGraw-Hill, 1954.
Et kendt tabelværk på 388 sider, hvoraf 175 sider vedrører Laplace-transformationen.

7) Francis Scheid: "Numerical Analysis", McGraw-Hill, 1968.

8) G. Fodor: "Laplace Transforms in Engineering", Budapest, 1965.

9) Jean-Paul Marchand: "Distributions", North-Holland Publishing Company, 1962.

10) Krylov and Skoblya: "Handbook of numerical inversion of Laplace transforms", IPST, Jerusalem, 1969.
Der omtales kort en hel del forskellige metoder, hvorefter der følger flere hundrede sider med tabeller.

11) B. Davies and B. Martin: "Journal of Computational Physics 33 ", 1979, side 1-32: "Numerical Inversion of the Laplace Transform: a Survey and Comparison of Methods".

12) R.V. Churchill: “Operational Mathematics", McGraw-Hill Book Company, 1958.
Bogen er et videregående standardværk om Laplace-transformationen. Flere større eksempler med partielle differentialligninger fra anvendelserne er gennemregnet.

13) M.R. Spiegel: “Theory and Problems of Laplace Transforms", Schaum’s Outline Series, McGraw-Hill Book Company, 1965.
De nødvendige sætninger og regneregler for Laplace-transformationen forklares kort. Bogen består hovedsagelig af mange gennemregnede eksempler, hvoraf en stor del er sat i relation til ingeniørmæssige anvendelser.

14) W.H. Press et al: “Numerical Recipies", Cambridge University Press, 1986.
I kapitel 12 omtales den praktiske brug af den diskrete Fouriertransformation nærmere, og der er vist færdige programmer (Fortran og Pascal). Her findes desuden anvisninger på, hvordan man kan reducere fejlkilder (‘aliasing’, ‘wrapping’, ‘leakage’).

15) Per Christian Hansen: “SVD - theory and applications”, DTU, Lyngby, report NI-84-05, november 1984, ISSN 0105-4988.
Giver en all-round og fremragende forklaring af hele emnet med henblik på praktiske numeriske anvendelser. Kan bruges som en SVD håndbog.

FACITLISTE

KAPITEL 15

15.1 (1) $\frac{1}{s}$ (2) $\frac{2}{s^3}$ (3) $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ (4) $\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

15.2 (1) $\frac{7}{s}+\frac{15e^8}{(s+2)^2+9}+\frac{750}{(s+2\cdot\ln(5))^2}$

(2) $\frac{3}{s}+2\sqrt{2}\frac{s^2+2s-1}{((s+2)^2+1)^2}+\frac{6}{s+2}-\frac{e^6}{s+2}+\frac{1}{s+\ln(2)}$

(3) $\frac{2}{s^2+4}+\frac{6}{s^4}+\frac{1}{s-\ln(3)}+\frac{s+2}{\sqrt{2}(s^2+4)}+\frac{1}{s-\frac{1}{3}\ln(2)}$

(4) $\frac{\sqrt{\pi}}{s}+\frac{e^3}{(s+1)^2}+\frac{1}{\left(s-\frac{\ln(3)}{2}\right)^2+1}+\frac{1}{2s}-\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4}+\frac{s-1}{(s-1)^2+1}+\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$

15.3 (1) $3e^{-2t}-e^{2t}+2e^{4t}+\frac{7}{25}-\frac{7}{25}e^{-3t}\cos(4t)-\frac{21}{100}e^{-3t}\sin(4t)$

(2) $1+2te^{-3t}+\left(\cos(5t)-\frac{1}{5}\sin(5t)\right)e^{-t}-\frac{1}{4}+\frac{t}{4}+\left(\frac{1}{4}+\frac{t}{4}\right)e^{-2t}$

(3) $4e^{5t}+\frac{8}{3}e^{-\frac{t}{3}}+\frac{1}{40}-\frac{1}{16}e^{-2t}+\frac{3}{80}e^{-4t}\cos(2t)+\frac{1}{80}e^{-4t}\sin(2t)$

(4) $\left(\cos(2t)-\frac{5}{2}\sin(2t)\right)e^{-5t}+2+\left(-2-2t-t^2\right)e^{-t}+\frac{t^4}{24}e^{-t}$

15.4 (1) $Y=\frac{4}{(s-3)(s+1)^2}+\frac{1}{(s-3)(s+1)}$, $y=\frac{1}{2}e^{3t}+\left(-\frac{1}{2}-t\right)e^{-t}$

(2) $Y=\frac{1}{(s+3)^2}+\frac{7}{(s+3)}$, $y=te^{-3t}+7e^{-3t}$

(3) $Y=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$, $y=\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t$

(4) $Y = \dfrac{s+1}{s^2+1} + \dfrac{2}{(s^2+1)^2} - \dfrac{2}{(s-1)(s^2+1)}$, $\quad y = (2-t)\cos t + 3\sin t - \mathrm{e}^{t}$

(5) $Y = \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{(s+1)^3}$, $\quad y = \mathrm{e}^{-t} + \dfrac{t^2}{2}\mathrm{e}^{-t}$

(6) $Y = \dfrac{6s+14}{(s+1)(s-1)(s^2+1)} + \dfrac{4}{s-2} + \dfrac{5}{s+1} - \dfrac{15}{s-1} + \dfrac{6s+12}{s^2+1}$

$y = 3\mathrm{e}^{-t} - 10\mathrm{e}^{t} + 4\mathrm{e}^{2t} + 3\cos t + 5\sin t$

15.5 $Z = \dfrac{2}{(s+1)(s+4)}$, $\quad z = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-t} - \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t}$

15.6 $Y_3 = \dfrac{1}{s(2s+1)^3}$, $\quad y_3 = 1 + \left(-1 - \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{8}t^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$

15.7 $Z = \dfrac{60}{s(s+4)(s+8)} + \dfrac{s+10}{(s+4)(s+8)}$, $\quad z = \dfrac{15}{8} - \dfrac{9}{4}\mathrm{e}^{-4t} + \dfrac{11}{8}\mathrm{e}^{-8t}$

15.8 (1) $Y = \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)^2} + \dfrac{\frac{1}{3}s+1}{(s+2)^2}$, $\quad y = 2\mathrm{e}^{-t} + \left(-\dfrac{5}{3} - \dfrac{2}{3}t\right)\mathrm{e}^{-2t}$

(2) $Y = \dfrac{s-1}{(s+1)(s+5)^2}$, $\quad y = -\dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-t} + \left(\dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{2}t\right)\mathrm{e}^{-5t}$

(3) $Y = \dfrac{1}{s+2} + \dfrac{1}{(s+2)^2}$, $\quad y = (1+t)\mathrm{e}^{-2t}$

15.9 hedder nu 15.C1

15.10 (1) $\sin t + (-\sin t + 1)u\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right) + (-1 + \cos t)u(t-\pi)$

(2) $2t + \left(-2t + \mathrm{e}^{1-t}\right)u(t-1) + \left(-\mathrm{e}^{1-t} + 2\right)u(t-3)$

(3) $t + (-t+2)u(t-2) + \left(-2 + 2\mathrm{e}^{3-t}\right)u(t-3)$

(4) $2t + (3 - 3t)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$

15.11 (1) $e^{-\pi s}\dfrac{-1}{s^2+1}$, $u(t-4)\,(t-4)^2\,e^{-5(t-4)}$

(2) $e^{-s}\left(\dfrac{2}{s^3}+\dfrac{2}{s^2}+\dfrac{1}{s}\right)$, $u(t-1)\cos(2(t-1))$

(3) $e^{-2s}\cdot\dfrac{s\cdot\sinh 6+3\cosh 6}{s^2-9}$, $u(t-3)\cdot\left(e^{-(t-3)}-e^{-2(t-3)}\right)$

(4) $e^{-4s-4}\left(\dfrac{1}{(s+1)^2}+\dfrac{4}{s+1}\right)$, $u(t-5)\cdot(t-5)e^{-2(t-5)}$

15.12 (1) $\dfrac{1}{s^2+1}+e^{-\frac{\pi}{2}s}\left(\dfrac{-s}{s^2+1}+\dfrac{1}{s}\right)+e^{-\pi s}\left(-\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+1}\right).$

(2) $\dfrac{2}{s^2}+e^{-s}\left(\dfrac{-2}{s^2}-\dfrac{2}{s}+\dfrac{1}{s+1}\right)+e^{-3s}\left(-\dfrac{e^{-2}}{s+1}+\dfrac{2}{s}\right).$

(3) $\dfrac{1}{s^2}-e^{-2s}\cdot\dfrac{1}{s^2}+e^{-3s}\left(\dfrac{-2}{s}+\dfrac{2}{s+1}\right)$ (4) $\dfrac{2}{s^2}-3e^{-s}\cdot\dfrac{1}{s^2}+e^{-2s}\cdot\dfrac{1}{s^2}$

15.13 $Y=\dfrac{1}{(s+1)\cdot s^2}-\dfrac{1}{(s+1)\cdot s^2}e^{-3s}$, $y=e^{-t}-1+t+u(t-3)\left(-e^{3-t}-t+4\right)$

$$Z=\frac{3e^{-2s}}{s+2}+\frac{2e^{-4s}}{(s+1)(s+2)s^2}+\frac{-2e^{-7s}}{(s+1)(s+2)s^2}$$

$$z=3\cdot u(t-2)\,e^{-2(t-2)}+u(t-4)\left(2e^{-(t-4)}-\frac{1}{2}e^{-2(t-4)}-\frac{3}{2}+(t-4)\right)$$
$$+u(t-7)\left(-2e^{-(t-7)}+\frac{1}{2}e^{-2(t-7)}+\frac{3}{2}-(t-7)\right)$$

15.14 $Z=\dfrac{3}{(s+2)(s+7)}+\dfrac{9e^{-4s}}{s(s+7)}-\dfrac{3e^{-8-4s}}{(s+2)(s+7)}+\dfrac{4e^{-3s}}{(s+2)(s+7)}$

$$z=\frac{3}{5}e^{-2t}-\frac{3}{5}e^{-7t}+u(t-3)\left(\frac{4}{5}e^{-2(t-3)}-\frac{4}{5}e^{-7(t-3)}\right)$$
$$+u(t-4)\left(\frac{9}{7}-\frac{9}{7}e^{-7(t-4)}-e^{-8}\cdot\frac{3}{5}e^{-2(t-4)}+e^{-8}\cdot\frac{3}{5}e^{-7(t-4)}\right)$$

15.15 (1) $Y = \dfrac{e^{1-s}}{(s+1)(s-1)} + \dfrac{e^{-s}}{s+1}$, $y = u(t-1)\left(\dfrac{e}{2}e^{t-1} + (1-\dfrac{e}{2})e^{-(t-1)}\right)$

(2) $Y = \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{e^{-s}}{s(s+1)} + \dfrac{e^{-2s}}{s+1}$, $y = e^{-t} + u(t-1)\left(1-e^{-(t-1)}\right) + u(t-2)\,e^{-(t-2)}$

15.16 hedder nu 15.D1

15.17 (1) $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^t\sqrt{t}$, $u(t-3)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t-3}{2}}\cdot\sqrt{t-3}$

(2) $\dfrac{3}{4}\sqrt{\pi}\cdot s^{-\frac{5}{2}}$, $-\dfrac{15}{8}\sqrt{\pi}\cdot s^{-\frac{7}{2}}$, $\dfrac{3}{4}\sqrt{\pi}\cdot(s+1)^{-\frac{5}{2}}$, $\dfrac{1}{2s}\sqrt{\pi}\cdot(s+1)^{-\frac{3}{2}}$

(3) $\dfrac{2\ln(s)+2\gamma-3}{s^3}$, $\dfrac{2\ln(s+1)+2\gamma-3}{(s+1)^3}$, $\dfrac{\ln(s)+\gamma-1}{s^3}$,

(4) $2e^{-t}+t-1$ (5) $-\dfrac{1}{6}$ (6) $\dfrac{5}{4}$

15.C1 (1) $C = \dfrac{e^x-1}{s+1}$, $c = (e^x-1)e^{-t}$

(2) $C = \dfrac{e^{3x}}{s+1} + \dfrac{x}{s^2}$, $c = e^{3x-t} + xt$

(3) $C = \dfrac{e^{2x}}{s+1} + \dfrac{x}{s^2} + \dfrac{2}{s^3}$, $c = e^{2x-t} + xt + t^2$

(4) $C = \dfrac{x}{s} - \dfrac{2\sinh(\sqrt{s}\,x)}{s\cdot\sinh(\sqrt{s})}$, $c = -x + \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)$

(5) $C = \dfrac{c_i}{s} + (c_y - c_i)\dfrac{\cosh(x\sqrt{s})}{s\cdot\cosh(\sqrt{s})}$,

$$c = c_y + \frac{4(c_y-c_i)}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-(2n-1)^2\pi^2\frac{t}{4}}\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right)$$

15.D1

(1) $N = 2$: 0.558 $N = 4$: 0.5267 $N = 8$: 0.52033

eksakt: $\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\right) =$ 0.5204998778...

(2) $N = 2$: 0.736 $N = 4$: 0.7600 $N = 8$: 0.76550

eksakt: $J_0(1) =$ 0.765197686...

(3) $N = 2$: 1.28 $N = 4$: 1.049 $N = 8$: 0.9970

eksakt: 1

(4) $N = 2$: $1.25\sqrt{t}$ $N = 4$: $1.149\sqrt{t}$ $N = 8$: $1.1275\sqrt{t}$

eksakt: $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t} =$ $1.128379167...\sqrt{t}$

(5) $A \cdot u(t-2) \cdot (t-2)^{\frac{3}{2}}$, hvor A er givet ved

$N = 2$: 1.22 $N = 4$: 0.833 $N = 8$: 0.7455

eksakt: $\frac{4}{3\sqrt{\pi}} =$ 0.752252778...

(6) $N = 2$: $-0.73 - 1.024 \cdot \ln(t)$ $N = 4$: $-0.603 - 1.0042 \cdot \ln(t)$

$N = 8$: $-0.57640 - 0.99986 \cdot \ln(t)$

eksakt: $-0.57721566... - \ln(t) = -\gamma - \ln(t)$

KAPITEL 16

16.1 (1) (a) – (b) ja (c) 2 (d) eksempelvis $\bar{a}^{(1)}$ $\bar{a}^{(2)}$ $\bar{a}^{(3)}$

(2) (a) – (b) nej (c) 3 (d) eksempelvis $\bar{a}^{(1)}$ $\bar{a}^{(2)}$ $\bar{a}^{(4)}$

(3) (a) – (b) nej (c) 2 (d) eksempelvis $\bar{a}^{(1)}$ $\bar{a}^{(2)}$

(4) (a) – (b) nej (c) 2 (d) eksempelvis $\bar{a}^{(1)}$ $\bar{a}^{(2)}$

16.2 (1) $(3,0,3)$ (2) Ø (3) eksempelvis $(3,0,s)$ (4) eksempelvis $(3,t,s)$

16.3 (1) $(-5,7,-1)$ (2) Ø (3) eksempelvis $(0,0,t)$ (4) eksempelvis $(0,s,t)$

16.4 (1) $(1,0,0)$ (2) eksempelvis $(1-2t,0,t)$

16.5 (1) Ø (2) eksempelvis $(-2-2s-2t,1-3t,s,t)$ (3) $\left(-\frac{9}{4},\frac{1}{5},\frac{19}{20},\frac{1}{5}\right)$

16.6 $(3,5,5,10)$ **16.7** Ø **16.8** eksempelvis $\left(-\frac{9}{16}+\frac{7}{16}t,\frac{9}{4}-\frac{7}{4}t,\frac{35}{16}-\frac{29}{16}t,t\right)$

16.9 $(3,5,1,1)$ **16.10** 3 **16.11** 3 **16.12** 3

16.13 (1) eksempelvis $\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}t,-\frac{11}{3}+\frac{5}{3}t,17-3t,t\right)$ (2) $\left(\frac{2}{5},0,\frac{52}{5},\frac{11}{5}\right)$

16.14 (1) $a \neq -4$: $\left(-1,\frac{5+a+b}{4+a},\frac{1+b}{4+a},\frac{1}{2}\right)$ (2) $a=-4$ $b\neq -1$: Ø
$a=-4$ $b=-1$: $\varrho=1$

16.15 $(-6,0,2,1)$

16.16 (1) $a=0$ $a=-2$: $L=\emptyset$ (2) $a=2$ eksempelvis $\left(\frac{7}{2}-2t,-5+t,t,\frac{1}{2}\right)$

16.17 (2) eksempelvis $\left(\frac{100}{3}-\frac{1}{3}t,\frac{100}{3}+\frac{2}{3}t,\frac{100}{3}-\frac{4}{3}t,t\right)$

16.18 (1) $a\neq 0 \wedge a\neq -2$: $\left(-\frac{12a^2+14a+12}{3a(2+a)},\frac{2+3a}{3(2+a)},\frac{2}{2+a},\frac{1}{a}\right)$

(2) $a=0$ $a=-2$: $L=\emptyset$

16.19 $a\neq 2 \wedge a\neq 4$: $L=\emptyset$ $a=2$ eksempelvis $(2-s-t,2-2s-t,s,t)$

$a=4$ eksempelvis $(-4+3s+t,4-2s-t,s,t)$

16.20 1) eksempelvis $\left(\frac{5}{3}(-4+u),\frac{5}{3}(-4+u),4(5-u),u\right), u\in[4;5]$ (2) 4 (3) ja, j

16.21 $(20,3,0,-1,-1,1)$ **16.22** $a\neq -1$: $\left(1,\frac{5a+2}{a+1},\frac{2a-1}{a+1},\frac{3}{a+1}\right)$, $a=-1$: $L=\emptyset$

KAPITEL 17

17.2 $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

17.3 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

17.5 $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

17.6 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

17.7 (1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (11) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (12) $\begin{pmatrix} -\frac{11}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -3 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$(13)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

17.8
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

17.9
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 9 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

17.10 (1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(3)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(4)
$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

17.11 1)
$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} -13 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{5}{14} \\ \frac{1}{14} & -\frac{5}{14} & \frac{3}{14} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 5 & \frac{10}{7} \\ 10 & -\frac{15}{7} \\ -6 & \frac{16}{7} \end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 20 & -19 & -5 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\frac{1}{29}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 & 4 \\ 21 & 13 & 14 & 3 \\ 13 & 3 & 1 & 6 \\ 19 & 9 & 3 & 11 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -26 \\ 0 & 52 \\ 29 & -47 \end{pmatrix}$

17.12 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{66}} & \frac{7}{\sqrt{66}} & \frac{4}{\sqrt{66}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{30}{\sqrt{66}} & \frac{9}{\sqrt{11}} \\ -\frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{22}{\sqrt{66}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{23}{\sqrt{66}} & \frac{8}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$

17.13 $(0.50457, -0.24125)$ **17.14** $\left(\frac{23}{7}, \frac{8}{7}\right) = (3.2857, 1.1429)$, $RMS = \sqrt{\frac{2}{21}}$

17.15 $\left(5, \frac{4}{3}\right)$, $r_1 = 0$, $r_2 = -\frac{2}{3}$, $r_3 = \frac{1}{3}$, $r_4 = -\frac{1}{3}$, $RMS = \frac{1}{\sqrt{6}}$

17.16 $(A, B) = (0.514, 1.324)$, $r_1 = r_2 = r_3 = -0.016$, $RMS = 0.016$

17.17 $(0.1, 1, 0)$, $r_1 = 0.1$, $r_2 = 0$, $r_3 = -0.1$, $r_4 = 0.1$, $r_5 = -0.1$, $RMS = 0.089$

17.18 $\left(\frac{31}{3}, \frac{14}{3}\right)$ **17.19** (2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

17.20 (2) $\left(\frac{19}{35}, \frac{1}{5}\right)$, $r_1 = -\frac{5}{175}$, $r_2 = -\frac{3}{175}$, $r_3 = -\frac{1}{175}$, $RMS = \frac{1}{5\sqrt{105}}$

17.21 $\left(\frac{17}{15}, \frac{2}{15}, \frac{9}{5}\right)$

KAPITEL 18

18.1 (1) -7, (2) -1, (3) 0, (4) 3, (5) 3, (6) $7!$ **18.2** 7 -1 **18.3** -8

18.4 -77 -504 **18.5** -720 1 **18.6** $(-1)^{n-1}$ **18.7** $-14+15i$ **18.8** ± 1

18.9 4 **18.10** $x(t)=\frac{1}{16}e^{-3t}+\frac{1}{8\sqrt{2}}e^{-t}\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)$ **18.11** x^2-y^2

18.12 $x+x^2+x^3+x^4$ **18.13** $\frac{2}{5}$ **18.14** (1) 2 (2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

18.15 1 **18.16** 2 **18.17** $\frac{1}{4}$ **18.18** $-2a^2+4a$, $x_2=1$

18.19 (1) $3a^2-1$, (2) $a\neq\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$: $x_4=\frac{2a^2+5a-1}{3a^2-1}$

KAPITEL 19

19.1 (1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, 2, 3, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 1, 2, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 1, 2, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 1, 2, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, -1, 1, 2, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 1, 2, 3, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

19.2 (1) $\begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -6 & 14 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

19.3 (1) -1, 1, $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0$, $t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0$ (2) 1, 2, $t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0$, $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0$

(3) 0, 1, $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0$, $t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, t \neq 0$ (4) 0, 2, $t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0$, $t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0$

(5) -1, 1, $t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0$, $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0$

(6) 0 (2 gange), $s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (s,t) \neq (0,0)$

(7) 2 (2 gange), $s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (s,t) \neq (0,0)$

(8) 3, 4, $t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0$, $t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0$ (9) 1 (2 gange), $t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0$

(10) 0 (2 gange), $t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, t\neq 0$ (11) 2 (2 gange), $t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, t\neq 0$

(12) 9 (2 gange), $t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, t\neq 0$ (13) $-1,\ 2,\ t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, t\neq 0,\ t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, t\neq 0$

(14) $-2,\ -1,\ t\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}, t\neq 0,\ t\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, t\neq 0$ (15) $1,\ 2,\ t\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, t\neq 0,\ t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, t\neq 0$

(16) $-1,\ 1,\ 2,\ t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, t\neq 0,\ t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, t\neq 0,\ t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, t\neq 0$

(17) $-1,\ 1$ (2 gange), $t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, t\neq 0,\ s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, (s,t)\neq(0,0)$

(18) $-1,\ 0,\ 1,\ t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, t\neq 0,\ t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, t\neq 0,\ t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, t\neq 0$

(19) $0,\ 1,\ 2,\ t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, t\neq 0,\ t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, t\neq 0,\ t\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, t\neq 0$

(20) $1,\ 2,\ 3,\ t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, t\neq 0,\ t\begin{pmatrix}10\\1\\5\end{pmatrix}, t\neq 0,\ t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, t\neq 0$

(21) $-1,\ 0,\ 1,\ t\begin{pmatrix}2\\6\\9\end{pmatrix}, t\neq 0,\ t\begin{pmatrix}3\\7\\9\end{pmatrix}, t\neq 0,\ t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, t\neq 0$

(22) -1 (2 gange), 1, $s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\ (s,t)\neq(0,0),\quad t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ t\neq 0$

(23) $-3,\ -2,\ -1,\quad t\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\ t\neq 0,\quad t\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix},\ t\neq 0,\quad t\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix},\ t\neq 0$

(24) $0,\ 1$ (2 gange), $\quad t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\ t\neq 0,\quad s\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ (s,t)\neq(0,0)$

(25) $0,\ 1,\ 3,\quad t\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix},\ t\neq 0,\quad t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ t\neq 0,\quad t\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix},\ t\neq 0$

26) $-1,\ 1,\ 2$ (2 gange), $\quad t\begin{pmatrix}3\\6\\1\\3\end{pmatrix},\ t\neq 0,\quad t\begin{pmatrix}2\\2\\0\\1\end{pmatrix},\ t\neq 0,\quad s\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ (s,t)\neq(0,0$

(27) -2 (2 gange), 1 (2 gange), $\quad s\begin{pmatrix}2\\4\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\4\\-1\\0\end{pmatrix},\ (s,t)\neq(0,0),$

$$s\begin{pmatrix}-3\\0\\12\\16\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\\0\\0\end{pmatrix},\ (s,t)\neq(0,0)$$

(28) 1 (2 gange), 2 (2 gange), $\quad s\begin{pmatrix}4\\0\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ (s,t)\neq(0,0),$

$$s\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\3\\2\\0\end{pmatrix},\ (s,t)\neq(0,0)$$

19.4 (1) ja, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) ja, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) ja, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (4) ja, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(5) ja, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (6) ja, A, E (7) ja, A, E

(8) ja, A, E (9) nej (10) nej (11) nej (12) nej

(13) ja, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (14) ja, $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(15) ja, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (16) ja, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(17) ja, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (18) ja, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(19) ja, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (20) ja, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

(21) ja, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 7 & 2 \\ 9 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ (22) ja, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(23) ja, $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (24) ja, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

25) ja, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (26) ja, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

27) ja, $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 12 & 0 \\ 1 & 0 & 16 & 0 \end{pmatrix}$ (28) ja, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

19.5 (1) $C_1 e^{-t} + C_2 e^{t}, \quad C_1 e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (2) $C_2 e^{2t}, \quad C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

3) $C_1 + 2C_2 e^{t}, \quad C_1 + 3C_2 e^{t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (4) $3C_1 + 2C_2 e^{2t}, \quad C_1 + C_2 e^{2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(5) $-C_1 e^{-t} + C_2 e^{t}, \quad C_1 e^{-t} + C_2 e^{t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (6) $C_1, \quad C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(7) $C_1 e^{2t}, \quad C_2 e^{2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (8) $C_1 e^{3t}, \quad C_2 e^{4t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(9) $[C_1 + C_2 t]\, e^{t}, \quad C_2 e^{t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (10) $C_1, \quad C_1 t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(11) $\left[C_1 - (C_1 + C_2)\, t\right] e^{2t}, \quad \left[C_2 + (C_1 + C_2)\, t\right] e^{2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(12) $\left[C_1 + (-2C_1 + 4C_2)\, t\right] e^{9t}, \quad \left[C_2 + (-C_1 + 2C_2)\, t\right] e^{9t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(13) $2C_1 e^{-t} + C_2 e^{t}, \quad C_1 e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(14) $4C_1 e^{-2t} + 3C_2 e^{-t}, \quad 3C_1 e^{-2t} + 2C_2 e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(15) $3C_1 e^{t} + 2C_2 e^{2t}, \quad 2C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(16) $-C_1 e^{-t} + C_2 e^{t}, \quad C_3 e^{2t}, \quad C_1 e^{-t} + C_2 e^{t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

(17) $-C_1 e^{-t} + C_2 e^{t}, \quad C_3 e^{t}, \quad C_1 e^{-t} + C_2 e^{t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

(18) $C_2 + C_3 e^{t}, \quad C_1 e^{-t} + C_2, \quad C_1 e^{-t} + C_2 + C_3 e^{t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

(19) $C_1 + C_3 e^{2t}, \quad -C_1 + C_2 e^{t}, \quad C_1 + 2C_3 e^{2t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

(20) $C_1 e^{t} + 10 C_2 e^{2t}, \quad C_2 e^{2t}, \quad 5C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

(21) $2C_1 e^{-t} + 3C_2 + C_3 e^{t}, \quad 6C_1 e^{-t} + 7C_2 + 2C_3 e^{t}, \quad 9C_1 e^{-t} + 9C_2 + 2C_3 e^{t},$
$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

(22) $(C_1 - C_2) e^{-t}, \quad 2C_2 e^{-t} + C_3 e^{t}, \quad C_1 e^{-t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

(23) $2C_1 e^{-3t} + 3C_2 e^{-2t} + 3C_3 e^{-t}, \quad C_2 e^{-2t}, \quad C_1 e^{-3t} + 3C_2 e^{-2t} + 2C_3 e^{-t},$
$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

(24) $C_1 + C_2 e^{t}, \quad C_1 + 2C_2 e^{t}, \quad 2C_1 + C_3 e^{t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

(25) $3C_1 + C_2 e^{t} + 3C_3 e^{3t}, \quad 2C_1 + 2C_2 e^{t} + 3C_3 e^{3t}, \quad 2C_1 + C_2 e^{t} + 2C_3 e^{3t},$
$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

26) $3C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{t} + C_4 e^{2t}, \quad 6C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{t} + C_3 e^{2t}, \quad C_1 e^{-t}, \quad 3C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} + C_3 e^{2}$
$C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$

(27) $2C_1 e^{-2t} + 2C_2 e^{-2t} - 3C_3 e^{t} + 3C_4 e^{t}, \quad 4C_1 e^{-2t} + 4C_2 e^{-2t} + 4C_4 e^{t},$
$-C_2 e^{-2t} + 12C_3 e^{t}, \quad C_1 e^{-2t} + 16C_3 e^{t}, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$

(28) $4C_1 e^{t} - 2C_2 e^{t} + 3C_4 e^{2t}, \quad C_2 e^{t} + 3C_4 e^{2t}, \quad C_1 e^{t} + 2C_4 e^{2t}, \quad C_1 e^{t} + C_3 e^{2t},$
$C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$

19.6 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} -13 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

19.7 (1) ellipse (2) ellipse (3) hyperbel (4) hyperbel (5) hyperbel

19.8 $-9z_1^2 + 9z_2^2 + 18z_3^2, \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

19.9 (1) $1, \quad 1+i, \quad 1-i, \quad t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0, \quad t\begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, t \neq 0, \quad t\begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, t \neq 0,$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $-1, \quad 1+2i, \quad 1-2i, \quad t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0, \quad t\begin{pmatrix} 1-i \\ -2i \\ 2 \end{pmatrix}, t \neq 0, \quad t\begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix}, t \neq 0,$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) $-1, \quad 2+4i, \quad 2-4i, \quad t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0, \quad t\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0, \quad t\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0,$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

KAPITEL 20

20.1 (1) divergent (2) konvergent, 0 (3) divergent (4) divergent (5) konvergent, 0
(6) divergent (7) divergent (8) konvergent, 0 (9) divergent (10) divergent

20.2 1) konvergent, 3 (2) konvergent, $\frac{2}{3}$ (3) konvergent, $\frac{115}{54}$ (4) konvergent, $\frac{e}{e -}$
(5) konvergent, 3 (6) konvergent, $\frac{1}{\sqrt[11]{e^2} - \sqrt[11]{e}}$ (7) konvergent, 9
(8) konvergent, $\frac{1}{2}$ (9) konvergent, $\frac{35}{4}$

20.3 Alle er divergente

20.4 (1) konvergent (2) divergent (3) konvergent (4) konvergent (5) divergent
(6) divergent (7) konvergent (8) konvergent (9) divergent (10) divergent

20.5 Alle er absolut konvergente

20.6 (1) konvergent (2) divergent (3) konvergent (4) konvergent (5) konvergent
(6) konvergent (7) konvergent (8) konvergent (9) konvergent (10) divergent

20.7 (1) konvergent (2) konvergent (3) konvergent (4) konvergent (5) konvergent
(6) divergent (7) konvergent (8) konvergent (9) konvergent (10) konvergent

20.8 (1) konvergent (2) divergent (3) konvergent (4) konvergent (5) konvergent
(6) divergent (7) divergent (8) konvergent (9) konvergent

20.9 (1) konvergent (2) konvergent (3) divergent (4) konvergent (5) divergent (6) divergent (7) konvergent

20.10 (1) konvergent, 19 (2) konvergent, $\frac{1}{e^2-1}$ (3) divergent (4) konvergent, $\frac{\ln 2}{1-\ln 2}$ (5) divergent (6) konvergent, 1 (7) konvergent, $\frac{1}{\sqrt[7]{4}-\sqrt[7]{2}}$ (8) divergent (9) divergent (10) divergent

20.11 (1) absolut konvergent (2) betinget konvergent (3) betinget konvergent (4) betinget konvergent (5) absolut konvergent (6) absolut konvergent

20.12 (1) $\sqrt{3}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{e}$ (4) $\sqrt{5}$ (5) ∞ (6) $\frac{1}{3}$ (7) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (8) 1 (9) 0 (10) ∞ (11) 1

20.13 (1) $r=\frac{1}{3}$, konvergent (2) $r=\frac{1}{2}$, divergent

20.14 (1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$, ∞ (2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{6n+4}}{2n+1}$, 1 (3) $\sum_{n=0}^{\infty}2\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, 1

20.15 (1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}$, ∞ (2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)^2\cdot 2^{2n+1}}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n\cdot n!}$, ∞

20.16 $\frac{2}{(1-x)^3}$, $\frac{x^2}{2\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right)^3}$, 2

20.17 (1) $\ln(1+x^2)$ (2) $(1+x)\cdot\ln(1+x)-x$ (3) $x^2\cdot\ln(1+x)$

20.18 (1) 2, $\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$ (2) 3, $\frac{x^2}{9-3x}$ (3) 5, $\frac{10x-x^2}{5\cdot(5-x)^2}$ (4) 5, $x-\frac{x^2}{10}-5\cdot\ln\left|1-\frac{x}{5}\right.$

20.19 (1) $c_n=-\frac{c_{n-2}}{n}$ (2) $1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{8}t^4-\frac{1}{48}t^6$ (3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n\cdot n!}$ (4) ∘

20.20 (1) $3t+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot t^{2n}}{2^n\cdot n!}$, ∞ (2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!}$, ∞

(3) $1+3t+3t^2+t^3+0+0+\ldots+0\ldots$, ∞

(4) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^2+1)\cdot(4^2+1)\ldots((2n-2)^2+1)}{(2n)!}t^{2n}$, 1 (5) $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{t^{2n}}{2n-1}$, 1

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(2n-3)\cdot(2n-5)\cdot\ldots\cdot7\cdot5\cdot3\cdot1}{n!}t^n$, $\frac{1}{2}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n\cdot((n-1)!)^2}$, ∞ (8) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)^2}$, 1

20.21 (1) 1.2795 (2) 0.1879 (3) 1.0039 (4) −0.3604 (5) −0.9470
(6) 1.3764 (7) 0.6796 (8) −0.3917 (9) 0.2387 (10) −0.9570

KAPITEL 21

21.1 $$\frac{8e^{-2.3}}{\pi^2}\left(1-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2}{(2p-1)(2p+1)}\cdot e^{-(2p)^2 t}\cdot\cos(2px)\right)$$

21.2 $$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(p+1)\cdot(-1)^{(n+1)}}{n}\cdot e^{-n^2 t}\cdot\sin(nx)$$

21.3 $$\frac{2}{\pi}\left(1+2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{1-(2p)^2}\cdot e^{-(2p)^2 t^3}\cdot\cos(2px)\right)$$

21.4 $$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot(\cosh t)^{-n^2}\cdot\sin(nx)$$

21.5 (1) $$f(x) = -\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{(2n-1)^2\cdot\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)+\frac{2}{(2n-1)\cdot\pi}\cdot\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)-\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right)$$

(2) $$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin(n\pi x)$$

(3) $$f(x) = \frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\cos((2n+1)\pi x)$$

(4) $$f(x) = \frac{3}{4}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)-\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\right)$$

(5) $$f(x) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2}+e^{-x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{4+(2n-1)^2\cdot\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)+\frac{2(2n-1)\pi}{4+(2n-1)^2\cdot\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)\right)$$

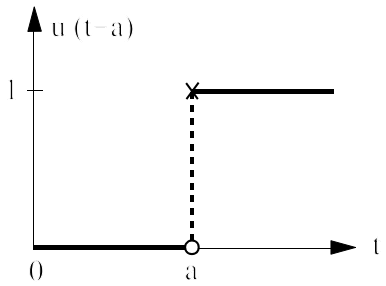
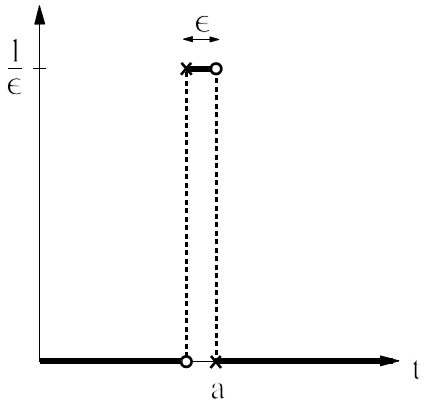
21.6 –, ≈ 3.9

21.7 ja med $\nu_1 \approx 0.65$ og $\nu_2 \approx 1.0$, vandret linie svarende til $\log P(\nu) \approx 0.08$.

21.8 -, –, (3) find $R(\nu)$ og $G(\nu)$ ved FFT, og find så $f(t)$ ved invers FFT af $\frac{G(\nu)}{R(\nu)}$

4) start med koncentrationen 0 i tanken og vælg $f(t) = 0(t)$ – så bliver $r(t) = g(t$

SYMBOLLISTE (Se også symbollisten i bind 1 og 2)

SYMBOL	BETYDNING	BEMÆRKNINGER
$\mathcal{L}$	Laplace-transformations-operatoren $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$	Se afsnit 15.2. $\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$
$\mathcal{L}^{-1}$	den inverse Laplace-transformations-operator	Se afsnit 15.2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$
$F(s)$	kort skrivemåde for $\mathcal{L}\{f(t)\}$	Hvis $f(t) = e^{-at}$, er $F(s) = \frac{1}{s+a}$
$u(t-a)$	enhedstrinfunktion med spring i a	Se afsnit 15.5. 
$[f(t)]_{\text{forsinket } a}$	$u(t-a)\cdot f(t-a)$	Hvis $f(t) = e^{-7t}$, er $[f(t)]_{\text{forsinket } a} = u(t-a)\,e^{-7(t-a)}$
$\delta_\varepsilon(t-a)$	$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{for } t \in [a-\varepsilon;\, a[\\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$	Se afsnit 15.6 
$\delta(t-a)$	Dirac's deltafunktion	Se afsnit 15.6.

SYMBOL	BETYDNING	BEMÆRKNINGER
f * g	foldningen af f med g, dvs. $\int_0^t f(t-\mathrm{v})\,g(\mathrm{v})\,d\mathrm{v}$	Se afsnit 15.7 og opgave 21.4.
f ∘ g	skalarproduktet af f og g over et givet interval [a; b], dvs. $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$	Se supplement 21B.
A	en matrix betegnes sædvanligvis ved et stort bogstav	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
$\tilde{A}$	den transponerede af matricen A, dvs. rækkerne i A skrives som søjler i $\tilde{A}$	Hvis $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, er $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
E_n	$n \times n$ enhedsmatricen (har 1-taller i diagonalen og 0'er udenfor)	$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
A^{-1}	den inverse til en $n \times n$ matrix A, dvs. en matrix som opfylder $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$	Hvis $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, er $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
$\varrho(A)$ rang (A)	rang af en matrix A, dvs. det største antal lineært uafhængige rækkevektorer, som kan udtages fra A.	Hvis $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, er $\varrho(A) = 2$
$\det A$	determinanten af en $n \times n$ matrix A	Hvis $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, er $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2$
$\varepsilon_{ijk\ldots\mathrm{v}}$	antager en af værdierne -1, 0, 1	Se afsnit 18.3.
RMS	'root mean square error'	Se afsnit 17.6.

STIKORDSREGISTER

A
absolut konvergent række 152
addition
af matricer 75
af rækker 149
af vektorer 48
adskille variable 200
affinitetsreglen 22
affoldning 212
afledet fra højre 2
afrundingsfejl, række 172
akkumuleret i stofbalance 10
algebraiske ligninger 11
alternerende række 155
alternerende-række-fejlkriteriet 172
amplitude 190
areal ved deltafunktion 17
associative love
for matricer 78
for vektorer 48
autokorrelation 197
sætningen 198

B
basis for vektorrum 50
begrænset, eksponentielt 2
begyndelsesbetingelser 199
begyndelsesværdireglen 22
betinget konvergent række 152
blokdiagram 8

C
convolution 22
Cramers sætning 105

D
dataudglatning 210
deconvolution 212
dekomponering 9
delsum af række 145
deltafunktion
areal ved 18
i integral 18
definition 17
determinant
definition 96
formel 104
fundet numerisk 228
komplement 97
-metoden 106
reduktion 98
regneregler 104
diagonal i matricen 51
diagonalisérbar matrix 123
diagonalisering af matricer 123, 134
diagonalisering, næsten 135
diagonalmatrix 116
diagonalmetode for determinant 101
differentialligning
af 3. orden 8
homogen 32
inhomogen 33
løst ved potensrække 165
med deltafunktion 17
med forsinkelse 15, 34
partiel 32
system 10, 18, 116, 126
differentiation
af række 160
fra højre 202
med hensyn til parameter 22
differentiationsreglen 6
differentielt regnskab 15
diffusion 29
diffusionskoefficient 29
diffusionsligning 29
dimension af vektorrum 78
diskontinuitetspunkter 2
diskret Fouriertransformation 196
distributive love
for matricer 78
for vektorer 48
divergent række 146

E
echelon-matrix 53
effektiv rang af matrix 139
effektspektrum 207
egenvektor 118, 120
egenvektorer, komplekse 127, 134
egenværdi 116, 118, 120, 134
egenværdier, forskellige 127
eksponentiel begrænsning 2
element i matrix 50
eliminationsmetode, Gauss 53, 54
energispektrum 210
enhedsmatrix 80
enhedstrinfunktion 12
differention af 12
ensidede spektrale energitæthed 210
entydighed
af L^{-1} 27
af potensrække 160
erf 33
erfc 33
error function 33

F
fast Fourier-transform (FFT) 196
fejlfunktion 33
komplementære 33
fejlkriterier 170
FFT 196
Ficks 2. lov 32
filtrering, optimal 210
foldning 22
foldningsreglen 22
forkortningsregel for matricer ugyldig 89
forsinkelse 13, 226
forsinkelsesfaktor 14

forsinkelsesreglen 14
forsinket funktion 13
forskydningsreglen 22
fortegnsskema for determinant 97
Fourierintegral 195
Fourierrække 186
  konvergens 191
  på kompleks form 194
Fouriers integralsætning 195
Fouriertransformation 195
  affoldning 212
  autokorrelation 197
  convolution 211
  dataudglatning 210
  deconvolution 212
  diskret 196
  energispektrum 207, 210
  ensidede spektrale energitæthed 210
  foldning 211
  foldningssætning 211
  korrelationssætning 209
  krydskorrelation 209
  optimal filtrering 210
frihedsgrader 59
fuldstændig løsning til ligningssystem 52
funktion
  af matrix 119
  eksponentielt begrænset 2
  forsinket 13, 226
  kontinuert fra højre 2
  lige 192
  med spring 2
  ortogonalsystem 206
  stykkevis defineret 12
  stykkevis kontinuert 2
  stykkevis differentiabel 186
  ulige 192
funktionsrum 206

G
Gauss' elimination 54
Givens rotationer 229
grænsefunktion 18
grænseværdi fra højre 2
gætning af partikulær løsning 33

H
harmonisk analyse 196
harmonisk række 140
homogen differentialligning 32
homogent ligningssystem 52

I
inhomogen differentialligning 33
inhomogent ligningssystem 52
input 8
integralkriteriet for række 156
integration
  af potensrække 160, 169
  af række 230, 233
  med deltafunktion 18
integrationsreglen 22
interpolation, lineær 112
invers matrix 80
invertibel matrix 80

J
Jordan-normalform for matricer 127

K
karakteristisk polynomium 8
karakterligning 32, 120, 121
kendte rækker 234
koefficientmatrix 47, 52
kommutative love
  for matricer 78
  for vektorer 48
komplekse egenværdier 127, 134
kompleks Fourierrække 194
kompleks variabel 3
komplement 97
komplementære fejlfunktion 33
konditionstal for matrix 139
kontinuert
  fra højre 2
  stykkevis 2
kontrol af reduktion 57
kontrolsøjle 57
konvergens
  absolut 152
  af Fourierrække 191
  af potensrække 158
  af rækker 145
  betinget 152
konvergenscirkel 159
konvergenskriterier for rækker 149
konvergensradius 158
konvergenstal 158
korrelationssætning 209
krydskorrelation 209
kvadratisk form 118, 130
kvadratisk matrix 51
kvotientkriteriet for række 153
kvotient-fejlkriteriet 171
kvotientrække 147

L
Laplace-transformation 1
  affinitetsregel 22
  begyndelsesværdiregel 22
  differentiationsregel 6
  foldningsregel 22
  fordele 1
  forsinkelsesregel 14
  forskydningsregel 22
  integrationsregel 22
  invers 3
  karakteristisk polynomium 8
  linearitetsregel 4
  operator 3
  overføringsfunktion 8
  parameter-differentiationsregel 22
  periodicitetsregel 22
  t-multiplikationsregel 22

slutværdiregel 22
tabel 216, 222
ved Maple 6, 14, 21
Laplace-transformeret 3
lige funktion 192
ligning
algebraisk 11
homogen 32
inhomogen 33
ligningssystem 47, 52
homogent 52
inhomogent 52
løsning 54, 139
numerisk løsning 228-229
overbestemt 85
linearitetsreglen 4
linearkombination af vektorer 48
lineært ligningsystem 47, 52
på matrixform 77
lineær programmering 68, 72
lineær uafhængighed 49
litteratur 226
løsning
fuldstændig 52
partikulær 52
til differentialligning 7

M
majorantrække 230
Maple anvendt til
beregning af determinant 98
beregning af egenværdier 122
beregning af invers matrix 83
egenvektorer 122
Laplace-deltafunktion 21
Laplace-forsinkelse 14
Laplace-tilbagetransformation 6
Laplace-transformation 6
løsning af ligningssystem 55, 59, 139
løsning af overbestemt ligningssystem 88, 139
multiplikation af matricer 77, 79
rang af matrix 138, 139
SVD (Singulær Værdi Dekomposition 138
transponering af matrix 79
udvikling i Fourierrække 190
matricer, ens 74
matrix
associative love 78
definition 50
determinant 96, 98, 104, 106, 139, 228
diagonal 51
diagonalisering 123, 134, 135
distributive lov 78
echelon- 53
effektiv rang 139
egenvektor 118, 120, 134
egenværdi 116, 118, 120, 134
enheds- 80
funktion af 119
geometrisk tolkning 139
ikke-diagonalisérbar 127
invers 80, 139
invertibel 80
Jordan-normalform 127
karakterligning 120, 121
kommutative lov 78
konditionstal 139
kvadratisk 51
kvadratisk form 118, 130
kvadratsum 139
ligning 84
multiplikation 74, 75
næsten-diagonalisering 127, 135
ortogonal 128
pseudoinvers 139
rang 56, 138, 139
reciprok 80
regneregler 78
række 51
række-søjle multiplikation 76
singulær 80
singulære værdier 138
SVD 138
symmetrisk 78, 128
søjle 51
transponeret 78
type 51
matrixligning 84
metodefejl 170
mindste kvadraters metode 85
momentsætning 27
multiplikation
for matricer 74, 75
for rækker 149, 160, 230
for vektorer 48
multiplikationsreglen 22

N
neutralelementer 48
normalligningssystem 86
n'te ledskriteriet 149
numerisk-række-kriteriet 152
numerisk tilbagetransformation 34, 37
næsten-diagonalisering 135
nævnerpolynomium 9

O
ombytning af rækker (søjler) 53, 57, 98
omordning af rækker 230
opløsning af determinant 96-98
optimal filtrering 210
ortogonal matrix 128
ortogonalsystem 206
output 8
overbestemt ligningssystem 85
overføringsfunktion 8
overlejring af rene svingninger 190
oversvingninger 190

P
parameter-differentiations-reglen 22, 30
parenteser i række 148, 230, 232
Parsevals ligning 207

partiel differentialligning 29
partikulær løsning til ligningssystem 52
periodicitetsreglen 22
pivotering 65
polynomium, karakteristisk 8
potensrække
  differentialligning 164
  differentiation 160
  entydighed 160
  integration 160, 163
  konvergens 158
  konvergenscirkel 158
  konvergensradius 158
  konvergenstal 158
  - løsning til differentialligning 165
  multiplikation 160
  substitution 160
pseudoinvers matrix 139
pulser 17

R
rang
  af matrix 56, 138
  effektiv 139
reciprok matrix 80
reduktion
  af determinant 98
  af kvadratisk form 130
regneregler
  for determinanter 104
  for L og L^{-1} 22
  for matricer 78
  for rækker 230
  for vektorer 48
  affinitetsreglen 22
  begyndelsesværdireglen 22
  differentiationsreglen 6
  foldningsreglen 22
  foldningssætning 211
  forsinkelsesreglen 12, 14
  forskydningsreglen 22
  integrationsreglen 22
  korrelationssætning 209
  linearitetsreglen 4
  parameter-differentiationsreglen 22
  periodicitetsreglen 22
  slutværdireglen 22
  t-multiplikationsreglen 22
regnskab, differentielt 15
rekursionsformel 165
residual 85
respons 8
RMS-fejl 85
rod-fejlkriteriet 170
rodkriteriet 153
rodkriteriet for række 153
root mean square error 85
række
  absolut konvergent 152
  addition 149
  afrundingsfejl 172
  alternerende 155
  alternerende-række-fejlkriteriet 172
  betinget konvergent 152
  delsum 145
  divergens 146
  harmonisk 146
  integralkriteriet 156
  kendte 234
  kvotient-fejlkriteriet 171
  multiplikation 149, 160
  n'te-ledskriteriet 149
  numerisk-række-kriteriet 152
  potens- 158
  rod-fejlkriteriet 170
  rod- og kvotient-kriteriet 153
  sammenligningskriteriet 150
  tilnærmet beregning af sum 170
rækkeoperation 53
række-søjle multiplikation 76
rækkers konvergens 145
rækkevektor 51
rækkeækvivalente matricer 53

S
sammenligningskriteriet for rækker 150
Schrødingerligningen 30
singulær
  matrix 80
  værdier af matrix 138
  værdi dekomposition 138
skalarprodukt af funktioner 206
slutafrundingsfejl 173
slutværdireglen 22
spring 1-2
stambrøker 9
starttidspunkt 1
stykkevis
  defineret funktion 12
  differentiabel funktion 186
  kontinuert funktion 2
substitution i potensrække 160
sum af række 145
superposition af rene svingninger 190
SVD 138
svingninger, rene 190
svingningsligning 29

svingningstid 190
symmetrisk matrix 78, 128
system
  af differentialligninger 10, 18, 116, 126
  af ortogonale funktioner 206
  af tanke 10, 15
symbolliste 259
søjle 51
søjlevektor 51
søjleoperation 53, 98, 101

T
tank 10, 18
Taylorrækker 159
tidsforsinkelse 13
tilbagetransformation

entydighed 3
numerisk 34, 37
tabel 222
tilbagetransformations-operator 3
tilnærmet beregning af rækkes sum 170
t-multiplikationsreglen 22
totalmatrix 47, 52
transponeret matrix 78
trigonometriske rækker 186

U
uafhængige ligninger 61
uafhængighed 49
udspænde et vektorrum 48
udvælgelsesmetode 100
uendelighed af løsninger 59
ulige funktion 192
underdeterminant 96
underrum af vektorer 48
uniform polynomieapproksimation 27

V
varmeledningsligning 29
varmeledningsligning løst ved Fourierrække 199
vektorer (= funktioner) 206
vektorrum 48
vendetangent 36
vægt for ligning 85

W
Weierstrass's sætning 27

Æ
ændring
af række 148
pludselig 12