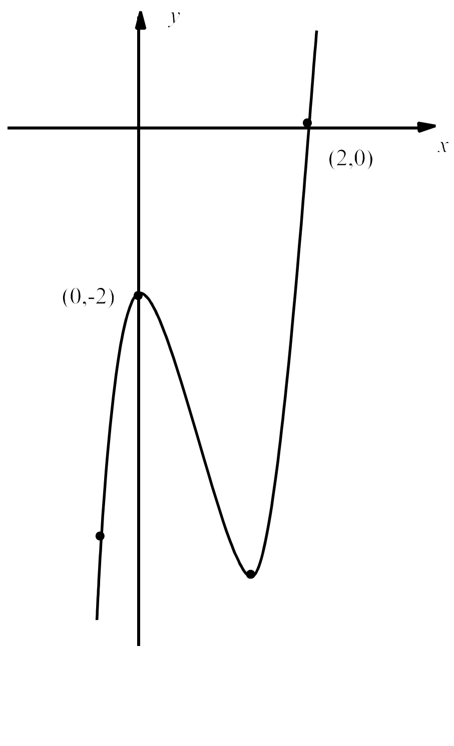
MOGENS ODDERSHEDE LARSEN

# MATEMATIK

## fra C- til A- niveau




2. udgave 2010

## FORORD

Denne bog er beregnet for studerende, som har behov for at repetere eller opgradere deres matematiske viden fra C eller B- niveau til A-niveau

Bogen gennemgår kernepensum sådan som det er beskrevet efter bekendtgørelsen af 2005.

Komplicerede beviser for visse sætninger er erstattet med "anskuelige" begrundelser, da det ligger udenfor denne bogs rammer, eksempelvis at give en stringent matematisk behandling af begreber som grænseværdi og kontinuitet.

**Anvendelse af lommeregner**.
Der forudsættes, at man har rådighed over en "matematiklommeregner" (her TI89)

Selv om sådanne avancerede lommeregnere let kan differentiere og reducere selv de vanskeligste udtryk, så viser erfaringen, at det er meget svært, at anvende matematikken, hvis man ikke er i stand til at manipulere med simple udtryk, herunder at differentiere enkle funktioner. Det bliver også næsten umuligt at læse en teknisk tekst eller hører et foredrag, hvori der indgår nogen matematik, hvis man ikke i rimelig grad behersker symbolikken. Derfor er det nødvendigt at øve potensregler, differentiationsregler m.m. samtidig med, at man naturligvis ved, hvordan en avanceret lommeregner kan foretage beregningerne i mere komplicerede sammenhænge.
Derfor anføres der i nogle af eksemplerne og opgaverne, at disse skal regnes "uden hjælpemidler", dvs. uden brug af lommeregner og bog.
I de øvrige eksempler og opgaver må man naturligvis benytte såvel lommeregner som bogen til hjælp.
Eksemplerne er dog ofte regnet både med og uden brug af lommeregner.

Opgaver er anført efter hvert kapitel.

En facitliste til disse opgaver findes bagerst i bogen.

juni 2010 — Mogens Oddershede Larsen

# INDHOLD

## 5 Funktionsbegrebet



## 6 Standardfunktioner



## 7 Regression



## 8 Grænseværdi og kontinuitet

# 1. Regneregler

Selv om man kan få en lommeregner til at beregne alle typer af regneudtryk, er det alligevel nødvendigt at være fortrolig med de grundlæggende regneregler. Eksempelvis skal parenteser sættes matematisk korrekt for at få det korrekte resultat, ligesom det jo ikke er sikkert at lommeregneren reducerer et udtryk til den form som er mest hensigtsmæssig i de følgende regninger, og så man jo selv være i stand til at foretage en yderligere omformning.
Endelig bliver det svært at læse en tekst eksempelvis i fysik eller høre en et foredrag, hvis man ikke i rimelig grad kan følge beregningerne. Vi vil derfor kort repetere disse regler

| Regel | Eksempel |
|---|---|
| Multiplikation og division udregnes før addition og subtraktion | $2\cdot 3+4\cdot 5=6+20=25$ |
| Potenser og andre funktionsudtryk udregnes først. | $2^3\cdot 5-(-3)^2=8\cdot 5-9=31$ |
| Hvert led i den ene parentes ganges med hvert led i den anden | $(2a-3b)(6b+4a)=12ab+8a^2-18b^2-12ab=8a^2-18b^2$ <br> $5a^3(2ab^2-3a)=10a^4b^2-15a^4$ |
| Minustegn må ikke følge umiddelbart efter gangetegn, der **skal** sættes en parentes | $2\cdot(-3)+\frac{8}{2}=-6+4=-2$ |
| To brøker ganges med hinanden ved at gange tæller med tæller og nævner med nævner | $\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{9}=\frac{14}{27}$ |
| En brøk ganges med et tal ved at gange tælleren med tallet. | $5\cdot\frac{6}{7}=\frac{30}{7}$ |
| Man dividerer en brøk med en brøk ved at gange med den omvendte brøk. | $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{9}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{7}=\frac{18}{21}=\frac{6}{7}$ |
| Alle led i tælleren skal divideres med nævneren | $\frac{a^3-ab^2}{a}=a^2-b^2$ |
| Man lægger brøker sammen ved at sætte på fælles brøkstreg. Fælles nævner kan altid findes ved at gange nævnerne sammen | $\frac{2}{3}+\frac{7}{8}=\frac{16}{24}+\frac{21}{24}=\frac{16+21}{24}=\frac{37}{24}$ <br> $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 3}{12}+\frac{5\cdot 2}{12}=\frac{9+10}{12}=\frac{19}{12}$ |
| Brøker forkortes ved at dividere alle led med samme tal | $\frac{6a-12b}{3a+9b}=\frac{2a-4b}{a+3b}$ (brøk forkortet med 3) |
| To potenser med samme grundtal multipliceres ved at addere eksponenterne | $a^3\cdot a^6=a^9$ |
| To potenser med samme grundtal divideres ved at subtrahere eksponenterne | $\frac{a^8}{a^3}=a^5$ |
| Man opløfter en potens til en ny potens ved at multiplicere eksponenterne og beholde roden | $\left(a^5\right)^4=a^{20}$ |
| Flyttes et led over på den anden side af ligheds-tegnet skiftes fortegn | $x+3=5\Leftrightarrow x=5-3$ |
| Flyttes en faktor over på den anden side af et lighedstegn divideres med det (dog må ikke divideres med 0) | $2x=3\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ |
| I en ligning kan man gange alle led med samme tal ( $\neq 0$ ) | $\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}\Leftrightarrow 4x+1=5$ |
| Andengradsligning- formel | $ax^2+bx+c=0\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ |

## Eksempel 1.1. Regneregler

a) Reducer uden brug af lommeregner $3\left(\frac{3a}{5b}-\frac{5b}{3a}\right)\cdot a\cdot b$

b) Løs uden brug af lommeregner ligningen $\frac{2x-3}{2x+3}=5$

Kontroller facit ved brug af lommeregner.

**Løsning:**

a) $3\left(\frac{3a}{5b}-\frac{5b}{3a}\right)\cdot a\cdot b=3\frac{(3a)^2-(5b)^2}{15ab}\cdot a\cdot b=\frac{1}{5}\left(9a^2-25b^2\right)$

b) $\frac{2x-3}{2x+3}=5$

Antages $2x+3\neq 0$ fås

$$2x-3=5\cdot(2x+3)\Leftrightarrow 2x-3=10x+15\Leftrightarrow -8x=18\Leftrightarrow x=-\frac{18}{8}\Leftrightarrow \underline{\underline{x=-\frac{9}{4}}}$$

TI89: Først vælges "Auto" som den "mode" hvori lommeregneren skal aflevere resultatet :
Vælg MODE\exakt/aprox\Auto

3*(3*a/(5*b)-5*b/(3*a))*a*b   ENTER        Resultat ok

F2\ solve((2x-3)/(2x+3)=5,x)  ENTER        Resultat ok

Ønskes resultatet som en decimalbrøk, så tryk på gul tast og ENTER
eller skriv eksempelvis 5.0 fremfor 5

# Opgaver til kapitel 1

**1.1.** (uden hjælpemidler)
Beregn

a) $5\cdot 4+6$
b) $5-(4+6)$
c) $5+4\cdot 6$
d) $(5+4)\cdot 6$
e) $2^3\cdot 6+2\cdot\left((-3)^3-(-3)\right)$

**1.2.** (uden hjælpemidler)
Skriv som uforkortelig brøk

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{8}$
b) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$
c) $2\cdot\frac{3}{4}$
d) $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)}$
e) $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{3}$

**1.3.** (uden hjælpemidler)
Reducér

a) $\frac{4a+8b}{2}$
b) $\frac{4a+8b}{2a}$
c) $\frac{4a+8b}{2a+4b}$
d) $\frac{4a^2}{2ab-4a}$
e) $\frac{15a^{15}}{5a^5}$
f) $\left(\frac{x^2+2}{x+3}-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{x}$

**1.4** (uden hjælpemidler)
Udregn

a) $(3x-5)\cdot 6+(-7x+13)\cdot 3-(8x-1)\cdot(-2)$

b) $(3x-5)(2y+3)-(5x+2)(y+2)$

c) $(x+5y)^2-(x-5y)^2$

d) $2x^5-(x^7-2x^3)(3x^3-x^2)$

e) $(2x+3y)\cdot(3x-y)$

**1.5**. (uden hjælpemidler)
Reducer

a) $\left(\frac{3a}{2b}-\frac{7a}{6b}\right)\left((a+b)^2-(a-b)^2\right)$

b) $\frac{72a^5b^3c^2}{54a^9bc^6}$

c) $\sqrt{16x^{16}}$

**1.6.** (uden hjælpemidler)
Find tallet $x$ af følgende ligninger

a) $5x+2=3x-10$

b) $\frac{5x-3}{2}+\frac{2x-3}{3}-\frac{x-7}{6}=0$

c) $\frac{2x+7}{5x-3}=\frac{2x-8}{5x+2}$

**1.7.** (uden hjælpemidler)
Løs ligningerne:

a) $a^3\cdot x=a^5$

b) $a^3\cdot x=\left(a^2\right)^9$

c) $4x+3=-2x+9$

**1.8.** (uden hjælpemidler)
Løs ligningerne:

a) $x^2-4=0$

b) $2\cdot x^2=4-2x$

c) $(x-2)\cdot(x^2-9)=0$

**1.9.** (uden hjælpemidler)
Bestem tallet a, så -3 er rod i ligningen $2x^3+3x^2-ax+3=0$

# 2. Plangeometri 1

## 2.1 Koordinatsystem

Ved et koordinatsystem vil vi i denne bog altid forstå et retvinklet koordinatsystem
I figur 2.1 er tegnet et $xy$ - koordinatsystem

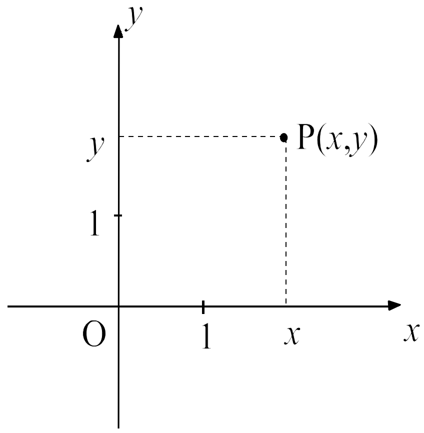



**Fig 2.1**. *Koordinatsystem*

Den vandrette koordinatakse kaldes ***x* - aksen** eller **1. aksen** og den lodrette kaldes ***y* - aksen** eller **2. aksen**.
Punktet P på figuren har **koordinaterne** (x, y).

Punktet med koordinaterne (0,0) kaldes **begyndelsespunktet** og benævnes i denne bog med O.

## 2.2. Afstandsformel

**Sætning 2.1 Afstandsformel**
Afstanden mellem to punkter $P = (x_1, y_2)$ og $Q = (x_2, y_2)$ er

$$\boxed{|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

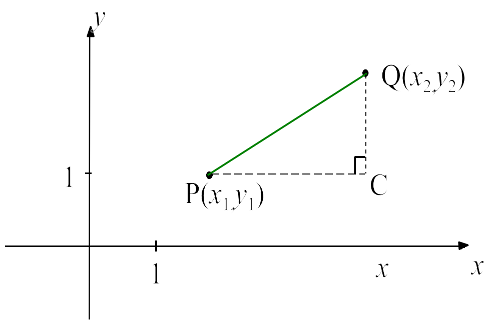



**Fig 2.2** *Afstandsformel*

Bevis: Punktet C (se figur 2.2) har koordinaterne $(x_2, y_1)$.
Vi har nu, at $|PC| = |x_2 - x_1|$ og $|QC| = |y_2 - y_1|$
Af den retvinklede trekant ABC fås nu ifølge "Pythagoras"
$|PQ|^2 = |PC|^2 + |CQ|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$
Heraf fås formlen. ◆

### Eksempel 2.1. Afstandsformel
Bestem afstanden mellem punkterne A=(2,3) og B=(-4,6).

**Løsning:**

Ifølge afstandsformlen fås: $|AB| = \sqrt{(-4-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{36+9} = \underline{\underline{\sqrt{45} = 6.708}}$ ◆

## 2.3. Ret linies ligning
Lad der i et koordinatsystem være givet en ret linie *l*.

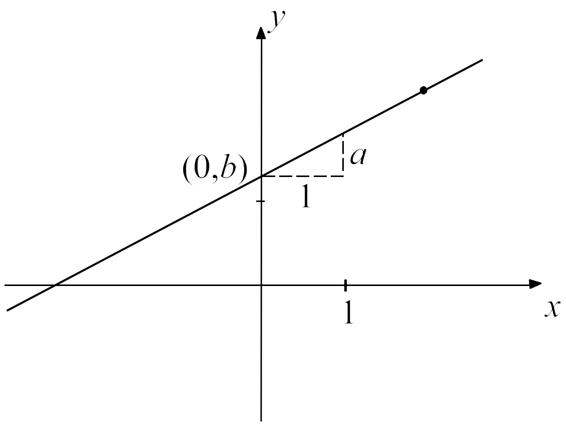



**Fig 2.3**. *Ret linie y = a x+b*

At linien *l* har ligningen $y = ax + b$ vil sige,
1) at alle punkter på linien *l* har koordinater, der passer i ligningen, og
2) ingen punkter udenfor linien har punkter der passer i ligningen.

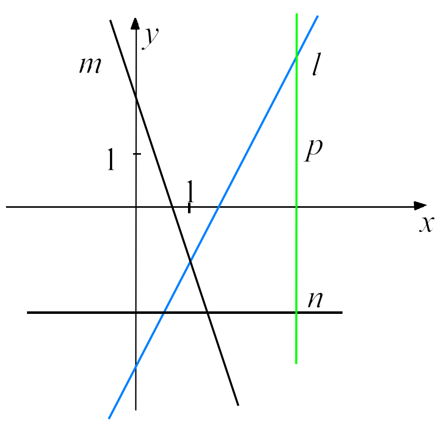
Indsættes $x = 0$ i ligningen fås $y = a \cdot 0 + b$ , dvs. linien *l* skærer y-aksen i punktet (0.b).
Sættes $x = 1$ fås $y = a \cdot 1 + b = a + b$ .
Heraf ses (jævnfør figur 2.3) at når $x$ vokser med 1, så ændrer $y$ - værdien sig med $a$
Tallet $a$ kaldes linien **hældning** (eller hældningskoefficient).

Er linien parallel med $x$ - aksen er dens hældning 0, og den har ligningen $y = b$.
En linie parallel med $x$ - aksen, har ligningen $x = c$, hvor $c$ er liniens skæring med $x$ - aksen.

### Eksempel 2.2 Ret linies ligning
Tegn i samme koordinatsystem linierne
1) *l* med ligningen $y = 2x - 3$
2) *m* med ligningen $y = -3x + 2$
3) *n* med ligningen $y$ = - 2
4) *p* med ligningen x = 3

**Løsning:**

Ved indsættelse af x = 0 og x =1 fås
1) *l* går gennem punkterne (0,-3) og (1,5)
2) *m* går gennem punkterne (0,4) og (1,1)
3) *n* går gennem punktet (0,-2) og er parallel med x-aksen
4) *p* går gennem punkterne (3,0) og er parallel med y - aksen



**TI 89**:
Gul tast\Y= (findes over F1)
Skriv 2*x-3 ENTER
Skriv -x+2 ENTER (Bemærk: foranstillet minus vælges nederst på tastatur)
Skriv -2
x = 3 er ikke en funktion, og kan derfor ikke angives
Gul tast\Graph (findes over F3)
Hvis tegningen ikke er tilfredsstillende vælges Gul tast\Windows og man sætter xmin, xmax, ymin og ymax til passende værdier.

En ret linie kan være givet ved at den går gennem 2 givne punkter, eller ved, at man kender et punkt på linien og liniens hældning.
Der gælder følgende sætning:

### Sætning 2.2 Ret linies ligning

*Hvis en ikke lodret linie $l$ går gennem to punkter $P=(x_1,y_1)$ og $Q=(x_2,y_2)$ er liniens hældning $a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ og liniens ligning $y-y_1=a(x-x_1)$*

Bevis:
Lad $l$ have ligningen $y=ax+b$.
Da punkterne P og Q ligger på linien gælder $y_1=ax_1+b$ og $y_2=ax_2+b$.

Trækker vi nu de to ligninger fra hinanden fås $y_2-y_1=ax_2+b-(ax_1+b) \Leftrightarrow y_2-y_1=a(x_2-x_1) \Leftrightarrow a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

Trækkes ligningen $y=ax+b$ fra ligningen $y_1=ax_1+b$ fås $y-y_1=ax+b-(ax_1+b) \Leftrightarrow y-y_1=a(x-x_1)$

### Eksempel 2.3. Linie bestemt ved at gå gennem to punkter

Bestem ligningen for linien gennem punkterne A = (-2, 3) og B = (4, -1).

**Løsning:**

Vi har hældningen $a=\dfrac{-1-3}{4-(-2)}=\dfrac{-4}{6}=-\dfrac{2}{3}$

Ligningen er: $y-3=-\dfrac{2}{3}(x-(-2)) \Leftrightarrow y-3=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \underline{\underline{y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{5}{3}}}$

Generelt gælder, at **enhver** ret linie har en ligning af formen $ax+by=c$

## 2.4 Cirklen

På figur 2.4 er i et koordinatsystem tegnet en cirkel med centrum i C= $(x_0, y_0)$ og radius *r*.

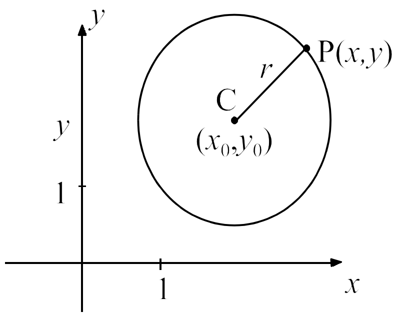



**Fig. 2.4.** *Cirkel*

Der gælder da følgende sætning

### Sætning 2.2. Cirklens ligning

En cirkel med centrum i C= $(x_0, y_0)$ og radius *r* har ligningen

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2}$$

Bevis:
Lad P = $(x,y)$ være et vilkårligt punkt på cirkelperiferien.
Da cirkelperiferien består af netop de punkter, hvis afstand til centrum er radius *r* er $|CP| = r$

I følge afstandsformlen haves nu $|CP| = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = r \Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$

### Eksempel 2.4 Cirkler

1) En cirkel har centrum i punktet (2, -3) og radius 4.
   Find cirklens ligning
2) Angiv radius og koordinaterne til centrum for den cirkel, der har ligningen $(x+2)^2+(y-6)^2 = 25$

**Løsning:**

1) Af sætning 1.2 fås ligningen
   $(x-2)^2+(y-(-3))^2 = 4^2 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+6y+9=16 \Leftrightarrow \underline{\underline{x^2+y^2-4x+6y=3}}$

2) Af sætning 1.2 fås , at centrum har koordinaterne $\underline{\underline{(-2, 6)}}$ og radius $\underline{\underline{r=5}}$

"Reduceres" cirklens ligning

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0{}^2+y_0{}^2 = r^2 \qquad (1)$$

ser vi, at har vi en ligning af typen $x^2+y^2+ax+by+c=0$ så er det muligvis ligningen for en cirkel med $-2x_0 = a,\ -2y_0 = b,\ \ x_0{}^2+y_0{}^2-r^2 = c$.

### Eksempel 2.5 Ligning for en cirkel

Undersøg om ligningen $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0$ fremstiller en cirkel, og angiv i bekræftende fald centrums koordinater og radius.

**Løsning:**

Sammenlignes $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0$ med formen (1) ses, at

$-2x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0 = -1$ , $-2y_0 = -8 \Leftrightarrow y_0 = 4$ og $(-1)^2 + 4^2 - r^2 = 13 \Leftrightarrow r^2 = 4$.

Vi har følgelig, at ligningen

$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0$ fremstiller en cirkel med centrum i (-1, 4) og med radius 2

Ved en **enhedscirkel** forstås en cirkel med centrum i begyndelsespunktet O = (0 , 0) og med radius 1

Ligningen for en sådan er $x^2 + y^2 = 1$

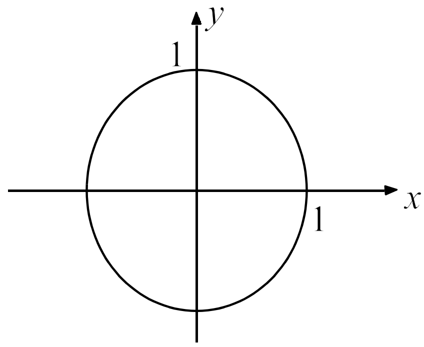



**Fig. 2.5**. *Enhedscirkel*

## 2.5 De trigonometriske funktioner sinus , cosinus og tangens.

Ordet trigonometri betyder trekantsmåling. Kan man regne vinkler og sider ud i en trekant, kan man ved "triangulering" opdele en polygon i trekanter, hvis sider og vinkler så også kan beregnes. Trigonometriske beregninger var således helt afgørende for at de store sejlskibe i 1400- og 1500- tallet kunne sejle over de store oceaner eksempelvis fra Europa til Amerika. Endvidere var de uundværlige ved landmåling.

Som en ikke geometrisk anvendelse kan nævnes at de trigonometriske funktioner er nødvendige til en beskrivelse af svingninger f.eks. ved bølgebevægelse eller elektriske svingninger (vekselspænding i elektriske kredsløb) .

## 2.5.1.Definition af sinus og cosinus

Lad $P$ være et punkt på enhedscirklen, og lad v betegne en vinkel fra $x$ - aksen til linien gennem O og P, hvor v regnes med fortegn (positiv mod uret). Funktionerne $\cos v$ og $\sin v$ defineres da ved, at punktet $P$ skal have koordinaterne $P = (\cos v, \sin v)$ .

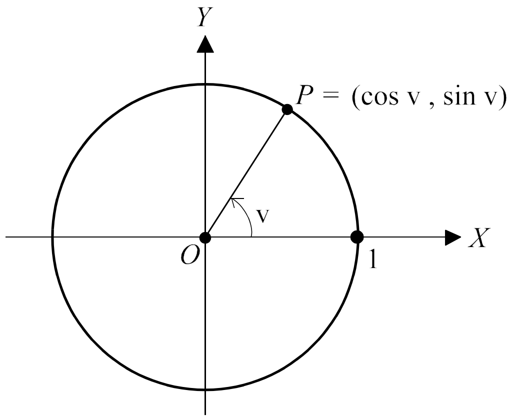



**Fig. 2.6.** *Definition af* cos *og* sin.

Når det drejer sig om geometriske beregninger f. eks. i trekantsberegninger regnes vinklerne i grader. Dette er således tilfældet i dette og de to følgende afsnit. Hvis intet andet er nævnt, så gælder her, at $0 \le v \le 180^0$
Til beskrivelse af svingninger og andre fysiske anvendelser anvendes et andet vinkelmål (radianer). Dette sker i kapitel 6.

Af definitionen følger
1) $-1 \le \sin v \le 1$ og $-1 \le \cos v \le 1$
2) $\sin 0^0 = \sin(180^0) = 0$, $\sin(90^0) = 1$ , $\cos 0^0 = 1$, $\cos(90^0) = 0$ og $\cos(180^0) = -1$.
3) $(\sin v)^2 + (\cos v)^2 = 1$

Følger af, at $|OP| = 1$ og benyttelse af afstandsformlen.

### Eksempel 2.6. Beregning af sin og cos på TI89

Beregn $\sin(30^0)$, $\sin(120^0)$ $\cos(30^0)$ $\cos 120^0$

**Løsning:**

Først sikrer vi at vinkelmålet er i grader ved MODE\ Angle = Degree\ENTER
Funktionerne findes på tastaturet i fjerde række.

$\sin(30) = 1/2$ $\sin(120) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos(30) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos(120) = -1/2$

◆

Ofte skal man foretage den omvendte beregning. Dette er vist i det følgende eksempel.

**Eksempel 2.7. Beregning af $\sin^{-1}$ og $\cos^{-1}$ på TI89**

Lad $0 \le v \le 180^0$

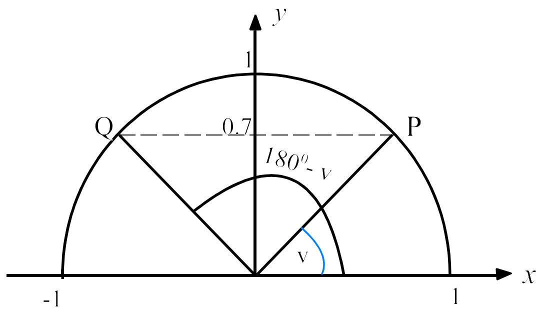
Find v, af følgende ligninger

a) sin v = 0.70

b) sin v = - 0.70

c) cos v = 0.70

d) cos v = - 0.70




**Løsning**:

a) Som det fremgår af figuren vil såvel vinklen v som vinklen ($180^0$ - v) have en sinus på 0.7.
Benyttes lommeregneren fås
$v = \sin^{-1}(0.70) = \underline{\underline{44.43^0}}$
Lommeregneren giver derfor kun vinklen i første kvadrant
Den anden vinkel bliver 180 - 44.43 = $\underline{\underline{135.57}}$
Om man ved en ved en trekantsberegning skal benytte begge vinkler eller kun den ene må afhænge af det konkrete problem.

b) cos v = - 0.23 $\Leftrightarrow$ $v = \cos^{-1}(-0.23) = \underline{\underline{103{,}30^0}}$
Her er der kun én løsning, hvilket bevirker, at man sædvanligvis vil foretrække cos fremfor sin ved beregningerne, hvis det er muligt. ◆

## 2.5.2. Definition af tangens

**Definition af tangens:**

$$\boxed{\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}, \qquad v \ne 90^0}$$

Værdierne for $\tan v$ aflæses på tangenten til enhedscirklen i (1,0).

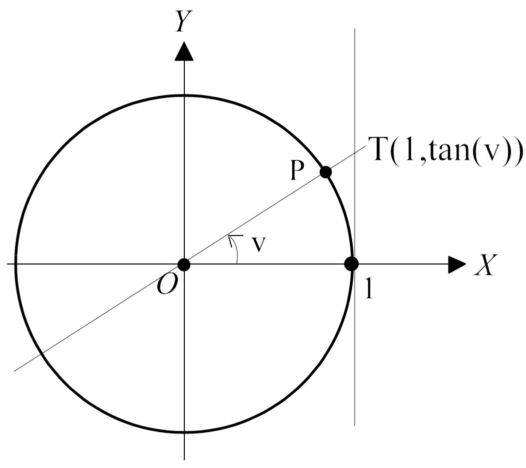



**Fig. 2.6.** *tan aflæses på tangenten*

Bevis:

Linien gennem punktet O og P=(cos ($x$), sin ($x$))

har hældningen $\alpha = \dfrac{\sin x - 0}{\cos x - 0} = \tan x$ .

Heraf ses, at punktet T har koordinaterne (1, tan($x$)). ◆

### Eksempel 2.8. Beregning af tangens på TI89
1) Beregn tan $(54.3^0)$,
2) Beregn tan$(130.0^0)$
**Løsning:**
1) tan(54,3) = $\underline{\underline{1.392}}$
2) tan(130) = -1.192

◆

### Eksempel 2.9. Beregning af $\tan^{-1}$ på TI89
Find v, af
1) tan v = 0.70
2) tan v = - 0.50
**Løsning:**
1) v = $\tan^{-1}(0.70)$ = $\underline{\underline{34.99^0}}$
2) Lommeregneren beregner en negativ vinkel u på figur 1.7.
Ønskes en løsning v i intervallet $[0;180^0]$ fås v = $180^0$ + u
u = $\tan^{-1}(-0.50)$ = - $26.57^0$
v = $180^0 + \tan^{-1}(-0.50)$ = $\underline{\underline{153.44^0}}$

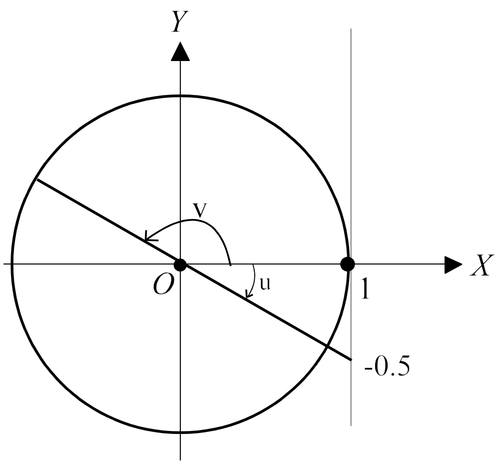


**Fig. 2.7.** *$\tan^{-1}$ af negativt tal*

◆

## 2.6. Ligefrem og omvendt proportionalitet

**Ligefrem proportionalitet**:
To størrelser x og y siges at være (ligefrem) **proportionale**, hvis der findes et tal $a > 0$, så $y = a \cdot x$

### Eksempel 2.10. Proportionalitet
Lad en bil køre med den konstante hastighed 90 km/time hen ad en motorvej.
Tiden t og den tilbagelagte vejlængde $y$ er da proportionale.
Eksempelvis på 1 time er der tilbagelagt 90 km, på 2 timer er der tilbagelagt 180 km osv., så $y = 90 \cdot t$

◆

**Omvendt proportionalitet**
To størrelser x og y siges at være **omvendt proportionale**, hvis der findes et tal $a > 0$, så $y = \frac{a}{x}$

### Eksempel 2.11. Omvendt proportionalitet
Lad afstanden ad en motorvej fra et punkt A til et punkt B være 100 km.
En bil kører fra A til B med den konstante hastighed v km/time hen ad motorvejen.
Tiden t og hastigheden v er da omvendt proportionale.

Eksempelvis køres v = 100 km/time tilbagelægges vejstrækningen på 1 time, med 50 km/time tilbagelægges vejstrækningen på 2 timer osv.

Vi har følgelig, at $v = \frac{100}{t}$ ◆

## 2.7. Ensvinklede trekanter
I figur 2.8 er trekant $A_1B_1C_1$ en "forstørret" udgave af trekant ABC, idet alle sidelængder i trekant $A_1B_1C_1$ er dobbelt så lange som de tilsvarende længder i trekant ABC. Ved forstørrelsen bevarer trekanten sine vinkler. Trekanterne siges at være ensvinklede.
Man kunne naturligvis i stedet have benyttet et andet størrelsesforhold end 2.

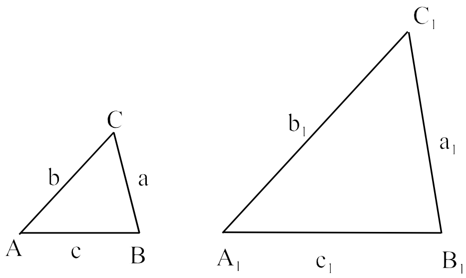



**Fig 2.8**. *Ensvinklede trekanter*

**Definition**: To trekanter kaldes ensvinklede , hvis de tre vinkler er parvis lige store.

Man kan vise, at: To trekanter ensvinklede $\Leftrightarrow$ ensliggende sider er proportionale
dvs. $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1 \Leftrightarrow$ Der findes et tal $k$ så $a_1 = k \cdot a,\ b_1 = k \cdot b,\ c_1 = k \cdot c$

### Lineær interpolation
Ved lineær interpolation antager man, at den tabellagte funktion ændrer sig "lineært" (dvs. som en linie eller en plan) i det område, hvori man foretager interpolationen.

### Eksempel 2.12 Interpolation i en vejs tabel
Find den værdi af $y$ som svarer til en værdi af $x$ på 5.68.
Et uddrag af tabellen omkring det relevante sted er følgende:

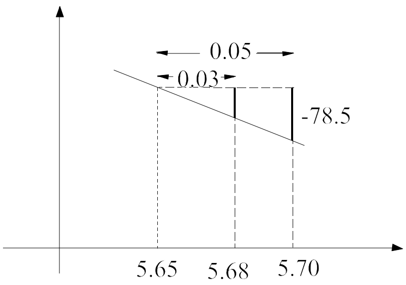
| | | | |
|---|---|---|---|
| x | | 5.650 | 5.700 |
| y | | 2301.0 | 2222.5 |

**Håndregning**

Vi ser, at stiger $x$ med 0.05 (fra 5.650 til 5.700) stiger $y$ med -78.5 (fra 2222.5 til - 2301.0)
Af de ensvinklede trekanter (se figuren) ses nu, at stiger $x$ med 0.03 (fra 5.650 til 5.680), så vil $y$ stige med

$$\frac{0.03}{0.05}(-78.5) = -47.1$$

Værdien i $x = 5.68$ er følgelig $y = 2301.0 - 47.1 = \underline{\underline{2253.9}}$




**Lommeregner:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | | x1=5.650 | x2=5.700 |
| | | y1=2301.0 | y2=2222.5 |

Med de angivne bogstaver er formlen: $y = y1 + \dfrac{y2 - y1}{x2 - x1}(x - x1)$

I TI89 indtastes følgende:
y1+(y2-y1)/(x2-x1)*(x-x1) STO int1(x1,x2,y1,y2,x) (STO findes i næstsidste række)
Vi har nu gemt en funktion it1 i lageret (Main)
Vi kan nu benytte den ligesom enhver anden funktion
Gå ind i HOME, Tryk på VAR-Link (over tasten -) og vælg int1 ENTER
I HOME står nu int1(
Vi skriver nu int1( 5.65, 5.7,2301, 2222.5, 5.68) **Resultat 2253.9**
Et problem er at huske den rækkefølge, man skal indsætte de 5 variable.

## 2.8. Retvinklet trekant.

Betegnelser: I en retvinklet $\Delta$ ABC, hvor $\angle$ C = $90^0$ (se figur 2.9) kaldes c for hypotenusen og de to andre sider for kateter. I forhold til $\angle$ A kaldes a for den modstående katete og b for den hosliggende katete.
Der gælder følgende vigtige sætning

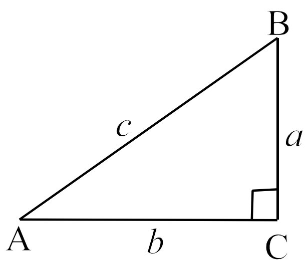



**Fig 2.9**. *Retvinklet trekant*

### Sætning 2.3. Retvinklet trekant

*I en retvinklet $\Delta$ ABC, hvor* $\angle$ C = $90^0$ gælder

$$\boxed{\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \tan A = \frac{a}{b}}$$

eller

$$\sin(\text{spids vinkel}) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenuse}}, \qquad \cos(\text{spids vinkel}) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenuse}}$$

$$\tan(\text{spids vinkel}) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$$

Bevis
Et koordinatsystem er indlagt som vist på figur 2.10, med A i begyndelsespunktet og C ud af x - aksen.

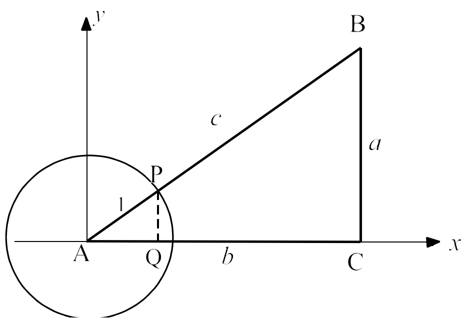



**Fig 2.10.** *Retvinklet trekant*

De to trekanter $\Delta$ ABC og $\Delta$ APQ er ensvinklede, så deres sider er proportionale, dvs. $\dfrac{|PQ|}{|BC|}=\dfrac{|AQ|}{|AC|}=\dfrac{|AP|}{|AB|}$

Da $|PQ| = \sin A$, $|AQ| = \cos A$ og $|AP| = 1$ fås $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\cos A}{b}=\dfrac{1}{c}$

Heraf fås $\sin A = \dfrac{a}{c}$, $\cos A = \dfrac{b}{c}$ og $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{a}{b}$ ◆

Formlerne i sætning 2.3 sikrer, at hvis vi kender en side og enten en vinkel eller yderligere en side, kan vi beregne de resterende sider og vinkler (forudsat naturligvis at trekanten eksisterer).

Der er 5 såkaldte trekantstilfælde:

1) Givet siderne $a$ og $b$: $c$ findes af $c^2 = b^2 + a^2$, $\angle$ A af $\tan A = \dfrac{a}{b}$ og $\angle \text{B} = 90^0 - \angle \text{A}$

2) Givet siderne $a$ og $c$: $b$ findes af $c^2 = b^2 + a^2$, $\angle$ A af $\sin A = \dfrac{a}{c}$ og $\angle \text{B} = 90^0 - \angle \text{A}$

3) Givet $\angle$ A og siden $a$: $b$ findes af $\tan A = \dfrac{a}{b}$, c findes af $\sin A = \dfrac{a}{c}$ og $\angle \text{B} = 90^0 - \angle \text{A}$

4) Givet $\angle$ A og siden $b$: $a$ findes af $\tan A = \dfrac{a}{b}$, c findes af $\cos A = \dfrac{b}{c}$ og $\angle \text{B} = 90^0 - \angle \text{A}$

5) Givet $\angle$ A og siden $c$: $a$ findes af $\sin A = \dfrac{a}{c}$, b findes af $\cos A = \dfrac{b}{c}$ og $\angle \text{B} = 90^0 - \angle \text{A}$

**Eksempel 2.13. Retvinklet trekant**
I en retvinklet $\Delta$ ABC, hvor $\angle \text{C} = 90^0$ er $\angle \text{A} = 35{,}6^0$ og siden a = 5.3.
Find de ubekendte sider og vinkler.
**Løsning:** $\angle \text{B} = 90^0 - \angle \text{A} = 90^0 - 35{,}6^0 = \underline{\underline{54.4^0}}$

$$\tan A = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b = \frac{a}{\tan A} \Leftrightarrow b = \frac{5.3}{\tan 35.6} \Leftrightarrow \underline{\underline{b = 7.403}}$$

$$\sin A = \frac{a}{c} \Leftrightarrow c = \frac{a}{\sin A} \Leftrightarrow c = \frac{5.3}{\sin 35.6} \Leftrightarrow \underline{\underline{c = 9.105}}$$

◆

## Opgaver til kapitel 2

**2.1**.(uden hjælpemidler)
Bestem en eksakte værdi af afstanden mellem punkterne A = (-4, 3) og B = (-3, -8)

**2.2** Bestem med 3 decimaler længderne af siderne i trekant ABC, hvor A = (-3, 4) , B = (5, 7) og C = (2 , 5)

**2.3** Undersøg om trekant ABC er ligebenet, når A = (5, 8), B = (6, 1) og C = (2, 4)

**2.4**. (uden hjælpemidler)
En linie går gennem punkterne A = (1, 2) og B = (3, -1).
Find liniens ligning.

**2.5.** (uden hjælpemidler)
En linie $l$ går gennem A =(-3,1) og B = (1, 5).
Opskriv ligningen for $l$

**2.6**.(uden hjælpemidler)
En linie $l$ går gennem A = (1, -3) og har hældningen 2.
a) Tegn linien $l$ i et koordinatsystem
b) Opskriv linien $l$'s ligning.
c) Find koordinaterne til linien $l$'s skæringspunkter med koordinatakserne.

**2.7**.(uden hjælpemidler)
a) Opskriv ligningen for den linie $l$, der går gennem punktet $P = (5, 3)$ og har hældningen $a = 3$
b) Opskriv ligningen for den linie $m$, der går gennem punktet P $= \left(0, -\frac{1}{3}\right)$ og har hældningen $a = -3$

**2.8**. (uden hjælpemidler)
Linien $l$ går gennem punkterne A = ( -1, 4) og B = (7, 6).
Find en ligning for den linie $m$ som skærer $x$ - aksen i (4, 0) , og som er parallel med $l$.

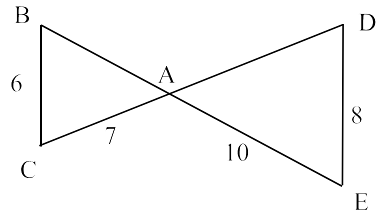
**2.9.** En linie går gennem punkterne A = (-3,2) og B = (2,4).
Undersøg om punktet C = (512, 207) ligger på denne linie.

**2.10.** (uden hjælpemidler)
En cirkel har centrum i punktet C = (-2,3) og har radius 5.
a) Opskriv ligningen for cirklen
b) Vis, at punktet D = (2,6) ligger på cirklen
c) Find skæringspunktet mellem cirklen og $x$ - aksen.

**2.11** (uden hjælpemidler)
Angiv centrum C og radius $r$ for hver af følgende cirkler
a) $x^2 + (y-3)^2 = 4$
b) $(x+2)^2 + (y-6)^2 = 25$

**2.12** Angiv centrum C og radius $r$ for hver af følgende cirkler
a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 6$
b) $x^2 + y^2 - 10x = -16$
c) $x^2 + y^2 + 2x + 8y = 8$

**2.13** (uden hjælpemidler)
På figuren er afsat længden af nogle af sidelængderne i de to trekanter.
Beregn de eksakte længder af de to resterende sider




**2.14** (uden hjælpemidler)
Valutakursen på svenske kroner er 78.90 kr, dvs. til 100 svenske kroner svarer 78.90 danske kroner.
a) Hvis der til $x$ svenske kroner svarer $y$ danske kroner, hvad er så relationen mellem $x$ og $y$.
b) Er der ligefrem eller omvendt proportionalitet mellem $x$ og $y$.

**2.15** (uden hjælpemidler)
En kostbar gave til et bryllup koster 2000 kr.
Lad der være $x$ personer der ønsker at bidrage til gaven, og lad det beløb hver person skal give være $y$.
a) Angiv relationen mellem x og y
b) Er der ligefrem eller omvendt proportionalitet mellem $x$ og $y$.

**2.16** (uden hjælpemidler)
$\Delta$ ABC er retvinklet med $\angle C = 90^0$ . Det oplyses, at $\sin(30^0) = \frac{1}{2}$ .
Beregn de manglende sider når
a) $\angle A = 30^0$ og $a = 5$
b) $\angle A = 30^0$ og c = 8

**2.17** Angiv med 4 decimaler $\cos(60^0)$, $\sin(70^0)$, $\sin(110^0)$ , $\tan(123^0)$, $\cos(120^0)$

**2.18** Lad vinklen v lige i intervallet $0^0 \leq v \leq 180^0$
Find med 2 decimaler de værdier af v , hvor
a) cos v = 0.2345 b) sin v = 0.2345 c) cos v = - 0.3456

**2.19** $\Delta$ ABC er ligebenet med $b = c$ , $\angle A = 35^0$ og $a = 8$.
Find de manglende sider og vinkler.

**2.20** Hvor mange grader står solen over horisonten, når en 12 m høj flagstang kaster en skygge på 25 m.

**2.21** Ud for en retlinet kyst ligger en lille ø med et fyr F. Bestem fyrets afstand fra kysten, når sigtelinien 400 m længere nede ad kysten danner en vinkel på $35^0$ med kystlinien.

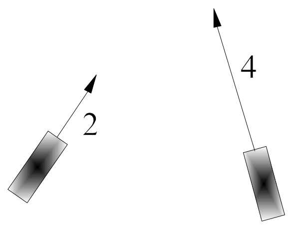
**2.22** En cirkel har centrum i punktet C og en radius r = 4 m. Et punkt P ligger i afstanden 8 m fra C. Fra P trækkes tangenterne til cirklen.
a) Beregn afstanden fra P til tangenternes røringspunkter med cirklen.
b) Beregn den vinkel som de to tangenter danner med hinanden.

**2.23** Fra et skib ses et 65m højt fyr under en vinkel på $8.5^0$.
Hvor lang befinder skibet sig fra fyret.?

# 3 Vektorer i planen

## 3.1 Definition af vektor

Ved mange målinger og beregninger er man blot interesseret i at opnå et tal som resultat. Man siger også, at resultatet er en *skalar.* Dette gælder eksempelvis ved måling af en masse (10 kg) eller en afstand (5 m). Ofte er tallet forsynet med en enhed.
I andre tilfælde er man ikke alene interesseret i et tal som resultat, men også i en *retning.* Dette gælder eksempelvis hvis man vil angive et skibs hastighed, som jo både er den retning skibet sejler i, og dens fart.
Dette sker normalt ved pile som både har en retning og en længde (se figuren).
Et andet eksempel er de kræfter der påvirker et legeme. Også her har man behov for både at angive kraftens retning og dens størrelse.




Det er netop regning med sådanne 'pile', vil skal se på i dette kapitel.

Et liniestykke er bestemt af sine endepunkter. Vi forsyner nu liniestykker med en retning eller *orientering,* som vi angiver ved hjælp af en pilespids i den ene ende.

**Definition:** Mængden af alle liniestykker med samme længde og samme retning kaldes en **vektor**. Hver af disse orienterede liniestykker kaldes en pil, og hver pil kaldes en repræsentant for vektoren.

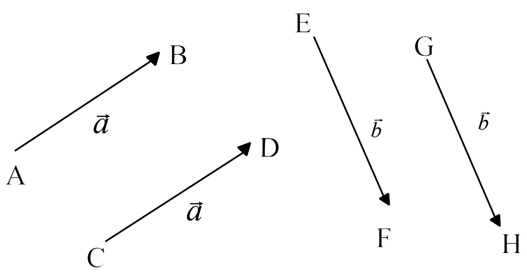



**Fig 3.1:** *Vektorer*

På figur 3.1 er pilene AB og CD repræsentanter for samme vektor, som vi betegner med $\overrightarrow{AB}$.

Da de to pile repræsenterer samme vektor skriver vi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, Vi kalder A for pilens *begyndelsespunkt* og B for dens *endepunkt.*

Vektorer betegnes også med små bogstaver med pil over: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$

På figur 3.1 repræsenterer EF og GH en anden vektor $\vec{b}$ .

Læg mærke til, at $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ , fordi de to pile <u>ikke</u> har samme retning.

Vi vil i det følgende tillade os at tale om "vektoren $\overrightarrow{AB}$ " i stedet for det mere korrekte "vektoren repræsenteret ved pilen AB".

**Længden** af vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ skrives $|\vec{a}|$ og defineres som længden af liniestykket AB.

**Nulvektoren** $\vec{0}$ er en vektor med længden 0.
**Egentlig vektor**: Vektor der ikke er nulvektoren

## 3.2 Regneregler

### Vektoraddition.

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer. Vektoren $\vec{a}+\vec{b}$ defineres på følgende måde.
Et vilkårligt punkt A vælges som begyndelsespunkt for $\vec{a}$ . Lad B være endepunkter for $\vec{a}$ . Derefter afsætter vi $\vec{b}$ med begyndelsespunkt i B. Endepunktet for $\vec{b}$ kaldes C (se figur 3.2).
Vektoren $\vec{a}+\vec{b}$ er da defineret som vektoren med begyndelsespunkt i A og endepunkt i C.
Vi har altså $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (kaldes **indskudssætningen**, da B er skudt ind mellem A og C)

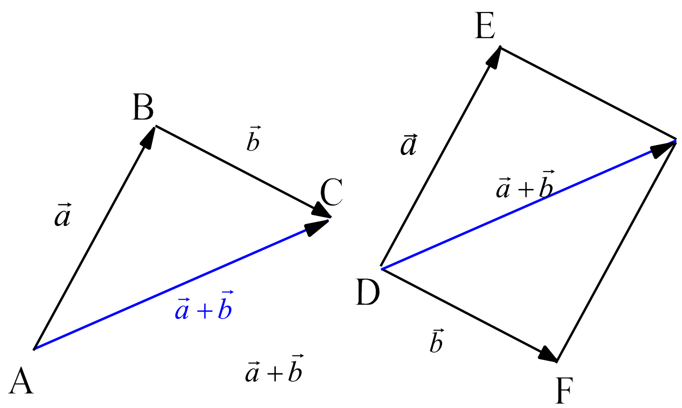



**Fig 3.2** *Vektoraddition*

**Kræfternes parallelogram**. En anden måde at konstruere summen af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ved at afsætte de to vektorer med samme begyndelsespunkt (på figur 3.2 i punktet D). Vektoren $\vec{a}+\vec{b}$ er da diagonalen i det af $\vec{a}+\vec{b}$ udspændte parallelogram.
Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ var kræfter der påvirkede et legeme i punktet D, så er $\vec{a}+\vec{b}$ den resulterende kraft.

Det ses umiddelbart af en figur, at der gælder
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ og $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$
Disse 2 regler bevirker, at man regnereglerne for addition af reelle tal og for vektoraddition bliver de samme. Man kan således hæve og sætte "plus"parenteser efter behag.

## Vektorsubtraktion

For reelle tal gælder som bekendt, at 6 - 4 er det tal der lagt til 4 giver 6, eller 4 + (6-4) = 6. På samme måde skal det gælde, at $\vec{b}+(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}$ .

På figur 3.3 er $\vec{a}$ og $\vec{b}$ afsat med samme begyndelsespunkt. $\vec{a}-\vec{b}$ er da den vektor, der har begyndelsespunkt i $\vec{b}$ 's endepunkt og endepunkt i $\vec{a}$ 's endepunkt .

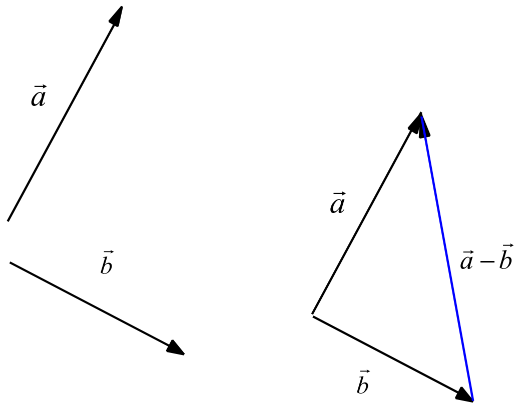



**Fig 3.3** *Vektorsubtraktion*

## Multiplikation med tal

**Definition:** Lad $\vec{a}$ være en egentlig vektor og $t$ være et reelt tal.
Vektoren $t\cdot\vec{a}$ er da bestemt ved:
Hvis $t > 0$: $t\cdot\vec{a}$ og $\vec{a}$ er ensrettede og $t\cdot\vec{a}$ er $t$ gange så lang som $\vec{a}$ .
Hvis $t < 0$: $t\cdot\vec{a}$ og $\vec{a}$ er modsat rettede og $t\cdot\vec{a}$ er $|t|$ gange så lang som $\vec{a}$ .
Hvis $t = 0$: $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

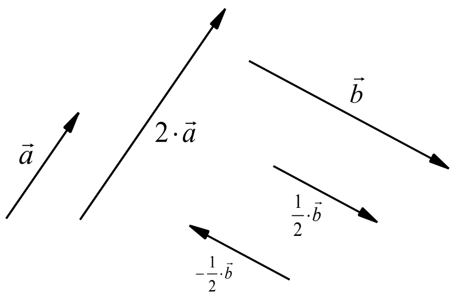



**Fig. 3.4** *Multiplikation med tal*

Specielt ses, at $(-1)\cdot\vec{a}$ er vektoren der er modsat rettet $\vec{a}$ og lige så lang som $\vec{a}$ . Den benævnes kort $-\vec{a}$ .
For multiplikation af vektorer med tal gælder se sædvanlige regneregler som vi er vant til fra tal.
Eksempelvis $2(\vec{a}+3\vec{b})-4(3\vec{a}-2\vec{b})=2\vec{a}+6\vec{b}-12\vec{a}+8\vec{b}=-10\vec{a}+14\vec{b}$

Ved en **enhedsvektor** $\vec{e}$ forstås en vektor med længden 1

Enhedsvektor $\vec{e}$ ensrettet med en given vektor $\vec{a}$ er $\vec{e}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Hvis eksempelvis $\vec{a}$ har længden 5, så er en enhedsvektor i $\vec{a}$ 's retning $\vec{e}=\dfrac{\vec{a}}{5}$.

## 3.3 Vektorers koordinater

Lad i et koordinatsystem punkterne O, E og F have koordinaterne O = (0,0), E = (1,0) og F = (0,1).

Vektorerne $\vec{i} = \vec{OE}$, $\vec{j} = \vec{OF}$ kaldes koordinatsystemets basisvektorer (jævnfør figur 3.5)

En vektor $\vec{a}$ kan nu skrives $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$ hvor $\vec{a}_x$ er parallel med $x$ - aksen og $\vec{a}_y$ er parallel med $y$ - aksen.

Da $\vec{a}_x$ er parallel med $\vec{i}$ findes der et tal $a_1$, så $\vec{a}_x = a_1\vec{i}$ hvor tallet $a_1$ er entydigt bestemt.

Analogt haves $\vec{a}_y = a_2\vec{j}$

Vi har derfor $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$

Vi siger, at vektoren $\vec{a}$ har koordinaterne ($a_1$ , $a_2$ ).

For at kende forskel på punkters og vektorers koordinater, vælger man ofte at skrive vektorens koordinater "lodret": $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

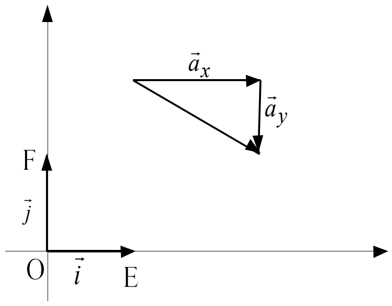



**Fig. 3.5**. *Basisvektorer*

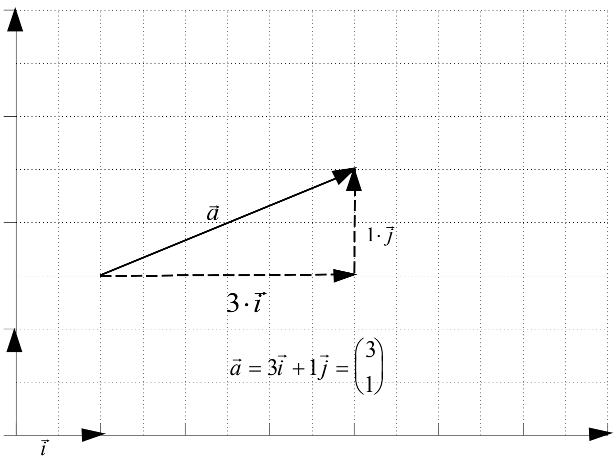



**Fig. 3.6**. *Vektors koordinater*

### Regning med koordinater

**Sætning 3.1.** *Lad* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ *og* $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

*Da gælder* $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$ , $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$, $t \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} ta_1 \\ ta_2 \end{pmatrix}$

**Bevis:**

$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ , $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$

$\vec{a} + \vec{b} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + b_1\vec{i} + b_2\vec{j} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

På ganske samme måde bevises de to andre formler. ◆

### Eksempel 3.1. Regning med vektorer

Lad der være givet $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Find koordinaterne til $2\vec{a} + 5\vec{b}$

**Løsning:**

$$2\vec{a} + 5\vec{b} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-2) + 5\cdot 3 \\ 2\cdot 3 + 5\cdot 5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 11 \\ 31 \end{pmatrix}}}$$

TI-89: 2*[-2,3]+5*[3,5]  Resultat [11 31]

◆

### Stedvektor

Lad P=($x$, $y$) være et punkt i planen og O=(0,0).

Vektoren $\vec{OP}$ kaldes *stedvektoren* til punktet P.

Det ses umiddelbart af figur 3.7, at stedvektoren $\vec{OP}$ og punktet P har samme koordinater.

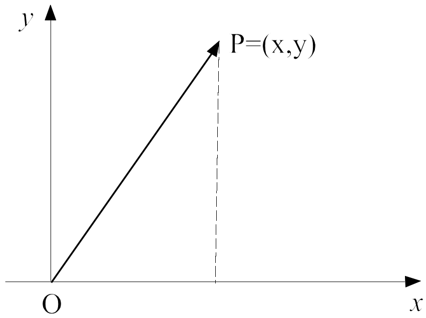



**Fig 3.7.** *Stedvektor*

### Sætning 3.2. Koordinater for vektor givet ved to punkter

*Lad punktet* A= $(a_1, a_2)$ *og punktet* $B = (b_1, b_2)$.

*Der gælder da, at vektoren* $\boxed{\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}}$

**Bevis:** Af indskudsreglen fås:

$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

Da $\vec{OB}$ og $\vec{OA}$ er stedvektorer, har de samme koordinater som A og B.

Heraf fås $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$

◆

### Eksempel 3.2. Koordinater for vektor givet ved 2 punkter

Lad punkterne A = (5,2) og B = (-3, 6).

Find koordinaterne til vektoren $\vec{AB}$.

**Løsning:**

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3-5 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}}}$$

◆

## Vektors længde.
### Sætning 3.3. Længde af vektor

$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$, *hvor* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

**Bevis:**
Vektorerne $a_1\vec{i}$ og $a_2\vec{j}$ danner sammen med $\vec{a}$ en retvinklet trekant med $\vec{a}$ som hypotenuse (se figur 3.8). Da længderne af kateterne er $|a_1\vec{i}| = |a_1|$ og $|a_2\vec{i}| = |a_2|$ fås af Pythagoras sætning: $|\vec{a}|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 \Leftrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

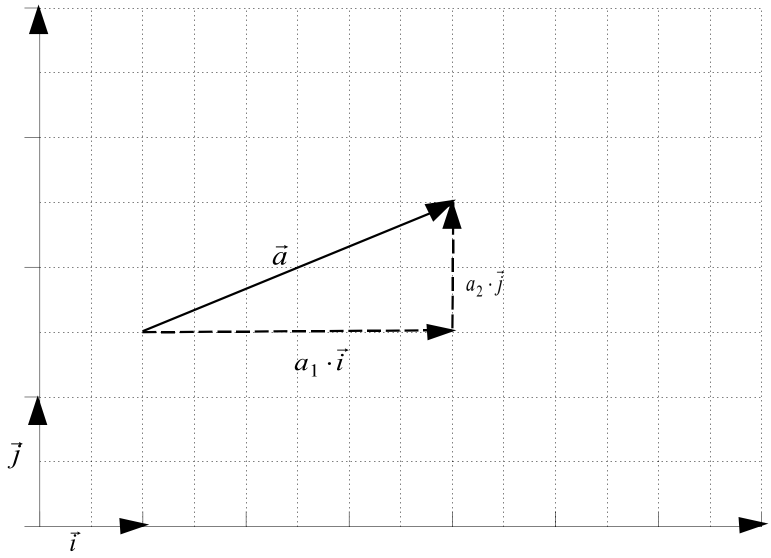



**Fig.3.8** *Vektors længde*

### Eksempel 3.3 Længde af vektor

1) Find længden af vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2) Find en enhedsvektor $\vec{e}$ ensrettet med $\vec{a}$.

**Løsning:**

1) $|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \underline{\underline{5}}$

2) $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{-3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}}}$

TI 89: 1) √ ((-3)^2+4^2)
2) unitV([-3,4]) (unitV angiver enhedsvektor og kan findes under CATALOG)

## 3.4 Skalarprodukt.

Vi vil nu definere et produkt af 2 vektorer, hvor resultatet er et tal (en skalar).

### Definition af skalarprodukt.

*Ved skalarproduktet (også kaldet "prikproduktet") af vektorerne* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ *og* $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ *forstås tallet* $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2}$.

### Eksempel 3.4. Skalarprodukt

Lad der være givet $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Find skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

**Løsning:** $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 5 = \underline{\underline{9}}$

TI89: CATALOG\ dotP([-2,1],[3,5])

Der gælder følgende regneregler for skalarproduktet:

### Sætning 3.4. Regneregler for skalarprodukt

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

(3) $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (t\vec{b}) = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$

(4) $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ (*sammenhæng mellem længde og skalarprodukt*)

**Bevis:**

Alle regler bevises ved koordinatregning

Lad $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$, $\vec{b} \cdot \vec{a} = b_1 a_1 + b_2 a_2$.

Da de to sider er ens er (1) bevist.

(2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2$

$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_1 c_1 + a_2 c_2$

Da de to sider er ens er (2) bevist.

(3) Vises analogt som (1) og (2)

(4) $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2$

Af længdeformlen haves $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$

Da de to sider er ens er (4) bevist

Regnereglerne (1), (2) og (3) svarer ganske til de man kender fra almindelige tal, så vi kan derfor tillade os at benytte samme metoder ved udregning.

Eksempelvis har vi $(\vec{a}-\vec{b})^2 = (\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$

Heraf fås $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\left((\vec{a}-\vec{b})^2 - \vec{a}^2 + \vec{b}^2\right) \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 - |\vec{a}|^2 - \left|\vec{b}\right|^2\right)$.

Da længden af en vektor er den samme uanset hvilket koordinatsystem der arbejdes ( blot man har samme enhed) så viser ovenstående, at skalarproduktets værdi også er uafhængigt af koordinatsystemet.

## 3.5 Retningsvinkel , polære koordinater

Lad $\vec{a}$ være en egentlig vektor. Vi har tidligere vist, at en enhedsvektor $\vec{e}$ i samme retning $\vec{a}$ er givet ved $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Heraf fås $\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\vec{e}$

Hvis vi afsætter $\vec{e}$ med begyndelsespunkt i (0,0) vil endepunktet P ligge på enhedscirklen (se figur 3.9).

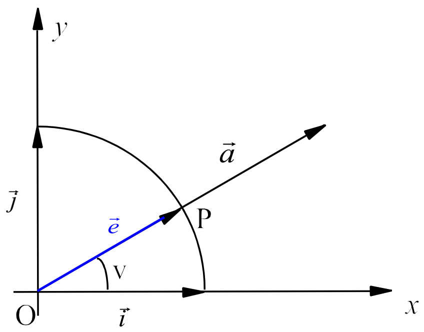



**Fig. 3.9** *Retningsvinkel*

Lad $\vec{e}$ danne vinklen v med den positive del af $x$ - aksen. Punktet P får da koordinaterne $(\cos v, \sin v)$. Da en stedvektor har de samme koordinater som punktet er $\vec{e} = \begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\end{pmatrix}$

Vi har dermed $\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\vec{e} = |\vec{a}|\cdot\begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}|\vec{a}|\cos v\\ |\vec{a}|\sin v\end{pmatrix}$.

Vinklen v fra $x$ - aksens positive del til $\vec{a}$ 's retningsvektor kaldes $\vec{a}$ 's *retningsvinkel* og regnes "med fortegn" sædvanligvis i intervallet [-180$^0$ ; 180$^0$ ] eller i intervallet [0$^0$ ; 360$^0$]

Man siger også, at punktet P har de *polære koordinater* $\left(\left|\overrightarrow{OP}\right|, v\right)$.

### Eksempel 3.5. Retningsvinkler og polære koordinater

Lad $\vec{a} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$ og $\vec{d} = \begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$

Find de 4 vektorers retningsvinkler, og angiv koordinaterne til de 4 vektorer i "polære koordinater".

**Løsning:**
De 4 vektorer er sammen med deres retningsvinkler indtegnet på figur 3.10

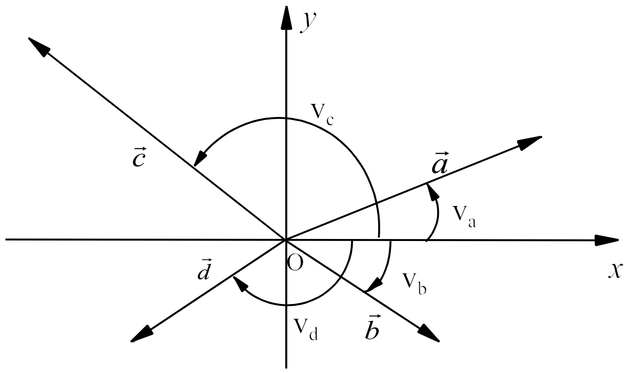



**Fig 3.10**. 4 *retningsvektorer med indtegnede vinkler*

1) Vi ser, at $\vec{a}$ er hypotenuse i en retvinklet trekant med kateterne 5 og 2.

Vi har følgelig $\tan v_a = \frac{2}{5} = 0.4 \Leftrightarrow v_{\mathbf{a}} = \underline{\underline{21.80^0}}$.

$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ Polære koordinater $\underline{\underline{(\sqrt{29}, 21.80^0)}}$

2) Tilsvarende får vi $\tan v_b = \frac{-2}{3} = -0.6667 \Leftrightarrow \underline{\underline{v_b = -33.69^0}}$ Polære koordinater $\underline{\underline{(\sqrt{13}, -33.69^0)}}$

3) Da $\vec{c}$ 's retningsvektor ligger i 2 kvadrant er $v_c = 180^0 + u$, hvor u bestemmes af

$\tan u = \frac{4}{-5} = -0.8 \Leftrightarrow u = -38.66^0$ dvs. $v_c = 180^0 + (-36.66) = \underline{\underline{141.34^0}}$

Polære koordinater $\underline{\underline{(\sqrt{41}, 141.34^0)}}$

4) Da $\vec{d}$ 's retningsvektor ligger i 3 kvadrant er $v_d = u - 180^0$, hvor u bestemmes af

$\tan u = \frac{-2}{-3} = 0.6666 \Leftrightarrow u = 33.69^0$ dvs. $v_d = 33.69 - 180^0 = \underline{\underline{-146.31}}$

Polære koordinater $\underline{\underline{(\sqrt{13}, -146.31^0)}}$

◆

Da det er ganske besværligt med "håndkraft" at regne i polære koordinater, vil man sædvanligvis benytte en lommeregner som TI-89 til det.

### Eksempel 3.6 Regninger i polære koordinater med TI89

1) Omregn vektoren $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ til polære koordinater

2) Omregn vektoren $5.4 \angle 21.8^0$ til retvinklede koordinater
3) Udregn $3{,}6 \angle 25^0 + 6.1 \angle 120^0$ i polære koordinater

**Løsning:**

1) [5,2]▶ Polar (▶ Polar kan findes under CATALOG) Resultat: $\underline{\underline{[5.385 \ \angle 21.80]}}$

2) [5.4, ∠21.8] (∠ findes over EE) Resultat: $\underline{\underline{[5.01 \quad 2.00]}}$

3) [3.6, ∠25] + [6.1, ∠120]▶ Polar Resultat: $\underline{\underline{[6.81 \ \angle 88.2]}}$

## 3.6 Vinkel mellem vektorer

Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er egentlige vektorer, danner de en vinkel v med hinanden. Vi vil her altid regne vinkler som placeret i intervallet [ $0^0$ ; $180^0$ ] (eller $[0;\pi]$ ). Vi regner altså ikke her vinkler med fortegn.

### Sætning 3.5. Vinkel mellem vektorer

*Hvis* $\vec{a}$ *og* $\vec{b}$ *er egentlige vektorer og* v *er vinklen mellem dem gælder* $\cos \mathrm{v} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

**Bevis**:

Vi vil vise, at $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos \mathrm{v}$

Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ afsættes med fælles begyndelsespunkt O

Vi antager endvidere at vinklen v regnet fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ ligger mellem 0 og 180.

Hvis dette ikke er tilfældet kan vi blot i det følgende ombytte $\vec{a}$ og $\vec{b}$ .

I afsnit 3.4 viste vi at værdien af det skalære produkt er uafhængigt af koordinatsystemet. Vi indlægger derfor nu koordinatsystemet således, at koordinatsystemets begyndelsespunkt er O og første basisvektor $\vec{i}$ er ensrettet med $\vec{a}$

I figur 3.11 og figur 3.12 er dette vist i de to tilfælde, hvor vinklen v er spids henholdsvis stump.

Vi har nu, at $\vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ og dermed $\vec{a}\cdot\vec{b} = |a|\cdot b_1$

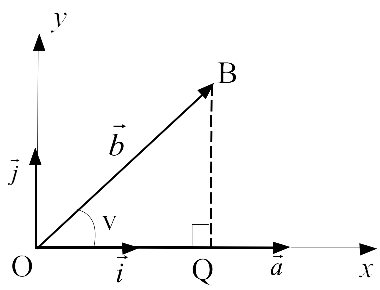



**Fig 3.11.** *Vinkel* v *spids*

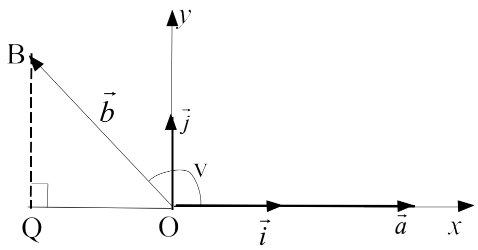



**Fig. 3.12**. *Vinkel* v *stump*

Er vinkel v spids får vi af den retvinklede trekant OQB (se figur 3.11) at $\cos \mathrm{v} = \dfrac{b_1}{|\vec{b}|}$ eller $b_1 = |\vec{b}|\cos \mathrm{v}$ .

Er vinkel v stump, får vi af den retvinklede trekant OQB (se figur 3.12) at $\cos(180-\mathrm{v}) = \dfrac{|OQ|}{|\vec{b}|}$ .

Da $|OQ| = -b_1$ og $\cos(180-\mathrm{v}) = \cos \mathrm{v}$ fås $-\cos(\mathrm{v}) = \dfrac{-b_1}{|\vec{b}|} \Leftrightarrow b_1 = |\vec{b}|\cos(\mathrm{v})$

Vi har nu i de to tilfælde $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot b_1 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos \mathrm{v}$ . Hermed er sætningen bevist i de to hovedtilfælde.

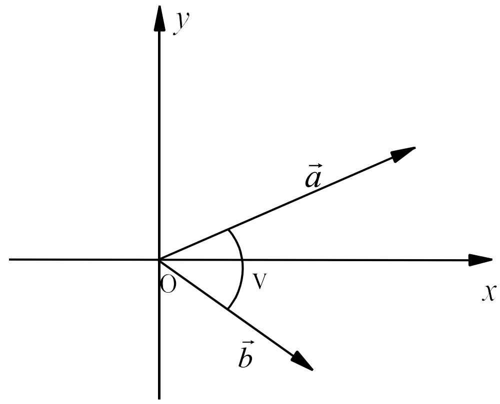
For v = 0, v= 90 og v= 180 ses ved indsættelse i formlen, at sætningen også gælder her.

◆

## Eksempel 3.7. Vinkel mellem vektorer

Find vinklen mellem vektorerne

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$




**Løsning:**

$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$

$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) = 11$

$\cos v = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{11}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{13}} = 0.5665$

$\underline{\underline{v = 55.49^0}}$

TI 89: Idet $\cos v = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \vec{e}_a \cdot \vec{e}_b$, hvor $\vec{e}_a$ og $\vec{e}_b$ er enhedsvektorer fås

$\cos^{-1}$( dotP(unitV([5,2]),unitV([3,-2]))

hvor de enkelte vektorordrer findes i CATALOG eller ved MATH, MATRIX, L: Vector ops

To vektorer siges at være **ortogonale** hvis vinklen mellem dem er $90^0$

Af sætning 3.5 følger: $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}}$

### 3.7 Projektion

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer. Vi vil finde projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$, dvs. den vektor der fremkommer, når begyndelsespunkt og endepunkt af $\vec{a}$ projiceres på en linie parallel med $\vec{b}$. På figur 3.13 er vektorerne placeret med samme udgangspunkt (C og D). I den ene situation er vinklen spids, og i den anden er den stump. Projektionen betegnes med $\vec{p}_a$.

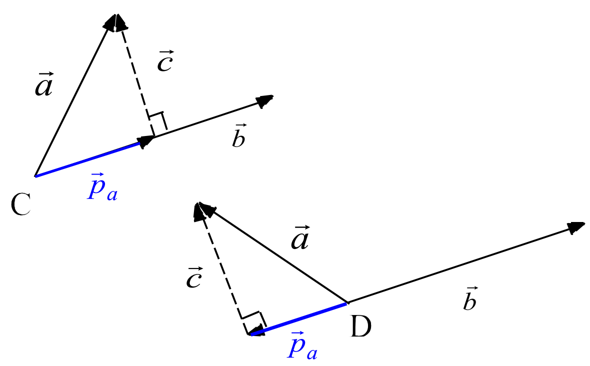



**Fig. 3.13.** *Projektion af vektor*

**Sætning 3.6. Projektionssætning**

*Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer. Projektionen $\vec{p}_a$ af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er givet ved* $\vec{p}_a = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$

**Bevis:**

Da $\vec{b}$ og $\vec{p}_a$ er parallelle findes et tal *t*, så $\vec{p}_a = t\cdot\vec{b}$. (1)

Vi multiplicerer nu skalært på begge sider af ligningen med $\vec{b}$.

$\vec{p}_a = t\cdot\vec{b} \Rightarrow \vec{p}_a\cdot\vec{b} = t\cdot\vec{b}\cdot\vec{b} \Leftrightarrow t = \dfrac{\vec{p}_a\cdot\vec{b}}{\vec{b}^2}$. (2)

Vi betragter nu $\vec{c} = \vec{a} - \vec{p}_a \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{p}_a + \vec{c}$

Da $\vec{b}$ og $\vec{c}$ er vinkelrette på hinanden er $\vec{c}\cdot\vec{b} = 0$.

Vi har derfor $\vec{a} = \vec{p}_a + \vec{c} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{p}_a\cdot\vec{b} + \vec{c}\cdot\vec{b} = \vec{p}_a\cdot\vec{b}$.

Indsættes $\vec{p}_a\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b}$ i (2) fås $t = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$. Indsættes denne værdi af *t* i (1) fås den ønskede formel ◆

## 3.8 Tværvektor, determinant.

**Definition af tværvektor.** *Ved tværvektoren $\hat{a}$ til en egentlig vektor $\vec{a}$ forstås den vektor, der fremkommer ved at dreje $\vec{a}$ $90^0$ i positiv omløbsretning (d.v.s. mod uret).*

Specielt gælder , at i et sædvanligt koordinatsystem er $\hat{i} = \vec{j}$ .

**Sætning 3.7. Tværvektors koordinater** .

*Lad $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ være en egentlig vektor. Tværvektoren $\hat{a}$ har da koordinaterne* $\hat{a} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

**Bevis:**

Hvis $\vec{a}$ har retningsvektoren v, er koordinaterne

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{a}|\cdot\cos v \\ |\vec{a}|\cdot\sin v \end{pmatrix}$.

Tværvektoren $\hat{a}$ har retningsvinklen v+$90^0$, så

$\hat{a} = \begin{pmatrix} |\hat{a}|\cos(v+90) \\ |\hat{a}|\sin(v+90) \end{pmatrix}$

Af en enhedscirkel (se fig. 3.14) ses, at

$\cos(90+v) = -\sin v$ og $\sin(90+v) = \cos v$

Heraf fås, at $\hat{a} = \begin{pmatrix} -|\hat{a}|\sin v \\ |\hat{a}|\cos v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ ◆

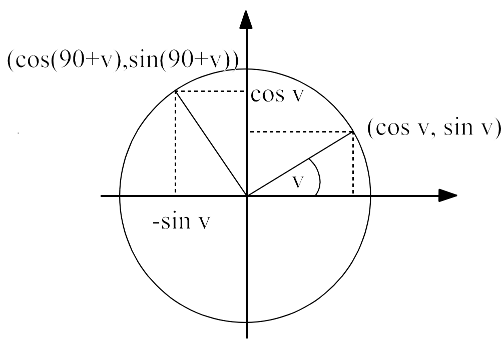



**Fig 3.14**. *Tværvektor*

**Eksempel 3.9. Tværvektor**

Find tværvektoren til vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

**Løsning:**

$\hat{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

### Definition af determinant.

*Ved determinanten for vektorparret* $(\vec{a},\vec{b})$ *forstås tallet* $\det(\vec{a},\vec{b}) = \hat{a}\cdot\vec{b}$

Er $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ bliver $\det(\vec{a},\vec{b}) = \hat{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

Man bruger en speciel skrivemåde for determinanten for et vektorpar, nemlig et kvadratisk talskema med $\vec{a}$ som første søjle og $\vec{b}$ som anden søjle.

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

### Eksempel 3.10. Beregning af determinant.

Lad $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Beregn determinanterne $\det(\vec{a},\vec{b})$ og $\det(\vec{b},\vec{a})$.

**Løsning:**

$\det(\vec{a},\vec{b}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12-(-2) = 14$ , $\det(\vec{b},\vec{a}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2-12 = -14$ .

TI 89: CATALOG: det([3,1;-2,4]) ◆

Det gælder (jævnfør evt. eksempel 3.10) at $\det(\vec{a},\vec{b}) = -\det(\vec{b},\vec{a})$.

### Sætning 3.8. Areal af parallelogram.

*Lad* $\vec{a}$ *og* $\vec{b}$ *være to egentlige ikke-parallelle vektorer. Lad endvidere d=* $\det(\vec{a},\vec{b})$*,* v *være vinklen mellem* $\vec{a}$ *og* $\vec{b}$ *og* A *arealet af det parallelogram, som* $\vec{a}$ *og* $\vec{b}$ *udspænder.*

Der gælder da: $A = |d| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin v$.

**Bevis:**

På figur 3.15a er tegnet en situation hvor omløbsretningen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ er positiv (dvs. mod uret) og på figur 3.15b er omløbsretningen negativ.

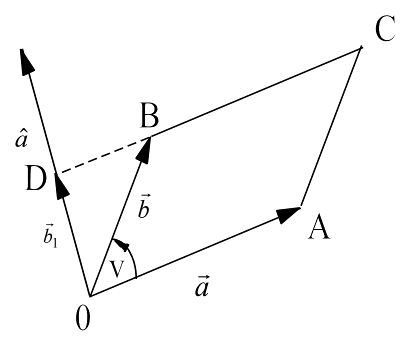



**Fig 3.15a**. *Positiv omløb*

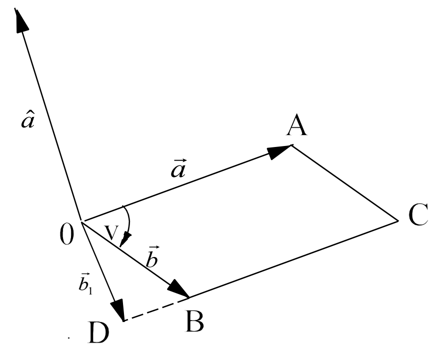



**Fig. 3.15b.** *Negativ omløb*

Lad $\vec{b}_1$ betegne projektionen af $\vec{b}$ på $\hat{a}$. Vi har da ifølge sætning 3.65, at $\vec{b}_1 = \frac{\hat{a}\cdot\vec{b}}{\hat{a}^2}\hat{a}$

Multipliceres ligningen med $\hat{a}$ fås $\hat{a}\cdot\vec{b}_1 = \frac{\hat{a}\cdot\vec{b}}{\hat{a}^2}\hat{a}\cdot\hat{a} \Leftrightarrow \hat{a}\cdot\vec{b}_1 = \hat{a}\cdot\vec{b}$

Er omløbsretningen positiv er $\vec{b}_1$ og $\hat{a}$ ensrettede, dvs. vinklen mellem dem er $0^0$ (jævnfør figur 3.15a).

Vi har da : $\hat{a}\cdot\vec{b}_1 = |\hat{a}||\vec{b}_1|\cos 0 \Leftrightarrow \hat{a}\cdot\vec{b}_1 = |\vec{a}||\vec{b}_1|$

Er omløbsretningen negativ er $\vec{b}_1$ og $\hat{a}$ modsat rettede, dvs. vinklen mellem dem er $180^0$ (jævnfør figur 3.15b).

Vi har da : $\hat{a}\cdot\vec{b}_1 = |\hat{a}||\vec{b}_1|\cos 180 \Leftrightarrow \hat{a}\cdot\vec{b}_1 = -|\vec{a}||\vec{b}_1|$

Da $|\vec{b}_1|$ er højden i det parallelogram, der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$, er $|\vec{a}||\vec{b}_1|$ arealet af parallelogrammet.

Vi har følgelig, at den numeriske værdi af determinanten $|\hat{a}\cdot b| = |a||b_1|$ er arealet af parallelogrammet

Af den retvinklede trekant ODB på figurerne ses, at $\sin v = \frac{|\vec{b}_1|}{|\vec{b}|} \Leftrightarrow |\vec{b}_1| = |\vec{b}|\sin v$.

Heraf følger, at arealet T af parallelogrammet er $T = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}\cdot|\sin v$

.

Af beviset for sætning 3.8 gælder, at

Fortegnet for det( $\vec{a},\vec{b}$ ) *er det samme som omløbsretningen fra* $\vec{a}$ *til* $\vec{b}$

Endvidere gælder $\hat{a}\cdot b = 0 \Leftrightarrow$ $\vec{a}$ og $\vec{b}$ parallelle (da $\hat{a}$ og $\vec{b}$ så er vinkelrette på hinanden).

## Eksempel 3.11. Areal af trekant

Lad A=(5,1), B=(6,-2) og C=(3,-4). Find arealet af $\Delta$ ABC .

**Løsning:**

Vi finder $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$.

Da determinanten $\begin{vmatrix}1 & -2\\-3 & -5\end{vmatrix} = -5-6 = -11$, har det parallelogram der udspændes af vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ arealet T = 11. Vi har følgelig, at $\Delta$ ABC's areal $= \frac{11}{2} = \underline{\underline{5.5}}$

# Opgaver til kapitel 3

**3.1** (uden hjælpemidler)

Lad $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Tegn i et koordinatsystem følgende vektorer:
$\vec{a}$ ,$\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $-\vec{a}+2\vec{b}$, $-3\vec{a}$ $\vec{a}$ og $2\vec{a}-3\vec{b}$

**3.2.** (uden hjælpemidler)

Bestem tallet k, således at vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ k \end{pmatrix}$ er parallelle.

Bestem derefter tallet $t$, så $\vec{b} = t\vec{a}$ .

**3.3**.(uden hjælpemidler)

Bestem koordinaterne til $\vec{a}$ og $\vec{b}$ , når det er givet, at $\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ og $\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**3.4.**(uden hjælpemidler)

Givet punkterne A = (1,3) og B = (4,-1).

a) Find koordinaterne til vektoren $\overrightarrow{AB}$

b) Find den eksakte værdi af $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

**3.5**.(uden hjælpemidler)

Punktet A = (6,1). Bestem koordinaterne til punktet B, når det oplyses, at $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

**3.6.**(uden hjælpemidler)

Bestem koordinaterne til punkterne C og D, når det oplyses, at

A = (5,3), B=(-2,4), $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

**3.7** Lad $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Find $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ og $|\vec{a}+\vec{b}|$.

**3.8.** (uden hjælpemidler)

Bestem koordinaterne til de enhedsvektorer, der er parallelle med $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$.

**3.9.**(uden hjælpemidler)
Angiv skalarprodukterne $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})$ og $\vec{a}\cdot(\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c})$,
idet $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

**3.10**.(uden hjælpemidler)
Løs ligningen $\begin{pmatrix}-2\\x^2-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-2\\4\end{pmatrix}=0$

**3.11** a) Skriv $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ på polær form .
b) Find de polære koordinater for punktet P = (2, -3)
c) I polære koordinater er Q = (5, $46^0$) . Angiv Q's koordinater på rektangulær form
d) Beregn (6, $120^0$) + (4, $-30^0$) i polære koordinater.

**3.12** $\overrightarrow{AB}$ har begyndelsespunkt A = (3,-1), længden 6 og retningsvinklen $133^0$. Bestem med 3 decimaler koordinaterne til B.

**3.13** Et skib sejler i 3 timer fra punktet A med en begyndelseskurs på $30^0$ og en fart på 15 knob. (en kurs er vinklen i forhold til nord (y-aksen) regnet positiv med uret, og 1 knob er 1 sømil/time)
Herefter ændres kursen med $20^0$ i sydlig retning (med uret) og farten ændres til 12 knob. Efter 4 timers sejlads med den nye kurs nås til punktet C.
a) Hvor mange sømil har skibet sejlet for at komme fra A til C.
b) Angiv kursen i A hvis man i stedet direkte havde sejlet direkte fra A til C, og angiv af antal sømil man har sejlet.

**3.14** Bestem vinklen mellem vektorerne $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-9\\-12\end{pmatrix}$

**3.15** Bestem vinklerne i $\Delta$ ABC, når A = (17,8), B = (-5,22) og C = (8,-10)

**3.16** a) Vis at punkterne A = (-2,2), B = (-1,-2), C = (4,1) og D = (3,5) udspænder et parallelogram.
b) Find den spidse vinkel mellem diagonalerne.

**3.17** Lad A = (-1,1), B = (1,5) og C = (11,0)
Vis, at ABC er retvinklet, og bestem de to spidse vinkler i trekanten.

**3.18** Bestem de tal $k$, for hvilke $\vec{a}\perp\vec{b}$, når $\vec{a}=\begin{pmatrix}k+2\\k^2-4\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$

**3.19** Find koordinaterne til projektionen af $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ på $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Bestem endvidere længden af projektionsvektoren.

**3.20** Vinklen mellem vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kaldes v, og $|\vec{a}| = 2$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = 60^0$.

Find projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

**3.21** (uden hjælpemidler)
I kvadratet ABCD er A=(-1,1) og diagonalernes skæringspunkt M=(2,3).
Bestem koordinaterne til kvadratets øvrige vinkelspidser.

**3.22** (uden hjælpemidler)
En rombe er en firkant hvor alle sider er lige lange. Man kan vise, at i en rombe står diagonalerne vinkelret på hinanden.
I romben ABCD er A=(6,4) og B= (9,8) Endvidere er BC parallel med $x$ - aksen.
Find koordinaterne til C og D samt til diagonalernes skæringspunkt M.

**3.23** (uden hjælpemidler)
Reducér udtrykket $(2\hat{a} + \hat{b}) \cdot (\vec{a} + \hat{b}) - (\vec{b} + 2\vec{a}) \cdot (\vec{b} - \hat{a})$

**3.24** Idet $\vec{a}$ er en egentlig vektor, skal vinklen mellem $\hat{a}$ og $\vec{b} = 2\vec{a} + 3\hat{a}$ beregnes.

**3.25** Tegn i et koordinatsystem en egentlig vektor $\vec{a}$. Konstruer derefter femkanten ABCDE,

hvor $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + 2\hat{a}$, $\overrightarrow{CD} = -2\vec{a} + \hat{\vec{a}}$, $\overrightarrow{DE} = -\vec{a} - \hat{a}$.

Udtryk derefter $\overrightarrow{EA}$ ved $\vec{a}$ og $\hat{a}$, og bestem vinkel B.

**3.26** (uden hjælpemidler)

a) Bestem arealet af det parallelogram der udspændes af vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b) Bestem $k$, så parallelogrammets areal bliver 8, når $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} k \\ 4 \end{pmatrix}$.

**3.27** Bestem arealet af den trekant, der udspændes af vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

# 4. Plangeometri II

## 4.1 Indledning

Vi har i kapitel 1 set på cirkler, rette linier og retvinklede trekanter. Vi vil i dette kapitel se på en mere generel beskrivelse af rette linier, skæring mellem disse og med cirkler, samt på hvorledes man beregner de sider og vinkler i vilkårlige (ikke retvinklede) trekanter.

## 4.2. Den rette linie.

Vi fandt i kapitel 1, at alle linier, der ikke er parallelle med $y$ - aksen kan skrives på formen $y = ax + b$, hvor $a$ er hældningen og $(0,b)$ er skæringspunktet med $y$ - aksen.

Vi vil nu se på en form for den rette linies ligning, som dels omfatter alle linier, dels er mere anvendelig bl.a. når man eksempelvis skal finde vinklen mellem to linier.

### Sætning 4.1 Ret linies ligning

*Lad en linie l være bestemt ved, at* $P_0 = (x_0, y_0)$ *er et punkt på linien og* $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *er en vektor der står vinkelret på linien (se figur 4.1).*

*Linien l har da ligningen* $\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0}$

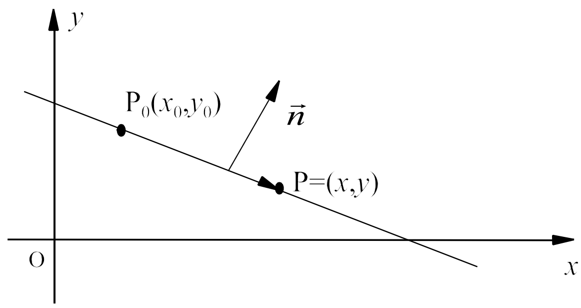



**Fig. 4.1.** *Ret linie*

Bevis:

For ethvert punkt P = (x , y) på linien ( og kun for disse) må der gælde, at vektoren $\overrightarrow{P_0P}$ står vinkelret på $\vec{n}$.
Det betyder igen, at det skalære produkt mellem de to vektorer er 0.

$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ Heraf følger sætningen. ◆

Vektoren $\overrightarrow{P_0P}$ som jo er en vektor parallel med linien kaldes en **retningsvektor** for linien.

Vektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ kaldes en **normalvektor** til linien, .

**Eksempel 4.1. Linies ligning**
En linie $l$ er bestemt ved, at den går gennem punkterne A =(3,2) og B = (1, 8).
Angiv ligningen for $l$.
**Løsning:**

En retningsvektor for $l$ er $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

En normalvektor til linien $l$ er da $\hat{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Linien $l$'s ligning : $-6(x-3)-2(y-2)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{6x+2y-22=0}}$ ◆

## 4.3. Vinkel mellem to rette linier.

Ved vinklen mellem to rette linier forstås sædvanligvis den spidse vinkel mellem linierne. Den letteste måde at finde vinklen på er at beregne vinklen mellem normalvektorerne (se figur 4.2). Denne vinkel kunne være stump, men da den modsat rettede vektor også er normalvektor er det blot et spørgsmål om at skifte fortegn.

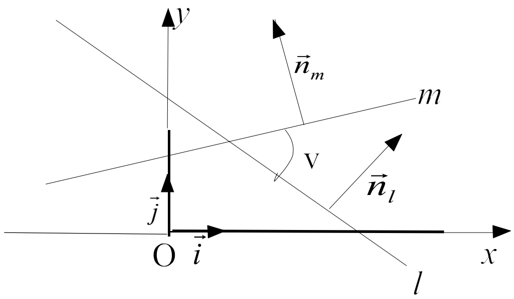



**Fig 4.2.** *Vinkel* v *mellem to linier*

**Eksempel 4.2. Vinkel mellem linier**
To linier $l$ og $m$ har ligningerne
$l$: $3x+y-11=0$ $\quad$ $m$ : $4x - 3y + 6 = 0$
Find den spidse vinkel mellem $l$ og $m$.
**Løsning:**

En normalvektor til linien $l$ er $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

En normalvektor til linien $m$ er $\vec{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Da vi ønsker at finde den spidse vinkel v mellem linierne tages den numeriske værdi.

$$\cos \text{v} = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{9+1}\sqrt{16+9}} = \frac{|12-3|}{\sqrt{10}\sqrt{25}} = \frac{9}{5\sqrt{10}} = 0.569 . \qquad \text{v} = \underline{\underline{55.31^0}}.$$ ◆

## 4.4 Afstand mellem punkt og linie

Ved afstanden mellem et punkt P og en linie $l$ /skrives kort dist(P,$l$) ) forstås den korteste afstand mellem punkt og linie, dvs. længden af PQ, hvor linien PQ står vinkelret på $l$ ( se figur 4.3)

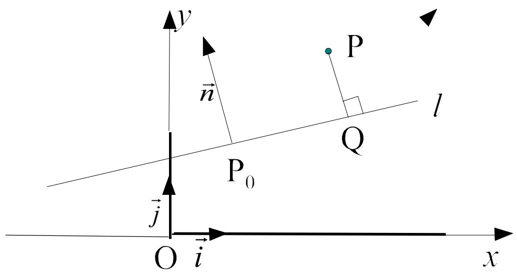



**Fig 4.3.** *Afstand mellem punkt og linie*

Der gælder nu følgende sætning.

### Sætning 4.2. Afstandsformel

Punktet P $=(x_1, y_1)$ 's afstand fra linien $l$ med ligningen $ax + by + c = 0$ er

$$\boxed{\text{dist (P, } l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Bevis.

Lad $P_0 = (x_0, y_0)$ være et punkt på linien $l$.

Vektoren $\overrightarrow{P_0P}$ 's projektion på normalvektoren $\vec{n}$ må være vektoren $\overrightarrow{QP}$ (se figur 4.3).

Af projektionssætningen 3.7 fås nu: $|QP| = \left|\frac{\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \frac{\left|\begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Da ligningen for linien $l$ kan skrives $a(x - x_0) + y(y - y_{0)} = 0$ ses, at tælleren er liniens ligning, hvor man har indsat punktet P's koordinater. ◆

### Eksempel 4.3. Afstand mellem punkt og linie

Find afstanden fra punktet P = (2,-3) til linien $l$ med ligningen $3x + y - 11 = 0$ .

**Løsning:**

dist(P, $l$ ) $= \frac{|3 \cdot 2 + (-3) - 11|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}} \approx 2.53$

◆

## 4.5. Parameterfremstilling for ret linie.

Lad $l$ være en ret linie , som går gennem et fast punkt $P_0$ og har en egentlig vektor $\vec{l}$ som retningsvektor For vilkårlige punkter P på linien $l$ og kun for disse punkter vil der da gælde: $\overrightarrow{P_0P} = t\,\vec{l}$ , hvor $t$ er et reelt tal. For hver værdi af t (kaldet parameteren) svarer der ét punkt på linien og omvendt.

Af indskudssætningen fås $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{l}$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{l}$ , kaldes en **parameterfremstilling for linien $l$, med parameteren t (som er et reelt tal**).

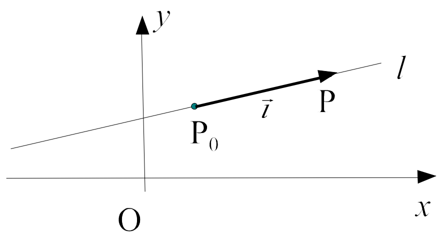



**Fig 4.4.** *Parameterfremstilling*

Lad vektoren $\vec{l} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ og $P_0=(x_0, y_0)$. (jævnfør figur 4.4)

En **parameterfremstilling for $l$** i koordinater bliver da $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

En linie har mange parameterfremstillinger, da man dels jo kan vælge forskellige faste punkter på $l$, dels vil alle vektorer proportionale med $\vec{l}$ kunne benyttes som retningsvektorer.

### Eksempel 4.4. Linies parameterfremstilling.

Find en parameterfremstilling for linien $l$ gennem punkterne A=(3, 1) og B = (2, 3)

**Løsning:**

Da $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og et punkt på linien er A er en parameterfremstilling for $l$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

◆

Man kan opfatte parameterfremstillingen for $l$ som en beskrivelse af en jævn retlinet bevægelse i rummet, hvor $t$ angivet tiden. Bevægelsens hastighedsvektor er $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ .

### Eksempel 4.5. Retlinet bevægelse.

Lad $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ beskrive et legeme L's retlinede bevægelse i planen, hvor $t$ angiver tiden og hastigheden måles i m/s.

a) Find vejlængden (i m) som legemet gennemløber i 3 sekunder.
b) Find den tid det tager for L at gennemløbe en strækning på 90 m.

**Løsning:**

a) Farten er $\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ m/s   I 3 sekunder gennemløbes $\underline{\underline{15 \text{ m.}}}$

b) 90 m gennemløbes på $\frac{90}{5} = 18$ s

## 4.6. Skæring mellem to rette linier

Lad der være givet ligningerne for to rette linier $l$ og $m$:

$l$: $a_1 x + b_1 y = c_1$

$m$: $a_2 x + b_2 y = c_2$

Er linierne ikke parallelle har de et skæringspunkt. Et sådant skæringspunkt skal opfylde begge ligninger, så problemet reduceres til, at løse to ligninger med to ubekendte.
Dette sker lettest ved den kendte metode, hvor man af den ene ligning finder eksempelvis y udtrykt ved x, og så indsætter dette i den anden ligning.
Man kan dog også benytte en lommeregner som TI-89 hertil.
Disse to metoder er vist i det følgende eksempel 4.6.

### Eksempel 4.6. Skæring mellem to linier.

Find skæringspunktet S mellem linien $l$ med ligningen $2x - 6y + 9 = 0$ og linien $m$ med ligningen $x + 8y - 1 = 0$.

**Løsning:**

**Metode 1: Indsættelsesmetoden**

Da skæringspunktets koordinater skal opfylde begge ligninger skal man løse ligningssystemet

$$\begin{cases} 2x - 6y + 9 = 0 & (1) \\ x + 8y - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Af ligning (1) findes $x = 3y - \frac{9}{2}$   (3)

Indsættes (3) i ligning (2) fås

$$3y - \frac{9}{2} + 8y - 1 = 0 \Leftrightarrow 11y = \frac{11}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

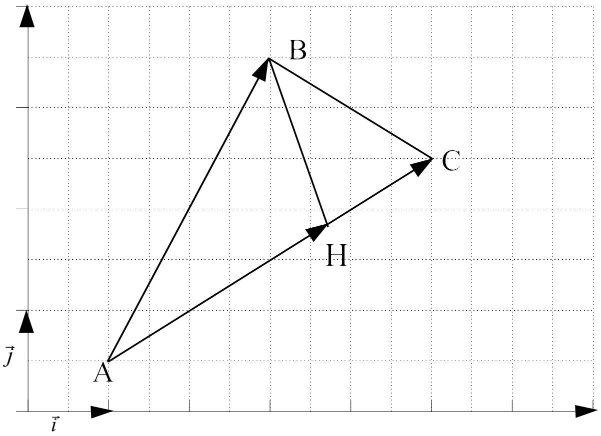
Indsættes $y = \frac{1}{2}$ i (3) fås $x = 3 \cdot \frac{1}{2} - \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = -3$

Skæringspunkt S = $\underline{\underline{\left(-3, \frac{1}{2}\right)}}$

**Metode 2: TI-89.**
F2\solve(2x-6y+9=0 and x+8y-1=0,{x,y}) Resultat x =-3 and y = ½
("and" findes i CATALOG)

## Eksempel 4.7. Højde i trekant

Lad trekant ABC have vinkelspidserne A=(2,1) , B=(6,7) og C = (10, 5).
Find koordinaterne til fodpunktet H af højden fra B. (se figuren)




**Løsning:**

Vi har $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}10-2\\5-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

Linien $l$ gennem A og C har normalvektoren $\vec{n}_l = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

$l$ har da ligningen $-1\cdot(x-2)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow -x+2y=0$ (1)

Lad $m$ være linien gennem B vinkelret på $l$

Linien $m$ må have en normalvektor der er parallel med $l$, dvs. $\vec{n}_m = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$m$ har da ligningen $2(x-6)+1\cdot(y-7)=0 \Leftrightarrow 2x+y-19=0$ (2)

Skæringen mellem $l$ og $m$ er da koordinaterne til H

Af ligning (1) fås: x = 2y som indsættes i ligning (2)

$2(2y)+y-19=0 \Leftrightarrow 5y=19 \Leftrightarrow y=\frac{19}{5}=3.8$

$x = 2\cdot 3.8 = 7.6$

<u>H = (7.6 , 3.8)</u>

## 4.7. Skæring mellem linie og cirkel

I afsnit 1.4 fandt vi, at ligningen for en cirkel med centrum i C $=(x_0, y_0)$ og radius r er

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

Det er jo ikke sikkert at en ret linie overhovedet skærer en sådan cirkel, men hvis den gør det vil det enten være i 2 punkter (se figur 4.5) eller i ét punkt (hvis linien er tangent til cirklen).

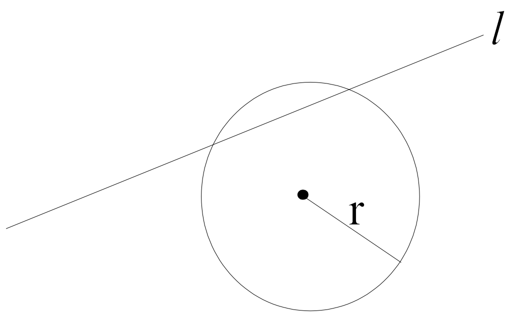



**Fig 4.5.** *Skæring mellem cirkel og linie*

At finde skæringspunkterne betyder, at man skal løse to ligninger hvoraf den ene er af 2. grad. Dette vises i følgende eksempel 4.8.

### Eksempel 4.8. Skæring mellem linie og cirkel

Find skæringspunkterne mellem linien $l$ med ligningen $-2x + 3y - 4 = 0$ og cirklen med centrum i C = ( -2, 6) og radius 5.

**Løsning:**

Cirklens ligning: $(x+2)^2+(y-6)^2=5^2$ (1)

Liniens ligning : $-2x + 3y - 4 = 0$ (2)

Af ligning (2) findes $x$ udtrykt ved $y$: $-2x+3y=4 \Leftrightarrow 2x=3y-4 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}y-2$ (3)

(3) indsættes i (1):

$$\left(\frac{3}{2}y-2+2\right)^2+(y-6)^2=25 \Leftrightarrow \frac{9}{4}y^2+y^2+36-12y=25 \Leftrightarrow \frac{13}{4}y^2-12y+11=0$$

Andengradsligningen løses: $y=\dfrac{12\pm\sqrt{12^2-4\cdot\frac{13}{4}\cdot 11}}{2\cdot\frac{13}{4}}=\dfrac{12\pm\sqrt{144-143}}{\frac{13}{2}}=\begin{cases}2\\ \frac{22}{13}\end{cases}$

Værdierne indsættes i (3): $y=2 \Rightarrow x=\frac{3}{2}\cdot 2-2=1$, $y=\frac{22}{13} \Rightarrow x=\frac{3}{2}\cdot\frac{22}{13}-2=\frac{7}{13}$

Skæringspunkter S = $\underline{(1, 2)}$ og T = $\underline{\underline{\left(\frac{7}{13},\frac{22}{13}\right)}}$

TI-89: F2\solve( -2*x* + 3*y* - 4 = 0 and (x+2)^2+(y-6)^2=5^2,{x,y})

Resultat: x =1 and y =2 or x=7/13 and y=22/13

## 4.8. Tangent til cirkel

En tangent i et punkt P til en cirkel med centrum i C er en linie *l*, der står vinkelret på radius CP i punktet P (se figur 4.6).

En normalvektor til linien bliver derfor vektoren $\vec{CP}$ .
På dette grundlag kan man derfor let opskrive ligningen for tangenten (jævnfør det følgende eksempel 4.9)

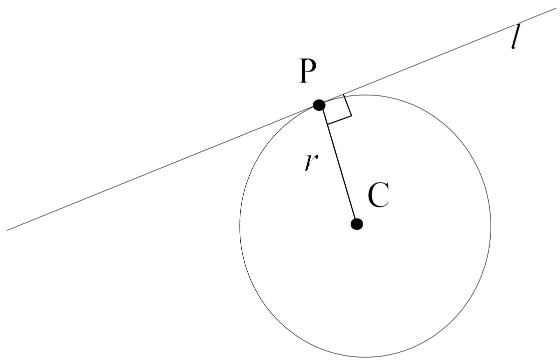



**Fig 4.6.** *Tangent til cirkel*

### Eksempel 4.9. Tangent til cirkel

Lad der være givet en cirkel med centrum i C = (2, -3) og radius $r = \sqrt{26}$
1) Vis, at punktet P = (3 , 2) ligger på cirkelperiferien.
2) Find tangenten til cirklen i punktet P.
**Løsning:**

1) $\vec{CP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ Da $\left|\vec{CP}\right| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$ ligger P på cirkelperiferien.

2) Tangentens ligning: $1 \cdot (x-3) + 5 \cdot (y-2) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x + 5y = 13}}$

## 4.9. Beregning af sider og vinkler i en trekant

I figur 4.7 er tegnet en vilkårlig trekant ABC med vinklerne A, B og C og siderne a, b og c.

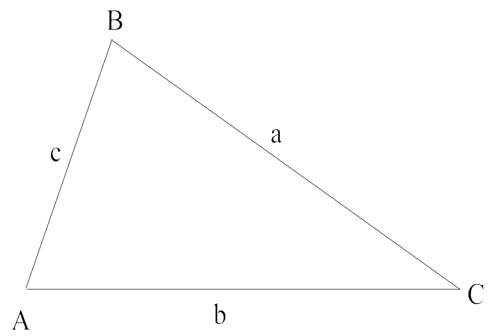



**Fig 4.7**. *Vilkårlig trekant*

Vi vil i dette afsnit udlede nogle formler, efter hvilke man kan beregne alle resterende vinkler og sider i en sådan trekant blot tre af disse er angivet ( den ene skal dog være en side)
Det forudsættes naturligvis at trekanten eksisterer. Eksempelvis vil en trekant hvor siden a =100 siden b= 5 og siden c = 6 ikke eksistere.

### Sætning 4.3. Cosinusrelationerne

For en vilkårlig trekant ABC gælder

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C \end{aligned}}$$

Bevis:

Lad i $\Delta ABC$ vektoren $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ og vektoren $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$.

Der gælder da, at $\overrightarrow{CB} = \vec{c} - \vec{b}$ (se figur 4.8)
Ifølge regnereglerne for vektorer haves nu.

$(\vec{c} - \vec{b})^2 = \vec{c}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} - 2 \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$

Idet $(\vec{c} - \vec{b})^2 = |\vec{c} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 = a^2$, $|\vec{b}|^2 = b^2$ , $|\vec{c}|^2 = c^2$ og

$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}| \cdot \cos A = b \cdot c \cdot \cos A$

er $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$
De andre to relationer fås på samme måde.

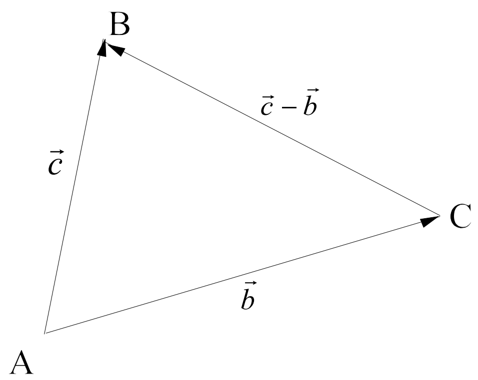



**Fig. 4.8.** *Trekant*

### Sætning 4.4. Sinusrelationerne

For en vilkårlig trekant ABC gælder

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$$

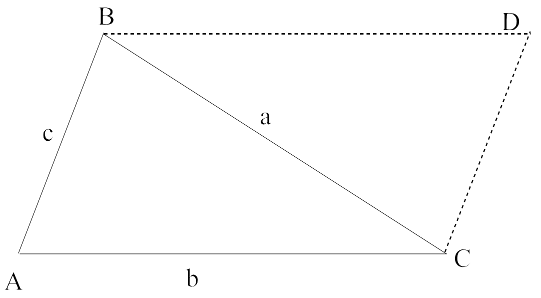



**Fig 4.9.** *Trekant og tilsvarende parallelogram*

Bevis:

Da arealet T af en trekant er det halve af arealet af det tilsvarende parallelogram (se figur 4.9) fås af sætning 3.8 at

$$T = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin C = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2}a \cdot c \cdot \sin B$$

Heraf fås $a \cdot b \cdot \sin C = b \cdot c \cdot \sin A \Leftrightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

og $a \cdot b \cdot \sin C = a \cdot c \cdot \sin B \Leftrightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Hermed er relationen bevist.

Ud fra disse formler kan man nu beregne de 3 ukendte vinkler og sider.

**Tilfælde 1 Givet alle tre sider *a, b* og *c*.**

Af $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ fås A = $\cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$

Tilsvarende fås B $= \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$ og C = 180 - A - B

**Tilfælde 2 Givet en vinkel og de to hosliggende sider.**

Lad være givet $\angle A$ og siderne $b$ og $c$

$a$ findes af $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

B $= \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$ og C = 180 - A - B

**Tilfælde 3 Givet en vinkel, den hosliggende og den modstående side**

Lad der være givet $\angle A$ og siderne $a$ og $b$

Her kan der forekomme 2 løsninger, hvis $\angle A$ er spids, og $a < b$, ellers højst én løsning.

Det er i alle tilfælde klogt at skitsere trekanten for at se om der er én løsning, to løsninger (som på figur 4.10) eller eventuelt ingen løsninger.

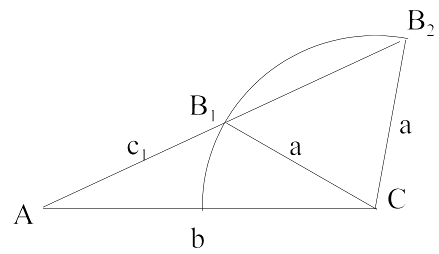



**Fig. 4.10.** 3. *Trekantstilfælde*

$\angle$ B findes af: $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \Leftrightarrow \sin B = \frac{b}{a}\sin A$

C = 180 - A - B og $c$ af $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$.

**Tilfælde 4 Givet to vinkler og en side.**
Lad der være givet siden *a* og to vinkler.
Man kan så straks finde den tredje vinkel, da vinkelsummen er $180^0$

$b$ og $c$ findes af $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{a}{\sin A} \Leftrightarrow b = \dfrac{a \sin B}{\sin A}$ og $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{a}{\sin A} \Leftrightarrow c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$

## Eksempel 4.10. Trekantsberegninger

a) I $\Delta$ ABC er $\angle C = 115.10^0$ , a = 5.60 og b = 10.40.
Find de 3 resterende vinkler og sider i trekanten.

b) I $\Delta$ ABC er $\angle C = 35.70^0$ , c = 7.60 og b = 10.40.
Find de 3 resterende vinkler og sider i trekanten.

**Løsning:**

a) $c^2 = 5.6^2 + 10.4^2 - 2 \cdot 5.6 \cdot 10.4 \cdot \cos 115.1 \Leftrightarrow c^2 = 188.93 \quad \underline{\underline{c = 13.75}}$

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{10.4^2 + 13.75^2 - 5.6^2}{2 \cdot 10.4 \cdot 13.75}\right) = \underline{\underline{21.65^0}}$$

$$\angle B = 180 - 21.65 - 115.1 = \underline{\underline{43.25^0}}$$

b) Da $\angle C$ er spids, og c < b er der mulighed for 2 løsninger $\Delta\ AB_1C_1$ og $\Delta\ AB_2C_2$ (se fig. 4.10).

1) $\dfrac{7.6}{\sin 35.7} = \dfrac{10.4}{\sin B_2} \Leftrightarrow B_2 = \sin^{-1}\left(\dfrac{10.4 \cdot \sin 35.7}{7.6}\right) = \underline{\underline{52.99^0}}$

$$C_2 = 180 - 52.99 - 35.7 = \underline{\underline{91.31^0}}$$

$$\frac{7.6}{\sin 35.7} = \frac{c_2}{\sin 91.31} \Leftrightarrow c_2 = \frac{7.6 \cdot \sin 91.31}{\sin 35.7} = \underline{\underline{13.02}}$$

2) $B_1 = 180 - 52.99 = \underline{\underline{127.01^0}}$

$$C_1 = 180 - 127.01 - 35.7 = \underline{\underline{17.29^0}}$$

$$\frac{7.6}{\sin 35.7} = \frac{c_1}{\sin 17.29} \Leftrightarrow c_1 = \frac{7.6 \cdot \sin 17.29}{\sin 35.7} = \underline{\underline{3.87}}$$

# Opgaver til kapitel 4

**4.1** (uden hjælpemidler)

a) Find ligningen for den rette linie $l$ gennem punkterne A = (2, 3) og B = (-4, 6).

b) Find ligningen for den rette linie $m$ som går gennem A og står vinkelret på $l$.

**4.2** (uden hjælpemidler)

Δ ABC har vinkelspidserne A = (4, 7), B = (3, -5) og C = (8, 5)

Bestem en ligning for den linie, der indeholder højden fra C.

**4.3** Bestem den spidse vinkel mellem linierne $l$ og $m$, når

a) $l$: $2x - y = 1$ og $m$: $-x + 3y + 5 = 0$

b) $l$: $x + y = 1$ og $m$: $y = -2x + 1$

c) $l$: $y = 2$ og $m$: $-2x - 3y = 1$.

**4.4** (uden hjælpemidler)

Linien $m$ har ligningen $m$: $y + 3x = 1$.

Bestem afstanden fra $m$ til punktet P = (5,7).

**4.5** Lad A = (4,5), B = (2,-1) og C = (-4,3).

Bestem

a) længden af højden fra A.

b) arealet af Δ ABC.

c) vinklerne i Δ ABC.

**4.6.** (uden hjælpemidler)

To biler A og B bevæge sig med en jævn retlinet bevægelse bestemt ved parameterfremstillingerne A: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og B: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

1) Bestem de to bilers fart

2) Vil de to bilers banekurver skære hinanden?.

3) Vil de to biler støde sammen?

**4.7** (uden hjælpemidler)

En linie $l$ har parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Skitsér linien l i et koordinatsystem

b) Opskriv ligningen for $l$

**4.8** (uden hjælpemidler)

Løs følgende ligningssystemer ved “indsættelsesmetoden”

1) $\begin{cases} -x+2y=-8 \\ 3x+y=3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x+y=5 \\ 6x+4y=15 \end{cases}$

**4.9.** (uden hjælpemidler)

I et koordinatsystem er givet linierne

$l$: $3x+5y=12$ og $m$: $4x+7y=8$

Bestem koordinaterne til de to liniers skæringspunkt.

**4.10** (uden hjælpemidler)

Ved et forlystelse i et tivoli blev der i et bestemt tidsrum solgt 60 billetter. Indtægten var 1000 kr.

Prisen for en voksenbillet var 30 kr og for en børnebillet 10 kr.

Hvor mange børne- og voksenbilletter blev der solgt?

**4.11** (uden hjælpemidler)

En cirkel har centrum i C = (2, -4) og radius 5.

Find ligningen for cirkeltangenten med røringspunkt i P = (2, 1).

**4.12** Find ligningen for den cirkel, der har centrum i C = (3, 5) og som har linien $l$ gennem punkterne A = ( 2, 0) og B = (0, 3) som tangent.

**4.13** Bestem skæringspunkterne mellem cirklen med centrum i C = (4, 3) og radius 5 og linien $l$ med ligningen $x$ +4 $y$ - 29 = 0

**4.14** En cirkel $c$ har ligningen $x^2+y^2-12x-16y+59=0$

Find eventuelle skæringspunkter mellem cirklen $c$ og linien $l$ med ligningen $2x+3y-13=0$

**4.15** Bestem de ukendte sider og vinkler i $\Delta$ ABC, når

a) $a$ = 12, $b$ = 9 og $c$ = 5

b) $\angle$ A = $65^0$ , $b$ = 5 og $c$ = 6

c) $\angle$ B = $120^0$, a = 8 og b = 12

d) $\angle$ B = $120^0$, $\angle$ C = $20^0$ og b = 12

**4.16** Et skib sejler med konstant kurs og fart. På et tidspunkt pejles et fyr i en vinkel på $21^0$ med sejlretningen. Efter at skibet har sejlet 12 sømil pejles fyret igen, og der måles en vinkel på$124^0$ med sejlretningen.

Bestem den korteste afstand d til fyret.

**4.17** Et skib sejler med en hastighed på 18 knob = 18 sømil i timen.
På positionen A observeres et fyr F i en vinkel på $17^0$ med sejlretningen. Efter yderligere sejlads i 20 minutter nås positionen B. Herfra observeres fyret F i en vinkel på $29^0$ med sejlretningen.

a) Under forudsætning af, at skibet beholder sin kurs, ønskes beregnet den korteste afstand d mellem skibet og fyret F.

Det vides imidlertid, at fyret skal passeres i en afstand af mindst 5 sømil.

b) Beregn den kursændring, der skal foretages på positionen B, for at fyret passeres i en afstand af netop 5 sømil.
c) Hvor lang tid går der mellem kursændringen ved B og passagen af fyret F (ved passagen forstås det sted, hvor skibet er i sin korteste afstand fra F).

**4.18** Man ønsker at bestemme højden af skorstenen PC. Imidlertid kan man ikke komme helt hen til skorstens fod C, men kun til et punkt B. Fra B danner sigtelinien til skorstenens top P en vinkel på $35^0$ med vandret. Man går nu 50 m tilbage og finder, at sigtelinien nu danner en vinkel på $22^0$ med vandret.
Beregn skorstenens højde.

**4.19** Et skib sejler stik nord med den konstante fart 15 knob = 15 sømil pr. time.
Klokken 22.20 observeres fyret $F_1$ i bagbords retning under en vinkel på $10^0$ med sejlretningen. Samtidig observeres fyret $F_2$ i styrbords retning under en vinkel på $40^0$ med sejlretningen. Klokken 22.40 foretages tilsvarende observationer og nu observeres fyret $F_1$ i bagbords retning under en vinkel på $15^0$ med sejlretningen og fyret $F_2$ i styrbords retning under en vinkel på $50^0$ med sejlretningen.

a) Beregn afstanden mellem fyret $F_1$ og fyret $F_2$ .
b) Beregn det tidspunkt til hvilket skibet passerer fyret $F_1$ (dvs. når afstanden mellem fyret $F_1$ og skibet er mindst).

**4.20** Afstanden mellem to observationspunkter $O_1$ og $O_2$ er 20 sømil.
Et retvinklet $xy$ - koordinatsystem indlægges med begyndelsespunkt i $O_1$ og med $O_2$ i punktet (20,0).
Et skib observeres fra $O_1$ og $O_2$ kl 12.30, og vinklerne måles:

$$\angle SO_1O_2 = 57^0 \quad , \quad \angle SO_2O_1 = 35^0$$

a) Find koordinaterne til skibets position kl 12.30, idet y > 0.

Ti minutter senere bestemmes koordinaterne til skibets position at være (8.50, 11.50).

b) Find skibets hastighed (i knob) samt skibets retning (vinkel med vandret).
c) Find den korteste afstand fra skibet til $O_2$ , når det antages, at skibet sejler retlinet.

# 5 Funktionsbegrebet

## 5.1 Definition af reel funktion

Man siger, at der foreligger en reel funktion $f$ af et reelt tal $x$, hvis der til ethvert reelt tal $x$ i en **definitionsmængde** $D$ er tilordnet netop ét reelt tal $f(x)$ .
Man kalder $f(x)$ for funktionsværdien. Mængden af alle funktionsværdier kaldes **værdimængden** ($V$ på figur 5.1).

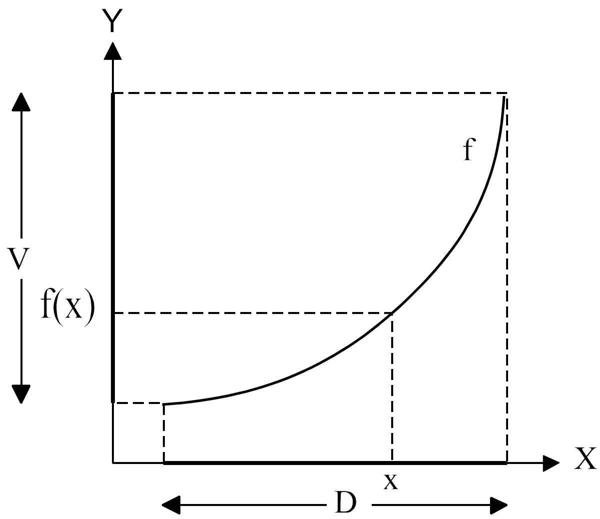



**Fig. 5.1.** *Graf for en funktion f.*

Vi vil ofte blot skrive "funktionen $x^2$" , $f(x) = x^2$ eller angive funktionen ved en ligning af formen $y = x^2$.
I det sidste tilfælde kaldes $x$ for den **uafhængige** variabel og $y$ for den **afhængige** variabel.
En anden skrivemåde er $f : x \to x^2$ , og ved de praktiske anvendelser ser man ofte skrivemåden $y = y(x)$.

<u>Forklaring af skrivemåden $y = y(x)$</u>. Er f.eks. massen $m$ af en stang en funktion af stangens længde $l$, vil man nødigt skrive $m = f(l)$, da man så dels benytter symbolet $m$ for massen betragtet som en variabel, dels benytter symbolet $f$ for massens afhængighed af $l$. I stedet skrives tit $m = m(l)$, så der kun knyttes ét symbol $m$ til den fysiske størrelse.

I kapitel 2 fandt vi ligningen for en ret linie til $y = ax + b$ .
Vi kan nu også sige, at den lineære funktion $f(x) = ax + b$ har som graf en ret linie.

## 5.2 Sammensat funktion

En funktion som eksempelvis $h(x) = \sqrt{2x+1}$ kaldes en sammensat funktion, da den er sammensat af funktionerne $f(x) = \sqrt{x}$ og $g(x) = 2x + 1$ til $h(x) = f(g(x)) = \sqrt{2x+1}$ .

## 5.3. Monoton funktion

Hvis der til større x-værdier svarer større funktionsværdier kaldes funktionen voksende.
Hvis der til større x-værdier svarer mindre funktionsværdier kaldes funktionen aftagende.
Den lineære funktion $f(x) = ax + b$ er således voksende, hvis a > 0 (hældning er positiv) og aftagende hvis a < 0.
Et monotoniinterval er et interval, hvori funktionen enten er voksende i hele intervallet, eller er aftagende i hele intervallet

Parablen $f(x) = x^2$ er således ikke monoton for alle x, men er monoton (voksende) for $x \geq 0$, og monoton (aftagende) for $x \leq 0$

## 5.4. Omvendt funktion.

Lad *f* være en funktion med definitionsmængden *D* og værdimængden *V*. Hvis der til ethvert $y \in V$ findes netop ét $x \in D$ så $f(x) = y$ siges *f* at have en omvendt funktion $f^{-1}$ givet ved
$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
Eksempelvis har enhver monoton funktion en omvendt funktion.
Således er $f(x) = x^2$ en voksende funktion for $x \geq 0$ og *f* har derfor her en omvendt funktion $f^{-1}$. For $x \geq 0$ fås af $y = x^2$ at $x = \sqrt{y}$ dvs. den omvendte funktion er givet ved $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ hvor $y \geq 0$. Hvis vi som sædvanlig kalder den den uafhængige variabel for *x* er $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ hvor $x \geq 0$
Grafen for $f^{-1}$ fås så af grafen for *f* ved spejling i linien $y = x$ ,se figur 5.2.

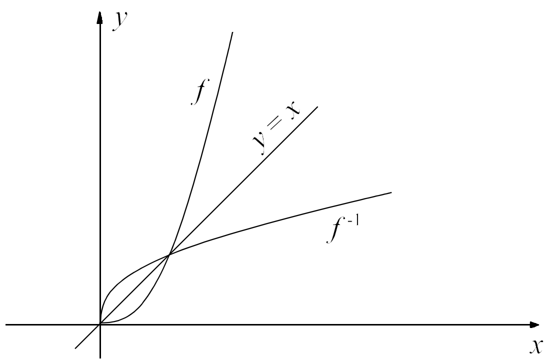



**Fig 5.2** *Omvendt funktion*

$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ og $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ forudsat, at de indgående funktioner er defineret.
Eksempelvis hvis $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$,
så er $f\left(f^{-1}(x)\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ forudsat $x \geq 0$, mens $f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$ for alle *x*.

### Eksempel 5.1. Omvendt funktion

Find den omvendte funktion til funktionen $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} \quad x \geq 0$.

**Løsning:**

Forudsat $y \neq 0$ gælder $y = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} \Leftrightarrow 1+\sqrt{x} = \dfrac{1}{y} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1}{y} - 1 \Leftrightarrow x = \left(\dfrac{1}{y} - 1\right)^2$.

$$\underline{\underline{y = f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2}} \quad , x > 0$$

◆

# Opgaver til kapitel 5

**5.1.** Angiv for hver af følgende funktioner deres definitionsmængde, den omvendt funktion $f^{-1}$ og dens definitionsmængde.

a) $f(x) = -3x + 1$,

b) $f(x) = \sqrt{x}$

# 6. Standardfunktioner

## 6.1 Indledning.

Ved en standardfunktion vil vi i det følgende forstå en af følgende typer af funktioner:
Potensfunktioner $x^a$, Eksponentialfunktioner $a^x$, logaritmefunktionerne ln(x) og log(x) samt de trigonometriske funktioner sin(x) og cos(x) .

Lad $f(x)$ og $g(x)$ være to standardfunktioner og a og b være to konstanter. Der kan så dannes nye funktioner ud fra de sædvanlige regneregler $a \cdot f(x) + b \cdot g(x)$, $a \cdot f(x) - b \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ og $f(g(x))$ .
Standardfunktionerne vil blive gennemgået i de følgende afsnit, sammen med eksempler på funktioner, der er dannet ud fra ovenstående regneregler.

## 6.2. Potensfunktioner

Vi har hidtil defineret $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (i alt $n$ faktorer) , idet vi forudsatte at eksponenten a var et helt positivt tal.
For regning med potenser gælder som bekendt følgende
**potenssætninger**:

$$1)\ a^n \cdot a^p = a^{n+p}, \quad 2)\ \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}, \quad 3)\ \left(a^n\right)^p = a^{n \cdot p}, \quad 4)\ (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad 5)\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Vi vil nu udvide potensbegrebet, så man forudsat roden a > 0 kan have vilkårlige tal som eksponenter f. eks. $a^0,\ a^{-n},\ a^{\frac{1}{3}}\ \ og\ \ a^{\sqrt{2}}$ .
Også for disse potensregler skal ovennævnte potensregler gælde.

### Definition. Udvidelse af potensbegrebet

Lad $n$ være et positivt helt tal, og a et vilkårligt reelt tal hvis intet andet er nævnt.

$a^n = a \cdot a \cdot\ .\ .\ .\ . \cdot a$ (i alt $n$ faktorer)

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ for $a \neq 0$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{hvor} \quad \begin{cases} a \geq 0 \text{ for } n \text{ lige} \\ a \text{ vilkårligt reelt tal for } n \text{ ulige} \end{cases}$$

$a^0 = 1$ for $a \neq 0$

**Begrundelse**

Da potensreglen $a^n \cdot a^p = a^{n+p}$ skal gælde, fås for

$p = 0$: $a^n \cdot a^0 = a^{n+0} \Rightarrow a^o = 1$,

$p = -n$: $a^n \cdot a^{-n} = a^{n-n} \Leftrightarrow a^n \cdot a^{-n} = 1 \Rightarrow a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots a^{\frac{1}{n}}}_{\text{ialt } n \text{ faktorer}} = a^{\overbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}^{\text{ialt } n \text{ addender}}} = a^1$. Da $\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \sqrt[n]{a}}_{n \;\; faktorer} = a$ fås heraf, at $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Hvis $n$ er lige må $a$ ikke være negativ, jævnfør, at $\sqrt{(-4)}$ er udefineret ($x^2 = -4$ er uden løsning)

, mens $\sqrt[3]{-8} = -2$ da $(-2)^3 = -8$.

At potensreglerne 2) 3) 4) og 5) også gælder for det udvidede potensbegreb overlades til læseren.

## Potenser med ikke rational potens

Ønsker man at definere eksempelvis $3^{\sqrt{2}}$, så kan det ske ud fra de forrige definitioner på følgende måde. $\sqrt{2} = 1.4144\ldots$

$3^1 = 3$, $3^{1.4} = 3^{\frac{14}{100}} = 4.6555$, $3^{1.41} = 4.7069$, $3^{1.414} = 4.7277$, $3^{1.4142} = 4.7287$

Vi ser, at $3^{\sqrt{2}} \approx 4.729$ På lommeregneren fås med 4 decimaler $3^{\sqrt{2}} \approx 4.7288$

På figur 6.1 er vist graferne for nogle potensfunktioner

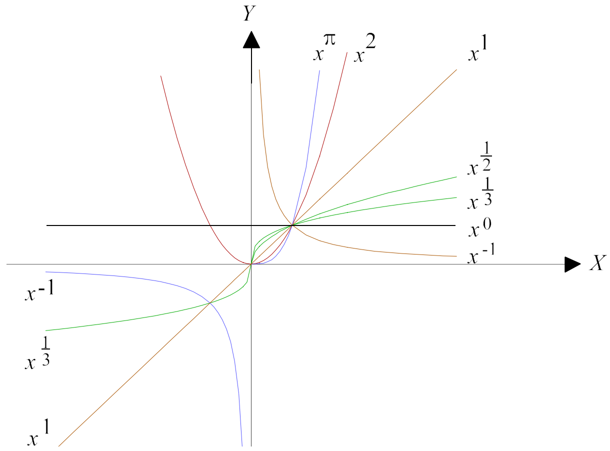



**Fig. 6.1.** *Nogle potensfunktioner.*

### Eksempel 6.1. Potensregler m.m.

Reducer følgende udtryk (uden brug af hjælpemidler):

1) $\dfrac{\left(x^3\right)^2\sqrt{x^8}}{\left(x^4\right)^3}$ , 2) $2x^9-\left(x^5-3x^2\right)\left(2x^4-x\right)$

**Løsning:**

1) $\dfrac{\left(x^3\right)^2\sqrt{x^8}}{\left(x^4\right)^3}=\dfrac{x^{3\cdot 2}\cdot\left(x^8\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{4\cdot 3}}=\dfrac{x^6\cdot x^4}{x^{12}}=\dfrac{x^{10}}{x^{12}}=x^{-2}=\underline{\underline{\dfrac{1}{x^2}}}$

2) $2x^9-\left(x^5-3x^2\right)\left(2x^4-x\right)=2x^9-\left(2x^5\cdot x^4-x^5\cdot x-6x^2\cdot x^4+3x^2\cdot x\right)$

$=2x^9-(2x^9-7x^6+3x^3)=\underline{\underline{x^3(7x^3+3)}}$

1) Kontrol ved TI 89: (x^3)^2*√ (x^8)/(x^4)^3 Resultat ok

2) Kontrol ved TI 89:2x^9-(2x^5-3x^2)(2x^4-x) Resultat ok

### Eksempler på anvendelser af potensfunktioner

**Keplers 3. lov**

Planeterne bevæger sig om solen i baner, hvor omløbstiden $T$ og den gennemsnitlige afstand $r$ fra solen er givet ved $T=0.000548\cdot r^{1.50}$

**Pulsen for forskellige dyrearter.**

Det viser sig, at små dyr har en hurtig puls og store dyr har en langsom puls.
Man her fundet, at hvis $y$ er antallet af hjerteslag pr. sekund, og $x$ er dyrets masse i kg, så gælder med tilnærmelse $y=3.60\cdot x^{-0.27}$

## 6.2.1. Polynomier

Ved et polynomium af n'te grad forstås funktionen

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ .\ .\ .\ .\ +a_1x+a_0,\qquad a_n\neq 0$

Ved polynomiets **rødder** forstås løsningerne til ligningen $f(x)=0$.

Man kan vise, at et polynomium af $n$'te grad har højst $n$ rødder.

### Polynomium af 1. grad:

Et polynomium af 1 grad $f(x)=ax+b$:, $a\neq 0$ kaldes også en lineær funktion, da dens graf er en ret linie.
Vi har i afsnit 2.3 gennemgået den rette linie's ligning, så vi vil her nøjes med at vise grafen for f(x) (se figur 6.2),

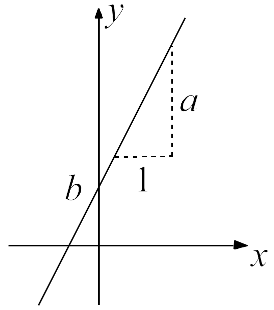



**Fig 6.2**. *Hældning a*

**Polynomium af 2. grad:** $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$

Det simpleste andengradspolynomium er $f(x) = ax^2$
Grafen for denne funktion kaldes en **parabel**.
I figur 6.2 er tegnet forskellige parabler svarende til forskellige værdier af tallet a.
Det ses, at parablen er symmetrisk omkring y -aksen, har "grenene" opad hvis $a > 0$ og "grenene" nedad hvis $a < 0$.
Punktet hvor parablen har sit minimum eller sit maksimum (her (0.0) kaldes parablens toppunkt.

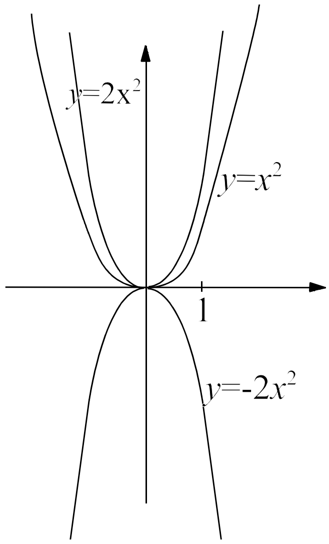



**Fig 6.2.** $y = ax^2$

## Sætning 6.1 Andengradspolynomiums graf og rødder

*Grafen for andengradspolynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c$ er en parabel kongruent med parablen $y = ax^2$, og med toppunktet $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right)$, hvor $d = b^2 - 4ac$ kaldes diskriminanten.*

*Forudsat $d \geq 0$ er rødderne (parablens skæringspunkt med x - aksen):* $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$

*Er d < 0 ligger parablen enten helt over x - aksen (hvis a > 0) eller helt under x - aksen (hvis a < 0)*

**Bevis**
Der foretages følgende omskrivning:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

Da $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ og $-\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = -\frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = -\frac{d}{4a^2}$ fås

$$y = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a} \quad \text{eller} \quad y + \frac{d}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Indføres et nyt $x_1y_1$- koordinatsystem ved $x_1 = x + \frac{b}{2a}$ $y_1 = y + \frac{d}{4a}$ bliver andengradsligningen i dette koordinatsystem $y_1 = ax_1^2$, dvs. en parabel med toppunkt i $(x_1, y_1) = (0,0)$

Det ses, at indsættes $x = -\frac{b}{2a}$ og $y = -\frac{d}{4a}$ bliver $(x_1, y_1) = (0,0)$ dvs. i xy-systemet har parablen toppunktet $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right)$

Forudsættes d $\geq 0$ fås af omformningen $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a}$ fås

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a} = 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{d}{4a} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{d}{4a^2} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{d}{4a^2}} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

◆

## Eksempel 6.2. (polynomium af 2. grad)

Lad $f(x) = -3x^2 - x + 2$

Grafen for $f$ er en parabel.

a) Find parablens skæringspunkter med $x$ - aksen (= funktionens nulpunkter)
b) Skitser grafen for funktionen i et interval, der indeholder nulpunkterne.
c) Angiv kordinaterne til funktionens toppunkt.

**Løsning:**

a) Nulpunkter: (= grafens skæringspunkter med x - aksen)

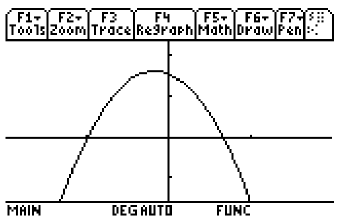
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - x + 2 = 0$$

$$-3x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 2}}{2(-3)} = \frac{1 \pm 5}{-6} = \begin{cases} -1 \\ \frac{2}{3} \end{cases}$$

eller benyt TI 89: F2/solve(-3x^2-x+2=0,x)

Nulpunkter $\underline{\underline{x = -1}}$ og $\underline{\underline{x = \frac{2}{3}}}$

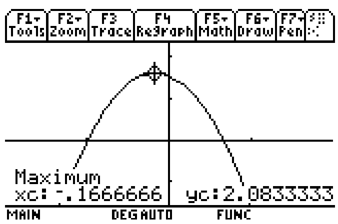
b) Da $a = -3 < 0$ har parablen grenene nedad.
TI89: Y=, indtast funktion, Enter,Graph,
Vælg Windows, og sæt grænser passende
Graph




c) $d = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-3)2 = 1 + 24 = 25$

$$T = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right) = \left(-\frac{-1}{-6}, -\frac{25}{4(-3)}\right) = \underline{\underline{\left(-\frac{1}{6}, \frac{25}{12}\right)}}$$

eller TI89: På tegning vælg F5, og på menu vælg maksimum og indsæt et passende interval.




◆

### Eksempel 6.3. Optimering

En stor butikskæde sælger lommeregnere til 600 kr pr. stk. Til den pris har man erfaring for, at der sælges 1000 stk. pr. uge.
For hver gang man hæver prisen med 50 kr pr. stk. falder salget med 60 stk. pr. uge. Tilsvarende stiger salget , hvis prisen sænkes.
Hvis firmaet kun ser på omsætningen, hvilken pris giver så den største omsætning?

**Løsning:**
Hvis prisen er 600 kr er omsætningen O = $1000 \cdot 600\,\text{kr}$
Hvis prisen er 600 + 50 kr er omsætningen O = $(600+50)\cdot(1000-60)$ kr
Hvis prisen er $600+2\cdot 50$ kr er omsætningen O = $(600+2\cdot 50)\cdot(1000-2\cdot 60)$ kr
Idet $x$ er antal gange prisen stiger med 50 kr, så har vi følgelig, at
hvis prisen er $600+x\cdot 50$ kr er omsætningen O = $(600+x\cdot 50)\cdot(1000-x\cdot 60)$ kr
Vi har $O(x)=-50\cdot 60x^2+(1000\cdot 50-600\cdot 60)x+600\cdot 1000=-3000x^2+14000x+600000$
Vi ser, at omsætningen kan skrives som et andengradspolynomium i $x$
Vi søger den største omsætning, dvs. størsteværdien for O(x)
Da grafen er en parabel med grenene nedad har den en størsteværdi i toppunktet.
Vi har derfor, at omsætningen er størst for $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{14000}{2\cdot(-3000)}=2.333$
Da $x$ skal være et helt tal må $x = 2$, dvs. vi skal hæve prisen med 100 kr til <u>700 kr</u> pr. stk.
Herved sælges 120 færre lommeregnere, men omsætningen stiger til
$(600+2\cdot 50)\cdot(1000-2\cdot 60)=700\cdot 880=616000$.

◆

### Sætning 6.2.Opløsning i faktorer

*Hvis andengradspolynomiet $f(x)=ax^2+bx+c$ har rødderne $\alpha$ og $\beta$ kan polynomiet opløses i faktorer $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$*

Bevis:

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{d}}{2a}=-\frac{b}{a}.\quad \alpha\cdot\beta=\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{d}}{2a}=\frac{(-b)^2-d}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=a\left(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\cdot\beta\right)=a\left(x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}\right)=ax^2+bx+c$$

◆

### Eksempel 6.4. (opløsning i faktorer)

Reducer brøken $\dfrac{-3x^2-x+2}{3x^2-9x-12}$ ved at opløse tæller og nævner i faktorer.

**Løsning:**

Ifølge eksempel 6.4 har tælleren $-3x^2-x+2$ rødderne er -1 og $\dfrac{2}{3}$

Nævneren: $3x^2-9x-12=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{9\pm\sqrt{9^2-4\cdot 3\cdot(-12)}}{6}=\dfrac{9\pm\sqrt{225}}{6}=\dfrac{9\pm 15}{6}=\begin{cases}4\\-1\end{cases}$

**TI 89:**

(-3x^2-x+2)/((3x^2-9x-12) ENTER Resultat: $\dfrac{-(3x-2)}{3(x-4)}$

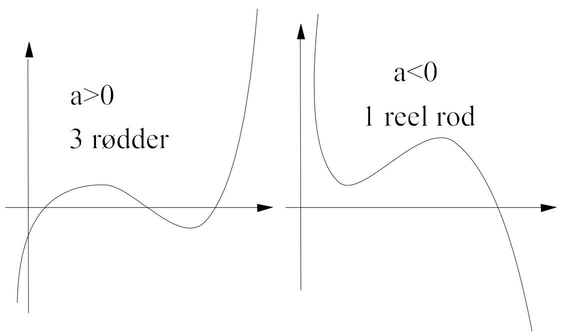
I vanskeligere tilfælde kan man ofte med fordel benytte enten

F2\ factor((-3x^2-x+2)/((3x^2-9x-12)) Resultat: $\dfrac{-(3x-2)}{3(x-4)}$

eller "expand", der giver $\dfrac{-10}{3(x-4)}-1$ som jo også er en god reduktion

**Polynomium af 3. grad:** $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d, \quad a\neq 0$

Et polynomium af 3.grad vil altid have mindst en rod og højst 3 rødder, dvs . grafen vil altid skære $x$ - aksen mindst 1 gang og højst 3 gange (se figuren)




De reelle rødder findes lettest ved anvendelse af lommeregnerens "solve" program.

**Eksempel 6.5.** (polynomium af 3. grad)

Lad $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + x - 2$

Find ved anvendelse af TI 89

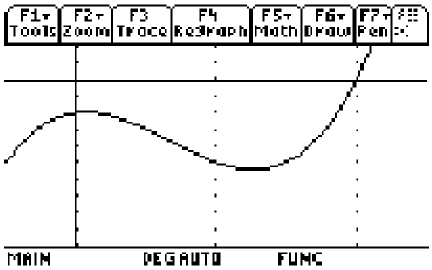
a) Polynomiet rødder
b) Opløs polynomiet i faktorer
c) Skitser grafen for $f(x)$

**Løsning.**

a) F2\ solve(4*x^3-8*x^2+x-2=0,x)  Rod $\underline{\underline{x = 2}}$

b) F2\ factor(4*x^3-8*x^2+x-2,x)  Resultat: $\underline{\underline{(x-2)(4x^2+1)}}$

c) TI89: Vælg: Y= ,indtast funktionen, Graph, Windows, ændre xmin , xmax osv. indtil man får en passende tegning. På figuren er valgt xcl= 1 og ycl =1 for at se enheder på tegningen.
Det ses heraf ,at der er forskellige enheder på akserne.
Ønskes samme enhed på akserne vælges i Windows F2:ZoomSqr.




**Polynomium af 4. grad:** $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Polynomier af 4. grad vil have fra 0 til 4 rødder.

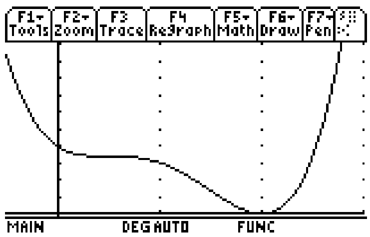
**Eksempel 6.6.** (polynomium af 4. grad)

Lad $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 4x + 4$

Find ved anvendelse af TI 89

a) Polynomiet rødder
b) Skitser grafen for $f(x)$
c) Find funktionens minimumsværdi.

**Løsning.**




a) F2\solve(2x^4-8x^3+9x^2-4x+4=0,x)
 .Resultat: Rod $\underline{\underline{x = 2}}$
b) Tegnet som under eksempel 6.5
c) Grafen har grenene opad som vist på figuren
 Vælges F5, Minimum og passende grænser fås, at minimum er 0 for x = 2.

## 6.3. Eksponentialfunktioner

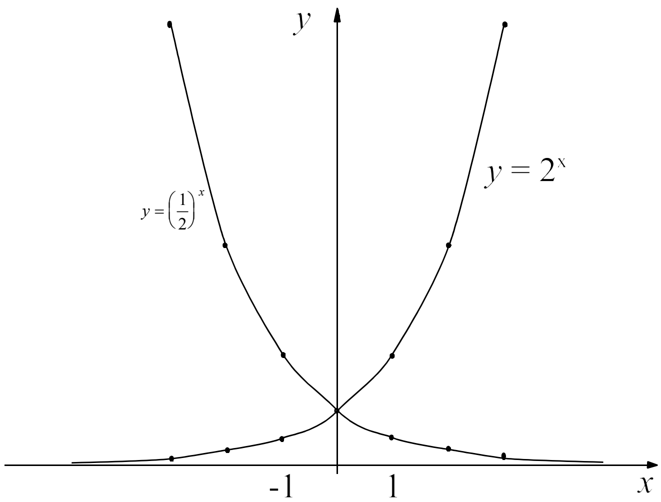
Ved en **eksponentialfunktion** forstås en funktion af typen $f(x) = a^x$, hvor $a > 0$
$x$ kaldes eksponenten og $a$ for grundtallet.
Da $a^0 = 1$ vil alle eksponentialfunktioner gå gennem punktet $(x, y) = (0,1)$.

### Eksempel 6.7 Graf for eksponentialfunktion

Skitser graferne for eksponentialfunktionerne $f(x) = 2^x$ og $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

**Løsning:**
Der beregnes følgende støttepunkter

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2^{-3} = \frac{1}{8}$ | $2^{-2} = \frac{1}{4}$ | $2^{-1} = \frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 |
| $g(x)$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |




Af speciel interesse er den eksponentialfunktion, som i punktet (x,y) = (0,1) har en tangent med hældningskoefficienten 1.
Denne funktion kaldes den "naturlige" eksponentialfunktion og skrives exp(x) eller $e^x$
Dens grundtal $e$ er en uendelig decimalbrøk.

På TI 89 findes funktionen over tasten x og man finder bl.a. at med 5 decimaler er e^(1) = 2.71828.

### Eksempel 6.8 Renteformel

Et beløb på 1000 kr indsættes på en bankkonto, hvor der tilskrives en rente på 4% om året.
Hvor meget er beløbet vokset til efter 5 år.

**Løsning:**

Efter 1 år er beløbet vokset til $1000 + 1000 \cdot 0.04 = 1000(1+0.04) = 1000 \cdot 1.04$ kr

Efter 2 år er beløbet vokset til $1000 \cdot 1.04 + 1000 \cdot 1.04 \cdot 0.04 = 1000 \cdot 1.04(1+0.04) = 1000 \cdot 1.04^2$ kr

Efter 5 års forløb er beløbet vokset til $1000 \cdot 1.04^5 = 1216.65$ kr

Af eksempel 8.2 ses, at hvis rentefoden er $r$ % pr. termin, så vil en kapital på b kr efter n terminer være vokset til $\boxed{b_n = b(1+r)^n}$

Denne formel kaldes **renteformlen**.

Renteformlen kan omskrives til en funktion af typen $f(x) = b \cdot a^x$ hvor $a = 1 + r$

### Eksempel 6.9. Anvendelser af renteformlen

1) Hvad skal sættes ind på en bankkonto, som forrentes med 4.5% rente p.a. for at der om 10 år står 80000 kr
2) En virksomhed har det første år en vækst på 8% , det næste år en vækst på 12% , det tredie år et fald på 10% og det fjerde år en vækst på 5%.
   Hvad er den gennemsnitlige årlige vækstrate på $r$ % , som på 4 år giver det samme resultat.
3) Hvis virksomheden i spørgsmål 2) har som mål på de første 5 år at vokse med gennemsnitlig 8% hvor stor skal væksten så være det 5. år.
4) Et radioaktivt sporingsstof indsprøjtes i en mus. Man ved at mængden af stof aftager med 25% over en periode på 12 timer.
   Hvad er det procentiske fald pr. time?

**Løsning:**

1) $b(1+0.045)^{10} = 80000 \Leftrightarrow b = \dfrac{80000}{1.045^{10}} = \underline{\underline{51514.20}}$ kr

2) Lad os antage, at vi har en kapital på 100 kr
   Denne er på 4 år vokset til $100 \cdot 1.08 \cdot 1.12 \cdot 0.90 \cdot 1.05$
   Der gælder $100(1+r)^4 = 100 \cdot 1.08 \cdot 1.12 \cdot 0.90 \cdot 1.05 \Leftrightarrow (1+r)^4 = 1.08 \cdot 1.12 \cdot 0.90 \cdot 1.05$
   $\Leftrightarrow 1 + r = (1.14307)^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow r = 1.03399 - 1 = 0.03399 = \underline{\underline{3.4\%}}$

3) Hvis r er den søgte rentefod det 5.te år, så haves
   $100(1.08)^5 = 100 \cdot 1.08 \cdot 1.12 \cdot 0.90 \cdot 1.05(1+r) \Leftrightarrow 1 + r = \dfrac{1.08^5}{1.08 \cdot 1.12 \cdot 0.90 \cdot 1.05}$
   $\Leftrightarrow r = 1.2854 - 1 = \underline{\underline{28.54\%}}$

4) Lad det procentiske fald pr. time være $r$ %
   $100 \cdot (1-r)^{12} = 100 \cdot (1-0.25) \Leftrightarrow (1-r)^{12} = 0.75 \Leftrightarrow 1 - r = 0.75^{\frac{1}{12}} \Leftrightarrow r = 1 - 0.9763$
   $\Leftrightarrow r = 0.2368 = \underline{\underline{2.37\%}}$

## 6.4. Logaritmefunktioner

Da eksponentialfunktionerne er monotone, har enhver af dem en omvendt funktion.
Disse omvendte funktioner kaldes logaritmefunktioner.
Vi vil i detaljer nøjes med at betragte de to vigtigste, nemlig

1) Den naturlige logaritme y = ln(x) som er den omvendte funktion til $y = e^x$,

   dvs. $y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$.

   Der gælder altså (forudsat $x > 0$)

   $\boxed{e^{\ln(x)} = x \text{ og } \ln\left(e^x\right) = x}$

2) Titalslogaritmen y = log(x), som er den omvendte funktion til $y = 10^x$,

   dvs. $y = \log(x) \Leftrightarrow x = 10^y$ Der gælder altså $\boxed{10^{\log(x)} = x \text{ og } \log\left(10^x\right) = x}$

På figur 6.3 er tegnet grafen for ln($x$).

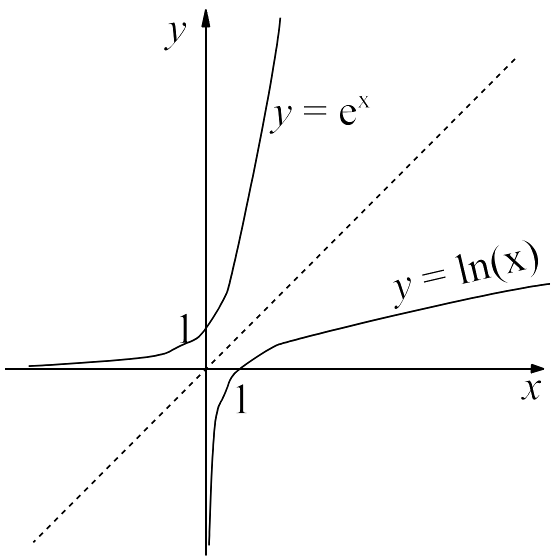



**Fig 6.3**. *ln(x) er den omvendte funktion af* $e^x$

For log og ln gælder (jævnfør også figur 6.3), at definitionsmængden D er alle positive reelle tal, da det er værdimængden for $e^x$ og $10^x$.
Værdimængden V = **R** (alle reelle tal) da det er definitionsmængden for $e^x$ og $10^x$.

$\ln(1) = 0$ og $\log(1) = 0$ da $e^0 = 10^0 = 1$

## Sætning 6.4 Logaritmeregler

Lad a og b være positive tal. Der gælder da

| | |
|---|---|
| 1) $\ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b$ | $\log(a\cdot b)=\log a+\log b$ |
| 2) $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$ | $\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log a-\log b$ |
| 3) $\ln\left(a^x\right)=x\cdot\ln a$ | $\log\left(a^x\right)=x\cdot\log a$ |

**Bevis:**

$a=e^{\ln a}$ og $b=e^{\ln b}$ fås

1) $a\cdot b=e^{\ln a}+e^{\ln b}=e^{\ln a+\ln b}$ dvs. $\ln(a\cdot b)=\ln\left(e^{\ln a+\ln b}\right)=\ln a+\ln b$

2) $\frac{a}{b}=\frac{e^{\ln a}}{e^{\ln b}}=e^{\ln a-\ln b}$ dvs. $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln\left(e^{\ln a-\ln b}\right)=\ln a-\ln b$

3) $a^x=\left(e^{\ln a}\right)^x=e^{x\cdot\ln a}$ dvs. $\ln\left(a^x\right)=\ln\left(e^{x\cdot\ln a}\right)=x\cdot\ln a$

Beviset for log er ganske analogt.

Titalslogaritmen kan udtrykkes ved de naturlige logaritmer: $\boxed{\log x=\frac{\ln x}{\ln 10}}$

Bevis: Af $x=10^{\log x}$ fås ved at tage logaritmen på begge sider og benytte logaritmeregel 3):

$$\ln x=\log x\cdot\ln 10 \Leftrightarrow \log x=\frac{\ln x}{\ln 10}$$

## Eksempel 6.10. Logaritmeregler

Reducer uden brug af hjælpemidler følgende udtryk:

a) $\ln\left(e^5\right)$, b) $\ln\left(\frac{y^5}{x^3}\right)$

**Løsning:**

a) $\ln\left(e^5\right)=5\ln e=\underline{\underline{5}}$

b) $\ln\left(\frac{y^5}{x^2}\right)=\ln\left(y^4\right)-\ln\left(x^3\right)=4\ln y-3\ln x$

**Eksempel 6.11. Ligninger med logaritme- potens- eller eksponentialfunktioner**
Løs ligningerne
a) $\ln x = 3$
b) $e^x = 15$
c) Hvor mange terminer skal 300000 kr stå på en konto med en rente på 2.5% for at den er vokset til ca. 450000 kr.
d) Lad $y = x^a$. Når $x$ vokser med 10% vokser y med 15% . Find $a$.

**Løsning:**

a) $\ln x = 3 \Leftrightarrow x = \underline{\underline{e^3}} = 20.086$

b) $e^x = 15 \Leftrightarrow x = \ln(15) = 2.708$

c) $300000 \cdot (1+0.025)^n = 450000 \Leftrightarrow 1.025^n = \dfrac{450000}{300000} \Leftrightarrow n \cdot \ln(1.025) = \ln(1.5)$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{\ln 1.5)}{\ln(1.025)} \Leftarrow n = 16.42$

<u>Beløbet skal stå i 17 terminer</u>.

d) $y \cdot 1.1 = (x \cdot 1.15)^a$ . Indsættes $y = x^a$ fås

$x^a \cdot 1.15 = x^a \cdot 1.1^a \Leftrightarrow 1.15 = 1.1^a \Leftrightarrow a = \dfrac{\ln 1.15}{\ln 1.1} = 1.466$

TI 89: Spørgsmål c) kunne også løses ved
F2\ solve(300000*(1+0.025)^x=450000,x)    Resultat ok

## 6.5. Nogle anvendelser af logaritme- og eksponentialfunktioner.

### 6.5.1 Radioaktivt henfald

Radioaktive stoffer omdannes med tiden til ikke-radioaktivt stof . Man siger, at stoffet "henfalder". Kulstof er således ud over nogle stabile isotoper, også sammensat af den radioaktive isotop ${}^{14}_{6}C$, som kaldes kulstof-14.

Hvis mængden af det tilbageværende stof til tiden $t$ kaldes $m(t)$, gælder $m(t) = m(0) \cdot e^{-kt}$, hvor m(0) er mængden af den radioaktive stofmængde til tiden $t = 0$.
Tallet $k$ kaldes henfaldskonstanten. Størrelsen af den afhænger af det pågældende stof.
For en aftagende eksponentiel udvikling som ovenstående gælder, at når der er gået en bestemt tid (halveringstiden T) så er den tilbageværende mængde stof blevet halveret. Dette gælder uafhængigt af om man foretager målingen i dag eller om 1000 år.

### Sætning 6.5. Halveringstid

*Sammenhæng mellem henfaldskonstanten k og halveringstiden T er* $T = \dfrac{\ln 2}{k}$

**Bevis:** Vi har, at $m(t+T) = \dfrac{1}{2} m(t)$

Indsættes det i $m(t) = m(0) \cdot e^{-kt}$ fås

$$m(0) \cdot e^{-k(t+T)} = \frac{1}{2} m(0) \cdot e^{-kt} \Leftrightarrow e^{-kt} \cdot e^{-kT} = \frac{1}{2} e^{-kt} \Leftrightarrow e^{-kT} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -kT = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow T = \frac{\ln 1 - \ln 2}{-k} \Leftrightarrow T = \frac{\ln 2}{k}$$

◆

For kulstof -14 gælder, at den har en halveringstid på ca. 5730 år.

Heraf fås, at $5730 = \dfrac{\ln 2}{k} \Leftrightarrow k = \dfrac{\ln 2}{5730} = 0.00012$

Omdannelsen af kulstof-14 sker derfor efter ligningen $m(t) = m(0)e^{-0.00012 \cdot t}$

I levende planter og dyr er forholdet mellem kulstof-14 og den ikke radioaktive isotop ${}^{12}_{6}C$ konstant og er det samme som forholdet mellem de to isotoper i omgivelserne. Når organismen dør, optager den ikke længere kulstof fra omgivelserne. Nu henfalder kulstof-14 og man kan derfor benytte indholdet af kulstof-14 i arkæologiske fund (knogler, planerester) til at angive dets alder.

## 6.5.2. Logaritmiske skalaer

### Logaritmetabeller

Før lommeregnerne blev indført omkring 1975 var den simpleste (og ofte den eneste anvendelige) måde at beregne eksempelvis udtryk som $u = 2.726^4$ eller $u = \sqrt{0.7825}$ at benytte såkaldte 4-cifrede logaritmetabeller. Disse var tabeller over titalslogaritmen. Dette skyldes, at ethvert decimaltal kan skrives som et tal mellem 1 og 10 multipliceret med en potens af 10.

Eksempelvis er

$31.62 = 10 \cdot 3.162 \qquad \log 31.62 = \log 10 + \log 3.164 = 1 + \log 3.162$

$316.2 = 10^2 \cdot 3.162 \qquad \log 31.62 = \log 10^2 + \log 3.162 = 2 + \log 3.162$

$0.03162 = 10^{-2} \cdot 3.162 \qquad \log 0.03162 = \log 10^{-2} + \log 3.162 = -2 + \log 3.162$

Det ses, at blot man har lavet en tabel over logaritmen til alle 4 - cifrede tal i intervallet mellem 1 og 10, kunne man let finde logaritmen til alle andre tal.

Vi vil ikke gå nærmere ind på denne teknik som blev opfundet omkring 1600, og som har haft en meget stor betydning ved at muliggøre komplicerede beregninger.

## Richter - skalaen

Ved måling af jordskælvs styrke beregnes et tal R (f.eks. R = 6) efter Richter-skalaen.

Formlen der benyttes er $R = \log\left(\frac{a}{T}\right) + b$ ,hvor a er amplituden for jordoverfladens svingninger (i $10^{-6}$ m) ved målestationen, T er perioden for jordskævbølgen i sekunder og b er en konstant, der afhænger af jordskælvbølgens svækkelse fra centrum for jordskælvet.

Da skalaen er logaritmisk betyder en lille ændring i Reaktor tal en stor ændring i jordskælvets styrke.

Det kan ses af følgende regninger:

Lad et jordskælv have Reaktor tallet $R_1$ og et andet jordskælv have Reaktor tallet $R_2$, og lad de tilsvarende amplituder være $a_1$ og $a_2$ . Lad endvidere T og b være de samme for begge jordskælv.

Vi har derfor $R_1 = \log\left(\frac{a_1}{T}\right) + b \qquad R_2 = \log\left(\frac{a_2}{T}\right) + b$

Trækkes de to ligninger fra hinanden fås

$$R_1 - R_2 = \log\left(\frac{a_1}{T}\right) - \log\left(\frac{a_2}{T}\right) \Leftrightarrow R_1 - R_2 = \log a_1 - \log a_2 \Leftrightarrow R_1 - R_2 = \log\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \Leftrightarrow 10^{R_1 - R_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

Antages eksempelvis, at Richtertallet stiger med 0.5 (f.eks. fra $R_1$ = 5 til $R_2$ = 5.5) bliver

$$10^{5-5.5} = \frac{a_1}{a_2} \Leftrightarrow 10^{-0.5} \cdot a_2 = a_1 \Leftrightarrow a_2 = 3.16 \cdot a_1$$

Amplituden bliver altså over 3 gange så stor ved en stigning på 0.5.

## Lydmåling

Decibel (dB) skalaen bruges til at bestemme, hvor høj intensiteten i lydtrykket er i de frekvenser, det menneskelige øre kan opfatte.

Lydstyrken $L$ i decibel beregnes af formlen $L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ , hvor $I$ er “lydtrykket” og $I_0$ er den svageste “lydtryk” det menneskelig øre kan opfatte (begge målt i $W/m^2$ (Watt pr. $m^2$)).

Det ses, at hvis $I = I_0$ er $L = 0$ dB.

Sættes I = $10^6 \cdot I_0$ er L = 60 dB, hvilket svarer til samtale i normalt leje.

Det ses altså, at det menneskelige øre ikke opfatter lyden som selve lydtrykket, men dæmper det kraftigt ned efter en logaritmisk skala.

## Måling af surhedsgrad

Enhver syre er kendetegnet ved en større eller mindre tilbøjelighed til at afgive $H^+$-ioner, så jo mere og jo stærkere syre der er, desto flere ioner. Man måler derfor en væskes surhed ved at måle koncentrationen af brintioner $[H^+]$[1] i væsken (i mol/liter).

En opløsnings pH defineres ved $pH = -\log[H^+]$.

Destilleret vand har en pH på 7 (svarende til $[H^+] = 10^{-7}$ ), en sur væske har pH < 7 og en basisk væske har en pH > 7s

[1]Streng taget ikke $H^+$ men $H_3O^+$

## 6.6. Trigonometriske funktioner.

### 6.6.1. Indledning

Ordet trigonometri betyder trekantsmåling, og de trigonometriske funktioner anvendes i udstrakt grad til geometriske beregninger (jævnfør kapitlerne 1 - 4).
Ved mange fysiske anvendelser anvendes også de trigonometriske funktioner, men her er det især deres "periodiske, svingende" egenskaber der er af betydning, f.eks. ved beskrivelse af vekselstrøm , mekaniske svingninger osv.. Et eksempel på disse anvendelser kan findes i afsnittet om svingninger.

Mens man i geometrien sædvanligvis regner vinkler i grader, vil man ved fysiske anvendelser regne vinkler i **radianer** (også kaldet naturligt vinkelmål) .

### Definition af vinkels radiantal

På figur 6.4 er tegnet en cirkel med centrum i O og radius 1 (cirklen kaldes en enhedscirkel)
Vinklen v mellem OQ og OP målt i radianer defineres ved

$$\boxed{\text{v} = \frac{\text{længde af cirkelbue}}{\text{radius}} = \text{længde af buen QP på enhedscirklen.}}$$

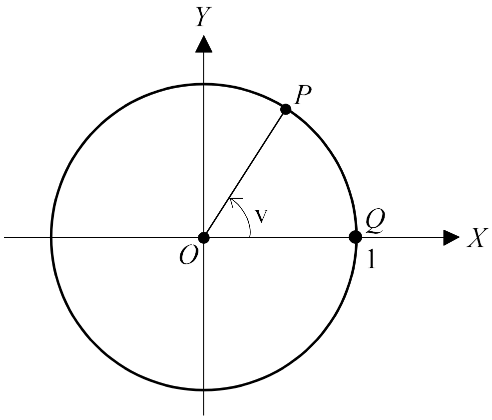



**Fig. 6.4.** *Definition af* radian.

Da en cirkel med radius r har omkredsen $2 \cdot \pi \cdot r$ har en halvcirkel på enhedscirklen længden $\pi$ .

Da dette svarer til en vinkel på $180^0$ sker en omregning fra radianer til grader med faktoren $\frac{180^0}{\pi}$ .

### Eksempel 6.12. Omregning mellem radianer og grader

1) Følgende vinkler er angivet i radianer. Angiv vinklerne i grader.
$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$ , 1.45
2) Følgende vinkler er angivet i grader. Angiv vinklerne i radianer.
$45^0$, $120^0$ , - $135^0$ , $270^0$, $84.2^0$

**Løsning:**

1) $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{180^0}{\pi} = 60^0$, $\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180^0}{\pi} = 150^0$, $-\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} \cdot \frac{180^0}{\pi} = 30^0$ $\quad 1.45 = 1.45 \cdot \frac{180^0}{\pi} = 83.08^0$

2) $45^0 = 45^0 \cdot \frac{\pi}{180^0} = \frac{\pi}{4}$, $120^0 = 120^0 \cdot \frac{\pi}{180^0} = \frac{2\pi}{3}$, $-135^0 = -135^0 \cdot \frac{\pi}{180^0} = -\frac{3\pi}{4}$,

$270^0 = 270^0 \cdot \frac{\pi}{180^0} = \frac{3\pi}{2}$, $84.2^0 = 84.2^0 \cdot \frac{\pi}{180^0} = 1.470$

## 6.6.2.Definition af sinus , cosinus og tangens

Vi har i afsnit 2.5 defineret de tre trigonometriske funktioner ud fra enhedscirklen. Definitionerne fremgår af de følgende tegninger:.

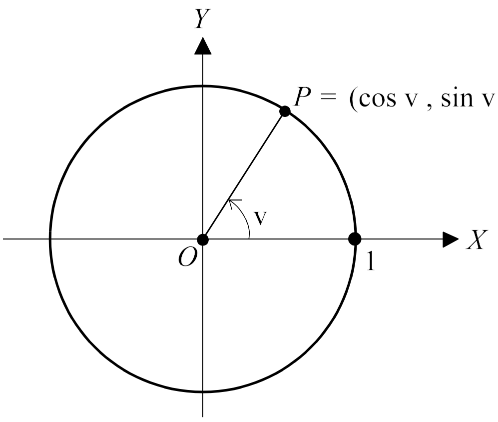



**Fig. 6.5.** *Definition af* cos *og* sin.

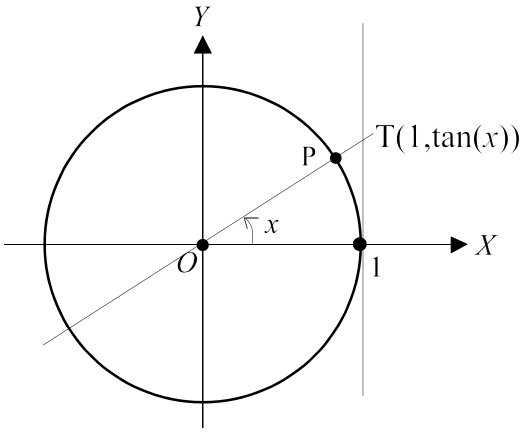



**Fig. 6.6.** *tan aflæses på tangenten*

$$\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + p \cdot \pi,}$$ hvor p er et helt tal.

### Eksempel 6.13. Beregning af sin og cos på lommeregner

Beregn

1) $\cos\frac{\pi}{2}$, $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\sin\frac{3\pi}{2}$, $\cos 1.45$

2) $\sin 45^0$, $\cos 120^0$ , $\cos(-120^0)$ , $\sin 84.2^0$

**Løsning:**

1) MODE\ Angle = Radian\ENTER

$\cos(\pi/2) = 0$, $\quad \sin(-\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -0.8660$ $\quad \cos(-\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660$

$\sin(3\pi/2) = -1$ $\quad \cos(1.45) = 0.1205$

2) MODE\ Angle = Degree\ENTER

$\sin(45) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$ $\quad \cos(120) = -1/2$ $\quad \cos(-120^0) = -0.1/2$ $\quad \sin(84.2) = 0.9949$

◆

## 6.6.3. Periodicitet

Enhedscirklen har omkredsen $2\pi$, så punktet P på figur 6.7 har såvel koordinaterne (cos x , sin x) som koordinaterne $(\cos(x+2\pi), \sin(x+2\pi), (\cos(x+4\pi), \sin(x+4\pi)$ osv. samt koordinaterne $(\cos(x-2\pi), \sin(x-2\pi), (\cos(x-4\pi), \sin(x-4\pi)$ osv.

Der gælder altså, at funktionsværdierne for $f(x)=\sin x$ og $g(x)=\cos x$ gentager "sig selv" med en afstand på $2\pi$.

Man siger de to funktioner er **periodiske med perioden** $2\pi$**.**

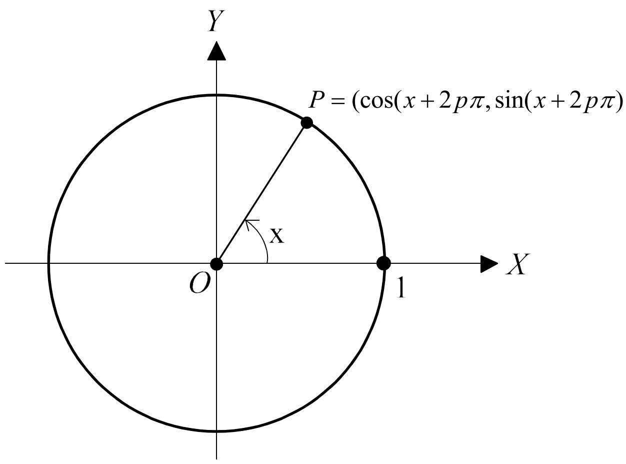



**Fig. 6.7.** cos *og* sin *er periodiske*

Tangens er periodisk med perioden $\pi$ .

Bevis: $\tan(\mathrm{v}+\pi)=\dfrac{\sin(\mathrm{v}+\pi)}{\cos(\mathrm{v}+\pi)}=\dfrac{-\sin \mathrm{v}}{-\cos \mathrm{v}}=\tan \mathrm{v}$

.

## 6.6.4. Relationer mellem trigonometriske funktioner

**Grundrelation mellem sin og cos**

Af den retvinklede trekant OPS på figur 6.8 fås af "Pythagoras sætning" at $(\sin x)^2+(\cos x)^2=1$

Denne "grundrelation" mellem cos og sin skrives også $\boxed{\sin^2 x+\cos^2 x=1}$.

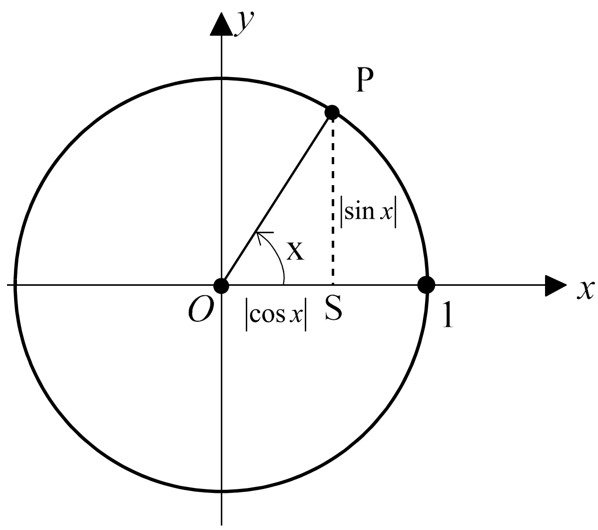



**Fig. 6.8.** $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

**Overgangsformeler**

Ud fra enhedscirklen kan man som vist på figur 6.9 ved symmetribetragtninger let indse de såkaldte overgangsformler.

$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(\pi - x) = .\cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$
$\sin(x + \pi) = -\sin x$
$\cos(\pi + x) = -\cos x$

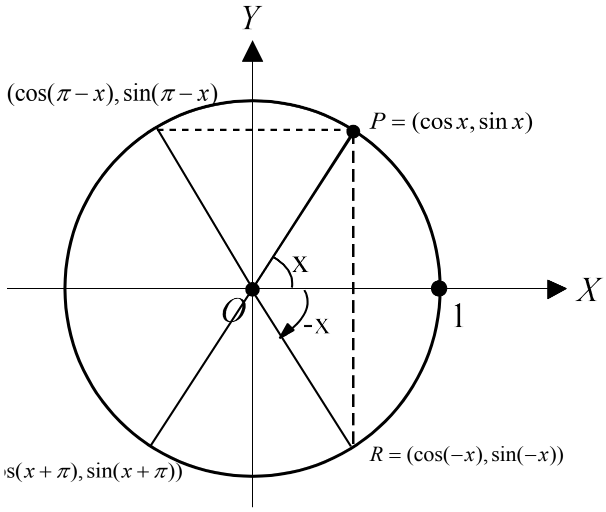



**Fig. 6.9.** *Overgangsformler*

**Additionsformler**

Der findes et stort antal formler, der angiver en sammenhæng mellem to trigonometriske funktioner. Nogle af de vigtigste er de såkaldte additionsformler, som her angives uden bevis:

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \qquad (1)$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \qquad (2)$$

Ud fra disse kan man ved eksempelvis at erstatte *y* med -*y* eller *y* med *x* få andre nyttige formler frem.

Er disse ikke tilstrækkelige når man har brug for at omforme et trigonometrisk udtryk , kan man eventuelt finde den nødvendige formel i en større matematisk formelsamling.

Sådanne omformninger af udtryk hvori der forekommer trigonometriske funktioner kan være meget komplicerede. Det er derfor, at eksempelvis TI 89 har nogle specielle ordrer (F2\Trig\tExpand (evt. tCollect) som man ofte med fordel kan benytte. Dette er vist i eksempel 6.14 .

**Eksempel 6.14. Reduktion af trigonometriske udtryk.**

Reducer udtrykket $\dfrac{\cos(2x) - \cos^2 x}{\sin x}$ .

**Løsning:**

TI 89: F2 \ 9: Trig \tExpand( (cos(2x)-(cos(x))^2)/sin(x))     Resultat  - sinx

Erstattes i additionsformel (1) y med x fås $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

Heraf fås $\dfrac{\cos(2x) - \cos^2 x}{\sin x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x} = \underline{\underline{-\sin x}}$

◆

## 6.6.5. Grafer for de trigonometriske funktioner

Graferne for $\cos x$ og $\sin x$ ses på figur 6.10. (kan eventuelt tegnes på TI 89)

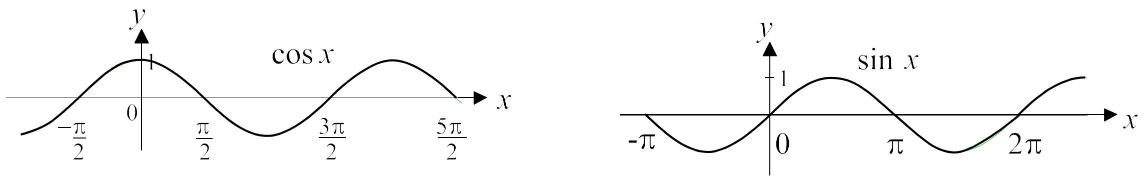



**Fig. 6.10.** *Grafer for* cos *og* sin.

Hvis grafen for cos x parallelforskydes $\frac{\pi}{2}$ mod højre falder den sammen med grafen for sin x, dvs.

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x \text{ eller } \cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

Grafen for tangens har lodrette asymptoter for $x=\frac{\pi}{2}+p\cdot\pi$ (se figur 6.11)

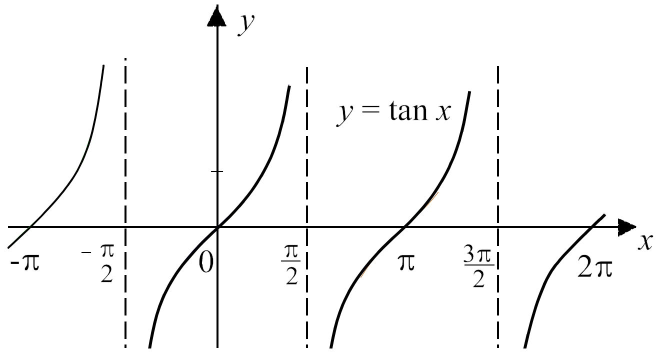



**Fig. 6.11.** *Graf for* tan.

## 6.6.6. De omvendte (inverse) trigonometriske funktioner

Skal man løse en trigonometrisk ligning som eksempelvis $\sin x = 0.5$ har man behov for at finde den omvendte (inverse) funktion $x=\sin^{-1} x$.

Egentlig har ingen af funktionerne sin, cos og tan en omvendt funktion. Vi kan imidlertid udvælge et monotoniinterval (hovedintervallet) for hver af dem og i dette betragte den omvendte funktion (se figur 13.9).

Hovedintervallet er det største monotoniinterval, der indeholder $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

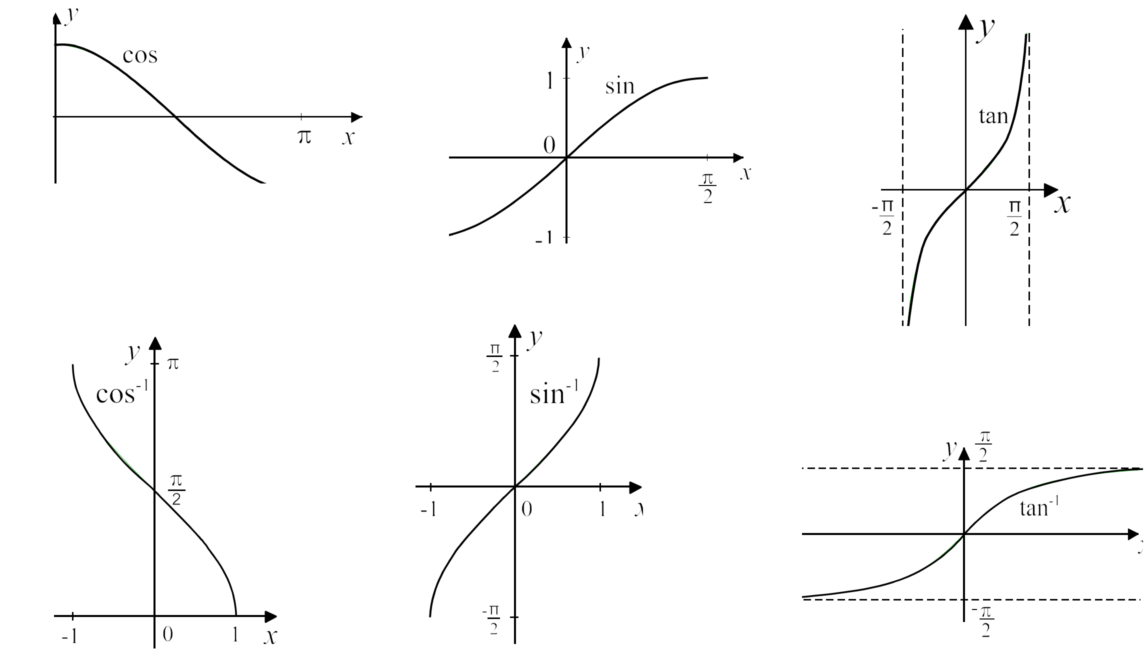


**Fig. 6.12.** *De trigonometriske funktioner (øverst). De omvendte funktioner (nedenunder) fremkommer ved spejling i linien y = x*

De omvendte funktioner er derfor bestemt ved:

$y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y,\quad$ hvor $x \in [-1;1]$ og $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y,\quad$ hvor $x \in [-1;1]$ og $y \in [0;\pi]$

$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y,\quad$ hvor $x \in \mathbf{R}$ og $y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

**Eksempel 6.15. Inverse trigonometriske funktioner**

Find 1) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, 2) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 3) $\tan^{-1}(-1)$

**Løsning:** Ifølge lommeregner fås

1) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ 2) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ 3) $\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ ◆

**Arcusfunktioner**. Da man jo let kan tro, at $\sin^{-1} x = \frac{1}{\sin x}$ (hvad det **ikke** er), kan man møde skrivemåden "Arcus"

. $\text{Arccos}\, x = \cos^{-1} x$ , $\text{Arc}\sin x = \sin^{-1} x$ og $\text{Arctan}\, x = \tan^{-1} x$

Forstavelsen "arcus" (bue, vinkel) kommer af, at f.eks. $\text{Arc}\sin\frac{1}{2}$ er den vinkel, hvis sinus er $\frac{1}{2}$

**Cosecant, secant, og cotan.**

Man kan i visse tabelsamlinger m.m. se funktionerne "cosecant" $\csc(x) = \frac{1}{\sin x}$, "secant" ved $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ og "cotan" ved $\cot(x) = \frac{1}{\tan x}$ ◆

## 6.6.7. Løsning af trigonometriske grundligninger

Vi ønsker at finde samtlige løsninger til "de trigonometriske grundligninger" :
$\sin x = a$, $\cos x = a$, $\tan x = a$, hvor $a$ er et reelt tal.

Dette sker nemmest ved at man betragter en enhedscirkel.

1) $\sin x = a$, hvor $-1 \le a \le 1$

Lad os som eksempel se på ligningen
$\sin x = 0.8$
Vi har (fra lommeregneren)
$x = \sin^{-1}(0.8) = 0.9273$
Af figur 6.13 ses, at en anden løsning er
$x = \pi - 0.9273 = 2.2143$
Da sinus er periodisk med perioden 2 $\pi$
fås løsningen

$$\sin x = 0.8 \Leftrightarrow x = \begin{cases} 0.9273 + 2 \cdot p \cdot \pi \\ 2.2143 + 2 \cdot p \cdot \pi \end{cases},$$

hvor $p$ er et helt tal
**TI89:** F2\solve(sin(x)=0.65,x)

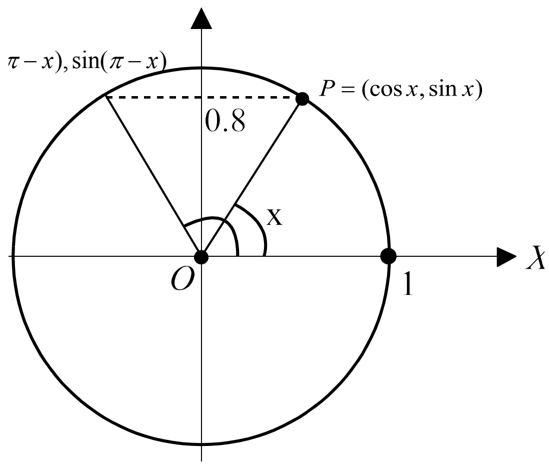



**Fig. 6.13.** *sin x* = 0.8

2) $\cos x = a$, hvor $-1 \le a \le 1$

Lad os som eksempel se på ligningen

$\cos x = 0.4$
Vi har (fra lommeregneren)
$x = \cos^{-1}(0.4) = 1.1593$
Af figur 6.14 ses, at en anden løsning er
$x = -0.9273$
Da sinus er periodisk med perioden 2 $\pi$
fås løsningen
$\sin x = 0.4 \Leftrightarrow x = \pm 1.1593 + 2 \cdot p \cdot \pi$
hvor $p$ er et helt tal
**TI89:** F2\solve(cos(x)=0.4,x)
Der fås samme løsning

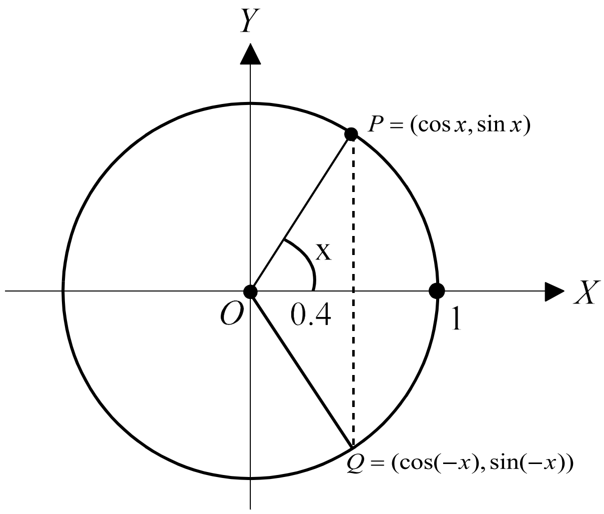



**Fig. 6.14.** *cos x* = 0.4

3) $\tan x = a$

Lad os som eksempel se på ligningen $\tan x = 1.2$

Vi har (fra lommeregneren)

$x = \tan^{-1}(1.2) = 0.8761$

Da tangens er periodisk med perioden $\pi$

fås løsningen

$\tan x = 1.2 \Leftrightarrow x = 0.8761 + p \cdot \pi$, hvor $p$ er et helt tal.

**TI89:** F2\solve(tan(x)=1.2,x)

Der fås samme løsning

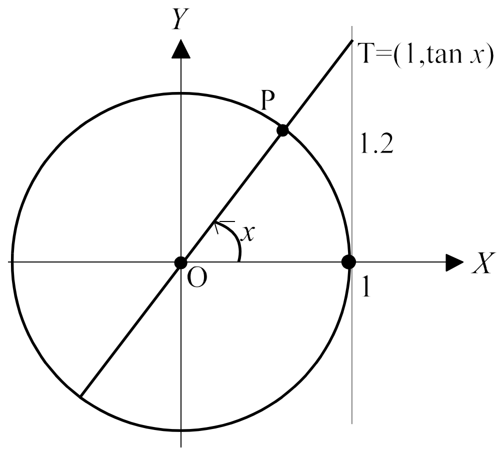


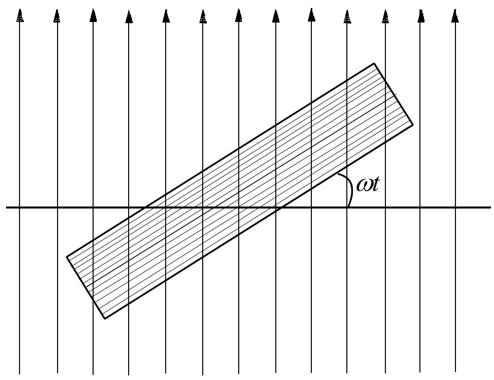

**Fig. 6.14.** $\tan x = 1.2$

## 6.6.8. Svingninger

I mange anvendelser har man brug for funktioner der er periodiske. Ved vekselstrøm svinger spændingen frem og tilbage, et pendul svinger frem og tilbage osv.

**Eksempel 6.16. Vekselstrøm**

Lad os betragte en trådspole som drejer rundt i et magnetfelt.




Herved induceres en vekselspænding mellem trådrullens endepunkter på $E(t) = A \cdot \sin(\omega t)$, hvor t er tiden , A kaldes amplituden og $\omega$ kaldes vinkelfrekvensen eller fasen.

Forbindes nu denne vekselspænding til et kredsløb med en spole med en selvinduktion L som på figur 6.15 vil det vise sig, at den frembragte vekselstrøm *i* være givet ved

$i = \frac{A}{Z} \cdot \sin(\omega t - \varphi)$ ,hvor impedansen $Z = L \cdot \omega$ og

faseforskydningen $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

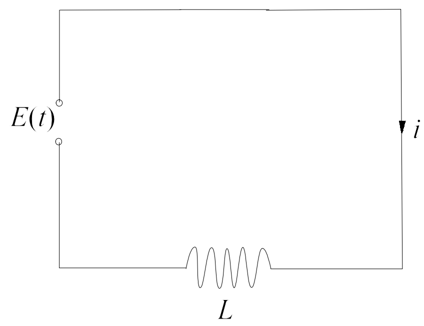



**Fig 6.15** *L- kredsløb*

Tilsvarende kan man vise, at forbindes vekselspændingen med en kondensator med kapacitet C er impedansen $Z = \frac{1}{C \cdot \omega}$ og faseforskydningen $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

**Regning med impedanser**

Når man danner et kredsløb eksempelvis som på figur 6.16, hvor en modstand , en kondensator og en spole er sat i serie, så vil der en vekselstrøm $E(t) = A\sin(\omega \cdot t)$ vil den frembragte vekselstrøm *i* være givet ved $i = \frac{A}{Z} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi)$

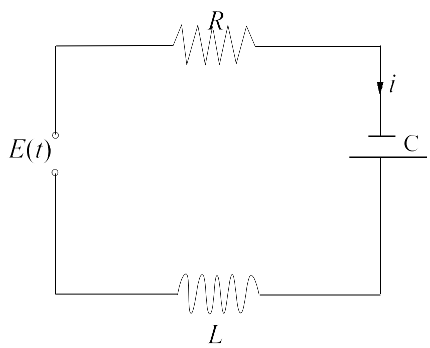



**Fig 6.16** *RCL - kredsløb*

Da man både skal bestemme impedans og faseforskydning i det dannede kredsløb, viser det sig nemmest at foretage beregningerne med komplekse tal, da et komplekst tal ligesom en vektor i polære koordinater er karakteriseret ved et tal og en vinkel..

På figur 6.17 er tegnet en kompleks talplan.

Den "komplekse enhed" $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ (se figur 6.20),

Det komplekse tal $z = a + i \cdot b = |a|e^{i\varphi}$ , hvor $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ og

$\tan\varphi = \frac{b}{a}$

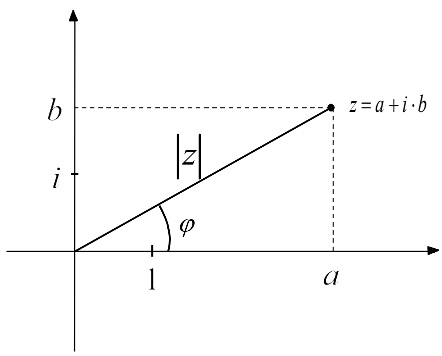



**Fig. 6.17** *Kompleks talplan*

Man har da for modstand R: $Z_1 = R \cdot e^{i \cdot 0} = R$

spole: $Z = L \cdot \omega \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = L \cdot \omega \cdot i$

kondensator: $Z = \frac{1}{C \cdot \omega} e^{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{C \cdot \omega} i$

Vi kan nu bruge de kendte regler fra ohmsk modstand:

Modstand, spole og kondensator i serie:

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 = R + L\cdot\omega\cdot i - \frac{1}{C\cdot\omega}\cdot i = R + \left(L\cdot\omega - \frac{1}{C\cdot\omega}\right)\cdot i$$

Heraf følger, at impedansen er $|Z| = \sqrt{R^2 + \left(L\cdot\omega - \frac{1}{C\cdot\omega}\right)^2}$ og faseforskydningen $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{L\cdot\omega - \frac{1}{C\cdot\omega}}{R}\right)$

Modstand, spole og kondensator parallelt forbundne:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{R} + \frac{1}{L\cdot\omega\cdot e^{\frac{\pi}{2}i}} + \frac{1}{\frac{1}{C\cdot\omega}e^{-\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{L\cdot\omega}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}i} + C\cdot\omega\cdot e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$= \frac{1}{R} - \frac{1}{L\cdot\omega}i + C\cdot\omega\cdot i = \frac{1}{R} + \left(C\cdot\omega - \frac{1}{L\cdot\omega}\right)\cdot i$$

**Taleksempel:**

L = 0.5 Henry, $R = 20\ \ \Omega,\quad C = 20\ \mu F = 20\cdot 10^{-6}\,F,\quad \omega = 100\cdot\pi\ \ \sec^{-1}$

TI-89. Vælg Mode\COMPLEX FORMAT = Polar\ ANGLE=DEGREE (hvis man ønsker i grader)
Det komplekse tal *i* står over CATALOG

I serie: $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 = R + L\cdot\omega\cdot i - \frac{1}{C\cdot\omega}\cdot i$ = 20+ 0.5*100* $\pi$ **i* - 1/(20*10^(-6)*100* $\pi$ )**i*

Resultat: 20.1074 ∠ -5.92412

Parallel: $Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \left(C\cdot\omega - \frac{1}{L\cdot\omega}\right)\cdot i} =$

= 1/(1/20+(20*10^(-6)*100* $\pi$ -1/(0.5*100* $\pi$ ))**i*)

Resultat: 20.0 ∠ 0.095125

◆

## Amplitude , frekvens , svingningstid, bølgelængde

Som det ses af eksempel 6.16 optræder ofte svingninger af typen $f(t) = A\cdot\sin(\omega t + \varphi)$
Vi vil derfor undersøge hvilken betydning **amplituden** A, **vinkelfrekvensen** $\omega$ og **faseforskydningen** $\varphi$ har for svingningerne ved at undersøge hvad der sker med grafen for en svingning, når man ændrer A, $\omega$ og $\varphi$ .

1) **En svingning med amplituden A svinger mellem -A og +A.**
På figur 6.18 er tegnet funktionerne $f(t) = 2\sin t$ med amplituden 2, $g(t) = \sin(t)$ med amplituden 1 og $h(t) = \frac{1}{2}\sin t$ med amplituden $\frac{1}{2}$

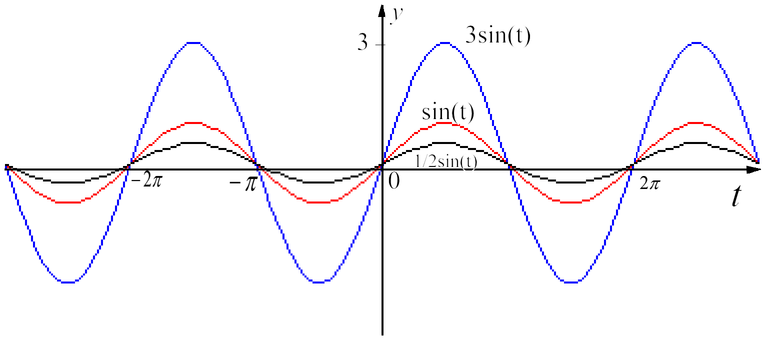



**Fig 6.18**. *Svingninger med amplituderne* 3, 1 *og* ½

2) **En svingning med vinkelfrekvens $\omega$ har en periode (kaldet svingningstid) på** $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Begrundelse: $f(t) = \sin t$ har perioden $2\pi$, dvs grafen foretager en hel svingning (én "bølge") når $t$ varierer mellem $t = 0$ og $t = 2\pi$.
Funktionen $g(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ vil derfor tilsvarende foretage en hel svingning når $\omega t + \varphi$ varierer mellem 0 og $2\pi$.

Da $\omega t + \varphi = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{\varphi}{\omega}$ og $\omega t + \varphi = 2\pi \Leftrightarrow t = \dfrac{2\pi}{\omega} - \dfrac{\varphi}{\omega}$ er afstanden mellem de to punkter $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ som derfor er perioden (svingningstiden). ◆

På figur 6.19 er tegnet funktionerne $f(t) = \sin 3t$ med svingningstiden $\dfrac{2\pi}{3}$, $g(t) = \sin(t)$ med svingningstiden $2\pi$ og $h(t) = \sin\left(\dfrac{1}{2}t\right)$ med svingningstiden $4\pi$.

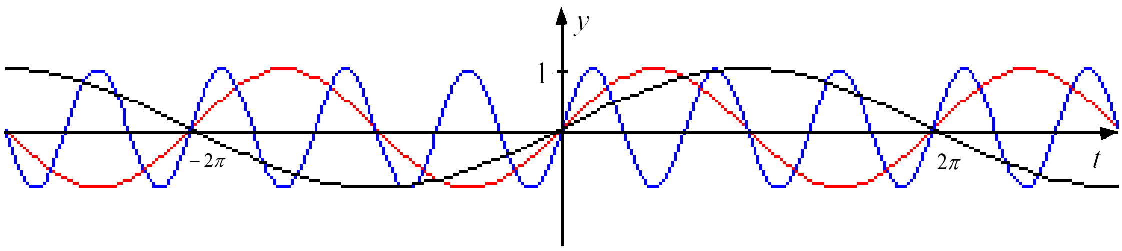



**Fig 16.19**. Blå kurve:sin(3$t$) , rød kurve: sin($t$), sort kurve sin($t$/2)

3) **Faseforforskydning** $\varphi$ :

Sammenlignes grafen for $f(t) = A\sin(\omega \cdot t + \varphi)$ med grafen for $g(t) = A\sin(\omega \cdot t)$ ses, at de har samme amplitude og samme svingningstid (periode)

Idet g(0) = 0 og $f\left(-\dfrac{\varphi}{\omega}\right) = 0$ ses, at tallet $-\dfrac{\varphi}{\omega}$ angiver det stykke grafen for $g$ skal parallelforskydes i x-aksens retning for at gå over i grafen for $f$.

4) **Frekvens *f*.**

Ved frekvensen $f$ forstås antallet af svingninger pr sekund. Da svingningstiden er det antal

sekunder det tager at udføre en svingning, så er $f = \frac{1}{T}$.Frekvens måles i Hertz (1 Hz =1 $s^{-1}$).
En lyd på 440 Hertz = 440 svingninger pr sekund er eksempelvis kammertonen A.

5) **Bølgelængde**
Betragter vi igen lyden på 440 Hertz, og antager, at lydens udbredelseshastighed er 330 m/s, så vil 440 Hertz "fylde" 330 m. 1 svingning vil derfor "fylde" $\frac{330}{440} = 0.75\,\text{m}$. Man siger så, at bølgelængden er 75 cm.

Et andet eksempel er radiobølger, som i FM-området er ca. 100 mHz (megahertz) $= 10^8\ s^{-1}$
Da radiobølger udbreder sig med lysets hast ca. 300000 km/s = $3 \cdot 10^8$ m/s, er deres bølgelængde $\frac{3 \cdot 10^8}{10^8} = 3$ m.

## Eksempel 6.16 Temperatursvingninger

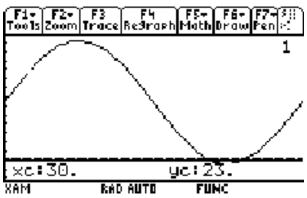
Temperaturen $y$ (i Celcius) på et bestemt sted varierer efter følgende ligning
$y = 15 + 16 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{360} x\right)$, hvor $x$ er antal dage regnet fra 1 april, og året for nemheds skyld antages at have 12 måneder på hver 30 dage.

a) Angiv svingningstiden T
b) Tegn svingningen på lommergner og aflæs temperaturen 1 maj
c) Beregn temperaturen 1 januar
d) Angiv årets middeltemperatur, samt højeste og laveste temperatur
e) Angiv de dage hvor temperaturen er højest.

**Løsning:**

a) $T = \frac{2\pi}{\omega} = 360\,\text{dage}$

b)
1 maj: $x$ =30. temperatur $\underline{\underline{23^0}}$




c) 1 januar: $x$ =270. Temperatur $= 15 + 16 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{360} 270\right) = 15 + 16 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \underline{\underline{-1^0}}$

d) Middeltemperatur $15^0$, Højeste temperatur $15+14=31^0$. Laveste temperatur $-1^0$

e) $31 = 15 + 16 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{360} x\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{360} x\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{180} x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 90$ Højeste temperatur 1 juli

## Opgaver til kapitel 6

**6.1.** (uden hjælpemidler)

Reducer udtrykket $\dfrac{\left((ab)^n \cdot a^p\right)^q \cdot b^{-n}}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n \cdot \left(a^{-p}\right)^{-q} \cdot a^{-n} \cdot a^{n \cdot q}}$

**6.2.** (uden hjælpemidler)

Reducer udtrykket $\dfrac{\sqrt{x^{12}}}{\left(\sqrt{x}\right)^8}, \quad x > 0$

**6.3.** (uden hjælpemidler)

En funktion er bestemt ved $f(x) = x^2 - 8x + 7$

a) Find koordinaterne til parablens skæringspunkt med de to koordinatakser.
b) Find toppunktets koordinater
c) Tegn parablen.

**6.4**. (uden hjælpemidler)

En funktion er bestemt ved $f(x) = -x^2 + 3x + 4$

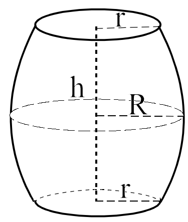
a) Find koordinaterne til parablens skæringspunkt med de to koordinatakser.
b) Find toppunktets koordinater
c) Tegn parablen.

**6.5.** (uden hjælpemidler)

Funktionerne *f* og *g* er bestemt ved

$f(x) = x + 1 \qquad g(x) = x^2 - 2x + 1$

Find skæringspunkterne mellem de to grafer.




**6.6.** En tønde (se figuren) skal have rumfanget V = 10 m$^3$.
Endvidere skal den have højden h = 2 m og endefladernes radier skal være r = 1 m. Radius på tøndens bredeste sted kaldes R

Det oplyses, at $\mathrm{V} = \dfrac{\mathrm{h}}{15}\left(8\mathrm{R}^2 + 4 \cdot \mathrm{r} \cdot \mathrm{R} + 3\mathrm{r}^2\right) \cdot \pi$

Beregn R i meter med 3 betydende cifre.

**6.7.** Lad der være givet polynomiet $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + x + 6$
Find polynomiets rødder, og skitser grafen for funktionen.

**6.8.** Løs ligningen $x^6 + 2x^3 - 15x = 0$

**6.9.** Løs ligningen $\sqrt{2 - x} = -x$

**6.10** Løs ligningen $16^{x-3} + 3 \cdot 4^{x-2} = 448$

**6.11.** Lad $y = x^a$ , hvor $x > 0$ og $a$ er en vilkårlig konstant.
Bestem $a$ med 3 betydende cifre, når det oplyses, at $y$ øges med 10% når $x$ øges med 5%.

**6.12.** Lad $y$ være den tid (i minutter) en professionel dykker kan opholde sig under vandet i en dybde på $x$ m uden at få dykkersyge.
Med tilnærmelse kan man vise, at der mellem $x$ og $y$ gælder følgende sammenhæng : $y = b \cdot x^a$ , hvor $a$ og $b$ er konstanter.
Det oplyses, at i en dybde på $x$ = 14 m er $y$ = 98 minutter og i en dybde på $x$ = 22 m er $y$ = 37 minutter.
a) Bestem konstanterne $a$ og $b$ med 4 betydende cifre.
b) Hvor længe kan en dykker opholde sig på 25 m uden risiko for dykkersyge?

**6.13** Et beløb på 12000 kr skal indsættes i en bank. Man ønsker, at beløbet efter 6 terminer skal være steget til ca. 17000 kr. Hvor mange procent skal banken tilbyde i rente?

**6.14** En ny bil koster 200000 kr. Værdien nedskrives hvert år på selvangivelsen med 18%. Hvad er bilen nedskrevet til efter 10 år.

**6.15** Bornholms indbyggertal faldt fra 47800 i 1981 til 43500 i 2006.
Faldet er med tilnærmelse gennem årene sker med en fast årlig procent p.
a) Find p
b) Hvis udviklingen fortsætter, hvad bliver så indbyggertallet på Bornholm i 2020.

**6.16** Mængden af radioaktive isotoper aftager eksponentielt med tiden.
Mængden af en bestemt isotop er 5.00 g og den har en halveringstid på 95 år.
a) Hvor mange gram er der tilbage af isotopen efter 200 år
b) Hvor mange år vil der gå før mængden er nede på 1 g.

**6.17** Når radioaktive stråler sendes gennem en blyvæg sker der en formindskelse af intensiteten af strålingen.
Denne formindskelse er bestemt ved formlen $b = a \cdot e^{-kx}$ , hvor $a$ er intensiteten før passage af blyvæggen, $b$ er intensiteten efter passage og $x$ er tykkelsen af blyvæggen målt i mm.
For en bestemt type stråler forminsker en blyvæg på 15 mm intensiteten med 70%.
Hvor tyk skal en blyvæg være for at intensiteten forminskes med 90%.

**6.18.** Find samtlige løsninger til ligningen $\sin^2 x = \frac{1}{9}$ , idet $x$ måles i radianer med 4 decimaler.

**6.19** Find samtlige løsninger til ligningen $\cos(2x) = \frac{1}{4}$ idet $x$ måles i radianer med 4 decimaler.

**6.20.** Løs ligningen $6\sin^2 x + 5\sin x + 1 = 0$ , idet $x$ måles i radianer med 4 decimaler.

**6.21** På grund af tidevandet ændres vanddybden ved en mole .
I et bestemt døgn er vanddybden $H$ målt i meter bestemt ved

$$H = 7 + 5\sin\left(\frac{1}{2}t - 1\right), \quad 0 \le t \le 24$$

hvor $t$ angiver antallet af timer efter middag. Til $t = 2.15$, svarer altså kl 14.09.
Bestem de to tidspunkter i det pågældende døgn, hvor vanddybden H er størst

**6.22** En svingning er bestemt ved ligningen $y = 3\sin(4\pi \cdot t + 1) + 2$ , $t$ måles i timer

a) Angiv amplitude, svingningstid og frekvens.
b) Bestem de tidspunkter i et periodeinterval, hvor y er størst og y er mindst, og angiv værdien af y i disse punkter.
c) Skitser grafen for svingningen i et periodeinterval

# 7 REGRESSION

## 7.1 Indledning

I dette kapitel betragtes forsøg, hvor man har målt sammenhørende værdier af to variable *x* og *y*. Det følgende eksempel demonstrerer et sådant tilfælde.

### Eksempel 7.1 Punkter ligger tilnærmelsesvis på ret linie

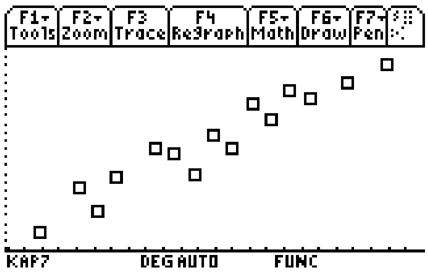
I et spinderi udtrykkes garnets kvalitet bl.a. ved en norm for den forventede trækstyrke. Kvaliteten anses således for at være i orden, hvis middeltrækstyrken mindst er lig med 10 måleenheder (me).

Ved uldgarn opfylder garnets naturlige trækstyrke ikke det nævnte kvalitetskrav, hvorfor der tilsættes en vis mængde kunstfibre, hvilket forøger trækstyrken. Herved sker der dog det, at andre kvalitetsegenskaber, såsom elasticitet og isoleringsevne, forringes. Man har eksperimenteret med forskellige tilsatte mængder kunstfibre x og registreret garnets trækstyrke y ved disse forskellige mængder. Herved fremkom følgende observationsmateriale:

| Mængde *x* (i gram) af kunstfibre pr kg uld | 40 | 50 | 55 | 60 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 120 | 130 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Trækstyrke (me): *Y* | 4.5 | 6.5 | 5.4 | 7.0 | 8.2 | 8.0 | 7.1 | 8.9 | 8.2 | 10.3 | 9.6 | 10.8 | 10.5 | 11.2 | 12.0 |

Mængden af kunstfibre *x* er blevet bestemt på forhånd (har fået ganske bestemte værdier). Trækstyrken *Y* synes derimod udover mængden af kunstfibre også at være påvirket af andre ukendte og ukontrollable "støjfaktorer".

Afsættes de målte punktpar $(x_1, y_i)$ i et koordinatsystem for at få et overblik over forløbet, fås følgende tegning:




I TI89 fås tegningen på følgende måde:
Tryk på APPS , vælg STAT/LIST , Indtast data i list1 (x-værdier) og list2 (y-værdier)
F2: Plots \ Plot Setup \ Define
Behold Scatter og Box, indsæt list1 og list2 (Vælg VAR LINK og vælg listenavne herfra) \ ENTER, ENTER, F5 ◆

Selv om punkterne ikke ligger eksakt på en ret linie, synes det rimeligt at antage, at afvigelserne fra en ret linie kan forklares ved den tilfældige variation (støjen).

Derfor er det nærliggende at antage, at i middel vil $y$ kunne skrives som en lineær funktion af $x$, dvs. $y = ax + b$ . (1)

Da et punktpar $(x_1, y_i)$ ikke ligger eksakt på linien gælder derfor, at $y_i = a \cdot x_i + b + \varepsilon_i$ , hvor $\varepsilon_i$ kaldes den i'te residual.

## 7.2. Lineær model

Man søger altid den simplest mulige model, der kan beskrive de fundne data..
Da man har 15 punktpar, så vil et polynomium af fjortende grad gå igennem alle punkter.
Umiddelbart skulle man måske tro, at det ville være en bedre model. Dette er imidlertid ikke tilfældet, da $Y$ - værdierne jo er resultater af forsøg der er påvirket af ukontrollable støjkilder. Polynomiets koefficienter vil derfor afspejle disse tilfældige udsving, og det giver derfor en ganske meningsløs model. Endvidere er modellen alt for matematisk kompliceret til at kunne bruges i praksis.
Vi vil i dette kapitel kun betragte modeller, som er "lineære" med hensyn til parametrene.
Et polynomium af 2. grad $y = a + bx + cx^2$ er således lineær i de 3 parametre a, b og c (selv om grafen naturligvis ikke er en ret linie).
Som et eksempel på en model der ikke er lineær i parametrene kan nævnes $y = a + bx^c$ .

Vi vil endvidere begrænse os til at betragte det ved anvendelserne meget ofte forekomne tilfælde, hvor modellen er lineær i 2 parametre.
Som eksempler herpå kan nævnes
(1) $y = a + bx$ og
(2) $\ln y = a + b \cdot \ln x$
En ligning, der som (1) eller (2) beskriver en sådan lineær model kaldes en **regressionsligning** og koefficienterne a og b kaldes for **regressionskoefficienterne**

## 7.3. Bestemmelse af regressionsligning

På basis af en række sammenhørende værdier af $x$ og $y$ bestemmes regressionskoefficienterne $a$ og $b$ ved " mindste kvadraters metode".
Metoden beskrives i det følgende (urealistisk) lille taleksempel.

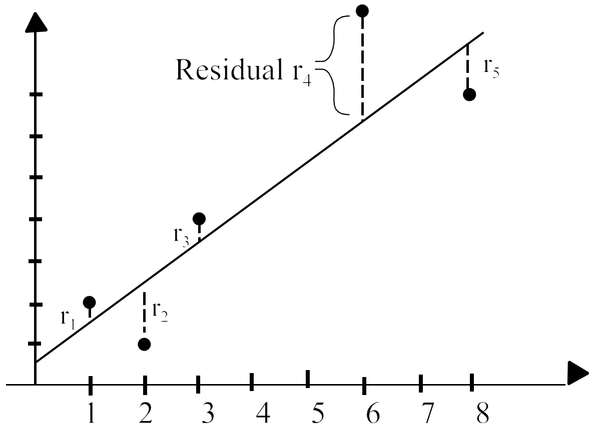
**Eksempel 7.2. Beskrivelse af mindste kvadraters metode.**
I et medicinsk forsøg måles på en forsøgsperson sammenhørende værdier af en bestemt medicin i blodet (x i %) og reaktionstiden y.
Resultaterne var:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 6 | 8 |
| $y$ | 2 | 1 | 4 | 9 | 7 |

a) Forklar hvad der menes med residual
b) Beskriv "mindste kvadraters metode

**a) Residual.** Ved et punkts residual til en linie forstås den "lodrette" afstand fra punktet til linien (se tegningen).

På figur 7.2 er afsat de 5 punkter, og indtegnet en ret linie.




**Figur 7.2** *Residualer*

b) **Mindste Kvadraters metode**. Regressionslinien $y = ax + b$ bestemmes som den af alle mulige rette linier, for hvilket summen af kvadratet af residualerne til linien er mindst.
I eksempel 7.2 er kvadratsummen $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2$ .
Løsningen af dette optimeringsproblem resulterer i løsning af et ligningssystem til bestemmelse af regressionskoefficienterne
Løsning af et sådant ligningssystem sker lettest ved hjælp af såkaldt matrixregning
◆

## 7.4. Vurdering af om model beskriver data godt.

Det er altid muligt ved mindste kvadraters metode at finde en sådan "mindste kvadraters linie". Det er den af alle rette linier, der har den mindste kvadratsum af residualerne, men det betyder ikke nødvendigvis, at linien så også er en rimelig model, som kan anvendes til at beskrive sammenhængen.
Til vurdering heraf benytter man dels at se på en tegning, dels at se på størrelsen af "forklaringsgraden $r^2$ " eller "korrelationskoefficienten r"

a) **Tegning.**
Til vurdering af dette tegnes linien i et koordinatsystem sammen med punkterne. Hvis den lineære model skal beskrive dataene godt, skal punkterne fordeler sig "tilfældigt" omkring linien.

Da det ofte kan være svært at se dette på en lille tegning, er det ofte mere overskueligt at tegne residualerne i stedet for list2. Residualerne bør naturligvis fordele sig tilfældigt omkring en vandret linie.

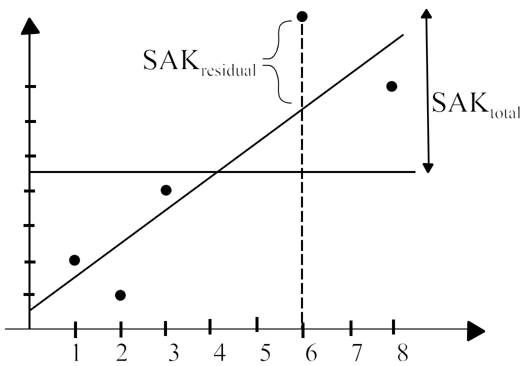
b) **Korrelationskoefficient r og forklaringsgrad r²**
Samtidig skal punkterne naturligvis ligge "tæt"på linien. Til en talmæssig vurdering heraf udregnes korrelationskoefficienten $r$ og forklaringsgraden $r^2$.
Korrelationskoefficienten er et tal mellem -1 og 1, dvs. $-1 \le r \le 1$
Hvis $y$ er uafhængig af $x$ (eksempelvis hvis $x$ var 5 personers reaktionstid og y var deres højde) vil punkterne fordele sig helt tilfældigt uden noget system, og $r \approx 0$ .
Hvis derimod $y$ er afhængig af $x$ vil regressionslinien have en hældning forskellig fra nul.
Hvis hældningen er positiv, vil $r > 0$ og hvis hældningen er negativ vil $r < 0$.
Endvidere gælder, at hvis punkterne ligger tæt ved regressionslinien er $|r| \approx 1$

I stedet for korrelationskoefficienten anvendes ofte forklaringsgraden $r^2$ , og man siger så , at den fundne model "forklarer " $r^2 \cdot 100\%$ af den "totale variation"

<u>Anskuelig forklaring på forklaringsgrad:</u>
Residualerne til den fundne regressionslinie $y = 0.6 + 1.0\,x$:
$r_1 = 2 - (0.6 + 1\cdot 1) = 0.4, r_2 = 1 - (0.6 + 1\cdot 2) = -1.6, r_3 = 4 - (0.6 + 1\cdot 3) = 0.4, r_4 = 9 - (0.6 + 1\cdot 6) = 2.4, r_5 = 7 - (0.6 + 1\cdot 8) = 0.4$.
$SAK_{residual} = r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_5^2 = 0.4^2 + (-1.6)^2 + 0.4^2 + 2.4^2 + .(-1.6)^2 = 11.2$
Hvis $y$ er uafhængig af $x$ (eksempelvis hvis $x$ var 5 personers reaktionstid og y var deres højde) vil punkterne fordele sig helt tilfældigt uden noget system. Regressionslinien vil da blive en vandret linie med ligningen $y = \bar{y}$
(gennemsnittet af y-værdierne).
I eksempel 7.2 er $\bar{y} = \dfrac{2+1+4+9+7}{5} = \dfrac{23}{5} = 4.6$
Residualerne til denne vandrette linie er
$r_1 = 2 - 4.6 = -2.6$ , $r_2 = 1 - 4.6 = -3.6, r_3 = 4 - 4.6 = -0.6,$ $r_4 = 9 - 4.6 = 4.4,$ $r_5 = 7 - 4.6 = 2.4$
$r_4 = 9 - (0.6 + 1\cdot 6) = 2.4, r_5 = 7 - (0.6 + 1\cdot 8) = 0.4$.
$SAK_{total} = r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_5^2 = (-2.6^2 + (-3.6)^2 + (-0.6)^2 + 4.4^2 + .(2.4)^2 = 45.2$
Vi definerer nu forklaringsgraden $r^2 = 1 - \dfrac{SAK_{residual}}{SAK_{total}}$

Hvis y er uafhængig af x vil $SAK_{residual} \approx SAK_{total}$ og dermed at $r^2 \approx 0$ .
Hvis derimod $y$ er afhængig af $x$ vil regressionslinien have en hældning forskellig fra nul. Det betyder igen at $SAK_{residual} << SAK_{total}$ , og dermed at $r^2 \approx 1$ .
Man siger også, at den fundne model "forklarer " $r^2 \cdot 100\%$ af den "totale variation"

De enkelte SAK-størrelser kan anskueligt ses på figur 7.3.

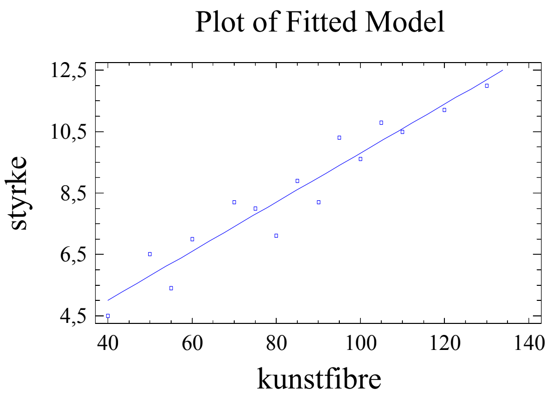



**Figur 7.3.** *SAK - størrelser*

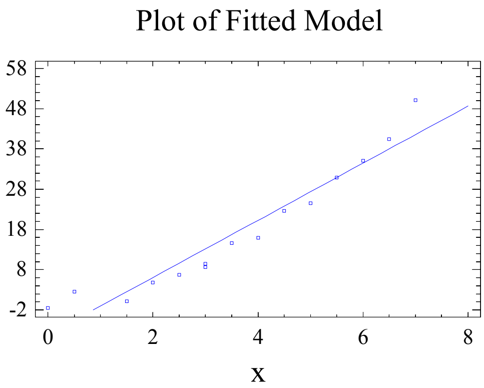
Sædvanligvis finder man, at den fundne model på tilfredsstillende måde beskriver data, hvis forklaringsgraden er på over 70% samtidig med, at tegningen viser, at punkterne fordeler sig tilfældigt omkring den fundne regressionskurve.

At man ikke alene kan stole på forklaringsgraden illustreres ved følgende eksempel.

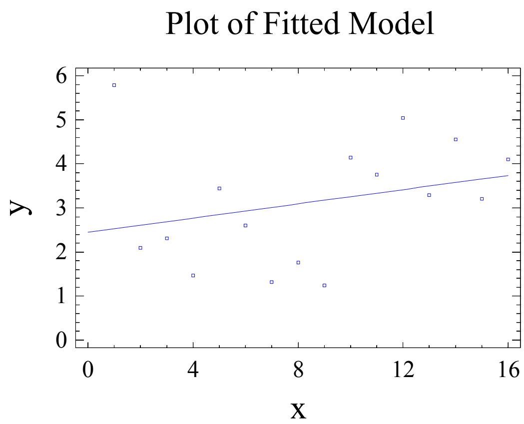
**Eksempel 7.3 .Grafisk vurdering af model.**
De følgende 4 figurer afspejler forskellige muligheder.



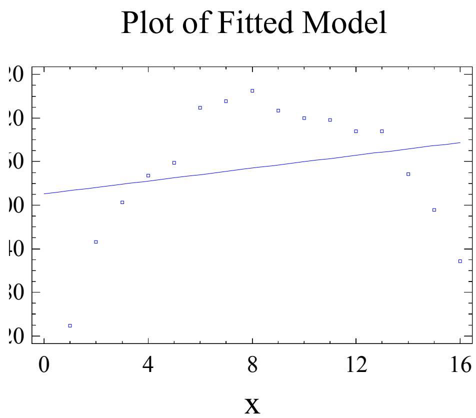

**Figur 7.4a**: $r = 0.959$ $r^2 = 91.9\%$




**Figur 7.4b**: $r = 0.962$ $r^2 = 92.6\%$




**Figur 7.4c**: $r = 0.278$ $r^2 = 7.73\%$




**Figur 7.4d**: $r = 0.229$ $r^2 = 5.24\%$

I figur 7.4a synes den lineære model at kunne beskrive dataene godt, idet punkterne fordeler sig tilfældigt omkring linien, og forklaringsgraden $r^2 = 91.9\%$ er høj.
I figur 7.4b er forklaringsgraden også høj, og punkterne ligger da også tæt ved linien. Imidlertid ligger punkterne ikke tilfældigt omkring linien. Yderpunkterne ligger over og de midterste punkter under linien, så det er næppe rimeligt at anvende en ret linie som model. I stedet kunne man overveje en eksponentialfunktion eller et andengradspolynomium.
I figur 7.4c er der næppe nogen relation mellem *x* og *y*. Er *x* og *y* uafhængige (ingen relation mellem *x* og *y*) vil punkterne fordele sig tilfældigt omkring gennemsnitslinien $y = \bar{y}$, og forklaringsgraden være 0. Vi ser, at regressionslinien er næsten vandret, og forklaringsgraden ringe.

I figur 7.4d er forklaringsgraden også lille, men alligevel må vi antage at der er en sammenhæng mellem x og y. Den er blot ikke lineær, men muligvis en parabel.

◆

**Outliers.** Hvis en enkelt eller to målinger afviger kraftigt fra den almindelige tendens kan det skyldes fejlmålinger. Da sådanne punkter i uheldige tilfælde på grund af et stort bidrag til residualsummen kan få regressionslinien til at dreje er det vigtigt at undersøge på en figur om sådanne punkter findes. Det er dog klart, at man ikke blot kan stryge sådanne "ubehagelige" punkter. Det må kun ske, hvis man er sikker på, at punktet skyldes en fejl af en eller anden art ved målingen.

**Ekstrapolation.** Selv om modellen synes på tilfredsstillende måde at beskrive data, så er det jo faktisk kun sikkert indenfor måleområdet. Man skal være yderst forsigtig med at ekstrapolere, dvs. på basis af modellen for $x$ - værdier udenfor måleområdet beregne hvad $y$ er.

**Årsagssammenhæng.**
Selv om man finder, at der er en sammenhæng mellem x og y, er det ikke sikkert, at der er en årsagssammenhæng.
Der findes en god korrelation mellem antallet af storke i Sønderjylland i 1930-erne og antallet af børnefødsler (de faldt begge i samme takt), men det ene er nok ikke årsagen til det andet.
Man kender det også fra sammenhængen mellem kræft og tobaksrygning, hvor der i mange år var en diskussion om der ene bevirkede det andet, eller om det var en hel tredie faktor, der fik antallet af lungekræft til at stige.

## 7.5 Eksempler på lineær regression regnet med TI89

Da man altid vil foretrække den simplest mulige model, er modellen $y = ax + b$ altid den, man starter med at anvende.
Hvis man ser, at punkterne ikke ligger tilfældigt omkring linien, men dog synes at følge en krum kurve, så må man anvende en anden model.
TI 89 tilbyder en række modeller, bl.a. følgende

(1) LinReg = førstegradspolynomium $y = a + bx$ eller $y = ax + b$

(2) PowerReg = potensfunktionen $y = ax^b$
Funktionen omskrives ud fra logaritmereglerne automatisk til $\ln y = \ln a + b \cdot \ln x$ som er lineær hvis man erstatter y med ln y og x med ln x

(3) ExpReg = eksponentialfunktionen $y = a \cdot b^x$
Funktionen omskrives ud fra logaritmereglerne automatisk til $\ln y = \ln a + x \cdot \ln b$ som er lineær hvis man erstatter y med ln y

(4) lnReg = logaritmefunktionen $y = a + b \cdot \ln(x)$
Funktionen er lineær hvis man erstatter x med ln x

QuadReg = andengradspolynomiet $y = ax^2 + bx + c$

CubicReg = trediegradspolynomiet $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

QuartReg er fjerdegradspolynomiet $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Generelt gælder, at man så vidt mulig foretrækker modeller som (1), (2), (3) og (4), da de kun indeholder 2 parametre a og b, og dermed er de mest stabile (set fra et statistisk synspunkt).
Vi vil i det følgende give eksempler på nogle af disse modeller.

**Eksempel 7.4 (= eksemple 4.1) Førstegradspolynomium**
Tilsætning af en vis mængde kunstfibre forøger et garns trækstyrke. Man har eksperimenteret med forskellige tilsatte mængder kunstfibre x og registreret garnets trækstyrke y ved disse forskellige mængder. Herved fremkom følgende observationsmateriale:

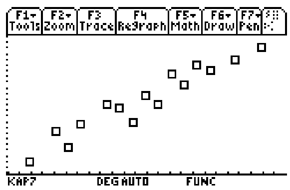
| Mængde $x$ (i gram) af kunstfibre pr kg uld | 40 | 50 | 55 | 60 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 120 | 130 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Trækstyrke : $y$ | 4.5 | 6.5 | 5.4 | 7.0 | 8.2 | 8.0 | 7.1 | 8.9 | 8.2 | 10.3 | 9.6 | 10.8 | 10.5 | 11.2 | 12.0 |

Benyt TI89 til at foretage de ønskede beregninger.

a) Afsæt punkterne i et koordinatsystem og vurder ud fra dette om punkterne med tilnærmelse kunne ligge på en ret linie.
b) Indtegn regressionslinien i ovennævnte koordinatsystem og vurder ud fra figuren om punkterne ligger tilfældigt omkring den rette linie.
c) Find $r^2$ og anvend denne samt svaret i spørgsmål b) til at vurdere om den rette linie giver en rimelig god beskrivelse af de givne data.
d) Opskriv regressionsligningen.
e) Find den til x = 100 svarende værdi $y_{100}$ for y
f) Angiv et "usikkerhedsinterval" hvor den "sande" middelværdi af $y_{100}$ finder sig med 95% sandsynlighed.

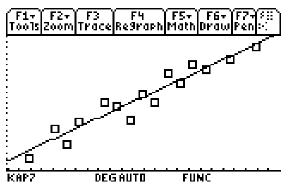
**Løsning:**

a) Tryk på APPS , vælg STAT/LIST , Indtast data i list1 (x-værdier) og list2 (y-værdier)
F2: Plots \ Plot Setup \ Define
Behold Scatter og Box, indsæt list1 og list2 (Vælg VAR LINK og vælg listenavne herfra) \ ENTER, ENTER, F5
Punkterne bliver nu tegnet på lommeregnerens display.




Konklusion: En ret linie synes at kunne være en rimelig god model (punkterne ser ud til med tilnærmelse at kunne ligge på en ret linie)

b) APPS, STAT/LIST, F4: Calc, 3. Regressions, 1:linReg(a+bx), Udfylder lister,
Da vi ønsker at tegne regressionslinien så StoreReqn to: y1(x), ENTER,
En række konstanter fremkommer (se næste spørgsmål)
Linien vises sammen med punkterne.




Konklusion: Tegningen på lommeregnerens display viser, at punkterne fordeler sig tilfældigt omkring linien.

c) Af ovennævnte udskrift fås umiddelbart $r^2$ =0.9193
Da forklaringsgraden er tæt på 1 og punkterne ligger tilfældigt om linien , er den lineære model acceptabel.

d) Af den ovennævnte udskrift ses regressionskoefficienterne a = 1.8087 og b = 0.0799 og dermed er ligningen y = 1.8087+0.0799x
En anden mulighed er at vælge "Y="

e) Opskriv ligningen i HOME (kopierer den eventuelt fra "Y=") og indsæt x = 100.
Resultat $y_{100}$ = 9.7584

f) 95% usikkerhedsinterval for y svarende til x = 100:
F7 \7: LinRegTint\ udfyld menu, herunder sæt Interval=Response og x Value = 100
ENTER ENTER
Resultat y_hat =$y_{100}$ = 9.7584 og C int: [9.37 ; 10.22]

◆

## Eksempel 7.5 Potensmodel

Nedenstående tabel angiver hvor mange minutter en professionel dykker kan opholde sig på en bestemt dybde, før der er en risiko for dykkersyge.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| dybde i meter *x* | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 25 |
| antal minutter *y* | 219 | 147 | 98 | 72 | 56 | 45 | 37 | 29 |

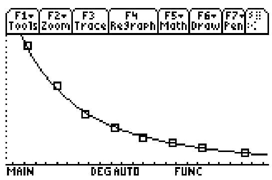
Det formodes, at *y* er en potensfunktion af *x*.

a) Begrund, at formodningen er rimelig
b) Angiv ligningen for den fundne model
c) Hvor længe kan en dykker opholde sig i en dybde på 30 m uden risiko for dykkersyge

**Løsning:**

1) APPS, STAT/LIST, Data indtastes i list1(x- værdier) og list 2(y-værdier)
F4: Calc, 3Regressions, 9:PowerReg, Udfylder lister,
Da vi ønsker at tegne regressionslinien så StoreReqn to: y1(x), ENTER,
Vi ønsker imidlertid punkterne tegnet med, så vi vælger
F2: Plots,,1: Plot Setup,F1: Define, Behold Scatter og Box, indsæt listerne , ENTER, ENTER,F5
Af udskriften fås $r^2$ =0.9979.

På lommeregnerens display ses, at punkterne ligger meget tæt ved grafen.




Da forklaringsgraden samtidig er tæt på 1, så er den lineære model acceptabel.

2) Af udskriften fås $y = 36421.57 \cdot x^{-2.2314}$

3) Formlen kopieres fra "Y=" ned i "Home", og x = 30 indsættes.
y = 18.4 minutter

◆

## Eksempel 7.6 Valg mellem lineær og eksponentiel model

I et forsøg undersøgtes et ventilationsanlægs effektivitet. Målingerne foretoges ved at fylde et lokale med gas og vente til koncentrationen var stabil. Herefter startedes ventilationsanlægget og gaskoncentrationen $C_t$ måltes til forskellige tidspunkter t.

Følgende resultater fandtes:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *t* (min. efter anlæggets start) | 2.67 | 4.59 | 6.75 | 7.67 | 11.34 | 14.34 | 16.25 | 18.25 | 23.09 |
| C [ppm] | 34 | 28 | 26 | 22 | 16 | 14 | 12 | 10 | 8 |

Følgende 2 modeller for funktioner overvejes:

Model 1 (lineært henfald): $C = a + b \cdot t$

Mode12 (eksponentielt henfald): $C = a \cdot e^{b \cdot t}$

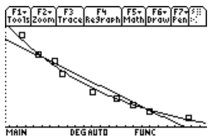
1) Vurder hvilken model der er bedst ved
   a) Tegn punkterne og de to regressionskurver på lommeregnerens display og vælg den af de to modeller du vurderer giver den bedste beskrivelse.
   b) Se på forklaringsgraderne for hver af modellerne
2) Opskriv regressionsligningen for den model du finder bedst, og beregn på basis af den værdi af C, for hvilken t = 12 minutter.

**Løsning:**

1) APPS, STAT/LIST hvorefter data indtastes i list1(t- værdier) og list 2(C-værdier)
   F4: Calc, 3. Regressions, 1:linReg(a+bx), Udfylder lister,
   Da vi ønsker at tegne regressionslinien så StoreReqn to: y1(x), ENTER,

   Af udskriften fås umiddelbart $r^2$ $\underline{\underline{=0.9293}}$
   Da vi også ønsker punkterne tegnet med, vælges
   F2: Plots,,1: Plot Setup,F1: Define, Behold Scatter og Box, indsæt listerne , ENTER, ENTER
   Vi fortsætter nu
   F4: Calc, 3. Regressions, 8:ExpReg, Udfylder lister, StoreReqn to: y2(x), ENTER,
   Vi gentager nu ovenstående, idet vi nu vælger ExpReg og vælger y2(x)

   Af udskriften fås umiddelbart $r^2$ $\underline{\underline{=0.9883}}$
   HOME, Vælg GRAPH (se eventuelt først ved "Y=" at de tre linier og ingen andre er markeret)
   De to kurver og punkterne ses nu på lommeregnerens display (juster eventuelt "WINDOWS")




   Af tegningen ses, at den eksponentielle funktion giver den bedste tilpasning.
   Dette stemmer også overens med at forklaringsgraden her er størst.

2) Ved fra HOME at vælge "Y=" kan man se, at modellen er $C = 39.57 \cdot 0.93^t$ eller
   $C = 39.57 \cdot e^{\ln(0.93) \cdot t} \Leftrightarrow \underline{\underline{C = 39.57 \cdot e^{-0.0726 \cdot t}}}$

   t = 100 : $\underline{\underline{C = 36.80}}$

◆

# Opgaver til kapitel 7

**Opgave 7.1**
Man ønskede på en højere uddannelse at undersøge om der var en sammenhæng mellem de point eleverne fik ved en indledende prøve i matematik, og de point de fik ved den afsluttende prøve i matematik.
Resultaterne var

| Student | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Indledende prøve $x$ | 39 | 43 | 21 | 64 | 57 | 47 | 28 | 75 | 34 | 52 |
| Afsluttende prøve $y$ | 65 | 78 | 52 | 82 | 92 | 89 | 73 | 98 | 56 | 75 |

a) Undersøg om der er rimeligt, at beskrive ovennævnte sammenhæng ved en ret linie $m$.
(Tegn i et koordinatsystem såvel punkterne som linien $m$ samt beregn forklaringsgraden).
Idet det i det følgende antages, at linien $m$ er et rimeligt udtryk for ovennævnte sammenhæng
b) Find en ligning for regressionslinien $m$.
c) Man forventer en positiv korrelation mellem x og y. Udtryk dette i ord, og undersøg om dette er tilfældet.
d) En elev har opnået 50 point ved den indledende prøve. Forudsig hvilket pointtal denne elev , vil få ved den afsluttende prøve.
e) Angiv det usikkerhedsinterval, som den sande middelværdi med 95% sikkerhed ligger indenfor ved den afsluttende prøve, for de elever, som ved den indledende prøve har opnået 50 point.

**Opgave 7.2**
Tabellen viser antallet af heste i Danmark i udvalgte år

| Årstal | 1962 | 1963 | 1964 |
|---|---|---|---|
| Antal heste | 99793 | 80767 | 64082 |

a) Bestem en ligning for regressionslinien
b) Tegn såvel linien som punkterne i et koordinatsystem, og beregn forklaringsgraden
c) Er det fornuftigt at benytte denne model i år 2000?
Det oplyses at antal heste i år 2000 er 17400.

**Opgave 7.3**

Man har undersøgt højden af et stort antal piger og beregnet middelhøjden (i cm) når de er 2 år, når de er 3 år osv. Resultatet fremgår af skemaet:

| Alder | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Højde | 89.2 | 98.3 | 104.9 | 112.0 | 118.1 | 123.4 | 131.3 | 136.4 | 142.5 | 151.1 | 155.4 | 159.8 |

a) Undersøg om der er rimeligt, at beskrive sammenhængen mellem alder og højde ved en ret linie.
b) Angiv i bekræftende fald en ligning for regressionslinien *m*.
Det forudsættes i det følgende, at *m* er et rimeligt udtryk for pigernes middelhøjde.
c) Hvad er den gennemsnitlige vækst i pigernes højde pr. år.
d) Giv et skøn for middelværdien af pigernes højde når de er 14 år.
e) Ville du finde det fornuftigt at benytte linien til at forudsige en 22-årig piges højde?

**Opgave 7.4**

For en kemisk forbindelse har man en teori om, at "middeludbyttet y" (angivet i % enheder) er tilnærmelsesvis bestemt ved $y = 100 - a \cdot b^t$ hvor *t* angiver reaktionstiden.

For at efterprøve rigtigheden udførte man et forsøg med følgende resultater

| t | 6.5 | 8.2 | 11.1 | 13.6 | 16.4 | 18.5 | 20.7 | 23.0 | 25.8 | 28.5 | 33.3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 39.5 | 64.7 | 65.6 | 72.9 | 88.0 | 92.7 | 92.5 | 95.9 | 96.3 | 98.3 | 99.2 |

a) Foretag en vurdering af, om modellen kan antages at gælde. (Vink: Omskriv ligningen til $100 - y = a \cdot b^t$ , og dan en tabel med 100 - y-værdierne)
Under forudsætning af at modellen gælder, skal man
b) opskrive ligningen for regressionskurven
c) finde middeludbyttet svarende til $t = 20$.

**Opgave 7.5**

Aktiviteten af radioaktive stoffer antages at være eksponentielt aftagende.
For et bestemt radioaktivt stof har man målt radioaktiviteten som en funktion af tiden

| tid $t$ (timer) | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| aktivitet $y$ (becquerel) | 4350 | 3440 | 2640 | 2130 | 1660 | 1310 | 1020 | 810 |

a) Foretag en vurdering af, om modellen kan antages at være en eksponentielt aftagende funktion af *t*, dvs. $y = a \cdot b^t$
b) Bestem en forskrift for denne funktion
c) Bestem halveringstiden for aktiviteten.
d) Hvor lang tid går der fra den første måling til middelaktiviteten er nede på 500 becqerel.

**Opgave 7.6**.
Den effekt P (kWatt) som en bil må yde for at overvinde luftmodstanden ved en given hastighed v (km/t) er målt i en vindtunnel. Man fandt følgende sammenhæng mellem v og P.

| v | 10 | 30 | 60 | 90 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|
| P | 0.01 | 0.28 | 2.10 | 7.35 | 17.15 |

Det formodes, at P er en potensfunktion af v.
a) Begrund, at formodningen er rimelig
b) Angiv ligningen for den fundne model
c) Find den effekt der skal ydes ved en hastighed på 100 km.

**Opgave 7.7**
Ved et forsøg blev en luftart adiabatisk (dvs. under samme temperatur) komprimeret til forskellige forudvalgte rumfang v, idet de tilsvarende værdier af trykket *P* måltes. Man formodede på forhånd, at der gælder regressionsmodellen $P = a \cdot \mathrm{v}^{-b}$ .
Ved forsøget fandtes følgende resultater:

| v $cm^3$ | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 | 350 | 400 | 450 | 500 | 550 | 600 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P $kp/cm^2$ | 29.58 | 15.42 | 11.67 | 7.48 | 7.29 | 3.90 | 3.63 | 1.69 | 2.95 | 2.16 | 2.11 |

a) Begrund, at formodningen er rimelig
b) Angiv ligningen for den fundne model
c) Beregn hvor mange % trykket vil stige hvis rumfanget bliver halveret.

**Opgave 7.8**
Man har for en bestemt type tov målt sammenhængen mellem tovets diameter og tovets brudstyrke. Man fandt følgende resultater:

| diameter (i mm) | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Brudstyrke (i kg) | 200 | 350 | 550 | 700 | 995 | 1500 | 2200 | 3150 | 3950 | 4650 | 5950 | 7050 | 8550 | 9950 |

Man forventer, at brudstyrken $y$ som funktion af diameteren $x$ med tilnærmelse kan skrives ved en funktion af formen $y = b \cdot x^a$
a) Vurder ud fra tegning og forklaringsgrad om den nævnte model er acceptabel.
I det følgende antages, at modellen kan anvendes.
b) Find ligningen for regressionskurven.
c) Bestem ud fra den fundne ligning, hvor mange gange større brudstyrken bliver ( i middel), hvis tovværkets diameter fordobles.

**Opgave 7.9**

Man mener der er en sammenhæng mellem en bilists alder og antallet af alvorlige færdselsulykker, der skyldes for stor hastighed. Man har fra USA, hvor aldersgrænsen for erhvervelse af kørekort er 16 år, følgende data indsamlet gennem en periode:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alder $x$ | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 22 | 24 | 27 | 32 | 42 | 52 | 57 | 62 | 72 |
| Antal fart-relaterede ulykker $y$ | 37 | 32 | 33 | 34 | 33 | 31 | 28 | 26 | 23 | 16 | 13 | 10 | 9 | 7 |

Det fremgår klart, at antallet af ulykker falder med alderen.

a) Giv en vurdering af, om modellen : $y = a + bx$ (antal ulykker aftager lineært med alderen) på rimelig måde kan beskrive denne sammenhæng

b) En trafikekspert mener, at modellen $y = a \cdot e^{b \cdot x}$ (antal ulykker aftager eksponentielt med alderen) giver en bedre beskrivelse af modellen. Har vedkommende ret?

c) Bestem ligningen for den model, du finder bedst.

d) Angiv ud fra ovennævnte ligning det forventede antal fart-relaterede ulykker som 50 - årige i middel vil forårsage i den givne periode.

**Opgave 7.10**

Trykfaldet i et vandrør afhænger af vandstrømmen gennem røret.
I en model for støbejern med radius 100 mm er trykfaldet $y$ en funktion af vandstrømmen $x$
Tabellen viser sammenhørende værdier af vandstrømmen og trykfaldet.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Vandstrøm $x$ (liter pr sekund) | 2 | 3 | 5 | 6 | 10 | 15 |
| Trykfald $y$ (cm vandsøjle pr m) | 0.11 | 0.25 | 0.71 | 1.03 | 2.93 | 6.70 |

a) Undersøg hvilken model af de 4 mest anvendte, der bedst beskriver trykfaldet som en funktion af vandstrømmen. (Vink: se på tegning og forklaringsgrad)

b) Benyt den valgte model til at bestemme middelværdien af trykfaldet i røret, når vandstrømmen gennem det er 20 liter pr sekund.

# 8 Grænseværdi og kontinuitet

## 8.1. Grænseværdi

Hvis en funktion $f(x)$ er vilkårligt tæt på et reelt tal $a$ blot $x$ er tilstrækkeligt tæt på $x_0$ siger vi, at $f(x)$ har grænseværdien $a$ for $x$ gående mod $x_0$ [1]

Vi skriver da

$f(x) \to a$ for $x \to x_0$ eller $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ (læses limes af f(x) for x gående mod $x_0$)

.

Eksempelvis skriver vi, at $x^2 + 1 \to 5$ for $x \to 2$ eller $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$

Grænseovergang mod $\infty$ og $-\infty$ anvendes også, f.eks. $\frac{1}{x} \to 0$ for $x \to \infty$ og $\frac{1}{x^4} \to \infty$ for $x \to 0$

Endvidere forekommer ensidige grænseovergange, f.eks. $\frac{1}{x} \to \infty$ for $x \to 0+$ ($x$ går mod 0 fra højre).

### Sætning 8.1. Regning med grænseværdier

Hvis $f(x) \to a$ for $x \to x_0$ og $g(x) \to b$ for $x \to x_0$ så vil for $x \to x_0$

$$f(x) + g(x) \to a + b, \quad f(x) - g(x) \to a - b \quad f(x) \cdot g(x) \to a \cdot b, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{a}{b} \ (b \neq 0)$$

Sætningen anføres uden bevis.

### Eksempel 8.1. Grænseovergang.

Undersøg $\dfrac{4x^2 + 3x - 2}{-2x^2 + 8}$ for $x \to 0$ og $x \to \infty$

**Løsning:**

$$\frac{4x^2 + 3x - 2}{-2x^2 + 8} \to \frac{4 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 2}{-2 \cdot 0^2 + 8} = -\frac{1}{4} \quad \text{for } x \to 0,$$

$$\frac{4x^2 + 3x - 2}{-2x^2 + 8} = \frac{4 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}}{-2 + \frac{8}{x^2}} \to \frac{4 + 0 + 0}{-2 + 0} = -2 \quad \text{for } x \to \infty$$

**Ti89:** F3:3 limit((4x^2+3x-2)/(-2x^2+8),x,∞) Resultat -2 ◆

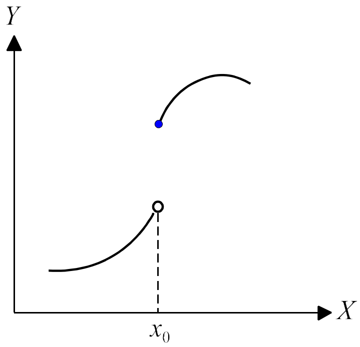
[1] For bedre at kunne undersøge vanskeligere tilfælde eller bevise sætninger om grænseværdi, må man erstatte ordene "vilkårligt tæt" og "tilstrækkeligt tæt" med nedenstående mere præcise definition:
f(x) har grænseværdien a i punktet $x_0$ hvis der til ethvert interval J omkring a findes et "udprikket" interval I omkring $x_0$, så det for alle x i I gælder, at $f(x) \in J$ (et "udprikket" interval omkring $x_0$ er et interval omkring $x_0$ som ikke indeholder $x_0$)

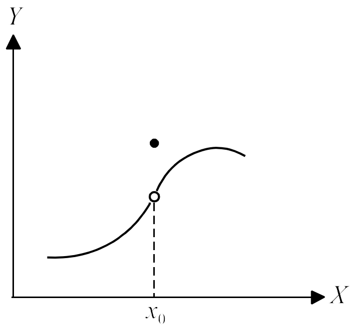
## 8.2 Kontinuitet

**Definition af kontinuitet.** *Lad $f$ være en funktion, der er defineret i et åbent interval indeholdende $x_0$. Hvis $f(x) \to f(x_0)$ for $x \to x_0$ siges $f$ at være kontinuert i $x_0$.*

Hvis definitionsmængden for $f$ er et lukket interval $[a\,;\,b]$, siger $f$ at være kontinuert i endepunktet $a$, blot der gælder $f(x) \to f(a)$ for $x \to a+$ .

Tilsvarende defineres kontinuitet i intervalendepunktet $b$. Hvis $f$ er kontinuert i hele sin definitionsmængde, siger vi kort, at $f$ er kontinuert.
Intuitivt kan man ofte forestille sig kontinuerte funktioner som funktioner, hvis graf er "ubrudt".
På nedenstående figur er vist nogle ikke-kontinuerte funktioners grafer.




**Regning med kontinuerte funktioner**

Ved "sædvanlig regning" $\left(f+g, f-g, f\cdot g, \dfrac{f}{g}, f^{-1}, f(g(x))\right)$ med kontinuerte funktioner fås atter kontinuerte funktioner, og da alle de funktioner vi vil omtale i det følgende er kontinuerte i deres definitionsmængde, vil også enhver funktion, der ved "sædvanlig regning" kan dannes ud fra disse funktioner, blive kontinuert i sin definitionsmængde.

Eksempelvis vil funktionen $f(x) = \dfrac{5x^2+3x-1}{x-1}$ være kontinuert for $x > 1$ og for $x < 1$.

## Opgaver til kapitel 8

**8.1** Bestem $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-3x^2+3x}{2x^2-3x}$ og $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-3x^2+3x}{2x^2-3x}$

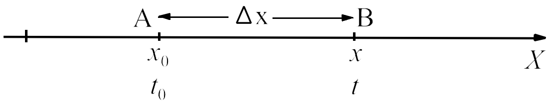
**8.2.** Bestem $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

# 9 Differentiation

## 9.1 Indledning

Differentialregning har mange anvendelser. Et typisk eksempel er i kinematikken (bevægelseslære), hvor man beskæftiger sig med begreber som hastighed og acceleration.

Lad os som eksempel betragte et legeme L, der bevæger sig langs en ret linie.
Indføres en x-akse (se figuren) er legemets position er bestemt ved dens afstand fra begyndelsespunktet O.




Lad legemet L til tidspunktet $t_0$ være i punktet A med $x$-værdien $x_0$ og til et senere tidspunkt $t$ være i punktet B med x-værdien $x$. Den gennemsnitlige hastighed hvormed L bevæger sig fra A til B er da $v_g = \dfrac{x - x_0}{t - t_0} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, hvor $\Delta x = x - x_0$ er det stykke L har bevæget sig i tidsrummet $\Delta t = t - t_0$.
For at bestemme den hastighed som legemet har i punktet A, så må man gøre intervallet $\Delta t$ så lille som muligt. Man føres altså til at betragte brøken $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ for $\Delta t$ gående mod 0.

### Eksempel 9.1 Beregning af hastighed i et punkt.

Lad os antage, at legemet L bevæger sig langs $x$ - aksen således, at dens position til tiden $t$ (målt i sekunder) er bestemt ved $x = \dfrac{1}{4}t^2 + 1$ (målt i meter).
Der gælder da, at til tiden $t$ =0 er L i punktet O med $x$ =1, til $t$ = 1 er L i A med $x$ = 1,25 og til t = 2 er L i B med $x$ =2.

Vi ser umiddelbart at hastigheden forøges som legemet bevæger sig fra O til A til B (legemet accelererer).
Problemet er nu at bestemme hastigheden i A.

Som en første tilnærmelse har vi, at i tidsrummet $\Delta t$ =1s, har legemet bevæget sig fra A til B, dvs. $\Delta x$ = 2- 1.25 = 0.75 m.
Hastigheden i punktet A er derfor med tilnærmelse $\mathrm{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{0.75}{1} = 0.75\ \mathrm{m/s}$
Forkorter vi tidsrummet til 0.5 s må tilnærmelsen blive bedre
Vi har nu, at til tiden $t$ = 1.5 er $x = \dfrac{1}{4} \cdot 1.5^2 + 1 = 0.3125\ \mathrm{m}$

Hastigheden i punktet A er derfor nu med tilnærmelse $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{0.3125}{0.5} = 0.625$ m/s

Vi kunne nu gøre tidsrummet $\Delta t$ endnu mindre og derved forbedre nøjagtigheden.

For at få et geometrisk overblik over problemet tegnes nu $x$ som funktion af tiden t i et $t$ - $x$ koordinatsystem (se figur 9.1) .

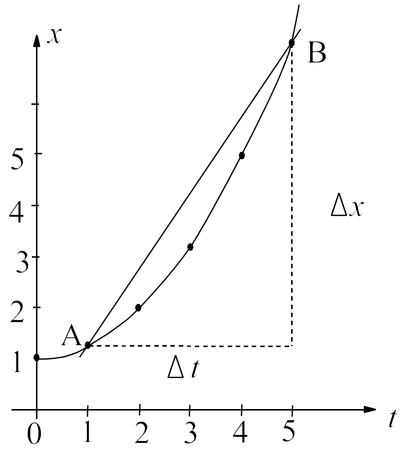



**Fig 9.1.** *Hastighed i A*

Til tiden $t = 1$ er $x = 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ , svarende til punktet A på figuren.

Idet B antages at have koordinaterne $(t, x)$ bliver hastigheden i A med tilnærmelse

$v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x - \frac{5}{4}}{t-1}$ , hvilket er det samme som hældningskoefficienten for linien gennem punkterne A og B.

For at finde hastigheden v i punktet A er vi derfor nu interesseret i at finde grænseværdien $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ .

Vi har : $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x - \frac{5}{4}}{t-1} = \dfrac{\frac{1}{4}t^2 + 1 - \frac{5}{4}}{t-1} = \dfrac{\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}}{t-1} = \dfrac{1}{4}\dfrac{t^2-1}{t-1} = \dfrac{1}{4}\dfrac{(t+1)(t-1)}{t-1} = \dfrac{1}{4}(t+1)$

Lader vi nu $\Delta t \to 0$ , dvs. $t \to 1$ vil $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{1}{4}(t+1) \to \dfrac{1}{2}$

Vi har følgelig fundet, at legemet L's hastighed v i punktet A er v = 0,5 m/s.

Matematisk skriver man, at $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \to \dfrac{dx}{dt}$ for $\Delta t \to 0$.
$dx$ og $dt$ kaldes differentialer og kan ofte i praksis ved anvendelser opfattes som "uendelig små" tilvækster, i dette tilfælde af henholdsvis vejlængde og tid.
$\dfrac{dx}{dt}$ kaldes derfor en differentialkvotient (kvotient mellem differentialer)

Geometrisk drejer linien gennem A og B over i en ret linie med hældningskoefficienten 0.5.
Denne linie kaldes **tangenten** til kurven med røringspunkt A = (1, $\frac{5}{4}$ ).

## 9.2 Differentialkvotient.

Da "kinematik" ikke er det eneste man kan anvende differentiation til, og der er tradition for, at $x$-aksen er den vandrette akse, vil vi i det følgende i stedet betragte problemet i et $x$ - $y$ koordinatsystem.
Med udgangspunkt i eksempel 9.1 vil vi nu se på det generelle tilfælde.

Lad $y = f(x)$ være en funktion defineret i et interval $I$, lad $x_0 \in I$, og lad $\alpha$ være et reelt tal.
Giver vi $x$ en tilvækst $\Delta x$ ud fra $x_0$ får y en tilvækst $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (se figur 9.2)
Ved **differenskvotienten** forstås brøken $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

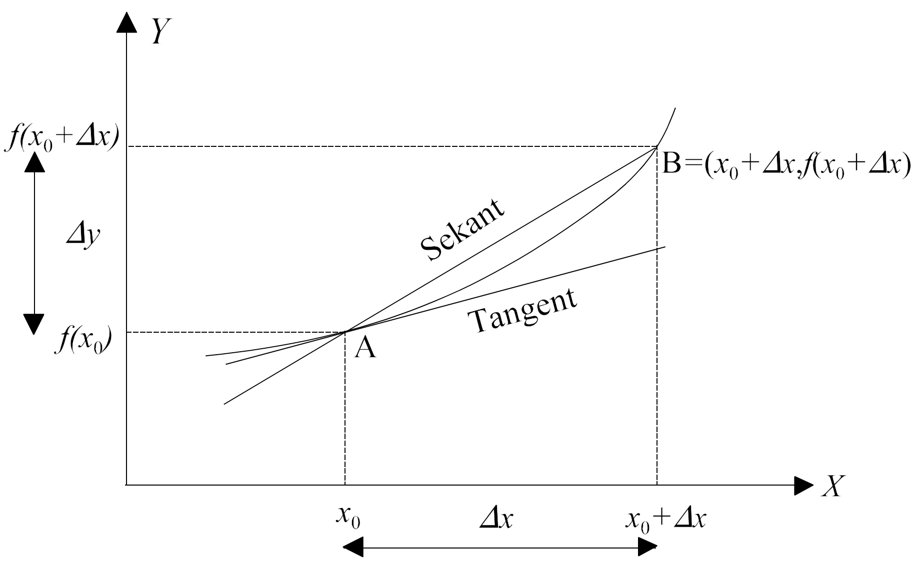



**Fig. 9.2** *Sekanten har hældningen* $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

**Definition af differentialkvotient og tangent.** *Funktionen $y = f(x)$ siges at være differentiabel i $x_0$ med differentialkvotienten $f'(x_0)$, hvis* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0)$ *for* $\Delta x \to 0$.

*Differentialkvotienten $f'(x_0)$ betegnes også* $\frac{d\,y}{d\,x}$ *,idet man så forudsætter $x_0$.*

*Linien gennem $(x_0, f(x_0))$ med hældningskoefficienten $f'(x_0)$ kaldes en tangent til grafen for f.*

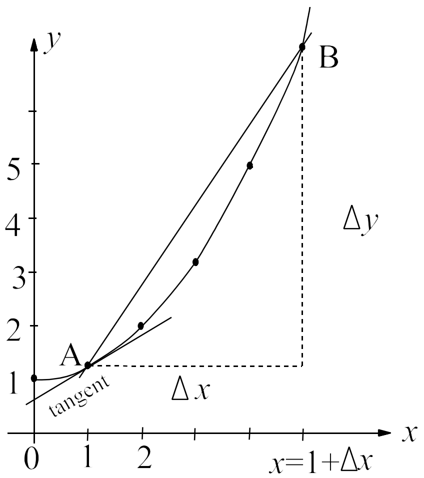
*Tangenten har ifølge sætning 2.2 ligningen* $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$

Er $x_0$ et endepunkt af intervallet *I,* foretages kun en ensidig grænseovergang.
Funktionen $f$ siges at være differentiabel i intervallet *I*, hvis den er differentiabel i ethvert punkt af *I*.

Vi vil i det følgende eksempel anskueliggøre de centrale definitioner ved at igen at se på problemet i eksempel 9.1

**Eksempel 9.2. (fortsættelse af eksempel 9.1)**

Vi betragter følgelig funktionen $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ , og er interesseret i at finde "væksthastigheden" $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ til $x = 1$.




Vi fandt i eksempel 9.1, at $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$

Vi har følgelig fundet, at "væksthastigheden i punktet A er $\frac{1}{2}$.

Matematisk siges, at vi i punktet 1 har differentieret funktionen $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$, og fundet at differentialkvotienten $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$, eller $f'(1) = \frac{1}{2}$.
Geometrisk drejer linien gennem A og B over i en ret linie med hældningskoefficienten 0.5.
Denne linie kaldes **tangenten** til kurven med røringspunkt A = (1, $\frac{5}{4}$).

Ligningen for tangenten bliver $y - \frac{5}{4} = \frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

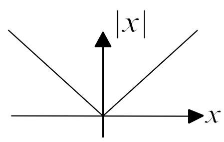
**Sætning 9.1 En differentiabel funktion er kontinuert.**

**Bevis:** Lad der være givet, at $y = f(x)$ er differentiabel i $x_0$, dvs. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$

Vi har nu $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0}(\Delta x) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$

Da $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ fås $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0$ $\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$, dvs. f er kontinuert i $x_0$.

Den omvendte sætning gælder ikke, idet man godt kan have en kontinuert funktion, som i enkelte punkter ikke er differentiabel. Dette er tilfældet, hvis grafen har et "knæk". Et eksempel er funktionen $f(x) = |x|$, hvis graf (se figuren) har et knæk for $x = 0$, og derfor ikke er differentiabel i dette punkt.




## 9.3 Regneregler for differentialkvotienter

Det ses umiddelbart ud fra definitionen, at differentialkvotienten for
1) $f(x) = ax + b$ er $f'(x) = a$,
(da tangenten til en ret linie jo er funktionen selv med hældning $a$)
2) $f(x) = a$ er $f'(x) = 0$ (da grafen er en vandret linie med hældningen 0)

I mere komplicerede tilfælde må man imidlertid benytte følgende regneregler

**SÆTNING 9.2 Differentiation af sum, differens, produkt og kvotient af differentiable funktioner.**

1) *Lad $f$ og $g$ være to funktioner, der er differentiable i $x_0$ og lad $k$ være en konstant.*
*Så er $f+g, f-g, k \cdot f$ og $f \cdot g$ differentiable i $x_0$ og der gælder følgende regneregler:*
1a) Sumregel: $(f+g)' = f' + g'$, $(f-g)' = f' - g'$,
1b) Produktregel: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
1c) Konstant faktor sættes udenfor: $(k \cdot f)' = k \cdot f'$
1d) Brøkregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$ *forudsat* $g(x_0) \neq 0$

**Bevis:**
Lad $u = f(x)$ og $v = g(x)$ Vi giver nu $x$ tilvæksten $\Delta x$ til $x_0 + \Delta x$. Herved får $u$ og v tilvæksten $\Delta$ u og $\Delta$ v. (se figur 6.1).

Da u og v er differentiable i $x_0$ er $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(x_0)$ og $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = g'(x_0)$

1) Lad $y = f(x) + g(x) = u + v$
   y får nu en tilvækst $y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$
   Indsættes $y = u + v$ fås $u + v + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v \Leftrightarrow \Delta y = \Delta u + \Delta v$
   Ved division med $\Delta x$ fås $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$.
   Heraf fås $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0)$
2) Bevises på samme måde som under punkt 1)
3) Lad $y = f(x) \cdot g(x) = u \cdot v$
   y får nu en tilvækst $y + \Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) = u \cdot v + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$
   Indsættes $y = u \cdot v$ fås $u \cdot v + \Delta y = u \cdot v + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v \Leftrightarrow \Delta y = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$
   Ved division med $\Delta x$ fås $\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$.
   Da $u = f(x)$ er differentiabel er den også kontinuert, dvs. $\Delta u \to 0$ for $\Delta x \to 0$
   Heraf fås $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} u\frac{\Delta v}{\Delta x} + 0 \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} = g(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

4) Lad $y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u}{v}$ ( $v \neq 0$ ).
   Da v er differentiabel, er den også kontinuert, dvs. v + $\Delta$ v er også $\neq 0$ for tilstrækkelig små værdier af $|\Delta x|$.
   y får nu en tilvækst $y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} = \frac{v \cdot (u + \Delta u)}{v \cdot (v + \Delta v)} = \frac{v \cdot u + v \cdot \Delta u)}{v \cdot (v + \Delta v)}$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v \cdot (u + \Delta u) - u \cdot (v + \Delta v)}{v \cdot (v + \Delta v)} = \frac{v \cdot u + v \cdot \Delta u) - v \cdot u - u \cdot \Delta v}{v \cdot (v + \Delta v)}$$

   Da $v = g(x)$ er differentiabel er den også kontinuert, dvs. $\Delta v \to 0$ for $\Delta x \to 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \cdot (v + \Delta v)} \to \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2} \text{ for } \Delta x \to 0$$

◆

## Differentiation af sammensat funktion

Der gælder nu følgende sætning

### Sætning 9.3 Differentiation af en sammensat funktion

*Lad $y = f(u)$ og $u = g(x)$ være to funktioner, hvor g er differentiabel i $x_0$ og $f$ er differentiabel i $u_0 = g(x_0)$. Så er den sammensatte funktion $f(g(x))$ differentiabel i $x_0$ og*

$$\left(f(g(x_0))\right)' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \text{ eller kort } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

("Man husker den ofte som "Ydre funktion" $f$ differentieret gange "indre funktion" $g$ differentieret).

**Bevis skitse**

Vi har $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$

Da $u$ er kontinuert, vil $\Delta u \to 0$ for $\Delta x \to 0$

Heraf fås , dvs. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ◆

**Sætning 9.4 Differentiation af omvendt funktion:**

*Lad* $y = f(x)$ *være en funktion, der er monoton og differentiabel i et interval I. Hvis* $x_0 \in I$ og $f(x_0) \neq 0$ *, så er den omvendte funktion* $f^{-1}$ *differentiabel i* $y_0 = f(x_0)$ *, og der gælder*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ eller kort: } \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

**Anskueligt bevisskitse**

Da $\quad y = ax + b \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$ $\quad$ ses, at den omvendte funktion til $f(x) = ax + b$ har differentialkvotienten $\frac{1}{a}$

(dette kan også let ses geometrisk ved spejling i vinkelhalveringslinien $y = x$).
Heraf følger, at tangenten til grafen for en funktion i et punkt, og tangenten til det tilsvarende punkt for den omvendte funktion har reciprokke hældningskoefficienter. ◆

## 9.4. Differentiation af standardfunktionerne.

Ved en standardfunktion forstås de i de foregående paragraffer omtalte funktioner potens-, eksponential- logaritme- og trigonometriske funktioner.
Følgende sætning samler reglerne for, hvorledes disse funktioner differentieres.

### Sætning 9.4. Differentiation af standardfunktoner.

| $f(x)$ | $x^a$ | $e^{ax}$ | $\ln(ax)$ | $\sin(ax)$ | $\cos(ax)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $a \cdot x^{a-1}$ | $a \cdot e^{ax}$ | $\frac{1}{x}$ | $a \cdot \cos(ax)$ | $-a \cdot \sin(ax)$ |

$e^{ax}$, $\sin(ax)$ og $\cos(ax)$ *er differentiable for alle værdier af konstanten a og den variable x.*
$x^a$ *og* $\ln(ax)$ *er differentiable hvor de er definerede.*

**Bevis**:
Ifølge definitionen på differentialkvotient for en funktion $y = f(x)$ er denne differentiabel i et punkt $x$, med differentialkvotienten $f'(x)$ ,hvis differenskvotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \to f'(x)$ *for* $\Delta x \to 0$

Af hensyn til det følgende indses, at hvis $f(x) = a \cdot x$ er $f'(x) = a$ , da grafen for f er en ret linie med hældning $a$

1) $\left(\ln(ax)\right)' = \frac{1}{x}$

Først vises, at $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$

Tangenten til grafen for $e^x$ i punktet $(x, y) = (0,1)$ har hældningen 1.

Da ln er den omvendte funktion af $e^x$ har grafen til y = ln(x) i punktet $(x, y) = (1,0)$ også hældningen 1.
Vi ved derfor at y = ln(x) er differentiabel i punktet x = 1 med differentialkvotienten 1

Ifølge definitionen på differentialkvotient ved vi nu, at $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(1+\Delta x) - \ln 1}{\Delta x} \to 1$ for $\Delta x \to 0$

Da ln 1 = 0 fås $\frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} \to 1$ for $\Delta x \to 0$

Af hensyn til det følgende foretages en "omdøbning", idet vi sætter $h = \Delta x$ så vi har $\frac{\ln(1+h)}{h} \to 1$ for $h \to 0$

Vi danner nu differenskvotienten for funktionen $y = \ln x$ ud fra et fast valgt punkt x.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

Da $h = \frac{\Delta x}{x} \to 0$ for $\Delta x \to 0$ har vi, at $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(1+h)}{h} \to \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$ *for* $\Delta x \to 0$

Vi har dermed bevist at $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$

Da $\ln(ax) = \ln(u)$ hvor $u = ax$ kan vi benytte sætning 9.3 om differentiation af en sammensat funktion.

$$\left(\ln(ax)\right)' = \left(\ln u\right)' \cdot (au)' = \frac{1}{u} \cdot a = \frac{1'}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$$

2) $f(x) = e^{ax}$ $\quad f'(x) = a \cdot e^{ax}$

Først vises, at $\left(e^x\right)' = e^x$

Vi har $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$

Ifølge sætning 9.4 om differentiation af omvendt funktion gælder da $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$

Vi har dermed bevist, at $\left(e^x\right)' = e^x$

Da $e^{ax} = e^u$ hvor $u = ax$ kan vi benytte sætning 9.3 om differentiation af en sammensat funktion.

$$\left(e^{ax}\right)' = \left(e^u\right)' \cdot (au)' = e^u \cdot a = e^{ax} \cdot a$$

Specielt haves $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$ da $f(x) = a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \cdot \ln a}$

3) $f(x) = x^a$ $\quad f'(x) = a \cdot x^{a-1}$

Vi har $f(x) = x^a = \left(e^{\ln x}\right)^a = e^{a \cdot \ln x} = e^u$, hvor $u = a \cdot \ln x$

Vi differentiere den sammensatte funktion $y = e^u$, hvor $u = a \cdot \ln x$ (se evt. sætning 9.1)

Vi har $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot a \cdot \frac{1}{x} = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = a \cdot x^{a-1}$

4) $\left(\sin(ax)\right)' = a \cdot \cos(ax)$ .

Vi skal altså vise, at $\frac{\sin(ax + \Delta x) - \sin(axx)}{\Delta x} \to a \cdot \cos(ax)$ for $\Delta x \to 0$

Et formelt bevis er ret omfattende, da det kræver kendskab til en række trigonometriske formler.
Vi vil derfor nøjes med at benytte TI89 til at foretage grænseovergangen. For kortheds skyld omdøbes $\Delta x$ til $z$.
F3\limit((sin(a*x+z)-sin(a*x))/z,z,0) Resultat: $a \cdot \cos(a \cdot x)$

5) $\left(\cos(ax)\right)' = -a \cdot \sin(ax)$

Vi skal vise, at $\frac{\cos(ax + \Delta x) - \cos(ax)x}{\Delta x} \to -a \cdot \sin x$ for $\Delta x \to 0$

Vi finder: F3\limit((cos(a*x+z)-cos(a*x))/z,z,0) Resultat: - a cos(a x)

I følge sætning 9.2 er alle funktioner, der fremkommer som en sum, differens, produkt eller division af standardfunktioner differentiabel i de intervaller hvor de er defineret. Det samme gælder ifølge sætning 9.3 for funktioner der er sammensat af standardfunktioner.

### Eksempel 9.3 Differentialkvotient (uden brug af hjælpemidler)

Ti 89 må kun bruges til kontrol

1) Lad $f(x) = 3x^5 - x^2 + 1$ .

a) Find $f'(x)$

b) Beregn hældningskoefficienten for tangenten $l$ til grafen for $f$ med røringspunkt P = $(1, f(1)$

c) Opskriv ligningen for tangenten $l$

2). Lad $g(x) = x \cdot \ln x$

a) Find $g'(x)$

b) Beregn hældningskoefficienten for tangenten $l$ til grafen for $f$ med røringspunkt P = $(1, f(1))$

c) Opskriv ligningen for tangenten $l$

3) Lad $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$ . Find $\frac{dy}{dx}$

4) Lad $h(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ Find $h'(0)$

**Løsning:**

1) a) $f'(x) = 15x^4 - 2x,$

b) $f'(1) = 15 - 2 = \underline{\underline{13}}$

c) $f(1) = 3 - 1 + 1 = 3$ $l$: $y - 3 = 13(x-1) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 13x - 10}}$

2) a) $g'(x) = x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x = \underline{\underline{1 + \ln x}}$

b) $g'(1) = 1 + \ln(1) = \underline{\underline{1}}$

c) $g(1) = 1 \cdot \ln(1) = 0 \quad l: y - 0 = 1 \cdot (x-1) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = x - 1}}$

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \cos(2x) = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)}}$

4) $h'(x) = \frac{(e^x+1) \cdot e^x - (e^x - 1) \cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} \quad \underline{\underline{h'(0) = \frac{1}{2}}}$

◆

### Eksempel 9.4. Differentiation ved benyttelse af TI89

1) Lad $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$ , $x > 1$ Find $f'(x)$

2) Lad $f(x) = \frac{x-3}{x^2-1}$ , $x > 1$

a) Find $f'(2)$

b) Opskriv ligningen for tangenten $l$ til grafen for $f$ med røringspunkt P = $(2, f(2)$.

3) Lad $f(x) = \frac{1}{3}\cos^3 x$ Find $f'(x)$

4) $f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$ , $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ Find $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

**Løsning:**

**Ti89**: Tryk på "2nd *d* "(står over 8- tallet) og indtast funktionen.

1) *d*(ln((x-1)/(x+1)),x) $f'(x) = \underline{\underline{\frac{2}{(x-1)(x+1)}}}$

Uden lommeregner $f'(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{(x+1) \cdot 1 - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \underline{\underline{\frac{2}{x^2-1}}}$

2) a) *d*((x-3)/(x^2-1),x)| x=2 $f'(2) = \underline{\underline{7/9}}$

Uden lommeregner $f'(x) = \frac{(x^2-1) \cdot 1 - 2x \cdot (x-3)}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2+6x-1}{(x^2-1)^2}$ $\quad f'(2) = \frac{-2^2+6 \cdot 2 - 1}{(2^2-1)^2} = \frac{7}{9}$

b) (x-3)/(x^2-1)| x=2 $f(2)$ = -1/3

c) $y - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{9}(x-2) \Leftrightarrow y = \frac{7}{9}x - \frac{14}{9} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow \underline{\underline{y = \frac{7}{9}x - \frac{17}{9}}}$

3) *d*(1/3*(cos(x))^3,x) $f'(x) = \underline{\underline{-\sin(x) \cdot (\cos(x))^2}}$

Uden lommeregner $f(x) = \frac{1}{3}\cos^3 x = \frac{1}{3}(\cos x)^3$ opfattes som en sammensat funktion $y = \frac{1}{3}u^3$ hvor $u = \cos x$

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot u^2(-\sin x) = \underline{\underline{-\sin x \cdot \cos^2 x}}$

4) $d((1+\sin(x))/(1-\sin(x)),x)\big|x=\pi/4$ $\qquad f'(x)=\underline{\underline{6\cdot\sqrt{2}+8}}$

◆

## 9.5. Højere afledede, acceleration

### Eksempel 9.5 (gentagelse af eksempel 9.1)

Lad et legeme L bevæge sig langs x-aksen således, at dens position til tiden $t$ (målt i sekunder) er bestemt ved $x=\frac{1}{4}t^2+1$ (målt i meter).

Til tiden $t$ =0 er L i punktet A med $x$ =1, til $t$ = 1 er L i B med $x$ = 1.25 og til $t$ = 2 er L i C med $x$ = 2.

Vi ser umiddelbart at hastigheden forøges som legemet bevæger sig fra A til B til C (legemet accelererer). Idet $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\cdot t$ fås, at hastigheden v i de tre punkter er henholdsvis v(0) = 0 m/s, v(1) = 0,5 m/s og v(2) = 1 m/s.

Et udtryk for den gennemsnitlige hastighedsforøgelse, der er sket ved at L bevæger sig fra B til C er $a_{gen}=\frac{v(2)-v(1)}{2-1}=0{,}5\text{ m/sec}^2$

For at bestemme den hastighedsforøgelse, der er sket i punktet B, kan vi beregne $a_g=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v-v(1)}{t-1}$, hvor tidsrummet $\Delta t$ er meget lille.

Matematisk betyder det, at vi skal finde $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \text{v}}{\Delta t}=\text{v}'(1)$ .

Da $\frac{d\text{v}}{dt}=\frac{1}{2}$ er accelerationen a = 0.5 m/sec$^2$ i punktet B.

Iøvrigt ses, at accelerationen i dette tilfælde er konstant 0.5 for alle punkter.

Konklusionen er, at man finder accelerationen i et punkt ved at differentiere $x$(t) 2 gange.

◆

### Afledet funktion

Som det ses af eksempel 9.3 kan det ofte være nyttigt, at opfatte $f'(x)$ som en funktion, som man kan differentiere igen.

Man siger, at $f'(x)$ er den "første afledede", og at $f''(x)$ (den afledede af den afledede) er den "anden afledede".

Sådan kan man fortsætte med at finde "tredje afledede" osv.

**Eksempel 9.6.Anden afledede**

1) Find den anden afledede af funktionen $f(x) = 4 \cdot x^3 - 7 \cdot x^2$

2) Find differentialkvotienten $f''(2)$

**Løsning:**

1) $f'(x) = 12 \cdot x^2 - 14 \cdot x$ , $f''(x) = \underline{\underline{24x - 14}}$

2) $f''(2) = 24 \cdot 2 - 14 = \underline{\underline{34}}$

TI89: d(4*x^3-7*x^2,x,2) eller d( d(4*x^3-7*x^2,x),x)

◆

# Opgaver til kapitel 9

**9.1** (uden hjælpemidler)
Find differentialkvotienten for følgende funktioner:

a) $f(x) = 2x^2 + 3$

b) $g(x) = 2 \cdot e^{3x}$

c) $h(x) = 2 \cdot \sin(5x) + \cos(3x)$

d) $k(x) = 3 \cdot \ln(5x)$

e) $l(x) = 3x + \sqrt{x}$

**9.2** (uden hjælpemidler)
Find differentialkvotienten for følgende funktioner:

a) $f(x) = x \cdot \sin(2x)$

b) $g(x) = 5x \cdot \ln(8x)$

c) $h(x) = 5 + 3x \cdot e^{2x}$

**9.3.**(uden hjælpemidler)
Find differentialkvotienten for

a) $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2x + 4$

b) $g(x) = \sin x - x \cos x$

**9.4** (uden hjælpemidler)

a) Lad $f(x) = (2x-1)^3$ Find $f'(3)$

b) Lad $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$. Find $\dfrac{dy}{dx}$

**9.5.** (uden hjælpemidler)
Find differentialkvotienten af funktionerne

a) $f(x) = \ln(1-x)$ b) $g(x) = x^2 e^{2x}$ c) $h(x) = e^{\ln x}$

**9.6.**

a) Lad $y = \dfrac{x+3}{(x-2)^2}$ Find $\dfrac{dy}{dx}$

b) Lad $y(x) = \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$ Find $y'(2)$

**9.7.** (uden hjælpemidler)
Find en ligning for tangenten til parablen $y = x^2 - 4x + 7$ i punktet P = (1,4).

**9.8** (uden hjælpemidler)

Lad $f(x) = x^{2.7}$

Find en ligning for tangenten til grafen i punktet P = $(1, f(1))$.

**9.9.** Lad $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x - 1}$

a) Find ligningerne for de to tangenter til grafen for $f$, som er parallel med linien med ligningen $y = -2x + 4$.
b) Find afstanden mellem de to tangenter.

**9.10** Lad $f(x) = 2e^{-x} + x$

Find den spidse vinkel mellem de to tangenter til grafen for $f$, der har røringspunkter i henholdsvis $(0, f(0))$ og $(1, f(1))$.

**9.11** (uden hjælpemidler)

En partikel bevæger sig på en ret linie. Partiklen position s (meter) til tidspunktet $t$ (sekunder) er giver ved $s(t) = 4\sqrt{t}$

a) Bestem partiklens hastighed til tidspunktet $t = 4$.
b) Bestem det tidspunkt, hvor partiklens hastighed er 2.
c) Find partiklens acceleration til $t = 4$

# 10. Funktioners monotoniforhold, ekstrema og asymptoter.

## 10.1 Monotoniforhold, ekstrema

Som det fremgår af afsnit 5.3, så forstår vi ved et monotoniinterval et interval hvor funktionen enten er voksende i hele intervallet eller aftagende i hele intervallet.
Betragter vi grafen i figur 10.1, så er funktionen voksende for $x \geq 2$ og aftagende for $x \leq 0$
Det forekommer umiddelbart indlysende at i et interval hvor funktionen er voksende, da må tangenternes hældningskoefficienter være større end 0 (evt. 0 i enkelte punkter). Da hældningskoefficienterne fås ved at differentiere, så må differentialkvotienterne være større end 0 (evt. 0 i enkelte punkter.
Det omvendte gælder også, hvilket fremgår af følgende sætning som anføres uden bevis:

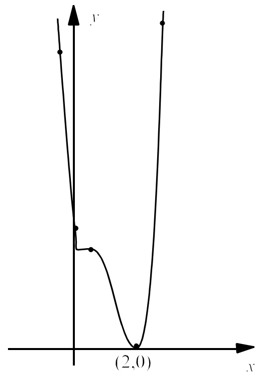


**Fig 10.1** Monotoniinterval

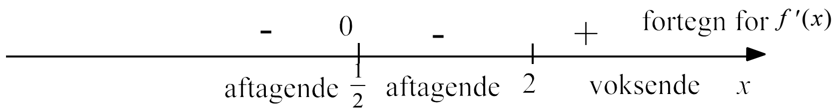
### Sætning 10.1 Monotonisætning

Lad f være differentiabel i et interval *I*. Da gælder
$f'(x) > 0$ for alle $x \in I \Rightarrow f$ er voksende i $I$
$f'(x) < 0$ for alle $x \in I \Rightarrow f$ er aftagende i $I$
$f'(x) = 0$ for alle $x \in I \Rightarrow f$ er konstant i $I$

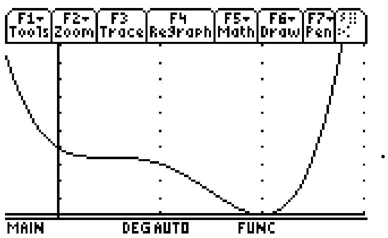
### Eksempel 10.1 .Monotoniinterval

Find monotoniintervallerne for funktionen $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 4x + 4$

**Løsning:**
Vi differentierer funktionen og opløser differentialkvotienten i faktorer.
F2: factor(d(2x^4-8x^ 3+9x^2-4x+4,x)) Resultat: $f'(x) = 2(x-2)(2x-1)^2$
Heraf ses, at




$f'(x) \geq 0$ for $x \geq 2$ , dvs. funktionen er voksende for $x \geq 2$
$f'(x) \leq 0$ for $x \leq 2$ , dvs. funktionen er aftagende for $x \leq 2$
Dette er illustreret på nedenstående tegning af funktionen.



**Lokale og globale ekstrema**
En funktion har et **lokalt maksimum** i et indre punkt $x_0$, hvis $f(x_0) \geq f(x)$ for alle værdier af x i en omegn af $x_0$
En funktion har et (globalt) **maksimum eller størsteværdi** i $x_0$, hvis $f(x_0) \geq f(x)$ for alle værdier af x i hele definitionsmængden
Tilsvarende defineres lokalt minimum og mindsteværdi.

Karakteristisk for differentiable funktioner er, at lokale ekstrema kan findes blandt de punkter, hvor der er vandret tangent, dvs. hvor $f'(x) = 0$

**Eksempel 10.2** (eksempel 10.1 fortsat)
Af faktoropløsningen ses, at $f'(x) = 0$ for $x = 2$ og $x = \frac{1}{2}$
Af tallinien for fortegnet for $f'(x)$ ses, at der er minimum for x = 2.
Dette kan naturligvis også ses af figuren.

## 10.2.Asymptoter

**En vandret asymptote** er en vandret linie med ligningen $y = b$ som grafen "nærmer sig til", når $x$ går mod enten + ∞ eller - ∞ .

**En lodret asymptote** er en lodret linie med ligningen $x = a$ hvis $f(x) \to \infty$ eller $f(x) \to \infty$ for $x \to a^+$ eller $x \to a^-$
(læses: $x$ går mod $a$ fra højre eller $x$ går mod $a$ fra venstre)

**Eksempel 10.3 Asymptoter**
Funktionen $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$ har den vandrette asymptote y = 3, da $f(x) \to 3$ for $x \to \infty$
(ses umiddelbart, da $\frac{1}{x-2}$ nærmer sig til 0 når $x$ bliver stor).
Analogt ses, at $f(x) \to 3$ for $x \to -\infty$
se figur 10.2.

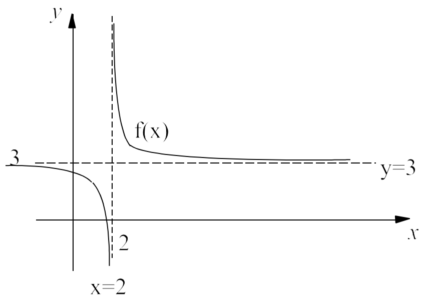



**Fig. 10.2**. *Asymptoter*

f(x) har den lodrette asymptote x = 2, da
$f(x) \to \infty$ for $x \to 2^+$
(ses umiddelbart, da $\frac{1}{x-2}$ bliver meget stor, når x nærmer sig til 2 fra højre)
Analogt ses, at $f(x) \to -\infty$ for $x \to 2^-$ se figur 10.2.

## 10.3. Funktionsundersøgelse

Vi vil i næste afsnit se på nogle anvendelser af differentialregning. Ved disse anvendelser opstilles en funktion, hvor det sædvanligvis er specielle forhold ved funktionen, der er af særlig interesse. Eksempelvis er man måske kun interesseret i at finde en størsteværdi for funktionen.

Når man skal undersøge en funktions egenskaber er det naturligvis en udmærket idé at få lommeregneren til at tegne dens graf. Derefter kan man finde tangenter, maksimum osv. direkte uden at benytte differentialregning.
Når det alligevel ikke er nok, skyldes det bl.a. følgende

1) Funktionen kan kun tegne grafen i et begrænset "vindue". Det nytter ikke noget at man tegner funktionen omkring begyndelsespunktet, hvis de interessante punkter ligger omkring punktet (100,200). Derfor må man ved beregning først finde ud af hvor de interessante punkter er, og overbevise alle om, at man ikke har overset noget væsentligt.
2) Ofte vil man ved anvendelser gerne have fundet et mere generelt udtryk, dvs. der vil indgå nogle konstanter a, b osv. i udtrykket. Man kan ikke tegne funktionen i sådanne tilfælde og må derfor igen benytte eksempelvis differentialregning ved løsningen.

I de følgende eksempler gennemgås hvorledes man mest hensigtsmæssigt kan løse nogle af de oftest forekomne problemer.

### Eksempel 10.4. Funktionsundersøgelse

Givet funktionen $f(x) = 4\frac{x^2+x}{1+x^2}$

1) Angiv funktionens definitionsmængde
2) Find funktionens nulpunkter.
3) Find de punkter hvor funktionen har vandret tangent (kaldet de stationære punkter)
4) Skitser grafen for funktionen i et område omfattende nulpunkter og kritiske punkter
5) Find funktionens størsteværdi og mindsteværdi (forudsat de eksisterer)
6) Angiv funktionens værdimængde

**Løsning:**

1) Da nævneren ikke kan blive 0 er definitionsmængden D = $\underline{\underline{]-\infty;\infty[}}$ (alle reelle tal **R**).

2) **Nulpunkter**: Løse ligningen $f(x) = 0$. (lig grafens skæringspunkter med x - aksen.)

TI-89: solve(x^2+x=0,x) Nulpunkter: $\underline{\underline{x = 0 \vee x = -1}}$

Manuelt: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0 \vee x = -1}}$

3) **Stationære punkter**

$f'(x)=0$ solve(d(4*(x^2+x)/(x^2+1),x)=0,x) Resultat: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}=\begin{cases}2.4142\\-0.4142\end{cases}$

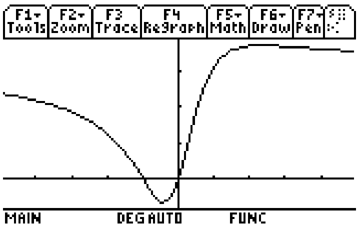
$f(1+\sqrt{2})$ :4*(x^2+x)/(1+x^2)$\mid x=1+\sqrt{\ }(2)$ Resultat $f(1+\sqrt{2})=2+2\sqrt{2}\approx 4.83$

$f(1-\sqrt{2})$: 4*(x^2+x)/(1+x^2) $\mid x=1-\sqrt{\ }(2)$ Resultat $f(1-\sqrt{2})=2-2\sqrt{2}\approx -0.83$

Stationære punktet ( $\underline{\underline{\left(1+\sqrt{2},2+2\sqrt{2}\right)}}=(2.41,4.83)$ og $\underline{\underline{\left(1-\sqrt{2},2-2\sqrt{2}\right)}}=(-0.41,-0.83)$

4) Da vi nu kender placeringen af de "interessante " punkter tegnes grafen i eksempelvis området $-5\le x\le 5 \wedge -1\le y\le 5$

TI89: Vælg: Y= , indtast funktionen, Graph, Windows, og ændrer vinduet som ovenfor.
Det resulterer i følgende tegning.




5) Af denne ses, at funktionen har et lokalt minimum - 0.83 og et lokalt maksimum 4.83.

Imidlertid kan vi ikke af tegningen se om det er globalt, da man eksempelvis kunne tænke sig at f(-1000) > 4.83. Vi må derfor se på hvad der sker når x går mod $\infty$ og $-\infty$ , dvs. se om der er vandrette asymptoter.
Ti 89: F3\limit(4*(x^2+x)/(x^2+1),x, $\infty$ ) Resultat 4
F3\limit(4*(x^2+x)/(x^2+1),x,- $\infty$ ) Resultat 4
Den vandrette linie $y=4$ er vandret asymptote

Da vi har set, at funktionen har den vandrette asymptote 4 og det lokale maksimum er større end 4 må størsteværdien være $\underline{\underline{2+2\sqrt{2}}}$ som antages for $x=1+\sqrt{2}$

Analogt må mindsteværdien være $\underline{\underline{2-2\sqrt{2}}}$ som antages for $x=1-\sqrt{2}$

6) Af spørgsmål 4 fremgår, at værdimængden er $\left\{y \middle| 2-2\sqrt{2}\le y\le 2+2\sqrt{2}\right\}$

**Kontrol**: Man kunne på tegningen ved tryk på F5 og valg af "Minimum" og efter at have sat grænserne "passende" have fundet en tilnærmet værdi for minimum, og tilsvarende for maksimum..

Medens i de foregående funktionsundersøgelser har stor glæde af en tegning, er dette ikke muligt, hvis der i problemet indgår en ukendt parameter.
I sådanne tilfælde er man nødt til at løse problemet ved beregninger bl.a. ved differentiation.
Det følgende eksempel viser dette.

### Eksempel 10.5. Funktionsundersøgelse med parameter

Givet funktionen $f(x) = 4\dfrac{x^2 + kx}{1+x^2}$, $k > 0$

1) Angiv funktionens definitionsmængde
2) Find de værdier af x, for hvilke funktionen har sin størsteværdi og sin mindsteværdi (forudsat de eksisterer)

**Løsning:**

Eksempel 10.1 er samme funktion for $k = 1$. Da $k$'s værdi ikke kendes, kan funktionens graf ikke tegnes. hvilket gør at man i stedet må foretage beregninger.

1) Da nævneren ikke kan blive 0 er definitionsmængden D = $\underline{\underline{]-\infty;\infty[}}$ (alle reelle tal **R**).

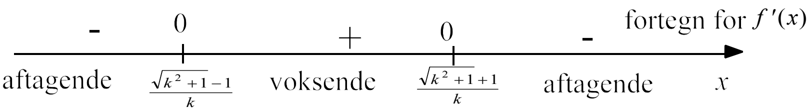
2) **Størsteværdi og/eller mindsteværdi**:

Først findes de punkter, hvor $f'(x) = 0$ (vandret tangent).

a) $f'(x)$: d(4*(x^2+k*x)/(x^2+1),x) Resultat: $f'(x) = \dfrac{-4\cdot\left(k\cdot x^2 - 2x - k\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$

$f'(x) = 0$ solve(d(4*(x^2+k*x)/(x^2+1),x)=0,x) Resultat: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{k^2+1} \pm 1}{k}$

Vi tegner nu en monotonilinie




Vi finder fortegnene ved eksempelvis at indse, at tælleren i $f'(x)$ bestemmer fortegnet (nævneren er altid positiv) . Da tælleren er et andengradspolynomium er grafen en parabel med grenene nedad. Derved fortegnene

Man kunne også se det ved at indse, at hvis $x$ er meget stor må $f'(x) < 0$. Tilsvarende hvis x er stor, negativ.

Indsættes endelig $\dfrac{\sqrt{k^2+1}}{k}$ fås (prøv selv) et resultat der er positivt.

Vi har følgelig, at

funktionens mindsteværdi antages i $\underline{\underline{x = \dfrac{\sqrt{k^2+1}-1}{k}}}$ og størsteværdi i $\underline{\underline{x = \dfrac{\sqrt{k^2+1}+1}{k}}}$

### Eksempel 10.6. Asymptoter, lokale ekstrema

Givet funktionen $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{3x - 6}$

1) Angiv funktionens definitionsmængde
2) Find eventuelle vandrette og lodrette asymptoter
3) Find ved beregning funktionens nulpunkter
4) Find funktionens lokale maksima og minima

**Løsning:**

1) D = $\{x | 3x - 6 \neq 0\} = \underline{\underline{\{x \neq 2\}}}$

2) TI 89: F3\limit((x^2-1)/(3*x-1),x,2,1) Resultat: $\infty$ dvs. $f(x) \to \infty$ for $x \to 2+$

TI 89: F3\limit((x^2-1)/(3*x-1),x,2,-1) Resultat: $-\infty$ dvs. $f(x) \to -\infty$ for $x \to 2-$

Heraf ses, at x = 2 er lodret asymptote

TI 89: F3\limit((x^2-1)/(3*x-1),x, $\infty$ ) Resultat: $\infty$ dvs. $f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$

TI 89: F3\limit((x^2-1)/(3*x-1),x,- $\infty$ ) Resultat: $-\infty$ dvs. $f(x) \to -\infty$ for $x \to -\infty$

Da funktionen ikke går mod en bestemt grænseværdi er der ingen vandret asymptote

3) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1 \vee x = -1}}$

4) For at finde lokale ekstrema vil vi finde differentialkvotienten.
Vi differentierer derfor.

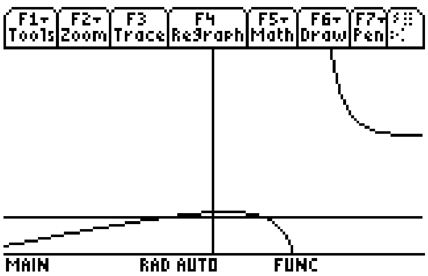
$f'(x)$: TI89: *d*((x^2-1)/(3*x-1),x) Resultat: $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{3(x-2)^2}$

Vi søger nu punkter der har vandret tangent:

$f'(x) = 0$: TI89: solve(*d*((x^2-1)/(3*x-1),x=0,x) Resultat: $x = 2 \pm \sqrt{3} = \begin{cases} 3.732 \\ 0.268 \end{cases}$

Vi kender nu de kritiske punkter, og kan tegne grafen i TI89
Vælg: Y= , indtast (x^2-1)/3*x-6) ENTER

Husk at justere vinduet, så alle de væsentlige punkter kommer med.

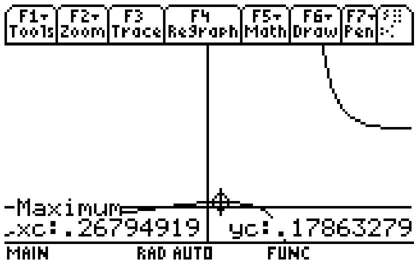


Vi kan nu se, at funktionen

har et lokalt maksimum for $x = 2-\sqrt{3}$ , $\quad f(2-\sqrt{3}) = \dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx 0.1786$

og lokalt minimum for $x = 2+\sqrt{3}$ , $\quad f(2+\sqrt{3}) = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx 2.488$

Vælges på tegningen F5:Maksimum og passende grænser fås




hvor man igen kan se det samme.

## Opgaver til kapitel 10

**10.1.** En funktion *f* er bestemt ved $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$,

a) Angiv funktionens definitionsmængde.
b) Find ved anvendelse af differentialregning funktionens stationære punkter.
c) Skitser grafen i et område, som viser funktionens karakteristiske egenskaber
d) Find størsteværdi og mindsteværdi for funktionen.

**10.2.** En funktion *f* er givet ved $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4}{x^2 + 1}$.

a) Angiv funktionens definitionsmængde.
b) Find ved anvendelse af differentialregning funktionens stationære punkter.
c) Skitser grafen i et område, som viser funktionens karakteristiske egenskaber
d) Angiv funktionens værdimængde

**10.3** En funktion er givet ved $f(x) = \dfrac{100x^2 - 100x - 200}{2x - 6}$, $x < 3$

a) Angiv funktionens nulpunkter
b) Find ved anvendelse af differentialregning funktionens stationære punkter.
c) Skitser grafen i et område, som viser funktionens karakteristiske egenskaber
d) Angiv funktionens værdimængde .

**10.4.** Find ved anvendelse af differentialregning største- og mindsteværdi for funktionen $f(x) = x\sqrt{1-x}$, $-1 \le x \le 1$,

**10.5.** Lad $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$, $0 \le x \le 2\pi$

a) Skitser grafen på lommeregneren, og bestem koordinaterne til det globale minimum med 2 decimaler
b) Funktionen ønsket omskrevet til formen $f(x) = a\sin(bx + c)$

   Find eksempelvis ved passende aflæsning på grafen værdierne for a, b og c med 2 decimaler
c) Kontroller regningerne ved at tegne begge grafer på lommeregneren.

**10.6** Find for $f(x) = \sin^2 x + \cos x$, $0 \le x \le 2\pi$

a) Nulpunkter
b) Find ved anvendelse af differentialregning funktionens stationære punkter.
c) Skitsér funktionen

**10.7** Lad $f(x) = x \cdot \ln(x) + 2 \cdot e^{-x}$ $0 < x \le 2$

Skitser funktionen ved hjælp af lommeregneren og bestem værdimængden for funktionen.

# 11. Nogle anvendelser af differentialregning

## 11.1.Optimering

Man er ofte interesseret i at finde den bedste (optimale) løsning, der samtidig opfylder nogle bestemte krav. Det kan eksempelvis være, at finde den billigste løsning, den proces, der giver det største udbytte osv. Sådanne problemer kaldes optimeringsproblemer.
Vi har allerede behandlet et sådant problem i eksempel 6.4, hvor vi skulle finde hvilken pris der gav den største omsætning. Vi kunne løse problemet uden differentialregning, da den fremkomne funktion blev et andengradspolynomium.
Følgende to eksempler er nok et mere typisk eksempel på den slags problemer.
Fremgangsmåden vil derfor blive grundigt belyst.

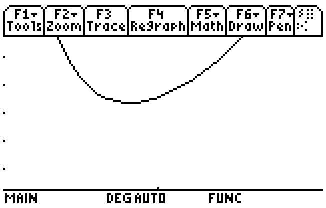
### Eksempel 11.1 Optimering

En cylindrisk beholder, der skal indeholde ætsende kemikalier, ønskes udformet, så overfladen bliver så lille som muligt, da overfladebehandlingen er dyr. Beholderen, som ikke behøver noget låg, skal have rumfanget 2 m$^3$. Find højde $h$ og radius $r$ i cylinderen.

**Løsning:**

1) Først opskrives en formel for det man ønsker at optimere (her arealet A af cylinderens overflade), udtrykt ved de variable man finder nødvendigt for at skrive formlen op.
   Arealet A af cylinderens overflade (bund + side) : $A = \pi r^2 + 2\pi r h$.
2) Da vi kun kan arbejde med en funktion af 1 variabel og ikke 2 , må vi finde en relation mellem de to variable $r$ og $h$
   Vi skal derfor have en yderligere oplysning, og her har vi fået den oplysning, at rumfanget skal være 2.
   Idet cylinderens rumfang er $V = \pi r^2 h$ ,har vi derfor, at $2 = \pi r^2 h$
   Vi kan nu finde den ønskede relation mellem $r$ og $h$.
   $2 = \pi r^2 h \Leftrightarrow h = \dfrac{2}{\pi r^2}$
3) Ved indsættelse i udtrykket for $A$ fås $A = \pi r^2 + 2\pi r \dfrac{2}{\pi r^2} = \pi r^2 + \dfrac{4}{r}$ ,hvor $r > 0$.
   Vi har nu den ønskede funktion A(r) af 1 variabel $r$, som vi skal finde minimum for.
   Dette sker ved differentialregning evt. suppleret ved, at man tegner grafen.
4) For overblikkets skyld kaldes variablen for x, og vi søger mindsteværdi for funktionen
   $f(x) = \pi x^2 + 4 \cdot x^{-1}, \quad x > 0$
   $f'(x) = 0$: TI89: solve($d$( $\pi$ *x^2+4*x^(-1),x)=0,x)    Resultat $x = 0.8603$
   Der er altså kun en værdi hvor tangenten er vandret
   Vi finder nu overfladen for denne værdi.
   TI89: $\pi$ *x^2+4*x^(-1)| x=0.8603    Resultat: 6.9755

Vi kender nu de kritiske punkter og kan tegne grafen i et passende vindue, eksempelvis $0.1 \le x \le 2 \wedge 3 \le y \le 10$




Vi får en parabellignende graf med grenene opad, dvs. (da der kun er en værdi hvor tangenten er vandret) så er det virkelig et globalt minimumspunkt.
Vi har altså, at arealet blive mindst for $\underline{\underline{r = 0.8603}}$

Den tilsvarende $h$ - værdi for højden i cylinderen bliver nu

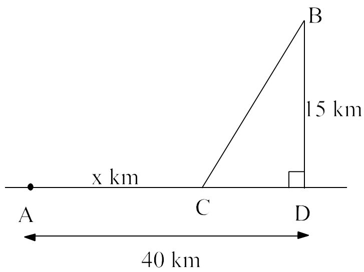
$h = \dfrac{2}{\pi r^2} = \dfrac{2}{\pi \cdot 0.8603} = \underline{\underline{0.8603}}$, dvs. radius og højde bliver ens.

Ønsker man at "kontrollere" regningerne så vælg på tegningen
F5 \Minimum . Man får (x, y) = (0.8603, 6.9747) Ok.

### Eksempel 11.2. Optimering med parameter

En rørledning påtænkes ført fra en boreplatform B til et raffinaderi A beliggende ved kysten. B's afstand fra kysten er 15 km og afstanden AD er 40 km.(se figuren)
Man ønsker ar vide, hvor på kysten (i punktet C) man skal føre ledningen i land, hvis det er $k \ge 1$ gange dyrere pr. km at bygge en undersøisk ledning, end det er at bygge den på land.

a) Idet afstanden fra A til C kaldes $x$ skal man udtrykke de samlede udgifter z som en funktion af $x$ (og $k$).
b) Find den værdi af x, som gør udgifterne mindst, hvis det er dobbelt så dyrt pr. km at bygge undersøisk end over land.
c) Da man er usikker på, hvor stor prisforskel der er mellem pris på land og under havet, skal man generelt udtrykt ved k finde den værdi af x, der gør udgifterne mindst.




**Løsning:**

a) Kalder man længden af BC for $y$ er den samlede længde af ledningen $x + y$ km.
Det er klart, at var k = 1 (samme pris) er x =0, da det så ville være billigst at bygge rørledningen direkte fra B til A, og jo større k er jo tættere ved D vil punktet C ligge.

Antages at prisen for at bygge 1 km ledning på land er 1 prisenhed (f.eks. 1 prisenhed =100000 kr). I så fald er prisen for at bygge 1 km undersøisk ledning $k$ (prisenheder)
Den samlede pris er derfor $z = x + k \cdot y$ (prisenheder).

Vi skal nu finde en sammenhæng mellem $x$ og $y$, og hertil anvendes Pythagoras på den retvinklede trekant BCD

$$y^2 = 15^2 + (40-x)^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{15^2 + (40-x)^2}$$

Ved indsættelse i udtrykket for $z$ fås $\underline{\underline{z = x + k\sqrt{225 + (40-x)^2}}}$

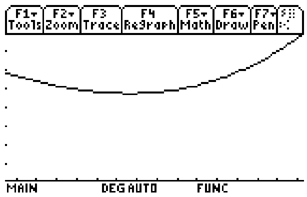
b) Vi sætter nu k = 2 og får $z = x + 2\sqrt{225 + (40-x)^2}$

Vandret tangent fås for de værdier af $x$, for hvilke $\dfrac{dz}{dx} = 0$

TI89: solve(*d*(x+2*√ (225-(40-x)^29,x)=0,x)

Resultat: $x = -5\left(\sqrt{3} - 8\right) = 40 - 5\sqrt{3} = 31.34$ km

Da dette er den eneste værdi i intervallet $0 \le x \le 40$ hvor der er vandret tangent, må det ud fra hele problemstillingen være den værdi hvor prisen er mindst.
Alternativt kunne man tegne grafen for funktion i et relevant vindue.




Da grafen bliver en parabellignende figur med grenene opad ses, at udgifterne bliver mindst, hvis ledningen placeres $\underline{\underline{x = 31.34 \text{ km}}}$ fra A

c) Vi finder igen de værdier af x for hvilke $\dfrac{dz}{dx} = 0$.

TI89: solve(*d*(x+k*√ (225-(40-x)^29,x)=0,x)

Resultat: $x = \dfrac{5\left(8\sqrt{k^2-1}+3\right)}{\sqrt{k^2-1}}$ or $x = \dfrac{5\left(8\sqrt{k^2-1}-3\right)}{\sqrt{k^2-1}}$ eller $x = 40 \pm \dfrac{15}{\sqrt{k^2-1}}$

Da $0 \le x \le 40$ er $x = 40 - \dfrac{15}{\sqrt{k^2-1}}$

Da dette er den eneste værdi i intervallet $0 \le x \le 40$ hvor der er vandret tangent, og man ud fra problemstillingen kan se der må være en mindsteværdi, så må $\underline{\underline{x = 40 - \dfrac{15}{\sqrt{k^2-1}}}}$ være den værdi der gør prisen mindst.

$$\underline{\underline{x = 40 - \frac{15}{\sqrt{k^2-1}}}}.$$

# 11.2.Kinematik

## 11.2.1. Indledning

I forbindelse med indføringen af differentialkvotient så vi i kapitel 9 på et legeme der bevægede sig retlinet langs en x-akse. Legemets position til tiden t sekunder var bestemt ved $x(t)=\frac{1}{4}t^2+1$.

Vi fandt da, at legemets hastighed til tiden $t$ er $\mathrm{v}=x'(t)=\frac{1}{2}t$ og at legemets acceleration er $x''(t)=\frac{1}{2}$ .

**Det frie fald**

Kastes en sten ned fra en høj bygning med en hastighed på $v_0$, så vil den strækning som stenen tilbagelægger til tiden $t$ sekunder være $s=\frac{1}{2}g\cdot t^2+\mathrm{v}_0 t$ meter,
hvor tyngdeaccelerationen g = 9.81m/s$^2$
Ved differentiation ses, at stenens hastighed til tiden t er $\mathrm{v}=g\cdot t+\mathrm{v}_0$ og dens acceleration g.

**Eksempel 11.3** **Frit fald**

En sten falder til tiden t = 0 fra en 30 meter højt tårn. I startøjeblikket er dens hastighed 0 m/s. Find stenens hastighed når den når jorden.

**Løsning:**

Af faldloven $s=\frac{1}{2}g\cdot t^2+\mathrm{v}_0 t$ fås $30=\frac{1}{2}g\cdot t^2 \Leftrightarrow t=\sqrt{\frac{60}{9.81}}=2.47\text{ s}$

Af $\mathrm{v}=g\cdot t+\mathrm{v}_0$ fås nu $\mathrm{v}=9.81\cdot 2.47=\underline{\underline{24.26\text{ m/s}}}$

◆

## 11.2.2. Jævn retlinet bevægelse

Vi har i afsnit 4.5 betragtet parameterfremstillingen for en linie.

En ret linie i planen gennem $P_0=(x_0,y_0)$ med retningsvektoren $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ har parameterfremstillingen $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. Opfattes parameteren $t$ som tiden, kan parameterfremstillingen opfattes som en beskrivelse af en partikel $P$'s bevægelse.

### Eksempel 11.4 Jævn retlinet bevægelse

Lad to biler A og B bevæge sig med en jævn retlinet bevægelse bestemt ved parameterfremstillingerne A: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og B: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ , hvor t er tiden i sekunder og vejlængden måles i meter.

a) Bestem de to bilers fart
b) Vil de to bilers banekurver skære hinanden?.
c) Vil de to biler støde sammen?

**Løsning:**

a) Bil A har farten $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ og B har farten $\sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$

b) Da de to retningsvektorer $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ikke er parallelle, må de to banekurver skære hinanden.

c) Hvis de støder sammen skal der findes et tidspunkt, hvor de er i samme punkt. Da $x = 1 + 3t = 0 + 4t \Leftrightarrow t = 1$ og $y = 2 + 4t = 1 - t \Leftrightarrow 5t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{5}$, ses, at dette ikke er muligt, dvs. de støder ikke sammen. ◆

Vi vil nu i det næste afsnit betragte parameterfremstillinger, hvor banekurverne ikke er rette linier, og hvor hastigheden ikke er konstant.

### 11.2.3. Ikke retlinet bevægelse.

Lad punkterne på en kurve $k$ være givet ved parameterfremstillingen
$k$: $(x, y) = \left(f(t), g(t)\right)$, $t$ et vilkårligt reelt tal.

### Differentiabilitet, tangent.

Hvis koordinatfunktionerne $f(t)$ og $g(t)$ er differentiable siges kurven at være differentiabel.

Vektoren $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$ kaldes en **tangentvektor** til grafen.

Hvis $t$ opfattes som tiden kaldes tangentvektoren $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$ også for **hastighedsvektoren** til tiden $t$, længden $|\vec{v}(t)|$ af tangentvektoren kaldes **farten**, og $\vec{a}(t) = \mathrm{v}'(t)$ kaldes **accelerationsvektoren**.

## Eksempel 11.5. Jævn cirkelbevægelse

Lad en kurve $k$ være givet ved parameterfremstillingen
$k$: (x,y) =( 2 cos t , 2 sin t), $0 \le t \le 2\pi$ hvor t er tiden

a) Beregn tangentvektor for $t = \frac{\pi}{3}$

b) Idet $t$ opfattes som tiden skal man beregne farten og accelerationsvektoren til tiden $t = \frac{\pi}{3}$

c) Skitser på en tegning kurven $k$, tangentvektor og accelerationsvektor, og kommenter deres størrelse og retning.

**Løsning:**

a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$, $\vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}}}$

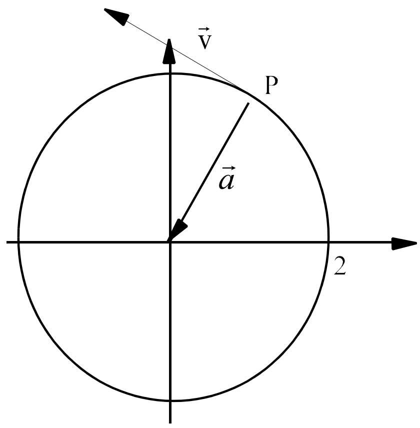
eller d({2*cos(*t*),2*sin(*t*)},t)$|t = \pi/3$ (husk vinkel i radianer) Resultat: $\{-\sqrt{3} \quad 1\}$

b) Farten er. $\left|v'\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \underline{\underline{2}}$,

Accelerationsvektoren er $\vec{a} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{\vec{a}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}}}$ .

eller d(d({2*cos(*t*),2*sin(*t*)},t),t)$|t = \pi/3$ Resultat: $\{-1, -\sqrt{3}\}$

c)Tegne kurven i Ti89:
MODE Graph=Parameric , Angle=Radian, ENTER Y= Indtast *x*(*t*) og *y*(*t*) GRAPH,
Vælg F2. Zoom Fit
Man får en aflang ellipseagtig figur
Vælg F2: ZoomSqr (for at akserne kan få lige lange enheder.)
Man får en cirkel




Det ses, at bevægelsen er en jævn cirkelbevægelse med konstant fart på 2 m/s. Accelerationsvektoren og dermed kraften står derfor vinkelret på hastighedsvektoren. ◆

Lad os som et eksempel på en ikke retlinet bevægelse betragte det skrå kast.

### Eksempel 11.6. Skrå kast

En håndgranat kastes under en vinkel på $30^0$ med det vandrette plan.
Begyndelseshastigheden er 20 m/s.
a) Giv en parameterfremstilling for banekurven.
b) Skitser ved hjælp af lommeregneren banekurven.
c) Hvor højt når granaten op?
d) Hvor langt (målt vandret) bevæger håndgranaten sig inden den rammer jorden i samme højde som startstedet.

**Løsning:**

a) Begyndelseshastigheden er $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 20\cos 30 \\ 20\sin 30 \end{pmatrix}$

Tyngdekraften er den eneste kraft der påvirker granaten (vi ser bort fra luftmodstand).
Den virker lodret nedad, så vandret er der ingen kraft der påvirker granaten, dvs. hastigheden vandret er uændret $x' = 20\cos 30$
Lodret virker tyngedekraften nedad, dvs. $y' = -gt + 20 \cdot \sin 30$

Vi har altså, at til et vilkårligt tidspunkt t er hastigheden $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20\cos 30 \\ 20\sin 30 - gt \end{pmatrix}$

Banekurven fås nu (ud fra formlerne i indledningen)

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20\cos 30 \cdot t \\ 20\sin 30 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} 20\cos 30 \cdot t \\ 20\sin 30 \cdot t - \frac{1}{2}9.81 \cdot t^2 \end{pmatrix} .$$

Som forventet fås hastigheden ved differentiation.

b) Tegne banekurven
MODE Graph=Parameric, Angle=Degree ENTER Y= Indtast $x(t)$ og $y(t)$ GRAPH, WINDOW
Indstil værdierne tmin = 0, tmax = ? , xmin = 0 , xmax = ?, ymin = 0, ymax = ?
(her må man prøve sig lidt frem eller også vente til man har beregnet værdierne i de næste spørgsmål)
Jeg valgte tmin=0, tmax = 2, xmin = 0, xmax = 40, ymax=5
Der fremkommer nu en kurve som man kan vise er en parabel (kasteparablen)
Vælg eventuelt ZoomFit hvis intet viser sig

c) Maksimumshøjden nås, når hastighedsvektoren er vandret, dvs. $y' = -gt + 20 \cdot \sin t = 0$

$$-9.81t + 20 \cdot \sin 30 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{20\sin 30}{9.81} = 1.02 \text{ s}$$

Højeste punkt $y = 20\sin 30 \cdot 1.02 - \frac{1}{2}9.81 \cdot (1.02)^2 = \underline{\underline{5.1}}$ m

d) Startstedet nås, når y = 0, dvs $y = 20\sin 30 \cdot t - \frac{1}{2}9.81 \cdot (t)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \dfrac{20 \cdot \sin 30}{\frac{1}{2}9.81} = 2.04$

(dvs. det dobbelte af 1.02) Vi har følgelig $x = 20 \cdot \cos 30 \cdot 2.04 == \underline{\underline{35.3}}$ m

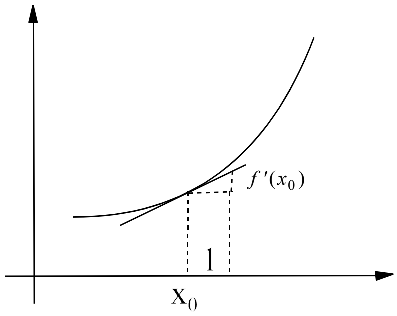
## 11.3. Økonomi

Differentialregning anvendes også når man arbejder med økonomiske forhold. Dette giver det følgende et par eksempler på.

**Grænseomkostninger**

En virksomhed har nogle produktionsomkostninger. Disse omkostninger afhænger af antallet af producerede enheder. Produktionsomkostningerne er følgelig en funktion $f(x)$ af antal producerede enheder $x$.

Differentierer vi $f$ vil differentialkvotienten $f'(x_0)$ jo angive hældningskoefficienten for tangenten i $x_0$ (se figuren).



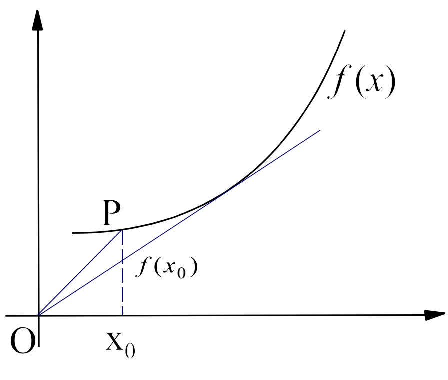

$f'(x_0)$ kaldes **grænseomkostningen** ved produktion af $x_0$ enheder, og kan tolkes dom omkostningen ved at producere 1 enhed mere.

**Gennemsnitsomkostning**

Ofte er man interesseret i den produktion, der giver mindst gennemsnitsomkostning pr. enhed.

Ved produktion af x enheder er den gennemsnitlige omkostning $k(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

Af figuren ses, at linien OP har hældningskoefficienten $\dfrac{f(x_0)}{x_0}$.




Skal man finde den værdi der giver den mindste gennemsnitsomkostning pr. enhed, så skal man finde det punkt Q på grafen for $f(x)$, hvor linien OQ har den mindste hældning.

Som det ses af figuren er det (eller de) punkter, hvor linien fra O er tangent til grafen for $f$
Den mindste gennemsnitsomkostning findes ved produktion af det antal enheder x for hvilke $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x}$

**Grænseomsætning**
Når en virksomhed sælger sine varer, får den en indtægt, som kaldes dens omsætning. Omsætningen er en funktion $g(x)$ af det antal varer $x$ der sælges.

Ved **grænseomsætningen** ved afsætning af $x_0$ enheder forstås differentialkvotienten $g'(x_0)$ som med tilnærmelse er omsætningsændringen ved afsætning af 1 enhed mere.

**Avance**
Hvis man trækker udgifterne fra indtægterne fremkommer virksomhedens avance (fortjeneste) Avancen er en funktion $h$ af antal solgte enheder, og kan med en vis tilnærmelse findes ved at trække omsætningen $g(x)$ fra produktionsomkostningerne $f(x)$, dvs. $h(x) = g(x) - f(x)$.
Avancen bliver størst for det salg $x$, hvor $h'(x) = 0$ ( er vandret tangent)

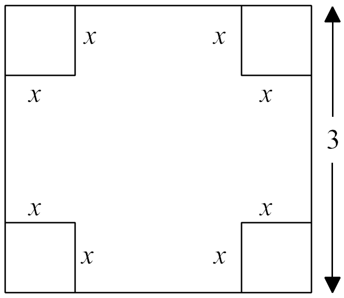
**Eksempel 11.7** Økonomi
En møbelfabrik, har fundet, at det koster $f(x)$ kr at producere $x$ stk. af en bestemt type sofaer, hvor produktionsomkostningerne (i 1000 kr) er $f(x) = -2.29 \cdot 10^{-5} x^3 + 0.0037x^2 + 8.85x + 1.15$
og omsætningen er $g(x) = -0.024x^2 + 10.82x - 3.48$

a) Hvis virksomheden producerer 20 sofaer pr. dag, hvad er så
   1) produktionsomkostningerne, og hvad er grænseomkostningen
   2) omsætningen og grænseomsætningen
   3) Hvad er avancen
b) Hvor mange sofaer skal produceres pr. dag for at få den største avance.
c) Hvor mange sofaer skal dagligt produceres, så man får den mindste gennemsnitsomkostning pr. sofa.

**Løsning:**
a) 1) $f(20) = \underline{\underline{179447 \text{ kr}}}$ Grænseomkostning = $f'(20) = \underline{\underline{8971}}$ kr
   2) $g(20) = 203320$ kr Grænseomsætning = $g'(20) = \underline{\underline{9860}}$ kr
   3) Avancen =$g(20)$ -$f(20)$= $\underline{\underline{23873}}$
b) Størst avance : $A'(x) = g'(x) - f'(x) = 6.87 \cdot 10^{-5} x^2 - 0.0554x + 1.970$
   $A'(x) = 0 \Leftrightarrow 37.28 \vee x = 769.12$
   A(37.28)= 31500 kr A(769.12)= -4456474
   Heraf ses, at avancen er størst ved salg af $\underline{\underline{37}}$ sofaer, og avancen er ca. 31500 kr
c) $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow x = 20.389 \vee x = -16.10$
   $k(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. $k(20.389) = 8.9723$
   Da $k(1) = 10.00$ og $k(25) = 9.9742$ er gennemsnitsomkostningen mindst for $\underline{\underline{x = 20}}$

# Opgaver til kapitel 11

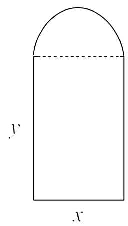
**11.1.** Af en tynd kvadratisk plade med siden 3 m bortskæres i hjørnerne fire lige store kvadrater (se figuren). Resten bukkes, således at der dannes en kasse (uden låg). Bestem siden i de kvadrater, der skal bortskæres, således at kassens rumfang bliver størst muligt.




**11.2.** I en retvinklet trekant med hypotenusen c skal summen af kateterne have længden 20 cm. Find den værdi af kateten a, som gør hypotenusen c mindst mulig.

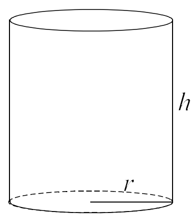
**11.3.** Et vindue er rektangulært. Det oplyses at den nederste side (karmen) er 5 gange så dyr som de tre andre sider. Arealet af vinduet skal være $a$ m$^2$.
Lad længden af den nederste side være x m.
a) Find den værdi af x, der gør den samlede pris for de 3 sider og karmen mindst mulig.
b) Angiv vinduets dimensioner, hvis arealet skal være a = 3 m$^2$

**11.4.** En vinduesåbning består af et rektangel og en halvcirkel, der har rektanglets øverste vandrette side som diameter. (se figuren)
a) Angiv arealet og omkredsen af vinduesåbningen udtrykt ved x og y.
b) Det oplyses, at omkredsen af vinduesåbningen har længden a.
Find udtrykt ved a, den værdi af bredden $x$, som gør arealet af åbningen størst.
c) Beregn det største vinduesareal i tilfældet a = 10 m




**11.5.** En plan væg i en ovn skal isoleres mod varmetab. Et isoleringslag af tykkelsen $x$ koster pr. cm$^2$ $x \cdot 3650$ kroner, og herigennem tabes varme for $\dfrac{40}{x}$ kroner/time. Anlægget påregnes benyttet i døgndrift over 6 år. Find den mest økonomiske isoleringstykkelse $x$.

**11.6.** En fabrik skal bruge en 10 m$^3$ beholder af form som en cylinder (uden låg). For at materialeforbruget skal blive lille, ønskes den samlede overflade (krum overflade + bund) mindst mulig. Find de optimale værdier for radius og højde i cylinderen.



**11.7**. En virksomhed fremstiller en vare, hvor produktionsomkostningerne for at fremstille x tons pr. uge er givet ved $O(x) = 2x^3 - 75x^2 + 950x + 23$.

a) Gør rede for, at omkostningerne er en voksende funktion af den producerede varemængde.

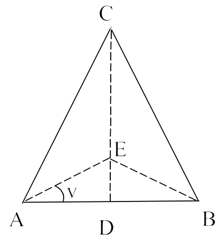
b) Den producerede varemængde kan sælges til en fast pris på 350 pr. ton.
Bestem det antal tons, som virksomheden skal fremstille pr. uge, hvis avancen skal være størst mulig.

**11.8** Ved indsprøjtning af insulin ændrer koncentrationen af blodsukker. Koncentrationen $z$ (mg/ml) er en funktion af den tid $t$ (i timer) der er forløbet efter indsprøjtningen.
Sammenhængen er bestemt ved formelen $z = 100 + 111\left(e^{-4t} - e^{-0.8t}\right)$

a) Beregn det tidspunkt $t_0$, til hvilket blodsukkerkoncentrationen er mindst.

b) I tiden efter $t_0$ vokser blodsukkerkoncentrationen. Bestem det tidspunkt til hvilket blodsukkerkoncentrationen vokser hurtigst.

**11.9** I en ligebenet trekant ABC er grundlinien AB = 4 og højden CD = 4.
Idet E er et punkt på højden CD, skal man bestemme $\angle v = \angle EAD$ (se figuren) således, at z = EA +EB + EC bliver så lille som muligt.




**11.10** Et rektangulært skydeområde, der grænser op til en retlinet mur ønskes indhegnet med et 1600 m langt hegn. Der skal ikke sættes hegn op langs muren. Hvilke dimensioner får skydeområdet, når det indhegnede område skal have et så stort areal som muligt.

**11.11** Et fly, der holder stille på en flyveplads, sætter i en "take-off" i gang med konstant acceleration. Indtil "lift-off" bevæger den sig på startbanen 600 m på 12 s.

a) Bestem accelerationen

b) Bestem den hastighed flyet har efter de første 12 s.

c) Bestem gennemsnitshastigheden over de første 12 s.

d) Bestem den gennemløbne vejlængde i det 12. s.

**11.12** Temperaturen $T$ (målt i $^0$C ) i en speciel ovn udvikler sig som en funktion af tiden $t$ (målt i minutter efter at ovnen er tændt) givet ved forskriften $T = 20 + 150 \cdot \ln(8t + 1)$

a) Bestem (med 2 decimaler) temperaturen i ovnen 10 minutter efter at ovnen er tændt.

b) Bestem (med 2 decimaler) hvor lang tid der går , fra ovnen er tændt til temperaturen i ovnen når op på $500^0$ C.

c) Bestem (med 2 decimaler) den hastighed, hvormed temperaturen ændrer sig til tiden $t = 10$.

**11.13** En haubitzer afgiver skud med mundingshastigheden 400 m/s mod et mål i afstanden 7600 m.

a) Hvilke elevationer (vinkel) vil bringe projektilet frem til målet.
b) Hvor stor bliver projektilets flyvetid.

**11.14** Et punkt P bevæger sig til tiden $t$ i et koordinatsystem efter parameterfremstillingen

$x = t^2 - 6t + 8 \qquad y = t^3 - 6t^2 + 11t - 6, \qquad t \in [0;4.1]$

a) Til hvilket tidspunkter passerer P $x$-aksen, og hvad bliver skæringspunktets koordinater
b) Til hvilket tidspunkter passerer P $y$-aksen, og hvad bliver skæringspunktets koordinater
c) I hvilke punkter og til hvilke tidspunkter er hastighedsvektoren parallel med $x$ -aksen.
d) I hvilke punkter og til hvilke tidspunkter er hastighedsvektoren parallel med $y$ -aksen.
e) Skitser banekurven ved hjælp af lommeregneren.
f) Bestem og indtegn på kurven hastighedsvektor og accelerationsvektor til $t = 1$.

**11.15** Et punkt P bevæger sig til tiden $t$ i et koordinatsystem efter parameterfremstillingen

$x = t^3 - 3t \qquad y = t^2, \qquad t \in [-2;\, 2] \cdot$

a) Skitser banekurven ved hjælp af lommeregneren.
b) Find koordinatene til de punkter, hvor hastighedsvektoren er lodret.
c) Find koordinaterne til de punkter hvor grafen skærer y-aksen.
d) Find vinklen mellem hastighedsvektorerne i det punkt, hvor kurven skærer sig selv (dobbeltpunkt).
5) Find de punkter på banekurven, hvor accelerationsvektoren står vinkelret på hastighedsvektoren.

**11.16** Et punkt P bevæger sig til tiden $t$ i et koordinatsystem efter parameterfremstillingen

$x = \cos t + \sin t \quad y = \cos^2 t - \dfrac{1}{2}, \qquad t \in [0;2\pi] \cdot$

a) Skitser banekurven ved hjælp af lommeregneren.
b) Find koordinatene til de punkter, hvor hastighedsvektoren til grafen er vandret.

**11.17** For et firma er produktionsomkostningerne pr. enhed $x$ givet ved

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 400x + 5200$

og omsætningen $g(x) = 6400x - 20x^2$

a) Hvis virksomheden producerer 10 enheder pr. dag, hvad er så
   1) produktionsomkostningerne og hvad er grænseomkostningen
   2) omsætningen og grænseomsætningen
   3) hvad er avancen
b) Hvor mange enheder skal produceres pr. dag for at få den største avance
c) Hvor mange enheder giver den mindste gennemsnitsomkostning pr. enhed.

# 12. Integration

## 12 1. Indledning

Da vi i kapitel 11.2 om kinematik behandlede formlerne for det frie fald, påstod vi, at den strækning stenen falder er $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$, og så fandt vi ved differentiation hastigheden $v = gt + v_0$ og accelerationen g. Imidlertid er det man ved jo, at accelerationen er konstant g og man skal så regne "baglæns" for at finde hastighed v og tilbagelagt vej s.
Dette viser, at der er behov for indføre den omvendte regningsart af at differentiere. Dette kaldes at integrere.

## 12 2. Ubestemt integral

**Definition af stamfunktion.** *Lad $f$ være en funktion, der er defineret i et interval* I. *Ved en **stamfunktion** $F$ til $f$ i intervallet* I *forstås en differentiabel funktion, som i $I$ opfylder betingelsen* $F'(x) = f(x)$.

Eksempelvis er $\sin x$ en stamfunktion til $\cos x$, da $(\sin x)' = \cos x$ og $\frac{1}{3}x^3$ er en stamfunktion til $x^2$ da $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$.

Da man ofte har brug for at finde stamfunktioner benyttes et særligt symbol for en sådan stamfunktion, nemlig $\int f(x)dx$ som kaldes **det ubestemte integral af *f*.**

Funktionen $f$ efter integraltegnet kaldes **integranden.**

Eksempelvis er $\int (-2x+3)dx = -x^2 + 3x$ da man ved differentiation af højre side får integranden $\left(-x^2 + 3x\right)' = -2x + 3$

Ved **integrationsprøven** forstås netop dette at $\int f(x)dx = F(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

Det er klart, at hvis $\int f(x)dx = F(x)$ så gælder også $\int f(x)dx = F(x) + k$, hvor $k$ er en konstant.(da $\left(F(x)+k\right)' = \left(F(x)\right)' = f(x)$)

Hermed har vi også fundet samtlige stamfunktioner, idet der gælder følgende sætning:

### Sætning 12.1 Samtlige stamfunktioner til f.

Lad $F$ være en stamfunktion til $f$.
Enhver anden stamfunktion $G$ til $f$ kan da skrives på formen
$G(x) = F(x) + k$ hvor $k$ er en konstant.

Bevis:
Da F og G begge er stamfunktioner til f, gælder, at $F'(x) = f(x)$ og $G'(x) = f(x)$
Heraf fås, at $G'(x) = F'(x) \Leftrightarrow G'(x) - F'(x) = 0$
En funktion, hvis differentialkvotient er 0 i et interval, er en konstant.
Vi har følgelig, at G(x) - F(x) = k eller G(x) = F(x) +k ◆

Vi vil i resten af dette kapitel udelade denne konstant i beregningerne, da den ikke får nogen indflydelse på slutresultaterne.
Vi vil eksempelvis ikke skrive $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + k$ men kun $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$

Ud fra kendskabet til de mest almindelige funktioners differentialkvotienter, kan man let finde det ubestemte integral af de samme funktioner.

Lad $a$ og $n$ være konstanter (eksempelvis $a = 3$ og $n = -5$)

| pr | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $a$ | $\frac{1}{x}$ | $x^n$ | $e^{a\cdot x}$ | $a^x, a > 0$ | $\sin(a\cdot x)$ | $\cos(ax)$ |
| $\int f(x)dx$ | $a\cdot x$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ | $\frac{e^{a\cdot x}}{a}$ | $\frac{a^x}{\ln(a)}$ | $-\frac{\cos(a\cdot x)}{a}$ | $\frac{\sin(ax)}{a}$ |

## 12.3. Integrationsregler

Skal man integrere en given funktion, så kan det ofte være nødvendigt at omforme integralet til noget som man lettere kan finde en stamfunktion til. Dette sker ved hjælp af de følgende integrationsregler:

$\int (a\cdot f(x) + b\cdot g(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$ linearitetsregel

$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int f(u)du, \quad \text{hvor} \quad u = g(x)$ Integration ved substitution:

Reglen kan også kort skrives $\int f(g(x))dg(x) = \int f(u)du$ hvor $u = g(x),\ du = g'(x)\cdot dx$

Integration ved substitution kan med fordel benyttes, hvis integranden indeholder en sammensat funktion med "den indre funktion" $g(x)$ , og en faktor, som minder om $g'(x)$.
Denne regel bør man være i stand til at anvende hvis de indgående funktioner er standardfunktioner.

For mere komplicerede funktioner, kan nedennævnte integrationsregler muligvis benyttes, men her vil det sædvanligvis være sikrere at benytte en lommeregner som eksempelvis Ti-89.

**Andre integrationsregler**

Partiel (delvis) integration:

$\int f(x)\cdot g(x)dx = f(x)\cdot G(x) - \int f'(x)\cdot G(x)dx$ hvor $G(x) = \int g(x)dx$

Reglen kan også kort skrives $\int fdg = f\cdot g - \int gdf$

Delvis integration kan med fordel benyttes, hvis integranden er et produkt, hvor den ene faktor $f(x)$ bliver simplere ved differentiation, og den anden faktor ikke bliver værre ved integration.

Derved er der håb om, at det nye integral bliver lettere at bestemme.

Indskudsregel

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Andre regler $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ og $\int_a^a f(x)dx = 0$

Man kan vise, at enhver funktion, der er kontinuert i et interval I har en stamfunktion i dette. Imidlertid er det ikke altid muligt at finde en stamfunktion udtrykkes ved de sædvanlige funktioner. Eksempelvis kan man vise, at $\int e^{-x^2}dx$ ikke kan udtrykkes ved de sædvanlige funktioner. Det følgende eksempel belyser beregningerne dels uden dels med lommeregner

### Eksempel 12.1 Integration uden benyttelse af lommeregner.

Beregn

a) $\int (3x^2 - 4x - 2)dx$

b) $\int \left(2\sin(x) + 3x^2 + 4\cdot e^{4x}\right)dx$

c) $\int \cos(2x-1)dx$

**Løsning:**

Ved benyttelse af linearitetsreglen fås:

a) $\int_1^3 (3x^2 - 4x - 2)dx = \left[3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^3 = 3^3 - 2\cdot 3^2 - 2\cdot 3 - (1-2-2) = \underline{\underline{6}}$

b) $\int \left(2\sin(2x) + 3x^2 + 4\cdot e^{4x}\right)dx = 2\int \sin(2x)dx + 3\int x^2 dx + 4\int e^{4x}dx$

$= 2(-\frac{\cos 2x}{2}) + 3\frac{x^3}{3} + 4\frac{e^{4x}}{4} = \underline{\underline{-\cos(2x) + x^3 + e^{4x}}}$

c) cos(2x-1) er en sammensat funktion $\cos u$ hvor $u = 2x - 1$

Idet $du = 2dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2}du$ fås

$$\int \cos(2x-1)dx = \int \cos u \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int \cos u du = \frac{1}{2}\sin u = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sin(2x-1)}}$$

◆

### Eksempel 12.2. Integration med lommeregner

Find

a) $\int x\sqrt{4x^2 + 25}dx$

b) $\int \frac{2x+1}{x^2 + x - 6}dx$

c) $\int x\cdot \sin x dx$

**Løsning:**
Integraltegnet findes på TI 89 over tallet 7.

a) $\int$ (x$\cdot\sqrt{}$ (4x^2+25),x,2,6) Resultat: <u>161.206</u>

Uden lommeregner: $\sqrt{x^2+25}$ er en sammensat funktion $\sqrt{u}$ hvor $u = 4x^2 + 25$

Idet $du = 8xdx$ , dvs. $xdx = \frac{1}{8}du$ fås

$$\int \sqrt{4x^2+25}dx = \int \sqrt{u}\frac{1}{8}du = \frac{1}{8}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{8}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{\left(4x^2+25\right)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

b) $\int$ ((2x+1)/(x^2+x-6),x) ENTER Resultat: $\ln\left(\left|x^2+x-6\right|\right)$

c) $\int$ (x*sin(x),x) ENTER Resultat: $\sin(x) - x\cdot\cos(x)$

Uden lommeregner: Da integranden er et produkt af to funktioner, og den ene faktor $x$ bliver simplere ved differentiation og den anden faktor $\sin x$ ikke bliver værre ved integration, kan man med fordel anvende delvis integration,

Idet $\int \sin x dx = -\cos x$ fås $\int x\cdot\sin x dx = -x\cdot\cos x - \int(-\cos x)\cdot 1 dx = \underline{\underline{-x\cdot\cos x + \sin x}}$

## 12.4. Bestemt integral

Lad os betragte et legeme L, der bevæger sig langs en ret linie. Vi tænker os nu, at vi til ethvert tidspunkt kender legemets hastighed v($t$) som funktion af tiden.
Hvis hastigheden er konstant v m/s, vil legemet i et tidsrum på $\Delta t$ sekunder bevæge sig $\Delta x = \mathrm{v}\cdot\Delta t$ meter. Eksempelvis hvis hastigheden var 5m/s, så vil legemet i 3 sekunder gennemløbe en vejstrækning på 15 meter. Hvis hastigheden ikke er konstant, så er det straks mere kompliceret at beregne den vejstrækning der gennemløbes i et givet tidsrum. Følgende eksempel belyser dette.

### Eksempel 12.3 Tilbagelagt afstand

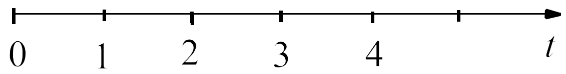
Lad et legeme L bevæge sig langs x-aksen således, at dens hastighed v til tiden $t$ (målt i sekunder) er bestemt ved $\mathrm{v}(t) = \frac{1}{2}\cdot t$ (målt i m/s).

Til tiden t =0 antages L at være i begyndelsespunktet O med $x = 0$ og v = 0.

Til t = 1 er L i punktet A med v= $\frac{1}{2}$ (m/s) og til tiden t = 4 er L i punktet B med v= 2 (m/s).

Vi ønsker nu at beregne afstanden mellem A og B.

Først beregner vi en tilnærmet værdi for AB ved at foretage en opdeling af tidsrummet fra t =1 til t = 4

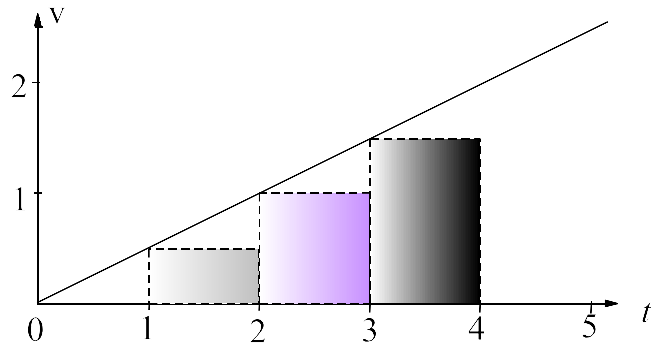



Vi deler op i 3 tidsintervaller på hvert $\Delta t = 1$ sekund.

I tidsrummet fra t =1 til t = 2 er hastigheden ca. v(1) = $\frac{1}{2}$ m/s og den tilbagelagte vejlængde er ca $\Delta x_1 \approx \mathrm{v}(1)\cdot\Delta t = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$ m. Tilsvarende findes at fra t = 2 til t = 3 er $\Delta x_2 \approx v(2)\cdot\Delta t = 1$ m og fra t = 3 til t = 4 er $\Delta x_3 \approx v(3)\cdot\Delta t = \frac{3}{2} * 1 = \frac{3}{2}$ m

I alt bliver afstanden fra A til B ca. $|AB| \approx \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3$ m

Dette kan anskueliggøres ved omstående tegning i et t - v koordinatsystem.



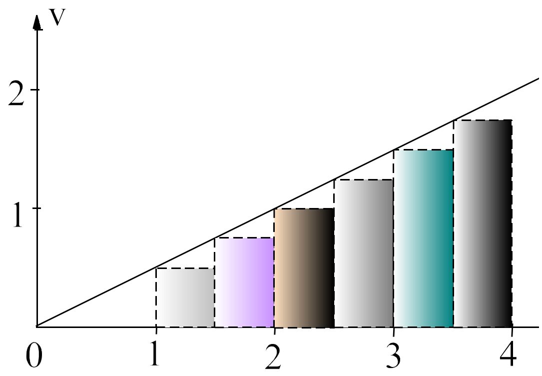

Det ses, at det fundne skøn for den afstand AB som legemet L tilbagelægger er lig med arealet af de skraverede arealer.

En bedre tilnærmelse til AB vil være, at foretage en finere inddeling af tidsrummet fra t =1 til t = 4.

Opdeles således i 6 delintervaller fremfor ovennævnte 3 fås

$$|AB| \approx v(1)\cdot\Delta t + v(1.5)\cdot\Delta t + v(2)\cdot\Delta t \ldots + v(3.5)\cdot\Delta t = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{27}{8} = 3.375$$

Det tilsvarende skraverede område (se figuren) bliver mere "fintakket"



Kaldes delepunkterne $t_0 = 1, t_1 = 1{,}5, t_2 = 2, \ldots, t_5 = 3.5$ og delintervallerne $\Delta t_i = \dfrac{1}{2}$ kan summen skrives $\sum_{i=0}^{5} v(t_i) \cdot \Delta t_1 = \sum_{i=0}^{5} \frac{1}{2} t_i \cdot \Delta t_1$

Vi kan se, at jo flere delintervaller vi indskyder, jo mere fintakket bliver kurven, og jo mere nærmer den søgte afstand sig til arealet under linien. Dette areal må derfor være $|AB| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 3.75$ (hele trekantens areal - den lille trekants areal)

Legemet bevæger sig derfor 3,75 meter i tidsrummet fra t = 1 til t = 4 ◆

Som det fremgår af eksempel 12.3 kan en sum af "uendelig" mange led godt have en grænseværdi

### Definition af middelsum.

Lad der være givet en reel funktion $f$ der er defineret i et interval [a ; b]. Der vælges nu en inddeling af intervallet [a ; b] i $n$ delintervaller med længder $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots\ldots, \Delta x_n$. I hvert delinterval vælges endvidere et punkt, hvori $f$ er defineret. Punkterne betegnes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Herefter er vi i stand til at danne størrelsen $\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \cdot \Delta x_j$, som kaldes en **middelsum** for $f$ i intervallet [a ; b] .

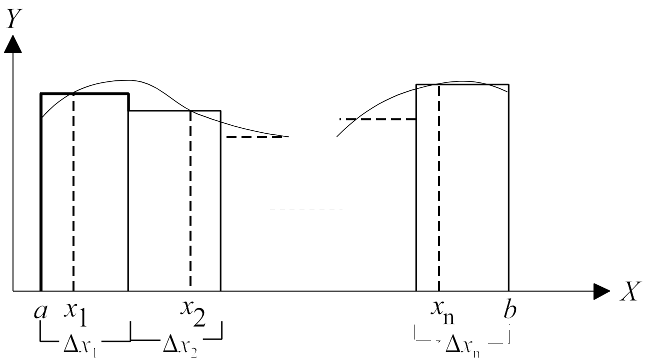



**Fig. 12.1.** *Summen af rektanglernes arealer (regnet med fortegn) er en middelsum for $f$ i [a;b].*

### Definition af bestemt integral

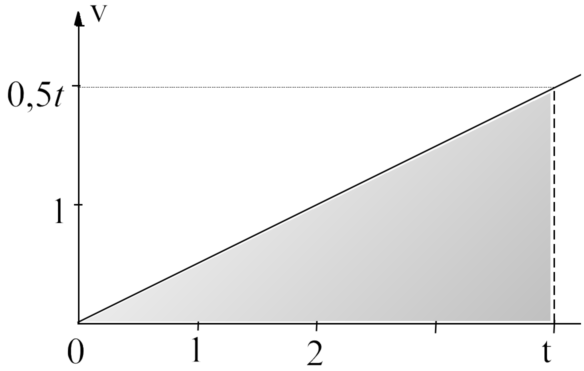
*Hvis middelsummen $\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \cdot \Delta x_j$ har en grænseværdi, når inddelingen gøres finere og finere, sådan at længden af det største delinterval går mod 0, så kaldes denne grænseværdi det* ***bestemte integral*** $\int_a^b f(x)dx$ .

(integralsymbolet $\int$ er et "aflangt" S, som står for sum)

I eksempel 12.3 fandt vi således, at $\int_1^4 \frac{1}{2} t dt = 3.75$

Hvis vi i eksempel 12.3 havde betragtet et interval fra 0 til t, havde vi fundet, at $\int_0^t \frac{1}{2} t dt = \frac{1}{4} t^2$

(arealet af den skraverede trekant)




Vi ser, at der i dette tilfælde gælder, at $\left(\frac{1}{4} t^2\right)' = \frac{1}{2} t$, dvs. at differentierer vi resultatet på højre side, så får vi funktionen under integraltegnet (integranden).
Vi ser, at der er en sammenhæng mellem det bestemte integral og det ubestemte integral

**Sætning 12.2 (bestemt integral udtrykt ved stamfunktion)** Lad *F* være en stamfunktion til en kontinuert funktion *f* i intervallet [*a; b*].

Så gælder $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

<u>Bevis:</u>. Lad $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ være en inddeling af [a;b].
Vi har da $F(b) - F(a) = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \ldots + F(x_n) - F(x_{n-1})$. Af differentialregningens middelværdisætning fås nu, at der eksisterer tal $t_1, t_2, \ldots, t_n$ $t_1 \in ]x_0; x_1]$, $t_2 \in ]x_1; x_2], \ldots, t_n \in ]x_{n-1}; x_n]$, så

$$F(b) - F(a) = F'(t_1) \cdot (x_1 - x_0) + F'(t_2) \cdot (x_2 - x_1) + \ldots + F'(t_n) \cdot (x_n - x_{n-1})$$
$$= f(t_1) \cdot (x_1 - x_0) + f(t_2) \cdot (x_2 - x_1) + \ldots + f(t_n) \cdot (x_n - x_{n-1})$$

Vi ser altså, at $F(b) - F(a)$ kan skrives som en middelsum svarende til en vilkårlig inddeling af [a;b].
Gøres inddelingen finere og finere, sådan at længden af det største delinterval går mod 0, vil middelsummen konvergere mod $\int_a^b f(x)dx$ og samtidig være lig med $F(b) - F(a)$. Dermed er sætningen bevist. ◆

**SÆTNING 12.3 Areal af punktmængde**
Lad *f* og *g* være kontinuerte funktioner i intervallet [a; b] og lad $f(x) \geq g(x)$ og lad M være punktmængden mellem graferne for *f* og *g* og linierne *x* = *a* og *x* = *b*. (skraveret på figur 12.2).

Der gælder da: $\boxed{\text{Areal af M} = \int_a^b (f(x) - g(x))dx}$

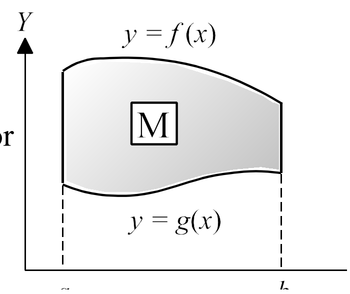



**Fig.**12.2. *Punktmængde*

**Bevisskitse:**
Som det kan ses af definitionen på bestemt integral og eksempel 12.1 gælder det for en positiv funktion $f(x)$, at $\int_a^b f(x)dx$ = arealet af den punktmængde, som er begrænset af grafen for $f$, x - aksen og linierne x = a og x = b
(det skraverede område på figur 12.3)
Er både f og g positive som på figur 12.2 ses umiddelbart, at arealet kan fås ved $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$ .

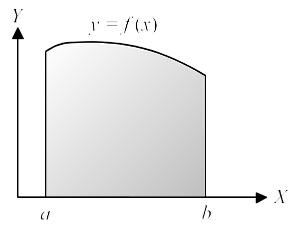



**Fig 12.3**. *Punktmængde*

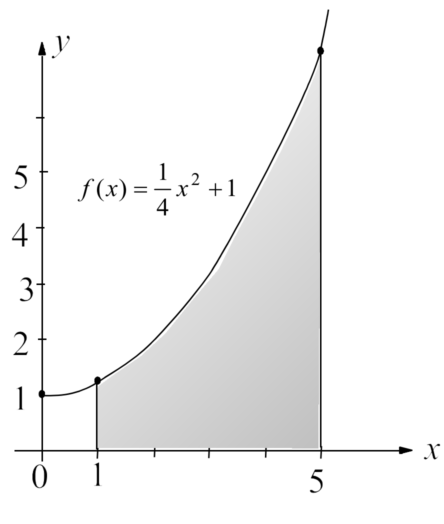
Af sætning 12.1 fås nu,

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = Fb) - Fa) - (G(b) - G(a)) = F(b) - G(b) - \left(F(a) - G(a)\right) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Er de to funktioner ikke begge positive, så kan man altid ved at lægge en passende konstant $k$ til begge funktioner sørge for at $f(x)+k>0$ og $g(x)+k>0$. Da en parallelforskydning ikke ændrer arealet mellem kurverne, fås areal af M $= \int_a^b \left((f(x)+k)-(g(x)+k)\right)dx = \int_a^b (f(x)-g(x))dx$

## Eksempel 12.4 Areal af punktmængde

Find arealet af den punktmængde på figuren, der er begrænset af grafen for funktionen $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ , $x$ - aksen og linierne $x = 1$ og $x = 5$.




**Løsning:**
Som det fremgår af sætning 12.2 er arealet bestemt ved

$$A = \int_1^5 \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right)dx$$

Da $\int \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right)dx = \frac{1}{12}x^3 + x$ , fås

$$A = \left[\frac{1}{12}x^3 + x\right]_1^5 = \left(\frac{1}{12}5^3 + 5 - \frac{1}{12} - 1\right) = \underline{\underline{\frac{43}{3}}}$$

TI89: Integraltegnet findes på TI 89 over tallet 7.

$\int$ (1/4*x^2+1,x.1.5) ENTER Resultat: 43/3

Det følgende eksempel belyser beregningerne dels uden dels med lommeregner

### Eksempel 12.5 Integration uden benyttelse af lommeregner.
Beregn

a) $\int_1^3 \left(2x^3 - 2x + 5\right)dx$

b) $\int_0^2 \left(4e^{2x} + e^{-x}\right)dx$

**Løsning:**
Ved benyttelse af linearitetsreglen fås:

a) $\int_1^3 \left(2x^3 - 2x + 5\right)dx = \left[2\frac{x^4}{4} - x^2 + 5x\right]_1^3 = \frac{81}{2} - 9 + 15 - \left(\frac{1}{2} - 1 + 5\right) = \underline{\underline{42}}$

b) $\int_0^2 \left(4e^{2x} + e^{-x}\right)dx = \left[4\frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^2 = 2e^4 - e^{-2} - (2-1) = \underline{\underline{2e^4 - e^{-2} - 1}}$

◆

### Eksempel 12.6. Integration med lommeregner

a) Find $\int_2^6 x\sqrt{4x^2 + 25}dx$

b) Find $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2 + x - 6}dx$

**Løsning:**
Integraltegnet findes på TI 89 over tallet 7.

a) $\int$ (x·$\sqrt{\ }$ (4x^2+25),x,2,6) Resultat: $\underline{\underline{161.206}}$

b) $\int$ ((2x+1)/(x^2+x-6),x,0,1) ENTER Resultat: $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

◆

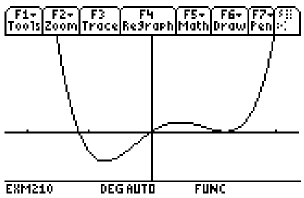
### Eksempel 12.7. Areal mellem kurve og x-akse
Givet funktionen $f(x) = 8x^4 - 4x^3 - 2x^2 + x$

1) Skitser grafen for $f(x)$ (Benyt lommeregner)

2) Beregn det samlede areal af de to områder, der begrænses af funktionen $f(x)$ og $x$ - aksen

**Løsning:**

1) Grafen tegnes på lommeregner
   Vælg Y=, y1(x)= Skriv 8x^4-4x^3-2x^2+x ENTER
   a) Vælger GRAPH og funktionen tegnes.
   b) Vælger WINDOWS og afpasser størrelsen af tegnevinduet ved at sætte xmin = -1 og xmax = 1.
   Skitse af graf:



2) Der bliver to områder, hvis areal skal bestemmes. For at kunne det, må man finde grafens nulpunkter.
TI-89: solve(8*x^4-4*x^3-2*x^2+x=0,x)  Resultat: x=-½ or x=0 or x=1/2
Ifølge sætning 7.2 findes areal ved at "integrere øverste funktion - nederste funktion".
Den ene funktion er x = 0 (x-aksen ) og den anden er f(x).
Vi har derfor.

Areal = $\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(0-(8x^4-4x^3-2x^2+x))dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}(8x^4-4x^3-2x^2+x-0)dx=\frac{23}{440}+\frac{7}{240}=\underline{\underline{\frac{1}{8}}}$

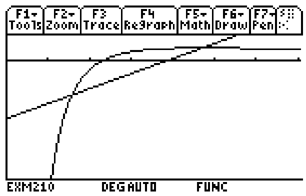
### Eksempel 12.8. Areal mellem kurver

Beregn arealet af den lukkede punktmængde, som begrænses af kurven $y=\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}$ og den rette linie $3x-2y=5$.

**Løsning:**

$3x-2y=5 \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$

Man finder skæringspunkterne mellem kurverne solve (2/x-2/x^2=3/2*x-5/2,x)
Skæringspunkter x = 2/3 , x = 2, x = -1
De to kurver tegnes på lommeregneren.
Y= ▶ y1(x)= 2/x-2/x^2 ▶ ENTER
Y= ▶ , y2(x)= 3/2*x-5/2 ▶ ENTER
Begge kurver er nu markerede, og vælges GRAPH bliver de tegnet.
Man ser på tegningen den lukkede punktmængde , at linien ligger nederst og at det er skæringspunkterne x = 2/3 , x = 2 der er afgrænsningen.




∫ (2/x-2/x^2-(3/2*x-5/2),x,2/3,2)  $A=\int_{\frac{2}{3}}^{2}\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}\right)\right)dx=\underline{\underline{2\ln 3-\frac{4}{3}=0.8689}}$

## 12.5. Numerisk integration

Selv om en funktion er kontinuert og dermed integrabel, er det ikke altid muligt at finde en stamfunktion udtrykt ved de sædvanlige funktioner. Eksempelvis kan man vise, at det ikke er muligt at finde $\int e^{-x^2}dx$. Det bestemte integral $\int_0^2 e^{-x^2}dx$ kan derfor kun findes ved at benytte en såkaldt numerisk metode. Sådanne metoder giver så omfattende regninger, at det i praksis er nødvendigt at anvende et program for at få resultatet med tilstrækkelig nøjagtighed.
Metoderne baserer sig på, at opdele integrationsintervallet i *n* delintervaller, og så indenfor det enkelte interval erstatte kurven med eksempelvis en ret linie (trapezmetoden) eller bedre med en parabel som figuren viser (Simpsons metode)

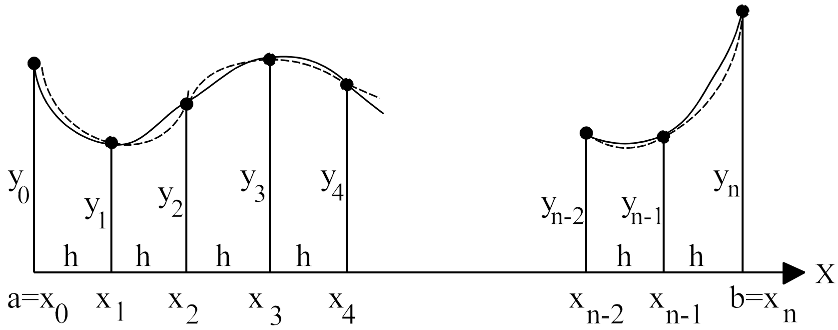



**Fig. 12.4** *Kurven tilnærmes ved parabler (stiplede).*

### Eksempel 12.9 Numerisk integration

1) Undersøg om lommeregneren kan finde en stamfunktion til $\int e^{-x^2}\,dx$ .

2) Beregn $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$ med 4 betydende cifre

**Løsning:**

1) $\int$ (e^(x^2),x) Resultat: Svarer med samme integral, så kan ikke finde en stamfunktion

2) $\int$ (e^(x^2),x,0,2) Resultat: $\underline{\underline{16.45}}$

## 12.6 Rumfang af omdrejningslegeme

Lad *f* være en kontinuert funktion i intervallet fra a til b. Vi drejer dens graf $360^0$ omkring $x$ -aksen og søger rumfanget af det derved fremkomne omdrejningslegeme (se figur 12.5)

Rumfanget af en tynd skive vinkelret på $x$ -aksen gennem punktet med første-koordinaten $x$, kan beregnes som rumfanget af en cylinder med radius $f(x)$ og højde $dx$.

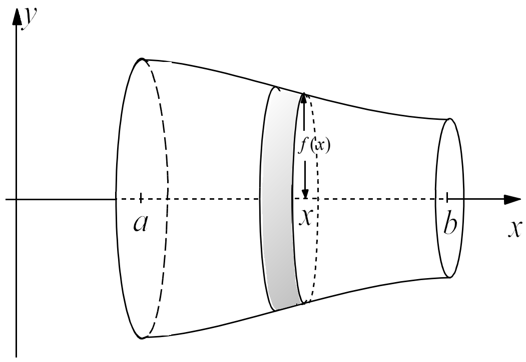



**Fig. 12.5**. *Omdrejningslegeme*

Rumfanget af skiven er da $\pi \cdot \left(f(x)\right)^2 \cdot dx$

Rumfanget V af hele omdrejningslegemet fås da ved at summere over alle sådanne skivers rumfang. Dette fører til følgende formel

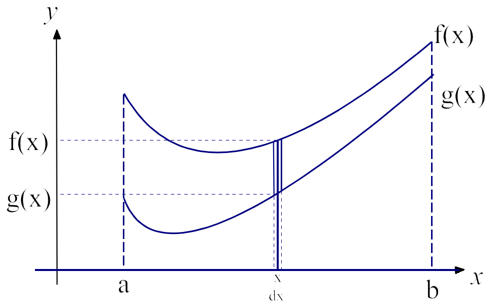
$$\boxed{V = \int_a^b \pi \cdot \left(f(x)\right)^2 dx} \qquad (1)$$

Lad $f$ og $g$ være 2 funktioner i et interval fra a til b, og lad os antage, at $f(x) \geq g(x) \geq 0$ og $a \geq 0$

Lad M være punktmængden mellem graferne for $f$ og $g$ og linierne $x = a$ og $x = b$ (se figuren)

Drejes M om x - aksen bliver rumfanget

$$\boxed{V_x = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx - \pi\int_a^b (g(x))^2\,dx} \qquad (2)$$




## Eksempel 12.9 Omdrejningslegeme om x-aksen

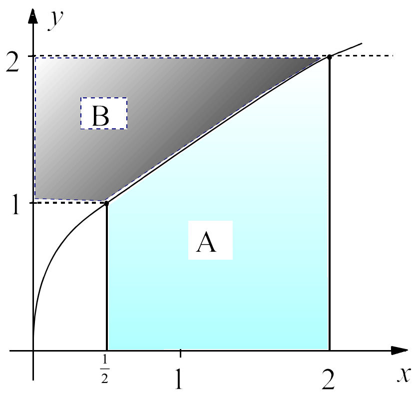
Lad A være mængden begrænset af grafen for $f(x) = \sqrt{2x}$ ,x-aksen og linierne $x = \frac{1}{2}$ og $x = 2$.

Lad B være mængden begrænset af grafen for $f(x) = \sqrt{2x}$ ,y-aksen og linierne $y = 1$ og $y = 2$.

1) Find rumfanget af det legeme der fremkommer, når A drejes $360^0$ omkring x - aksen.
2) Find rumfanget af det legeme der fremkommer, når B drejes $360^0$ omkring x - aksen.

**Løsning**
Området A skitseres (se figuren).
1) Drejes A om x-aksen fås (af formel (1))

$$V_{A_1} = \pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\sqrt{2x}\right)^2 dx = 2\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \underline{\underline{\frac{15}{4}\pi = 11.78}}$$

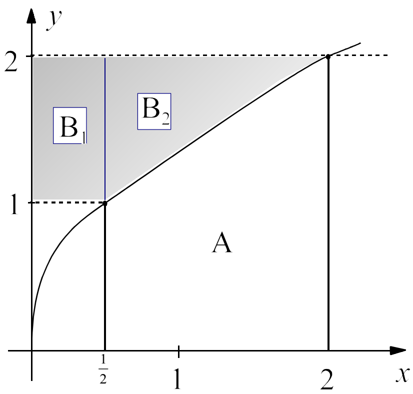



2) B deles op i

1) et rektangel $B_1$ begrænset af y-aksen og linien $x = \frac{1}{2}$

og

2) området $B_2$ begrænset af linierne $x = \frac{1}{2}$ og x = 2.



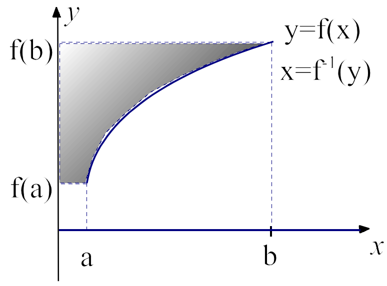
Af formel (2) fås nu

$$V_B = \pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2^2.1^2\right)dx+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(2^2-\left(\sqrt{2x}\right)^2\right)dx=\frac{3}{2}\pi+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}(4-2x)dx=\frac{3}{2}\pi+\frac{9}{4}\pi=\frac{15}{4}\pi=11.781$$

**Drejning om y-aksen**

Skal man tilsvarende dreje det på figuren markerede område om y - aksen så bliver formlen

$$V_y=\pi\int_{f(a)}^{f(b)}\left(f^{-1}(y)\right)^2dy \qquad (3)$$




Drejes det af to funktioner f og g begrænsede område M omkring y-aksen bliver rumfanget

$$V_y=2\pi\int_a^b x(f(x)-g(x))dx \qquad (4)$$

Bevisskitse:
En smal strimmel af bredden dx parallel med y-aksen føres ved drejning om y - aksen rundt i en cylinderskal af tykkelsen dx , højden f(x) - g(x) og radius x (se figuren)
Denne cylinderskal har derfor rumfanget $2\pi x(f(x)-g(x))$ (cylinderskallens areal ganget med dens tykkelse)
Det samlede rumfang findes derefter ved integration.
.

**Eksempel 12.10 Omdrejningslegeme om y-aksen**

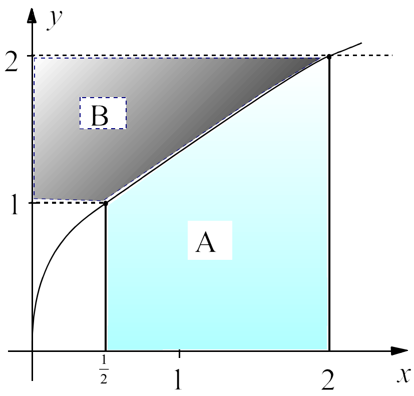
Lad A være mængden begrænset af grafen for $f(x)=\sqrt{2x}$ ,x-aksen og linierne $x=\frac{1}{2}$ og $x=2$.

Lad B være mængden begrænset af grafen for $f(x)=\sqrt{2x}$ ,y-aksen og linierne $y=1$ og $y=2$.

1) Find rumfanget af det legeme der fremkommer, når B drejes $360^0$ omkring y - aksen.
2) Find rumfanget af det legeme der fremkommer, når A drejes $360^0$ omkring y - aksen.

**Løsning**

Områderne skitseres




1) Drejes B om y-aksen betragtes den omvendte funktion.

$y=\sqrt{2x}\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{2}$ Af formel (3) fås $V_B=\pi\cdot\int_1^2\left(\frac{y^2}{2}\right)^2dy=\pi\frac{1}{4}\int_1^2 y^4dy=\frac{\pi}{4}\left[\frac{y^5}{5}\right]_1^2=\frac{31\pi}{20}=4.87$

2) Af formel (4) fås

$$V_A=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}x(f(x)-g(x))dx=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}x\cdot(\sqrt{2x}-0)dx=2\sqrt{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}x^{\frac{3}{2}}dx=2\sqrt{2}\left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}=2\sqrt{2}\left(2^{\frac{5}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\right)\frac{2}{5}=\frac{31}{5}\pi=19.478$$

# Opgaver til kapitel 12

**12.1.** (uden hjælpemidler)

Beregn (reducer integranden først)

a) $\int x\cdot\sqrt{x}dx$ b) $\int\sqrt{\frac{1}{x^3}}dx$ c) $\int(\cos(3x)+4\sin(4x))\,dx$ d) $\int e^{3x}dx$

**12.2** (uden hjælpemidler)

Beregn a) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x^2}\,dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$ c) $\int_1^3 \frac{1}{x+1}dx$

**12.3.** Find

a) $\int \cos x\sqrt{3\sin x+1}\,dx$ b) $\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$ c) $\int x\cdot e^{2x^2}\,dx$

**12.4** Find med 3 betydende cifre

a) $\int_1^4 \frac{\ln x}{x}dx$ b) $\int_2^4 x\cdot\ln x dx$ c) $\int_1^2 x\sqrt{3x-2}\,dx$

**12.5** (uden hjælpemidler)

Find arealet begrænset af grafen for funktionen $f(x)=\sqrt{x}$ samt linierne $x=1$ og $x=4$.

**12.6** (uden hjælpemidler)

Find arealet begrænset af grafen for funktionen $f(x)=\sqrt{2x}$ samt linierne $x=0$, $y=2$ og y = 4.

**12.7** Grafen for funktionen $f(x)=x^3-2x^2+x$ og $x$ - aksen afgrænser et lukket område A.

a) Skitser grafen og skraver området A.

b) Beregn arealet af A.

**12.8** Graferne for funktionerne $f(x)=x^4-6x^3$ og $f(x)=-5x^2$ afgrænser 2 lukkede områder A og B. Beregn arealerne af A og B.

**12.9** (uden hjælpemidler)

a) Tegn graferne for funktionerne $f(x)=3x-x^2$ og $g(x)=x-3$

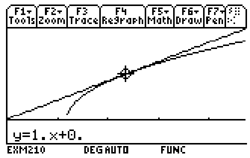
b) Graferne begrænser en punktmængde M. Find arealet af M.

**12.10** Find rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer når den punktmængde, der begrænses af grafen for funktionen $f(x)=x^3-2x^2$ og x-aksen drejes $360^0$ om $x$ - aksen.

**12.11** Lad der være givet funktionen $f(x) = 2\cdot(1-x)\cdot\sqrt{x}$

a) Find arealet af den område, der begrænses af kurven og x - aksen.
b) Find rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer når det i spørgsmål 1) nævnte område drejes $360^0$ om $x$ - aksen.

**12.12** Givet funktionen $f(x) = \sqrt{2x-1}, \quad x \geq \dfrac{1}{2}$




a) Find ligningen til tangenten til grafen med røringspunkt P = (1,1).

Punktmængden begrænset af grafen, x - aksen og tangenten kaldes M. (skraveret på figuren)

b) Find arealet af M.
c) M roteres $360^0$ omkring X - aksen, hvorved der fremkommer et omdrejningslegeme. Bestem dette legemes rumfang $V_x$.
d) M roteres $360^0$ omkring Y - aksen, hvorved der fremkommer et nyt omdrejningslegeme. Bestem dette legemes volumen $V_y$.

**12.13** (uden hjælpemidler)

Området begrænset af graferne for funktionerne $f(x) = 3 - x^2$ og $g(x) = x^2 + 1$ drejes $360^0$ om $x$ - aksen. Find rumfanget af det fremkomne omdrejningslegeme.

**12.14** a) Skitser området A begrænset af grafen for funktionen $f(x) = 2x^2 - x^4$ , y - aksen, og linie y = 1

b) Find arealet af A
c) Find rumfanget af det legeme der fremkommer, når området A drejes $360^0$ om $x$ - aksen.

# 13. Differentialligninger.

## 13.1 Differentialligninger af 1. orden

### 13.1.1. Indledning.
En differentialligning er en ligning hvori der indgår en ukendt funktions afledede.

Ved en **differentialligning af 1. orden** forstås en ligning, hvori der indgår en ukendt funktions 1. afledede, men ingen højere afledede.

Et simpelt eksempel på en differentialligning er følgende.

**Eksempel 13.1. Frit fald**
Vi ved fra kinematikken, at i et tyngdefelt er accelerationen konstant g.
Vi ved derfor, at for hastigheden v gælder $\frac{dv}{dt} = g$ eller $v'(t) = g$ hvor g = 9.81m/s
Dette er en differentialligning, hvor vi søger den ukendte funktion v.
Den **"fuldstændige"** løsning til denne differentialligning er v = $g \cdot t + k$ , hvor $k$ er en vilkårlig konstant.
Det er altså uendelig mange løsninger til denne differentialligning.
Hvis hastigheden til tiden t = 0 er $v_0$ , så kan vi ved indsættelse bestemme $k$.
$v_0 = g \cdot 0 + k \Leftrightarrow k = v_0$
Vi har følgelig fundet en "**partikulær**" løsning v = $g \cdot t + v_0$ .

◆

Af eksempel 13.1 ses,
1) En differentialligning kan have uendelig mange funktioner som løsning.
   Ønskes den **fuldstændige** løsning til differentialligningen menes, at vi skal angive **alle** løsninger.
2) Sædvanligvis er man kun interesseret i en enkelt af de uendelig mange løsninger.
   En sådan kaldes en **partikulær** løsning.
3) I eksempel 13.1 fandt vi den partikulære løsning ved at vi til starttidspunktet $t = 0$ kendte begyndelseshastigheden $v_0$ .
   Man siger derfor at den partikulære løsning er bestemt ved en "**begyndelsesbetingelse**".

Da de fleste differentialligninger i praksis er løsninger til problemer hvori der indgår hastigheder under en eller anden form, så vil tiden $t$ sædvanligvis være den uafhængig variable ligesom i eksempel 13.1.

Man vil ved anvendelserne også sædvanligvis foretrække at skrive $\frac{dy}{dt}$ fremfor $y'(t)$ .

En differentialligning kan således dels skrives $y'(t) = y(t) + t$ dels $\frac{dy}{dt} = y + t$

Da det jo imidlertid er tradition i matematikken for, at vælge bogstavet $x$ som den uafhængige variable og $y$ som den uafhængig variable vil vi også kunne skrive samme differentialligning
$y'(x) = y(x) + x$ eller kortere $y' = y + x$ .

Et eksempel på en differentialligning af anden orden er den fra kinematikken kendte $s''(t) = g$ . Vi vil kort behandle en enkelt type af sådanne differentialligninger i et senere afsnit.

Vi vil i det følgende behandle en række for anvendelserne vigtige typer af differentialligninger.

### 13.1.2 Lineær differentialligning af typen $y'(x) + a \cdot y(x) = b$

Vi vil i dette afsnit se på differentialligninger af typen

$y'(x) + a \cdot y(x) = b$ , hvor $a \neq 0$ og $b$ er konstanter.

**Sætning 13.1 Lineær differentialligning med konstante koefficienter og højre side.**

*Den fuldstændige løsning til differentialligningen*

*$y'(x) + a \cdot y(x) = b$ , hvor $a \neq 0$ og $b$ er konstanter.*

*er givet ved*

$$y(x) = \frac{b}{a} + C \cdot e^{-ax}, \qquad (1)$$

*hvor C er en vilkårlig (arbitrær) konstant*

**Bevis:**

$y'(x) + a \cdot y(x) = b \Leftrightarrow [y'(x) + a \cdot y(x)]e^{ax} = b \cdot e^{ax}$ (ganger med samme tal $e^{ax} \neq 0$ på begge sider)

$\Leftrightarrow \left[y(x) \cdot e^{ax}\right]' = b \cdot e^{ax}$ (ses af, at $\left[y(x) \cdot e^{ax}\right]' = y'(x)e^{ax} + a \cdot y(x)e^{ax} = [y'(x) + a \cdot y(x)]e^{ax}$ )

$\Leftrightarrow y(x) \cdot e^{ax} = \int b \cdot e^{ax} dx + C \Leftrightarrow y(x) \cdot e^{ax} = \frac{b}{a} e^{ax} + C$ (integration, hvor C er en konstant)

$y(x) = \frac{b}{a} + C \cdot e^{-ax}$ (division med $e^{ax} \neq 0$ på begge sider)

◆

**Eksempel 13.2. Radioaktivt henfald**

Eksperimenter viser, at et radioaktivt stof henfalder med en hastighed, der er proportional med dens mængde y(t) til ethvert tidspunkt *t*.

Vi har følgelig, at $y'(t) = k \cdot y(t)$ , hvor *k* er en konstant.

For et bestemt stof er *k* = - 0.1, dvs. vi har $y'(t) = -0.1 \cdot y(t)$

a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen $y'(t) = -0.1 \cdot y(t)$ . (1)

b) Lad os antage, at begyndelsesmængden er 1 gram, dvs. vi har "begyndelsesbetingelsen" y(0) = 1.
Find den partikulære løsning, der svarer til denne begyndelsesbetingelse.

c) Find tilsvarende de partikulære løsninger, der svarer til en begyndelsesmængde på 3 gram og 5 gram

d) Skitser svarende til ovennævnte 3 løsninger de 3 løsningskurver i samme koordinatsystem.

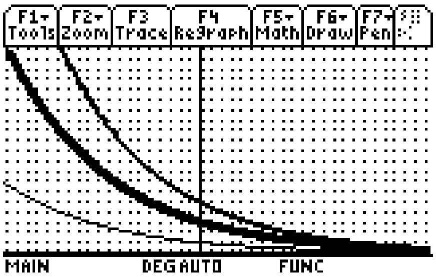
**Løsning:**

a) Vi har $y'(t) = -0.1 \cdot y(t) \Leftrightarrow y'(t) + 0.1 \cdot y(t) = 0$

Indsættes i formlen for a = 0.1 og b = 0 fås den fuldstændige løsning: $\underline{\underline{y = C \cdot e^{-0.1t}}}$

b) Indsættes $t$ =0 og $y$ = 1 fås $1 = C \cdot e^0$ dvs. C =1. Partikulær løsning: $\underline{\underline{y = e^{-0.1t}}}$

c) Analogt som under punkt b) fås nu $\underline{\underline{y = 3 \cdot e^{-0.1t}}}$ og $\underline{\underline{y = 5 \cdot e^{-0.1t}}}$




**Ti 89**: a) F3/ C: deSolve(y' =-0.1*y),t,y) Resultat: $y = C \cdot e^{-\frac{t}{10}}$

Bemærk: I y' findes "mærket" over tasten =

b) F3/ C: deSolve(y' =-0.1*y and y(0) = 1,t,y) Resultat: $y = e^{-\frac{t}{10}}$

"and" findes under MATH, Test

◆

## Eksempel 13.3. Eksponentiel vækst

Lad $y(t)$ betegner størrelsen til tidspunktet $t$ af en population (en befolkning, en bakteriekultur, antal mus på en ø). Hvis der er maksimale livsbetingelser (tilstrækkelig næring, god plads, ingen forurening fra affaldsstoffer osv. ) kan vi antage, at den hastighed populationen vokser med er proportional med størrelsen af populationen .

Vi har dermed differentialligningen $y'(t) = k \cdot y$

Dette er den samme differentialligning som i eksempel 13.2, så vi har derfor, at den fuldstændige løsning $y = C \cdot e^{kt}$

For i den konkrete situation at kunne bestemme $C$ og $k$ må man optælle antallet af individer til forskellige tider.

Til $t = 0$ dage talte man 25 individer og til $t = 20$ dage talte man 100 individer.

a) Bestem konstanterne $C$ og $k$.
b) Hvor mange individer er der efter 100 dage.
c) Angiv hvor lang tid det tager populationen at fordoble sig.

**Løsning.**

a) $25 = C \cdot e^0 \Leftrightarrow \underline{\underline{C = 25}}$ $\quad 100 = 25 \cdot e^{k \cdot 20} \Leftrightarrow e^{k \cdot 20} = 4 \Leftrightarrow k \cdot 20 = \ln 4 \Leftrightarrow \underline{\underline{k = 0.0693}}$

b) $t = 100 \quad y = 25 \cdot e^{0.0693 \cdot 100} = \underline{\underline{25699}}$

c) Populationen fordobles på $\dfrac{\ln 2}{k} = \dfrac{\ln 2}{0.0693} = 10$ dage.

◆

## Eksempel 13.4. Legemes temperatur ved køling

Der gælder følgende fysisk lov: *Ændringen i et legemes temperatur er proportional med temperaturforskellen mellem legemet og omgivelserne.*

Er legemets temperatur til tiden $t$ være $y(t)$ og omgivelsernes temperatur $T$ fås derfor følgende differentialligning: $y' = k(y-T), \quad t>0$, hvor $k$ er en konstant.

a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen $y' = k(y-T), \quad t>0$

b) Et glas varm chokolade står i et lokale , hvis temperatur er $20^0$ C.
Chokoladens temperatur måles til forskellige tidspunkter.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Tid $t$ i min | 0 | 2 | 4 |
| Temperatur i $^0$C | 85.0 | 77.7 | 71.1 |

1) Bestem den løsning, der er bestemt ved, at $(t, y) = (0,85)$ og $(t, y) = (2, 77.7)$
2) Beregn temperaturen y for $t = 4$ , og vurder om den i spørgsmål b1) fundne model er tilfredsstillende.
3) Hvor varm er chokoladen efter 10 minutters forløb?
4) Skitser grafen

**Løsning:**

a) $y' = k(y-T) \Leftrightarrow y' - k\cdot y = -k\cdot T$

Af sætning 13.1 fås idet $a = -k$ og $b = -k\cdot T$

$$y = \frac{-k\cdot T}{-k} + C\cdot e^{k\cdot t} \Leftrightarrow \underline{\underline{y = T + C\cdot e^{k\cdot t}}}$$

b) Idet T = 20 fås , at $y = 20 + C\cdot e^{k\cdot t}$

b1) Indsættes $(t, y) = (0,85)$ fås : $85 = 20 + C \Leftrightarrow C = 65$

Indsættes $(t, y) = (2, 77.7)$ fås

$$77.7 = 20 + 65\cdot e^{k\cdot 2} \Leftrightarrow e^{k\cdot 2} = \frac{77.7-20}{65} \Leftrightarrow 2k = \ln 0.8877 \Leftrightarrow k = -0.0596$$

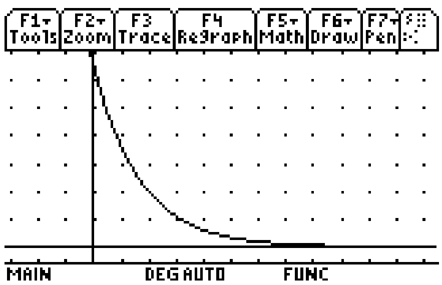
Løsning: $\underline{\underline{y = 20 + 65\cdot e^{-0.0596\cdot t}}}$

b2) Indsættes $t = 4$ fås: $y = 20 + 65e^{-0.0596\cdot 4} = \underline{\underline{71.2^0}}$ C

Det ses, at passe pænt med den målte værdi

b3) y = $y = 20 + 65e^{-0.0596\cdot 10} = \underline{\underline{55.82^0\ C}}$

b4)

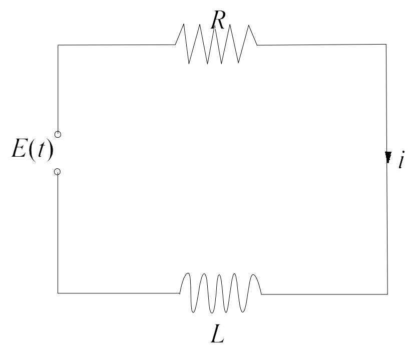



Det ses (ikke overraskende), at temperaturen af chokoladen nærmer sig stuetemperaturen

## Eksempel 13.5. Elektrisk kredsløb I

**Indledning:**

Vi kender alle Ohms lov: $E = R \cdot i$ , hvor $E$ er spændingsforskellen, $R$ er en modstand og $i$ er strømstyrken. Indsættes der yderligere en spole i kredsløbet (se figuren) så vil en sådan spole inducere en "modelekromotorisk kraft, der er proportional med hvor hurtig strømstyrken ændrer sig. Proportionalitetsfaktoren L kaldes selvinduktionskoefficienten.




Man har derfor at strømstyrken $i$ opfylder følgende differentialligning:

$L \cdot i'(t) + R \cdot i(t) = E(t)$

**Eksempel:**

a) Lad L = 0.1 Henry,  R = 5 ohm og lad et 15 volt batteri give den elektromotoriske kraft. Lad endvidere $i(0) = 0$.
   1) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen.
   2) Find $i(t)$ i tilfældet $i(0) = 0$.
   3) Skitser den i spørgsmål 2 fundne løsning

**Løsning:**

a1) Differentialligning $0.1 \cdot i' + 5i = 15$

Ved division med 0.1 fås : $i' + 50i = 150$

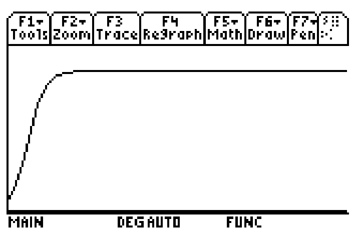
Af sætning 13.1 fås idet $a = 150$ og $b = 15$

Fuldstændig løsning: $i = \dfrac{150}{50} + Ce^{-50i} \Leftrightarrow \underline{\underline{i = 3 + Ce^{-50t}}}$

a2) Løsning gennem $(t, i) = (0,0)$ : $0 = 3 + C \cdot e^0 \Leftrightarrow C = -3$ $\underline{\underline{i(t) = 3 - 3 \cdot e^{-50 \cdot t}}}$

a3) Havde man kun haft en modstand i kredsløbet ville strømstyrken jo ifølge Ohms lov være $i = \dfrac{E}{R} = \dfrac{15}{5} = 3$ ampere.

Spolen danner en "modelektromotorisk" kraft, der kun varer, så længe strømstyrken vokser. Dette stemmer med, at strømstyrken vokser meget hurtigt fra 0 til (næsten) 3 ampere.



### 13.1.3 Lineær differentialligning af typen $y'(x) + a \cdot y(x) = q(x)$.

Vi vil i dette afsnit se på det tilfælde, at højre side ikke er en konstant, men en funktion $q(x)$ af $x$, dvs. $y'(x) + a \cdot y(x) = q(x)$, hvor $a \neq 0$ er en konstant.
Differentialligninger hvor højre side er konstant er altså et specialtilfælde af denne type.

**Sætning 13.2 Lineær differentialligning med konstante koefficienter**
*Den fuldstændige løsning til differentialligningen*
$y'(x) + a \cdot y(x) = q(x)$, *hvor* $a \neq 0$ *er en konstant*
*er givet ved*

$$y(x) = e^{-ax} \int q(x) \cdot e^{ax} dx + C \cdot e^{-ax}, \qquad (1)$$

*hvor C er en vilkårlig (arbitrær) konstant*

Beviset er analogt til beviset for sætning 13.1 og vil ikke blive anført her.

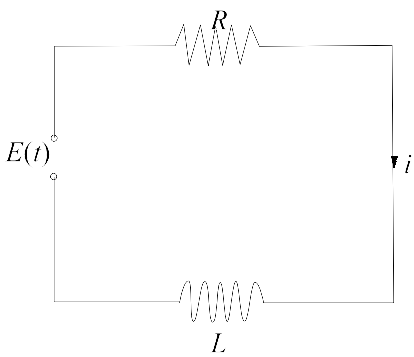
Som det ses af sætningen kræver løsningen en integration. Det kan let foretages ved anvendelse af TI89, men lettere er det at benytte deSolve som kan løse "alle" differentialligninger.
Som det ses af eksempel 13.7 giver deSolve ofte urimeligt komplicerede udtryk, som man er nødt til at reducere "ved håndskrift", da man ellers ikke kan overskue løsningen.

**Eksempel 13.6. Lineær differentialligning**
Lad der være givet differentialligningen $y' + 2y = e^{-3x}$
a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen.
b) Find den partikulære løsning, der er bestemt ved, at til x = 0 er y = 1.
**Løsning:**

a) F3/ C: deSolve(y'+2*y =e^(-3x),x,y) Resultat: $\underline{\underline{y = C \cdot e^{-2x} - e^{-3x}}}$
Bemærk: I y' findes "mærket" over tasten =

b) F3/ C: deSolve(y'+2*y =e^(-3x) and y(0) = 1,x,y) Resultat: $\underline{\underline{y = \left(2 \cdot e^{x} - 1\right)e^{-3x}}}$
"and" findes under MATH, Test

**Eksempel 13.7. Elektrisk kredsløb II**




I eksempel 13.5 betragtede vi det på figuren angivne RL-kredsløb

Vi fandt, at $i$ opfylder følgende differentialligning: $L \cdot i'(t) + R \cdot i(t) = E(t)$

Vi vil nu betragte det tilfælde, hvor vi lader
den "påtrykte" elektromotoriske kraft E være en vekselspænding

$$E(t) = A\cdot\sin(\omega\cdot t),\ \ hvor\ \ \omega = \frac{R}{L}$$

Lad L = 20 Henry, R = 100 ohm og A = 220 volt. Lad endvidere $i(0) = 0$.

a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen.

b) Find $i(t)$ i tilfældet $i(0) = 0$.

c) Omskriv løsningen til en svingning af formen $i = A\sin(\omega t + \varphi)$ for $t$ stor.

**Løsning**:

a) Differentialligningen bliver : $20\cdot i' + 100i = 220\cdot\sin\left(\frac{100}{20}t\right)$

Ved division med 20 fås : $\quad i' + 5i = 11\cdot\sin(5t)$

F3\ C: deSolve(y'+5*y =11*sin(5*t),x,y)

Resultat: $y = \dfrac{-e^{-5t}\left(11e^{5t}\cos(5t) - 11e^{5t}\sin 5t) - 10C\right)}{10}$

Dette "skrækkelige" udtryk kan nemt reduceres til $y = \dfrac{-11\cdot(\cos 5t - \sin 5t)}{10} + C\cdot e^{-5t}$

Fuldstændig løsning $\quad \underline{\underline{i = \dfrac{-11(\cos 5t - \sin 5t)}{10} + C\cdot e^{-5t}}}$

b) Løsning gennem $(t, i) = (0,0)$ :

F3\ C: deSolve(y'+5*y =11*sin(5*t) and y(0)=0,x,y)

Resultat: $y = \dfrac{-11e^{-5t}\left(e^{5t}\cos(5t) - e^{5t}\sin 5t) - 1\right)}{10}$

Kan let reduceres til: $\quad i = \underline{\underline{-1.1(\cos 5t - \sin 5t) + 1.1\cdot e^{-5t}}}$

c) Som det ses, falder leddet $1.1\cdot e^{-5t}$ hurtigt mod 0, så "output" hurtigt bliver det "stationære led".
F2\9:Trig\ tCollect( Her kopieres resultatet over uden leddet med C )

Resultat $\ i(t) = -\dfrac{11\sqrt{2}}{10}\cos\left(5t + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Da vekselspændingen var en sinus - svingning (og man ikke lide en negativ amplitude), så kan man benytte, at $-\cos v = \sin\left(v - \frac{\pi}{2}\right)$

og derved få, $\underline{\underline{i(t) = \dfrac{11\sqrt{2}}{10}\sin\left(5t - \dfrac{\pi}{4}\right)}}$

dvs. en svingning med amplituden $\frac{11\sqrt{2}}{10}$ og faseforskudt $\frac{\pi}{4}$ i forhold til "input".
(jævnfør eventuelt afsnit 6.6.8 om svingninger.)

## 13.1.4. Logistisk vækst

Lad $y(t)$ betegner størrelsen til tidspunktet $t$ af en population (en befolkning, en bakteriekultur, antal mus på en ø). Hvis der er maksimale livsbetingelser (tilstrækkelig næring, god plads, ingen forurening fra affaldsstoffer osv. ) kan vi antage, at den hastighed populationen vokser med er proportional med størrelsen af populationen (se eksempel 13.3).
På et tidspunkt vil tilvæksten imidlertid begynde at aftage på grund af mangel på plads, mangel på mad og en ophobning af affaldsstoffer. Hvis det størst mulige befolkningstal er $a$, så er det rimeligt at antage, at hastigheden tillige er proportional med afstanden til $a$, dvs.

$$y'(t) = k \cdot y \cdot (a-y), \quad 0 < y < a$$

Løsningskurverne kaldes for **logistiske kurver** og umiddelbart ud fra problemstillingen må de få en S-form, hvor de i starten stiger eksponentielt, men til sidst langsomt nærmer sig til linien y = a..

### Eksempel 13.8. Logistisk vækst

a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'(t) = k \cdot y \cdot (a-y), \quad 0 < y < a$$

b) For at bestemme k og a optælles nu for antal individer til forskellige tider.
Til t = 0 dage talte man $y = 25$ individer
Til t = 20 dage talte man 100 individer
Til t = 80 dage talte man 295 individer
Find $k$ og $M$

c) Skitser den i spørgsmål 2 fundne funktion, og find det antal individer man må forvente for $t$ = 100.

**Løsning:**

1) deSolve(y’=k*y*(a-y),t,y) Resultat: $y = \dfrac{a \cdot e^{a \cdot k \cdot t}}{e^{a \cdot k \cdot t} + a \cdot C}$

Dette resultat reduceres (manuelt) til det lidt simplere udtryk $\underline{\underline{y = \dfrac{a}{1 + a \cdot Ce^{-a \cdot k \cdot t}}}}$

2) Det simpleste ville være at lade TI 89 løse 3 ligninger med 3 ubekendte, men den giver op, så vi må benytte indsættelsesmetoden.
Vi erstatter Ti89's arbitrære konstant med c i de følgende regninger.
Indsættes y= 25 og $t$ = 0 og løses m.h.t. c fås

$$25 = \frac{a}{1 + a \cdot c} \Leftrightarrow 1 + ac = \frac{a}{25} \Leftrightarrow ac = \frac{a}{25} - 1$$

Indsætter c i resultatet fås $y = \dfrac{a}{1 + \left(\dfrac{a}{25} - 1\right)e^{-akt}}$ (1)

t = 20, y = 100 indsættes i (1) og der løses m.h.t. $k$:
solve(y= a/(1+(a/25-1)*e^(a*k*t)),k) $| t = 20$ and $y = 100$

Resultat: $k = \dfrac{\ln\left(\dfrac{4(a-25)}{a-100}\right)}{20a}$ and $\dfrac{a-25}{a-100} > 0$ Da a > 100 er uligheden opfyldt.

$t$ = 80, y = 295 og værdien af $k$ indsættes i (1) og ligningen løses med hensyn til $a$
solve(y= a/(1+(a/25-1)*e^(a*k*t)),k) $| t = 20$ and $y = 100$ and k=ln(4*(a-25)/(a-100))/(20-a)

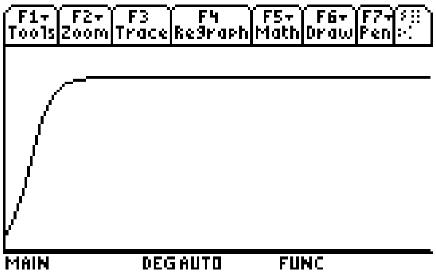
Resultat $\underline{\underline{a = 298.498}}$

Resultatet sættes ind i værdien for k: ln(4*(a-25)/(a-100))/(20-a)| a=298.498

Resultat k = 0.0002859

a indsættes i $C = \dfrac{a-25}{25a}$ (a-25)/(25*a)| a=298.498 Resultat C = 0.03665

c) Lommeregnerens graffunktion viser
Vinduet sættes til 0<x<100, 0<y<350, og man vælger zoomStdv for at få samme enhed på akserne




Indsættes de fundne værdier i funktionsudtrykket fås for t = 100 at y = 298.496

## 13.1.5 Numerisk løsning

Det er ofte umuligt at angive eksakte udtryk for løsningen $y(x)$. Imidlertid kender man jo i ethvert punkt $(t, y)$ differentialkvotienten, og det kan man udnytte til gennem et stort antal punkter at tegne et kort liniestykke med den kendte hældning (kaldes **linieelementet** i punktet). Dette vil så give os et indtryk af løsningskurvernes udseende.

### Eksempel 13.9. Grafisk løsning af differentialligning

Lad der være givet differentialligningen $y' = y + x$

1) Tegn i et koordinatsystem "linieelementerne" gennem punkterne
A=$(x, y)$=(-1,1), B=$(x, y)$ = (0, 1) og C= $(x, y)$ = (1, 2)
2) Tegn ved hjælp af et edb - program et stort antal linieelementer, og skitser på basis heraf løsningskurven gennem punktet (0,1)
3) Ud fra figuren synes en bestemt løsning tydelig. Angiv funktionsudtrykket for denne løsning, og vis ved indsættelse i differentialligningen, at denne er en løsning..

**Løsning:**

1) Ved indsættelse af punkterne i differentialligningen kan vi finde hældningskoefficienten $y' = \alpha$.
A=$(x, y)$=(-1,1): $y' = 1 - 1 \Leftrightarrow y' = 0$, dvs. $(x, y, \alpha) = (-1,1,0)$
B=$(x, y)$ = (0, 1): $y' = 1 + 0 \Leftrightarrow y' = 1$ dvs. $(x, y, \alpha) = (0,1,1)$
C= $(x, y)$ = (1, 2): $y' = 2 + 1 \Leftrightarrow y' = 3$ dvs. $(x, y, \alpha) = (1,2,3)$
De 3 linieelementer ses på figur 2.1

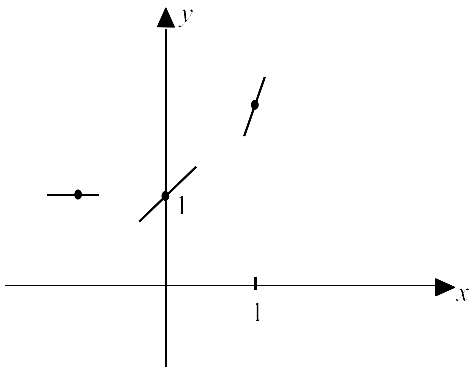
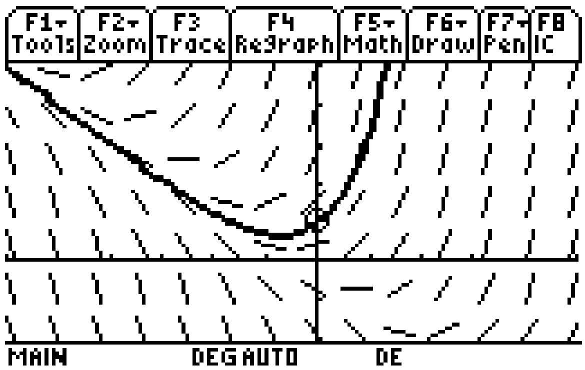



**Fig. 13.1** *Nogle linielementer*

2) Tegnes et stort antal linieelementer f.eks. ved at benytte TI - 89 fås figur 13.2 .
På basis af disse linieelementer er tegnet et par kurver, som kunne synes, at have disse linieelementer som tangenter, og som derfor kunne være løsningskurver for differentialligningen.




I TI-89 tegnes linieelementerne på følgende måde::
MODE\ GRAPH = Diff.Equations\ ENTER\ \" Y=" t+y1\ ENTER\ yi1 = 1
**Bemærk**: y1 ikke y, t og ikke x og man kan ikke udelade gangetegn
Windows\ t0 =0, tmax =2, TSTEP =0.1, tplot=0, XMIN =-6, XMAX=5, ... YMIN =-2, YMAX=5, osv. ENTER. ,
Graf (får måske kun koordinatsystem)
| (Graf Format), Axes on, Labels on, Solution Methods , RK, Fjelds = Fldiff, ENTER

3) Af figuren synes den rette linie med ligningen $y = -x - 1$ at være en løsning.
Dette vises ved indsættelse i differentialligningen $y' = y + t$ .
Idet $(-t-1)' = -1$ , fås $-1 = (-t-1) + t \Leftrightarrow 0 = 0$ , dvs. påstanden er bevist.

**Beregning af støttepunkter for løsning**
Som eksempel 13.9 viser, kan linielementerne give et umiddelbart indtryk af løsningskurvernes forløb. Ønsker man en tabel over en løsning bestemt ved begyndelsesbetingelsen $(x_0, y_0)$, sker det ved ud fra punktet $(x_0, y_0)$ at beregne et tilnærmet nabopunkt $(x_1, y_1)$ ud fra dette et nyt punkt $(x_2, y_2)$ osv.
Dette er et betydeligt regnearbejde, som derfor kræver et "edb- program"

TI 89 har indbygget to metoder,

"**Eulers metode**" som er den der er nemmest at forstå, og beregne, men ikke særlig nøjagtig, og "**Runge Kutta's metode**" som er besværlig at forstå og beregne, men mere nøjagtig.

Eulers metode bygger på, at man ud fra begyndelsespunktet $(x_0, y_0)$ beregnes det næste punkt $(x_1, y_1)$ ved at følge tangenten i $P_0$. Ud fra punktet $(x_1, y_1)$ beregnes det næste punkt $(x_2, y_2)$ ved at følge tangenten i $P_1$., osv. (se figur 13.3)

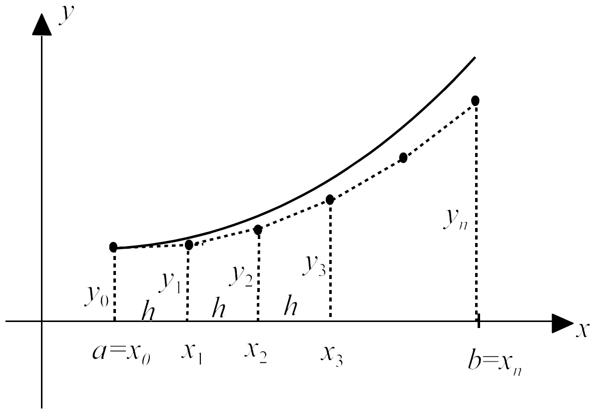



**Fig 13.3.** *Eulers metode*

**Eksempel 13.10. Numerisk løsning af differentialligning**

Lad der være givet differentialligningen $\frac{dy}{dt} = y + t$, $y(0) = 1$, $t \in [0;2]$

Benyt lommeregnerens Runge-Kutta program til at finde y(2) med en skridtlængde på 0.5.
Bemærk, at i TI-89 skal *t* og ikke *x* være den uafhængige variable.

**Løsning:**

Startpunktet for algoritmen er $(t_0, y_0) = (0,1)$

MODE\ GRAF = Diff.Equations\ ENTER, ◆" Y=" t+y1 ENTER. yi1 = 1

Bemærk: y1 ikke y, og gange skal skrives som *

Windows, t0 =0, tmax =2, TSTEP =0.5, tplot=0,XMIN =0, XMAX=3, ... YMIN =1, YMAX=4, osv.ENTER. ◆, Graf,

Man får tegnet en kurve .

Tabellering:

◆ | (Graf Format), Axes on, Labels on, Solution Medhods , RK, Fields = Fldiff, ENTER

Catalog, Blddata ENTER, skriv runge, ENTER
APPS ,Data-Matrix, NEW, Variable=eul, APPS ,Data-Matrix, Current
Der fremkommer en matrix

| t | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y(t) | 1 | 1.797 | 3.435 | 6.456 | 11.768 |

◆

## 13.2 Differentialligninger af 2. orden med konstante koefficienter

Vi vil i dette kapitel begrænse os til at se på lineære differentialligninger af 2. orden af typen
$a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = q(x)$ hvor $a$ , $b$ og $c$ er konstanter og $q(x)$ er kontinuert i et interval $I$

Eksempelvis er $y'' + 3 \cdot y' + 6 \cdot y = \sin x$ en sådan lineær differentialligning af 2. orden.
Sådanne differentialligninger med konstante koefficienter optræder ofte i anvendelserne, bl.a. ved behandlingen af svingninger (se eventuelt eksempel 13.13)

For at få et indtryk af løsningernes struktur, vil vi se på et meget enkelt tilfælde, hvor vi umiddelbart kan finde alle løsninger.

**Eksempel 13.11 Fuldstændig løsning til en enkel differentialligning af 2. orden.**
Find den fuldstændige løsning til differentialligningen $y'' - 8 \cdot x = 0$

**Løsning:**
$y'' - 8x = 0 \Leftrightarrow y'' = 8x \Leftrightarrow y' = \int 8x dx + C_1 \Leftrightarrow y' = 4x^2 + C_1 \Leftrightarrow y = \int (4x^2 + C_1) dx$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = \frac{4}{3}x^3 + C_1 x + C_2}}$

◆

I eksempel 13.11 fandt vi, at den fuldstændige løsning indeholdt 2 (arbitrære) konstanter $C_1$ og $C_2$.
Det kan vises at gælde generelt.

Sædvanligvis vil man i praksis finde en bestemt blandt de uendelig mange løsninger. Da udtrykket for samtlige løsninger indeholder netop 2 konstanter $C_1$ og $C_2$, skal der to betingelser til at fastlægge en bestemt løsning.
Sædvanligvis vil man ved anvendelserne til starttidspunktet $x_0$ kende "partiklens" beliggenhed $y(x_0)$ og dens hastighed i starttidspunktet $y'(x_0)$. Man siger kort, at man har givet begyndelsesbetingelserne. Det kan vises, at sådanne begyndelsesbetingelser entydigt fastlægger løsningen.

**Eksempel 13.12. Partikulær løsning til en enkel differentialligning**
Find den partikulære løsning til differentialligningen $y'' - 8 \cdot x = 0$ som opfylder begyndelsesbetingelsen $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

**Løsning:**
Fra eksempel 13.9 kendes den fuldstændige løsning $y = \frac{4}{3}x^3 + C_1 x + C_2$ og $y' = 4x^2 + C_1$

Indsættes begyndelsesbetingelsen haves: $\begin{cases} 1 = \frac{4}{3}0^3 + C_1 \cdot 0 + C_2 \\ 2 = 4 \cdot 0^2 + C_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 1 \end{cases}$. $\underline{\underline{y(t) = \frac{4}{3}x^3 x + 2}}$

◆

## Fuldstændig løsnings struktur

Den fuldstændige løsning til den differentialligningen

$$a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = q(x) \qquad (1)$$

har følgende form

$y(x) = y_p(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ , hvor $C_1$ og $C_2$ er 2 (arbitrære) konstanter.

Differentialligningen $a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = 0$ (2)

kaldes den til differentialligningen (1) svarende "homogene" differentialligning .

Der gælder, at den homogene differentialligning har den fuldstændige løsning

$y_h = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 y_2(x)$

Det betyder, at hvis man ville løse differentialligningen (1) manuelt starter man med at løse (2). Det er ret let at finde den fuldstændig løsning $y_h = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 y_2(x)$

Kan man ved passende integrationer finde en (partikulær) løsning $y_p$ til (2), så er den fuldstændige løsning til (1) blot y = $y_p$ + $C_1 \cdot y_1(x) + C_2 y_2(x)$

Selv om vi ved at benytte TI89's "deSolve" får den fuldstændige løsning med det samme, så er resultatet ofte så besværligt, at en reduktion er nødvendig, og da kan det være en fordel at dele løsningen op som beskrevet ovenfor.

## Eksempel 13.13. Homogen lineær differentialligning med konstante koefficienter

a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen $y'' - 4 \cdot y' + 20y = 0$,

b) Find den partikulære løsning, der opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = -1$ og $y'(0) = 2$

c) Skitser den i b) fundne løsning.

**Løsning:**

**a) Ti89:** F3, C: deSolve(y``-4*y`+20*y=0,x,y)

Resultat: $\underline{\underline{y(t) = C_1 e^{2x} \cos(4x) + C_2 e^{2x} \sin(4x)}}$

b) Partikulær løsning: desolve(y``-4*y`+20*y=0 and y(0)=-1 and y`(0)=2,x,y)

Resultat: $\underline{\underline{y = e^{2x} \sin(4x) - e^{2x} \cos(4x)}}$

Ønskes omskrevet til amplitude og faseforskydning:

F2\9:Trig\ tCollect( e^(2*x)*sin(4*x)-e^(2*x)*cos(4*x) )

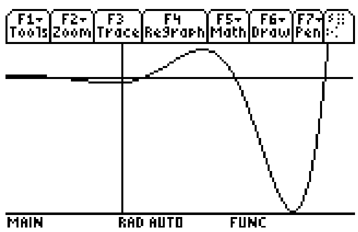
Resultat: $-\sqrt{2} e^{2x} \cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right)$

For at få en positiv amplitude benyttes, at

-cos(v) =cos(v- $\pi$ ), dvs

$$\underline{\underline{y = \sqrt{2} e^{2x} \cos\left(4x - \frac{3\pi}{4}\right)}}$$

Graf kan tegnes på TI 89:



**Eksempel 13.14 "Inhomogen" Differentialligning.**

a) Find samtlige løsninger til differentialligningen

$2y'' + 6y' + 4y = 2\cos(2x)$ (1)

b) Find den løsning til differentialligningen (1) som opfylder begyndelsesbetingelsen

$y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$

**Løsning:**

a) Ti 89: deSolve(2* $y''$ + 6*y'+4*y=sin(2*x),x,y)

Resultatet: $y = \dfrac{-\cos(2x)}{20} + \dfrac{3\cdot\sin(2x)}{20} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

Samtlige løsninger til differentialligningen

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{1}{20}\left(-\cos(2x) + 3\sin(2x)\right) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}}} \qquad (2)$$

b) Ti 89: deSolve(2* $y''$ + 6*y'+4*y=sin(2*x) and y(0)=0 and y'(0)=1,x,y)

Resultat: $y = \dfrac{-\cos(2x)}{20} + \dfrac{3\cdot\sin(2x)}{20} + \dfrac{4}{5}e^{-x} - \dfrac{3}{4}e^{-2x}$

Partikulær løsning:

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{20}\left(-\cos(2x) + 3\cdot\sin(2x)\right) + \frac{4}{5}e^{-x} - \frac{3}{4}e^{-2x}}}$$

Det ses, at den "homogene løsning" hurtigt går mod 0, så efter en vis tid har man en ren svingning.

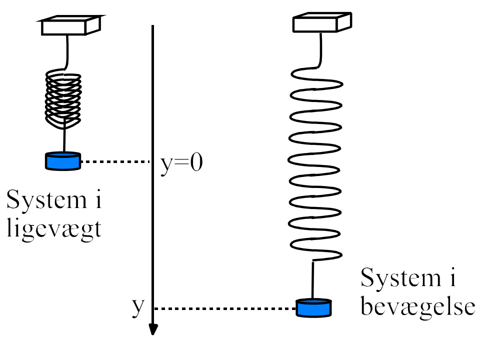
◆

## Anvendelser af differentialligning af 2. orden

Som eksempler på anvendelser kan nævnes forskellige typer svingninger, såsom det i nedenstående eksempel beskrevne bevægelse af et lod.
Et andet karakteristisk eksempel er kredsløb hvor der er indskudt en kondensator, og som er påtrykt en vekselspænding.

**Eksempel 13.15 Svingning med luftmodstand**

Et lod med massen $m$ er fastgjort til en fjeder. I startsituationen er systemet i ligevægt, idet den nedadgående tyngdekraft og den opadgående fjederkraft er lige store. (se figuren)
Vi trækker nu ned i loddet til en passende afstand, og slipper loddet. Loddet vil nu bevæge sig op og ned . Vi ønsker at bestemme loddets bevægelse som funktion af tiden $t$.
Lad os som på figuren indføre en $y$ - akse. Til ligevægtstillingen svarer $y = 0$, og til tiden $t$ er loddet placeret i en afstand $y(t)$ fra ligevægtstillingen (positiv når loddet ligger under og negativ når loddet ligger over ligevægtstillingen)
Ifølge Newtons anden lov er Kraft = masse · acceleration,




dvs. $K_1 = m\cdot\dfrac{d^2y}{dt^2}$ .

Ifølge Hookes lov er fjederkraften proportional med afstanden fra ligevægtstillingen, dvs. $K_2 = -k\cdot y$ , hvor $k > 0$

**Harmonisk svingning.** Antager vi at dæmpningen (f. eks. luftmodstanden) er forsvindende, vil $K_2$ være den eneste kraft der påvirker bevægelsen, dvs. $m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -k \cdot y(t) \Leftrightarrow m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + k \cdot y(t) = 0$

Dette er en homogen differentialligning med konstante koefficienter.

Sættes $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$ bliver løsningen $y(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Bevægelsen er en harmonisk svingning med en periode på $\frac{2\pi}{\omega_0}$. Legemet udfører følgelig $\frac{\omega_0}{2\pi}$ svingninger pr. sekund.

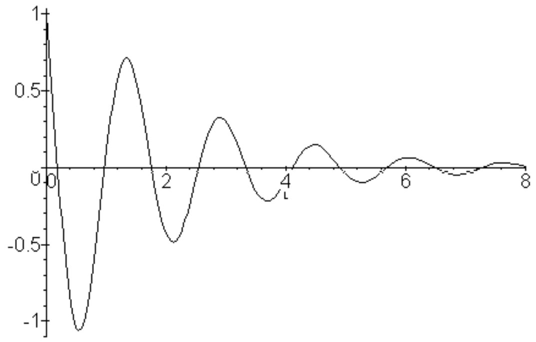
**Dæmpet svingning.** Antager vi at dæmpningen ikke er forsvindende (Eksempelvis fordi loddet er bredt, eller bevægelsen foregår i vand), så er dæmpningskraften $K_3$ (med tilnærmelse) proportional med loddets hastighed og modsat rettet bevægelsen, dvs. $K_3 = -c\frac{dy}{dt}$

Vi har nu differentialligningen $m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -k \cdot y(t) - c\frac{dy}{dt} \Leftrightarrow m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + k \cdot y(t) = 0$ . Vi har igen en homogen differentialligning.

Vi kan nu dele op i 3 tilfælde

I: **Dæmpede svingninger**.
Dette tilfælde indtræffer, når dæmpningen $c$ er så lille, at $c^2 < 4 \cdot m \cdot k$ Samtlige løsninger til differentialligningen bliver $y(t) = Ae^{-rt}\cos(\omega t + \varphi)$

Faktoren $e^{-rt}$ bevirker, at svingningernes amplitude nærmer sig til 0 (dæmpede svingninger, se figuren):




***D* = 0, Kritisk dæmpning.** Dette tilfælde indtræder, når dæmpningen $c$ er nået op på en bestemt kritisk størrelse, sådan at $c^2 = 4 \cdot m \cdot k$ hvorved svingninger netop ikke kan forekomme.

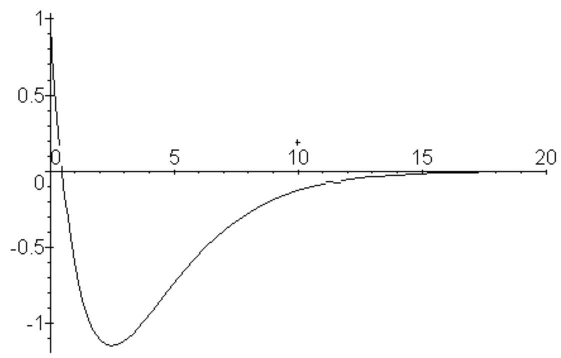
Samtlige løsninger er $y(t) = C_1 e^{-\frac{c}{2m}t} + C_2 \cdot t \cdot e^{-\frac{c}{2m}t}$

Det ses, at $y(t) \to 0$ for $t \to 0$

***D* > 0: Overkritisk dæmpning.** Dette tilfælde indtræffer, når dæmpningen $c$ er større end den kritiske værdi, sådan at $c^2 > 4 \cdot m \cdot k$

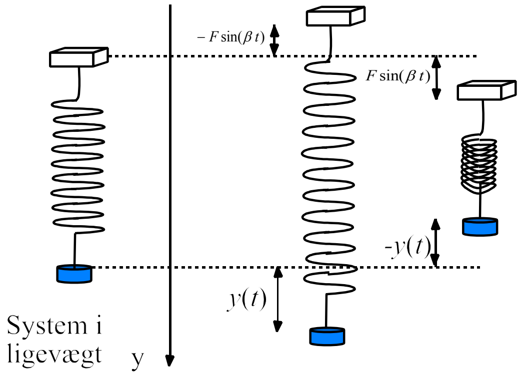
Samtlige løsninger til differentialligningen er $y(t) = C_1 e^{-r_1 t} + C_2 \cdot e^{-r_2 t}$

Det ses, at $y(t) \to 0$ for $t \to 0$ (se figuren)



### Eksempel 13.16. Tvungen svingning

I eksempel 13.14 så vi på et lod med massen $m$ der var fastgjort til en fjeder. Vi tænker os nu samme situation, men antager yderligere, at fjederens fastspændingspunkt bevæger sig frem og tilbage på en sådan måde, at afvigelsen fra det oprindelige fastspændingspunkt til tiden $t$ er $F\sin(\beta t)$ (se figuren),




Hermed ændrer fjederens længde med $y(t)-F\sin(\beta t)$ , og fjederkraften bliver $-k(y(t)-F\sin(\beta t))$ .
Bevægelsesligningen bliver nu: $m\cdot y''(t)+c\cdot y'(t)+k\cdot y(t)=k\cdot F\cdot\sin(\beta t)$

# Opgaver til kapitel 13

**13.1.** (uden hjælpemidler)

Lad der være givet differentialligningen $\frac{dy}{dx} = 3x^2(y+1)$ . $y > -1$

Om en løsning $y(x)$ til differentialligningen oplyses, at den går gennem punktet P= (1, 2)

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen til $y(x)$ i punktet P

b) Angiv monotoniforholdene for y(x).

**13.2** (uden hjælpemidler)

Lad der være givet differentialligningen $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2}$, $x > 0$

Om en løsning $y(x)$ til differentialligningen oplyses, at den går gennem punktet P= (1, $\frac{1}{2}$ )

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen til $y(x)$ i punktet P

b) Angiv monotoniforholdene for y(x).

**13.3** (uden hjælpemidler)

Undersøg om funktionen y = 2x+1 er løsning til differentialligningen $y' + 4y = 8x + 6$

**13.4** (uden hjælpemidler)

Lad der være givet differentialligningen $\frac{dy}{dx} = 2x \cdot (y-1)^2$, $y < 1$

a) Angiv monotoniforholdene for løsningerne til differentialligningen.

b) Bestem en ligning for tangenten til y(x) i punktet (1,0)

**13.5** (uden hjælpemidler)

Undersøg om funktionen $y(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ er løsning til differentialligningen

$$x\frac{dy}{dx} + y(x) = 3x^2, \quad x > 0 .$$

**13.6** a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$y' + 4y = 8$

b) Find og skitser de to løsningskurver, der går gennem henholdsvis punktet $(x, y)$=(1,2) og punktet $(x, y)$ = (0,3).

**13.7** a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$y' + 2y = 2x^2 + 5$

b) Find og skitser den løsningskurve, der går gennem punktet $(x, y)$=(0,3)

**13.8** a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$2y' + 3y = e^{-2x}$

b) Find den partikulære løsning, der går gennem punktet $(x, y)$=(0,2)

**13.9** a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$3y' + 2y = 4 \cdot \sin(2x)$$

b) Find den partikulære løsning, der går gennem punktet $(x, y)=(0,-\frac{3}{5})$

c) Omskriv løsningen i spørgsmål b) til formen $y = A\sin(2x+\varphi)$

**13.10** Lad $y(t)$ være antallet af individer bakterier i en bakteriekultur til tiden $t$ [dage]

1) Som arbejdshypotese har man at individantallet øges med en hastighed , der er proportional med det øjeblikkelige antal af individer $y(t)$ (målt i tusinder). Lad proportionalitetsfaktoren være $k$.
   a) Opstil en differentialligning til bestemmelse af $y(t)$.
   b) Find $y(t)$ i det tilfælde, hvor k = 1.5 og antallet af individer til tiden $t = 0$ er 100.
2) Da de målte tal ikke stemmer overens med de beregnede, opstiller man nu den hypotese, at på grund af mangel på næring, bliver faktoren $k$ erstattet af størrelsen $b - a \cdot y$, hvor konstanterne $a$ og $b$ er positive.
   a) Opstil en differentialligning til bestemmelse af $y(t)$.
   b) Find $y$(t) i det tilfælde, hvor $a = 2 \cdot 10^{-4}$ og $b$ =3.4 og antallet af individer til tiden $t$ = 0 er 100.
   c) Skitser ovennævnte løsningskurve.

**13.11** Man har gennem længere tid undersøgt længden L (i cm) af en bestemt type haletudser. Man fandt, at i middel opfylder længden L som funktion af tiden (i døgn) differentialligningen

$$L'(t) = k \cdot L(t) \cdot \big(M - L(t)\big),$$

hvor $k$ er en konstant og $M$ er den øvre grænse for længden af en haletudse.
Det antages, at en haletudse højst kan have længden 12 cm, og at den til tiden t = 0 har en middellængde på 0.5 cm.
Efter 10 døgn finder man, at haletudserne i middel har længden 10 cm.
a) Find på den baggrund konstanten $k$.
b) Beregn haletudsens længde efter 15 døgn.
c) Find det tidspunkt hvor haletudserne vokser hurtigst.

**13.12** Eksperimenter viser, at den hastighed hvormed et varmt stykke metal afkøles i en luftstrøm er tilnærmelsesvis proportional med $T - T_{luft}$, hvor T er legemets temperatur og $T_{luft}$ er luftens temperatur .
Lad temperaturen $T_{luft}$ i luftstrømmen konstant være $30^0$ C.
Metallets temperatur er $100^0$ C til tiden $t = 0$ og $70^0$ C til tiden $t = 3$ min.
Hvornår er legemets temperatur blevet $40^0$ C.

**13.13** Et R-L - kredsløb har en vekselspændingskilde E , en indskudt modstand R og en spole med selvinduktion L i serie.
Idet $i = i(t)$ betegner strømstyrken til tiden $t > 0$ og den "påtrykte" elektromotoriske kraft $E = E_m \cos(\omega t)$ gælder følgende differentialligning: $L\frac{di}{dt} + R \cdot i = E_m \cos(\omega t)$ .

a) Find, idet R = 120 Ohm, L = 30 Henry, $E_m$=220 Volt og $\omega = \frac{R}{L}$ , den løsning til differentialligningen, for hvilken $I(0) = 0$.

b) For $t$ stor vil resultatet nærme sig en ren svingning. Angiv amplituden for denne svingning.

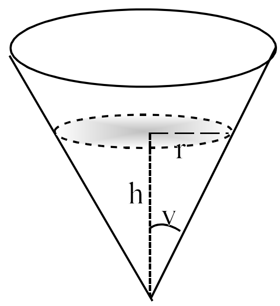
**13.14** En cylindrisk beholder med radius $r$ er fyldt med en væske, der står i en højde på 4 m.
Til tidspunktet t = 0 timer åbnes en ventil i bunden af cylinderen, hvorved væsken løber ud.
Det vides, at der strømmer $c \cdot \sqrt{h}$ m$^3$/time ud , hvor c er en konstant.

a) Idet der gælder, at den hastighed hvormed rumfanget i beholderen formindskes er - $c \cdot \sqrt{h}$ , skal man opstille en differentialligning for den hastighed, hvormed højden $h$ ændrer sig.

b) Det oplyses nu, at ovennævnte differentialligning kan skrives $\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}$ hvor $k$ er en positiv konstant.
Efter 1 timer's forløb er væskehøjden faldet til 1 m.
Find ved løsning af differentialligningen, højden $h$ som funktion af $t$.

c) Hvornår er beholderen tom?

**13.15** En tragt som vist på figuren indeholder væske.
I starten er væskehøjden i tragten h = 4 m..
Til tidspunktet t = 0 timer åbnes en ventil i bunden af tragten, hvorved væsken løber ud.
Det vides, at der strømmer $c \cdot \sqrt{h}$ m$^3$/time ud , hvor c er en konstant.




a) Rumfanget af en kegle med højde h og radius i grundfladen $r$ er V = $\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$
Idet åbningsvinklen i tragten er 2v , skal man udtrykke rumfanget ved h og vinklen v

b) Idet der gælder, at den hastighed hvormed rumfanget i beholderen formindskes er - $c \cdot \sqrt{h}$ ,skal man opstille en differentialligning for den hastighed, hvormed højden $h$ ændrer sig.

c) Det oplyses nu, at ovennævnte differentialligning kan skrives $\frac{dh}{dt} = -k \cdot h^{-\frac{3}{2}}$ ,hvor $k$ er en positiv konstant.
Efter 1 timer's forløb er væskehøjden faldet til 1 m.
Find ved løsning af differentialligningen, højden $h$ som funktion af $t$.

d) Hvornår er beholderen tom?

**13.16** Find den fuldstændige løsning til hver af differentialligningerne

1) $y'' - 4 \cdot y' + 4 \cdot y = 0$

2) $3 \cdot y'' - 6 \cdot y' + 30 \cdot y = 0$

**13.17** Find den løsning til differentialligningen $\frac{1}{4} \cdot y'' - 2 \cdot y' + 5 \cdot y = 0$, der opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = \sqrt{2}$ og $y'(0) = 2\sqrt{2}$ .

**13.18** Find den fuldstændige løsning til differentialligningen
$y'' + 5y' + 4y = e^{-x}$

**13.19** a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen $y'' + y' - 2y = 6 \cdot e^{x} - 4x$

b) Find den partikulære løsning, som opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = 1$ og $y'(0) = 2$ .

# 14. Rumgeometri

## 14.1 Vektorer i rummet.

Vi vil i dette kapitel antage at repræsentanterne for vektorerne er "pile" der er beliggende i "det tredimensionale" rum. Et eksempel herpå kunne være hastighedsvektoren for en partikel i rummet.

Definitionerne i afsnit 3.1 (af længde, enhedsvektor osv.) og regnereglerne i afsnit 3.2 (addition, subtraktion, multiplikation med tal) gælder også for disse vektorer.

### Eksempel 14.1. Parallelepipedum

Ved et parallelepipedum ABCD-EFGH forstås et legeme begrænset af parallelogrammer (se figur 14.1)

Idet $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ og $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$ skal man udtrykke diagonalvektorerne $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{EC}$ og $\overrightarrow{FD}$ ved $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$.

**Løsning:**

Af indskudssætningen fås

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$
$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$
$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$
$$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} - \vec{c} + \vec{b}$$

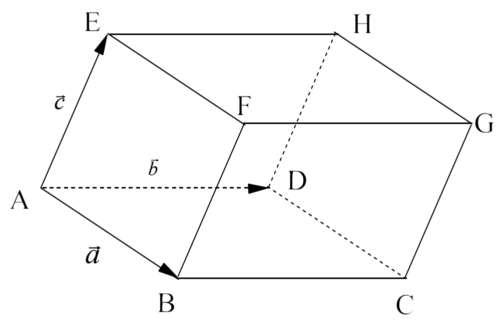



**Fig. 14.1.** *Parallelepipedum*

◆

## 14.2. Koordinatsystem i rummet.

Lad $\vec{a}$ ,$\vec{b}$ og $\vec{c}$ være 3 egentlige vektorer i rummet, som er tegnet med begyndelsespunkt i samme punkt, og som ikke ligger i samme plan.

De tre vektorer $\vec{a}$ ,$\vec{b}$ og $\vec{c}$ nævnt i denne rækkefølge siges at være i **højrestilling**, hvis følgende regel gælder:
Omslutter man vektoren $\vec{c}$ med højre hånd (se figur 14.2) og lader fingrene følge rundt samme vej som den mindste drejning, der fører $\vec{a}$ over i $\vec{b}$ , vil tommelfingeren pege i $\vec{c}$ 's retning.

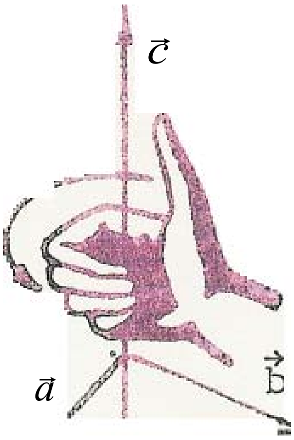



**Fig.14.2.***Højrestilling*

Et (sædvanligt) retvinklet koordinatsystem i rummet er givet ved et begyndelsespunkt O , og 3 enhedsvektorer (kaldet basisvektorer) som to og to står vinkelrette på hinanden. Basisvektorerne benævnes sædvanligvis $\vec{i}$, $\vec{j}$ og $\vec{k}$ og er i denne rækkefølge placeret i højrestilling.

De tre orienterede linier der går gennem O og har $\vec{i}$, $\vec{j}$ og $\vec{k}$ som retningsvektorer kaldes koordinatsystemets akser, og benævnes henholdsvis *x*, *y* og *z* - aksen. (eller (1), (2) og (3) - aksen).

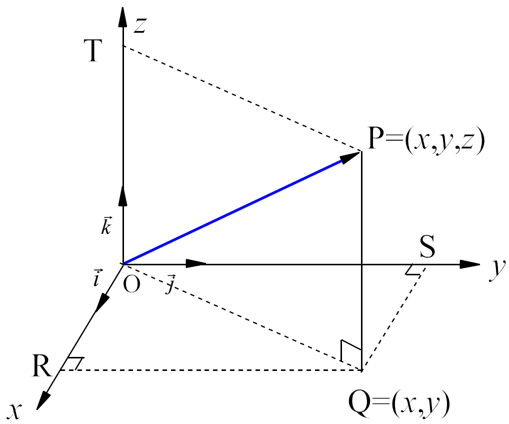



**Fig. 14.3.** *Koordinatsystem*

Punktet P projiceres ned i *xy* - planen i punktet Q. I *xy* - planen projiceres Q ind på x - aksen i R og på y - aksen i punktet S. Desuden projiceres P ind på z - aksen i punktet T. (jævnfør figur 14.3). Indskudsreglen for vektorer giver $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OT}$

Da $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OS}$ og $\overrightarrow{OT}$ er parallelle med henholdsvis $\vec{i}$, $\vec{j}$ og $\vec{k}$ fås

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

Man siger, at P har koordinaterne (*x*, *y*, *z*) og vektoren $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

Regning med vektorernes koordinater foregår på samme måde som det blev vist i det plane tilfælde (i afsnit 3.3). Der gælder således

Hvis $A=(a_1,a_2,a_3)$ og $B=(b_1,b_2,b_3)$, så er $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \\ b_3-a_3 \end{pmatrix}$ og $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

## Tetraeder

Ved et tetraeder forstås et legeme begrænset af fire trekanter (jævnfør figur 14.4).
Ligesom en trekant er en grundlæggende figur i plangeometrien er et tetraeder en grundlæggende figur i rumgeometrien.

Man kan vise, at rumfanget V af et tetraeder er $V=\frac{1}{3}\cdot G\cdot h$, hvor G er grundfladens areal og h er højden.

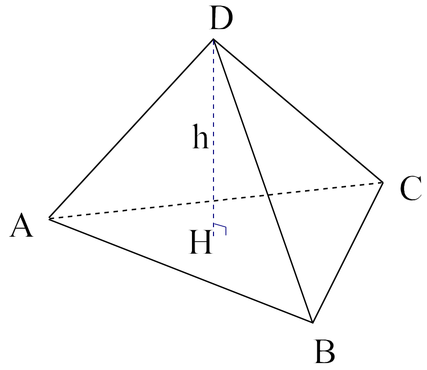



**Fig. 14.4.** *Tetraeder*

## Eksempel 14.2. Tetraeder.

I tetraederet ABCD er A = (0,1,0), B=(0,4,0) og C = (2,2,0).
Idet M er midtpunktet af BC, er D bestemt ved, at D har positive koordinater, at DM står vinkelret på $xy$ - planen, og $|DM|=3$

Skitser tetraederet, og find D's koordinater.

**Løsning:**

Tetraederet er skitseret på figur 14.5. Idet

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-2 \\ 0-0 \end{pmatrix}==\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

fås $\underline{\underline{D=(1,3,3)}}$

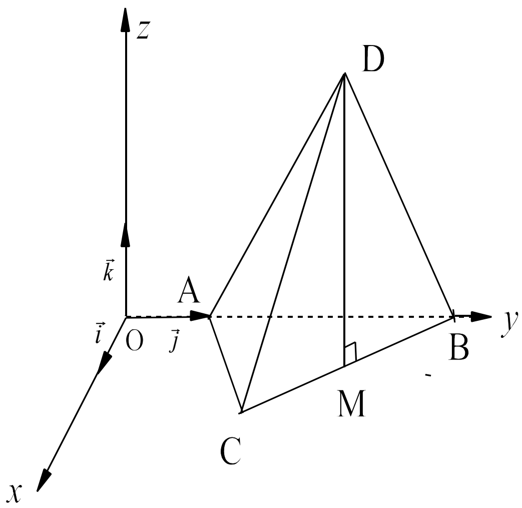



**Fig. 14.5.** *Skitse af tetraeder*

## 14.3 Skalarprodukt.

Skalarprodukt defineres på ganske samme måde som i planen.

**Definition af skalarprodukt:**

*Hvis* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ *og* $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ *er to vektorer i rummet, defineres skalarproduktet* $\vec{a} \cdot \vec{b}$ *ved*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

For skalarproduktet gælder derfor regler, der er ganske mage til de tilsvarende i planen.
Vi vil derfor ikke gentage dem her, men henvise til afsnit 3.4, 3.6 og det følgende eksempel.

**Eksempel 14.3 Anvendelse af skalarprodukt**

Givet punkterne A = (1,2,-3), B = (2, -2 , 3) og C = (3,4,5).

1) Find skalarproduktet $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

2) Find vinklen mellem $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

**Løsning:**

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -2-2 \\ 3-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-2 \\ 5-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \cdot 2 - 4 \cdot 2 + 8 \cdot 6 = 42$

2) Vinklen mellem 2 vektorer findes af formlen i sætning 3.5.

$$\cos v = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{42}{\sqrt{53}\sqrt{72}} = \frac{7}{\sqrt{106}} = 0.6799 . \quad \underline{\underline{v = 47^0 16}}$$

**TI89:** CATALOG

1) dotP([1,-4,6],[2,2,8]) Resultat 48

2) Idet $\cos v = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \vec{e}_a \cdot \vec{e}_b$, hvor $\vec{e}_a$ og $\vec{e}_b$ er enhedsvektorer fås

$\cos^{-1}$( dotP(unitV([1,-4,6]),unitV([2,2,8]))) Resultat $47^0 16$

## 14.4. Linier i rummet.

Lad $l$ være en ret linie i rummet, som går gennem et fast punkt $P_0$ og er parallel med en egentlig vektor $\vec{l}$ . For vilkårlige punkter P på linien $l$ og kun for disse punkter vil der da gælde: $\overrightarrow{P_0P} = t\,\vec{l}$ , hvor $t$ er et reelt tal. For hver værdi af t (kaldet parameteren) svarer der ét punkt på linien og omvendt.

Af indskudssætningen fås $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{l}$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{l}$ , kaldes en **parameterfremstilling for linien *l*, med parameteren t (som er et reelt tal**).
$\vec{l}$ kaldes liniens **retningsvektor**.

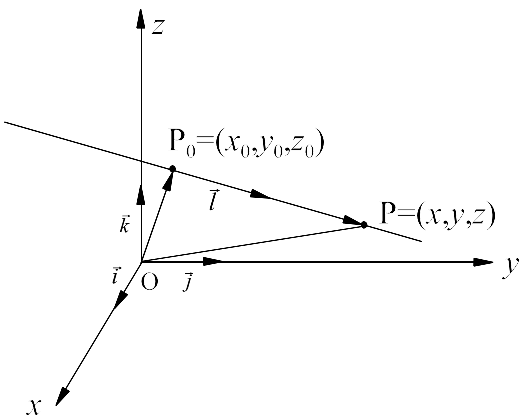



**Fig.14.6.** *Ret linie l*

Lad vektoren $\vec{l} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ og $P_0=(x_0, y_0, z_0)$. (jævnfør figur 14.6)

En **parameterfremstillingen for *l*** i koordinater bliver da $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad t \text{ reelt tal}$

En linie har mange parameterfremstillinger, da man dels jo kan vælge forskellige faste punkter på $l$, dels vil alle vektorer proportionale med $\vec{l}$ kunne benyttes som retningsvektorer.

**Eksempel 14.4. Linies parameterfremstilling.**
1) Find en parameterfremstilling for linien $l$ gennem punkterne A=(3, 1, 4) og B = (2, 1, -3).
2) Angiv en parameterfremstilling for liniestykket AB
**Løsning:**

1) Da $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 1-1 \\ -3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ og et punkt på linien er A er en parameterfremstilling for $l$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad t \in R$$

2) Da t = 0 svarer til punktet A og t = 1 svarer til punktet B, har liniestykket AB parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$ ◆

Man kan opfatte parameterfremstillingen for $l$ som en beskrivelse af en jævn retlinet bevægelse i rummet, hvor $t$ angivet tiden. Bevægelsens hastighedsvektor er $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

**Eksempel 14.5. Retlinet bevægelse.**

Lad $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ beskrive et legeme L's retlinede bevægelse i rummet, hvor $t$ angiver tiden og hastigheden måles i m/s.

a) Find vejlængden (i m) som legemet gennemløber i 3 sekunder.
b) Find den tid det tager for L at gennemløbe en strækning på 90 m.

**Løsning:**

a) Farten er $\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$ m/s I 3 sekunder gennemløbes $\underline{\underline{18 \text{ m.}}}$

b) 90 m gennemløbes på $\dfrac{90}{6} = 15$ s

### Skæring mellem rette linier

I rummet vil to rette linier som ikke er parallelle ikke nødvendigvis skære hinanden. Eksempelvis vil to linier, der indeholder to modstående sider i et tetraeder ikke skære hinanden.
Linier, der ikke er parallelle og ikke skærer hinanden kaldes **vindskæve.**

### Eksempel 14.6. Skæring mellem linier

Lad der være givet linierne $l$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ og $m$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Vis, at linierne $l$ og $m$ er vindskæve.

**Løsning:**

Retningsvektorerne $\vec{l} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ og $\vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ er ikke parallelle (ikke proportionale)

Et eventuelt skæringspunkt mellem $l$ og $m$ må ligge på begge linier, dvs. at der må kunne findes værdier af $s$ og $t$ så

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ eller } \begin{cases} 1-2t=5+s \\ 3+6t=4+2s \\ 4-5t=2-s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s+2t=-4 \\ 6t-2s=1 \\ s-5t=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=-4-2t & (1) \\ 2s=6t-1 & (2) \\ s=-2+5t & (3) \end{cases}.$$

Indsættes ligning (1) i ligning (2) fås $2(-4-2t)=6t-1 \Leftrightarrow 10t=-7 \Leftrightarrow t=-\frac{7}{10}$

Indsættes $t=-\frac{7}{10}$ i ligning (1) fås $s=-4-2\left(-\frac{7}{10}\right) \Leftrightarrow s=-\frac{26}{10}$

Indsættes disse værdier i ligning (3) fås $-\frac{26}{10}=-2-5\left(-\frac{7}{10}\right) \Leftrightarrow -\frac{26}{10}=\frac{15}{10}$

Da der ikke findes parameterværdier der tilfredsstiller alle tre ligninger skærer de to linier **ikke** hinanden. <u>Linierne er vindskæve.</u>

**TI 89**

F2: solve(1-2t=5+x and 3+6t=4+2x and 4-5t=2-x,{t,x}) Resultat: false

## Vinkel mellem linier

Ved vinklen mellem to linier forstås den spidse vinkel mellem liniernes retningsvektorer.
Lad liniernes retningsvektorer være $\vec{l}$ og $\vec{m}$

I afsnit 3.6 fandt vi, at den spidse vinkel v er $\cos v = \dfrac{|\vec{l}\cdot\vec{m}|}{|\vec{l}||\vec{m}|}$

## Eksempel 14.7. Vinkel mellem linier

Lad der være givet linierne $l$: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$ og $m$: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-8\\-9\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\5\\3\end{pmatrix}$

a) Vis, at linierne skærer hinanden, og find koordinaterne til skæringspunktet S.
b) Find vinklen mellem $l$ og $m$.

**Løsning:**

a) Et eventuelt skæringspunkt mellem $l$ og $m$ må ligge på begge linier, dvs. at der må kunne findes værdier af $s$ og $t$ så

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-8\\-9\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\5\\3\end{pmatrix} \text{ eller } \begin{cases}3+2t=5-2s\\5+3t=-8+5s\\2+5t=-9+3s\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2s+2t=2\\3t-5s=-13\\5t-3s=-11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}s=1-t & (1)\\3t=5s-13 & (2)\\5t=3s-11 & (3)\end{cases}$$

Indsættes ligning (1) i ligning (2) fås $3t = 5(1-t)-13 \Leftrightarrow 8t=-8 \Leftrightarrow t=-1$
Indsættes $t=-1$ i ligning (1) fås $-3 = 5s-13 \Leftrightarrow s=2$
Indsættes disse værdier i ligning (3) fås $5(-1) = 3\cdot 2-11 \Leftrightarrow -5=-5$
De to linier skærer hinanden i det til t = -1 svarende punkt S = ( 1, 2, -3)
Som kontrol kan vi se, at indsættes s = 2 fås samme punkt.

**TI 89** a) F2: Solve(3+2t=5-2x and 5+3t=-8+5x and 2+5t=-9+3x,{t,x}) Resultat: t=-1 and x = 2

b) Lad en vinkel mellem $l$ og $m$ være v. Vi har da

$$\cos v = \frac{|\vec{l}\cdot\vec{m}|}{|\vec{l}||\vec{m}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\5\\3\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{4+9+25}\sqrt{4+25+9}} = \frac{-4+15+15}{\sqrt{38}\sqrt{38}} = \frac{26}{38} \quad . \quad \underline{\underline{v = 46.83^0}}$$

**TI 89**

b) Idet $\cos v = \dfrac{\vec{l}\cdot\vec{m}}{|\vec{l}|\cdot|\vec{m}|} = \vec{e}_l\cdot\vec{e}_m$, hvor $\vec{e}_l$ og $\vec{e}_m$ er enhedsvektorer fås

$\cos^{-1}$( dotP(unitV([2,3,5]),unitV([-2,5,3]))) Resultat: $46.83^0$ ◆

## 14.5 Vektorprodukt.

Ved mange anvendelser har man brug for en anden form for produkt af to vektorer, hvor resultatet er en **vektor** (og ikke et tal). Dette produkt kaldes vektorproduktet (eller kryds-produktet ) af de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ og skrives $\vec{a} \times \vec{b}$ . Man siger kort "a kryds b".

**Definition af vektorprodukt.**

*Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige, ikke-parallelle vektorer.*
*$\vec{a} \times \vec{b}$ er da en **vektor**,*

1) *hvis retning er bestemt ved, at $\vec{a} \times \vec{b}$ står vinkelret på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$ , og $\vec{a}$ , $\vec{b}$ og $\vec{a} \times \vec{b}$ i denne rækkefølge er i højrestilling,*
2) *hvis længde er arealet af det parallelogram, der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$*
   *dvs.* $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin v$ *hvor* v *er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$* $(0 \le v \le \pi)$.

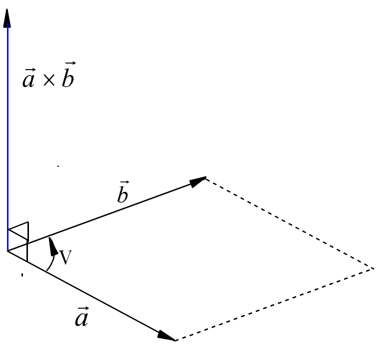
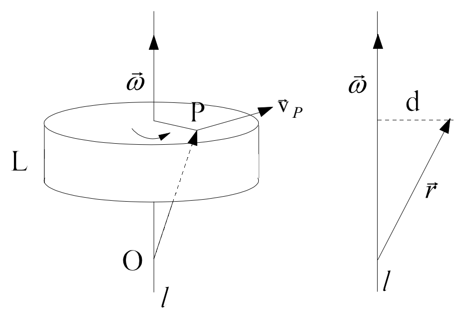



**Fig.14.7.** *Vektorprodukt*

**Eksempel 14.8. Rotation.**

Lad der være givet et stift legeme L, som roterer om en akse *l* med vinkelhastigheden $\omega$. Fra et vilkårligt punkt O på *l* afsættes en vektor $\vec{\omega}$ , hvis længde er lig vinkelhastigheden, og hvis retning er fastlagt således, at den sammen med drejningen om *l* bestemmer en "højreskruning" (se figur 14.7).

Til et givet tidspunkt har hver partikel P i legemet L en hastighed, der tænkes afsat som en vektor $\vec{v}_P$ ud fra punktet P. Det er klart, at $|v_P| = \omega \cdot d$ , hvor d er afstanden fra P til aksen *l* (se figur 14.7). Idet d er højden i det af $\vec{\omega}$ og $\vec{r} = \vec{OP}$ udspændte parallelogram, har dette parallelogram arealet $\omega \cdot d$ , og dermed er $|\vec{v}_P| = |\vec{\omega} \times \vec{r}|$. Da $\vec{v}_P$ også er ensrettet med $\vec{\omega} \times \vec{r}$ , er hermed vist $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}$ .



**Eksempel 14.9. Momentvektor**

Lad $\vec{k}$ være en kraft, der har angrebspunkt i punktet P.
Kraftens momentvektor $\vec{m}$ om et punkt Q defineres ved

$\vec{m} = \overrightarrow{QP} \times \vec{k}$

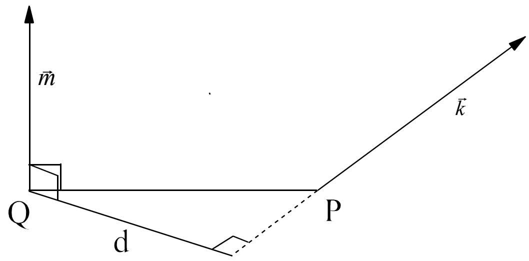



**Fig. 14.8.** *Momentvektor*

## Regneregler for vektorproduktet.

Lad $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ være vektorer i rummet og $t$ et reelt tal. Da gælder

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ Den kommutative lov gælder **ikke.**

2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ Den associative lov gælder **ikke.**

3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ Den distributive lov gælder.

4) $t(\vec{a} \times \vec{b}) = (t\vec{a}) \times \vec{b}$ Den distributive lov gælder.

Bevis:
(1) følger umiddelbart af definitionen.
(4) følger også af definitionen, ved at gennemprøve de forskellige muligheder $t > 0$, $t = 0$, $t < 0$.
(2) gælder ikke for alle vektorer, thi hvis $\vec{i}$, $\vec{j}$ og $\vec{k}$ er basisvektorer i et koordinatsystem, er $(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j} = \vec{0}$ mens $\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$.
(3) har et noget vanskeligere bevis:

Er $\vec{a} = \vec{0}$ gælder (3) umiddelbart. Er $\vec{a}$ en egentlig vektor og er $\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ er det tilstrækkeligt at vise

$$\vec{e} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{e} \times \vec{b} + \vec{e} \times \vec{c} \qquad (5)$$

da vi blot har divideret alle led i (3) med $|\vec{a}|$.

Lad nu $\alpha$ være en plan vinkelret på $\vec{e}$, og $\vec{v}$ en vilkårlig vektor (jævnfør figur 14.9)

Lad endvidere $\vec{v}_\alpha$ være projektionen være projektionen af $\vec{v}$ på $\alpha$.

Vi vil så først vise, at $\vec{e} \times \vec{v} = \vec{e} \times \vec{v}_\alpha$.

Er $\vec{v}$ nulvektoren, eller $\vec{v}$ parallel med $\vec{e}$ er begge produkter lig $\vec{0}$

I alle andre tilfælde vil det af $\vec{e}$ og $\vec{v}$ udspændte parallelogram have samme areal som det af $\vec{e}$ og $\vec{v}_\alpha$ udspændte rektangel. De to vektorer har altså samme længde, og som figur 14.9 viser, har de også samme retning. Da $|\vec{e} \times \vec{v}_\alpha| = |\vec{v}_\alpha|$ er $\vec{e} \times \vec{v}_\alpha$ simpelt hen $\vec{v}_\alpha$'s tværvektor $\hat{v}_\alpha$ i planen $\alpha$. Vi har følgelig $\vec{e} \times \vec{v} = \vec{e} \times \vec{v}_\alpha = \hat{v}_\alpha$

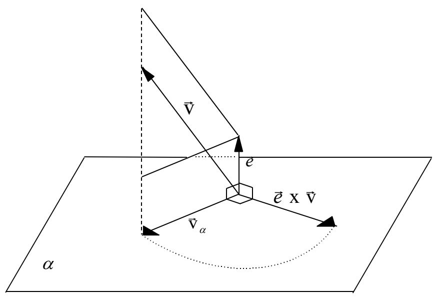



**Fig 14.9.** *Tværvektor i plan*

Anvendes dette på ligning (5) fås

$$\vec{e} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{e} \times \vec{b} + \vec{e} \times \vec{c} \Leftrightarrow \vec{e} \times (\vec{b} + \vec{c})_\alpha = \vec{e} \times \vec{b}_\alpha + \vec{e} \times \vec{c}_\alpha \Leftrightarrow \widehat{(b+c)}_\alpha = \hat{b}_\alpha + \hat{c}_\alpha$$

Den sidste ligning er sand ifølge regning med tværvektorer.

Reglerne (3) og (4) sikrer, at vi kan multiplicere to flerleddede størrelser på sædvanlig vis. Reglerne (1) og (2) viser, at man ikke må "ombytte" faktorer, og ikke hæve "gange" parenteser.

### Eksempel 14.10. Regneregler.

Beregn $(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})\times(\vec{a}-\vec{b})$.

**Løsning:**

$$(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})\times(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\times\vec{a}+2(\vec{b}\times\vec{a})-\vec{c}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}-2\vec{b}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{b} = 3(\vec{b}\times\vec{a})-\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}$$

◆

### Sætning 14.1. Vektorprodukts koordinater.

*Lad* $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ *og* $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$. *Da gælder* $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_3 & b_3\\a_1 & b_1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$.

En huskeregel er,

at 1. koordinaten i $\vec{a}\times\vec{b}$ er determinanten man får, hvis man ser bort fra 1. række i $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$,

2. koordinaten er med modsat fortegn den determinant man får hvis man ser bort fra anden række og 3. koordinaten er den determinant man får, hvis man ser bort fra 3. række.

Bevis: Idet $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ og $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$, fås ved benyttelse af regnereglerne (1), (3) og (4) samt relationerne $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$, at

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

◆

### Eksempel 14.11. Vektorprodukt.

Lad A = (2, 3, -1), B = (-1, 4, 4) og C = (1, 2, 3).

a) Beregn vektorproduktet $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

b) Find arealet af $\Delta$ ABC.

**Løsning:**

a) Idet $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-3\\1\\5\end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}$ er $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3\\1\\5\end{pmatrix}\text{ x }\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\7\\4\end{pmatrix}$

b) Trekant ABC's areal er $T=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{9^2+7^2+4^2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{146}}}$

TI 89: CATALOG:

a) crossP([-3,1,5],[-1,-1,4]) Resultat [9 7 4 ]

b) 1/2* $\sqrt{\ }$ (dotP([9, 7, 4 ],[9, 7, 4 ])) Resultat $\frac{1}{2}\sqrt{146}$

◆

**Eksempel 14.12. Kræfter.**
Lad der være givet et stativ af stænger af form som et tetraeder. Hjørnespidserne A, B og C tænkes bundet til et vandret plan, hvori de kan forskydes gnidningsfrit (se figur 14.10)
Stativet har sådanne dimensioner, at vælges denne plan som *xy* - plan og punktet A som begyndelsespunkt i et retvinklet koordinatsystem, får hjørnespidserne koordinaterne
A = (0, 0, 0), B=(4, 0, 0), C= (0, 5, 0) og D = (1, 6, 3) (se figur 4.11).

Idet vi tænker os punktet D belastet og dermed påvirket af en lodret kraft $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}$, $k > 0$.

skal vi finde de reaktionskræfter $\vec{k}_A$, $\vec{k}_B$ og $\vec{k}_C$. der virker i understøtningspunkterne A, B og C, således at stativet er i ligevægt..

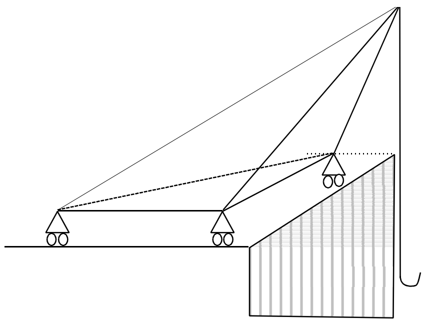


**Fig. 14.10**. *Kran*

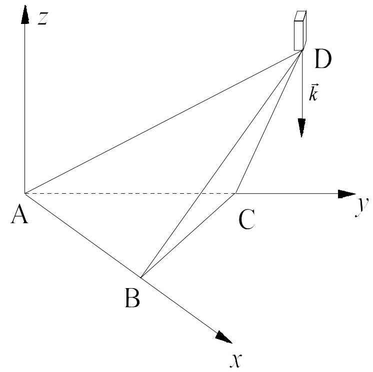



**Fig. 14.11.** *Idealiseret kran*

**Løsning:**
Da der ingen gnidning er, må reaktionskræfterne være lodrette.

Sættes $\vec{k}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$, $\vec{k}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ og $\vec{k}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ fås ifølge statikken, at ligevægten kræver

$$\begin{cases} \vec{k}_A + \vec{k}_B + \vec{k}_C + \vec{k} = \vec{0} & \text{(kræfternes sum er nul)} \\ \overrightarrow{AB} \times \vec{k}_B + \overrightarrow{AC} \times \vec{k}_C + \overrightarrow{AD} \times \vec{k} = \vec{0} & \text{(moment om } A \text{ er nul)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c - k = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 4b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6k \\ -k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} = \begin{cases} a = -\frac{9}{20}k \\ b = \frac{1}{4}k \\ c = \frac{6}{5}k \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\vec{k}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{9}{20}k \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4}k \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{6}{5}k \end{pmatrix}}}$$

◆

**Eksempel 14.13.Normalvektor.**
Find koordinaterne til en enhedsvektor $\vec{e}$ , som er vinkelret(ortogonal) på begge vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ og rettet således, at $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{e}$ i denne rækkefølge danner et højresystem.

**Løsning:**

Vi har $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 3\sqrt{4+4+1} = 9$ $\vec{e} = \dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|} = \dfrac{3\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{9} = \underline{\underline{\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

TI 89: CATALOG:
unitV( crossP([-2,1,2],[1,-2,2]) ) Resultat [2/3 2/3 1/3 ]

## 14.6. Planer i rummet.

Lad $P_0$ være et givet punkt og $\vec{n}$ en given egentlig vektor.
Ved en plan $\alpha$ gennem $P_0$ med vektoren $\vec{n}$ som normalvektor forstås mængden af punktet P for hvilken vektoren $\overrightarrow{P_0 P}$ står vinkelret på vektoren $\vec{n}$ (se figur 14.12).

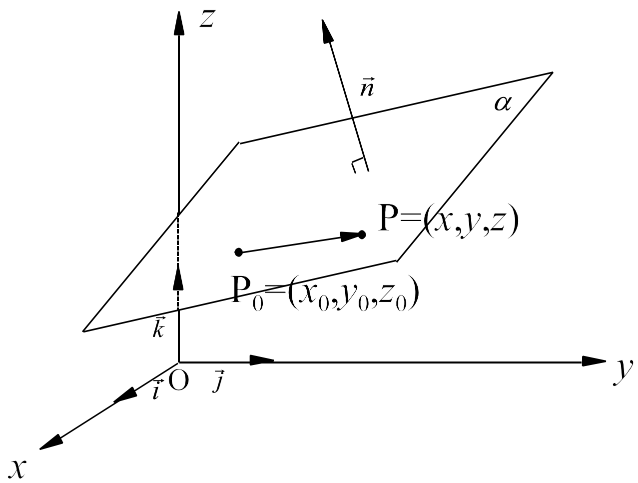



**Fig 14.12.** *Plan*

Lad punktet $P_0=(x_0, y_0, z_0)$ og $\vec{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (jævnfør figur 14.2).

Da gælder $\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ (1)

Ligningen (1) kaldes **planens ligning**. Vektoren $\vec{n}$ kaldes **planens normalvektor**
Enhver plan kan altså fremstilles ved en ligning af første grad $ax+by+cz+d=0$ ,
Omvendt vil enhver ligning $ax+by+cz+d=0$ hvor $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ fremstille en plan med vektoren $\vec{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ som normalvektor.

### Eksempel 14.14. Ligning for plan.

Find ligningen for planen gennem punkterne A = (1, 2, 1), B = (0, -1, 2) og C = (-1, -2, 2).
**Løsning:**

En normalvektor til planen er $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Planens ligning er da: $1(x-1)-1(y-2)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x-y-2z+3=0}}$ ◆

### Vinkel mellem to planer.

Ved vinklen mellem to planer forstås vinklen mellem deres normalvektorer. Denne vinkel kan enten være spids eller stump. Er intet andet nævnt vil man sædvanligvis mene den spidse vinkel.

Denne spidse vinkel v kan beregnes af $\cos v=\dfrac{|\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|}$. (se figur 14.13)

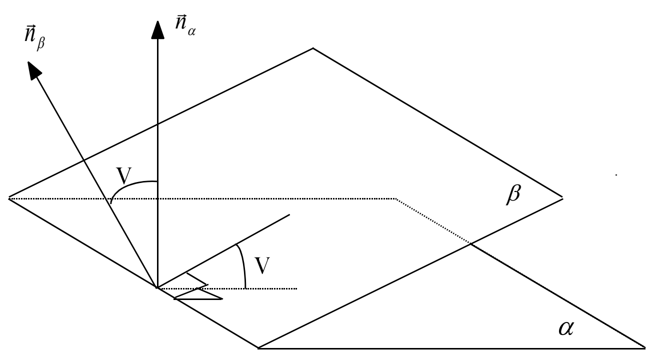



**Fig 14.13.** *Vinkel mellem planer*

I en rumlig figur eksempelvis et tetraeder kan man ønske at finde den <u>indvendige</u> vinkel i figuren, og denne kan jo godt være stump.

Ønsker man eksempelvis i tetraederet ABCD (se figur 14.14) at bestemme den indvendige vinkel mellem planerne ABD og BCD, så skal man vælge normalvektorerne således at den ene normalvektor peger <u>indad</u> i figuren og den anden <u>udad</u> figuren.

$\vec{n}_{BCD} = \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}$ peger her ind i figuren

$\vec{n}_{ABD} = \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BA}$ peger ud af figuren

Den indvendige vinkel i tetraederet er så

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n}_{BCD} \cdot \vec{n}_{ABD}}{|\vec{n}_{BCD}||\vec{n}_{ABD}|}\right)$$

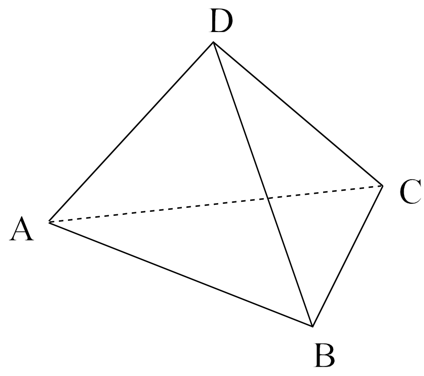



**Fig. 14.14.** *Tetraeder*

## Eksempel 14.15. Vinkel mellem planer.

Lad hjørnerne i et tetraeder ABCD have koordinaterne

A = (1, 2, 1), B = (0, -1, 2), C = (-1, -2, 2) og D = (2, 3, 5)

Find den indvendige vinkel i tetraederet ved kanten AB

**Løsning**:

Ifølge eksempel 2.14 har planen ABC normalvektoren $\vec{n}_1 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Planen ABD har normalvektoren $\vec{n}_2 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\cos v = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{-13-3+8}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{169+1+4}} = -0.2476 \quad \underline{\underline{v = 104.34^0}}$$

**TI89**:

1) Idet $\cos v = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \vec{e}_a \cdot \vec{e}_b$, hvor $\vec{e}_a$ og $\vec{e}_b$ er enhedsvektorer fås

cos$^{-1}$( dotP(unitV([1,-1,2]),unitV([-13,3,-4])) Resultat: 104.34

### Afstand mellem punkt og plan $\alpha$

Ved afstanden mellem et punkt og en plan forstås afstanden $|PP_\alpha|$, hvor $P_\alpha$ er P's projektion på planen $\alpha$ (se figur 14.15)

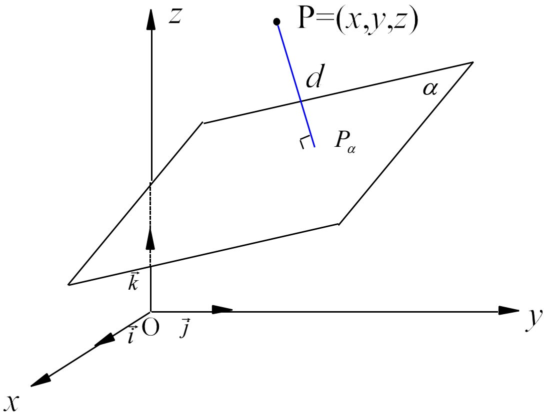



**Fig. 14.15** . *Afstand d mellem P og plan*

Afstanden findes lettest ved benyttelse af sætning 14.2.

### Sætning 14.2. Afstandsformel.

*Punktet $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 's afstand fra planen med ligningen* $ax + by + cz + d = 0$ *er*

$$dist(P_0, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Beviset er ganske analogt med det tilsvarende bevis i planen for afstand mellem punkt og linie, og vil derfor ikke blive gentaget her.

### Eksempel 14.16. Afstandsformel

Lad der være givet et punkt P = (1, 0, 2) og en plan $\alpha$: $2x + 2y + z - 13 = 0$ .

Find punktet P's afstand til $\alpha$ .

**Løsning:**

$$dist(P_0, \alpha) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 - 13|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = \underline{\underline{3}}$$

## Skæring mellem linie og plan.

På figur 14.16 er tegnet en linie $l$ som skærer planen $\alpha$ i punktet S.
Da punktet S ligger både i planen $\alpha$ og på linien $l$ må dens koordinater tilfredsstille både liniens parameterfremstilling og planens ligning.
Fremgangsmåden fremgår af det følgende eksempel 14.17.

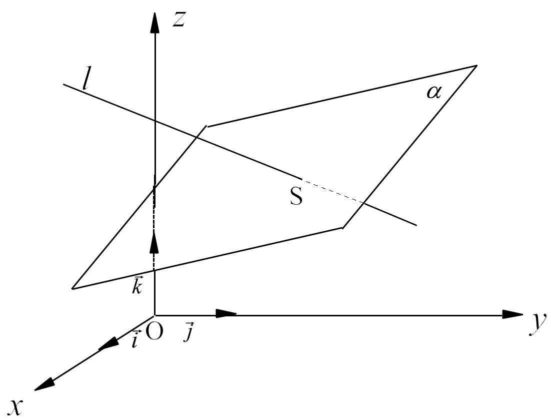



**Fig. 14.16** . *Skæring mellem linie og plan*

### Eksempel 14.17. Skæring linie - plan.

Lad der være givet en linie $l$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og en plan $\alpha$: $2x + 2y + z - 11 = 0$

Find skæringspunktet S mellem linien og planen.

**Løsning:**

Parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$

indsættes i ligningen $2x + 2y + z - 11 = 0$

$2(0 + 2t) + 2(2 + t) + t - 11 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Indsættes t= 1 i parameterfremstillingen fås skæringspunktet. $\underline{\underline{S = (2\ ,3,\ 1)}}$

**Vinkel mellem linie *l* og plan $\alpha$ .**

Projektionen af *l* på $\alpha$ er den linie $l_\alpha$ som fremkommer ved at alle punkter på *l* projiceres ned på planen $\alpha$ .

Vinklen mellem en linie og plan er vinklen mellem linien og dens projektion på planen (se figur 14.17).

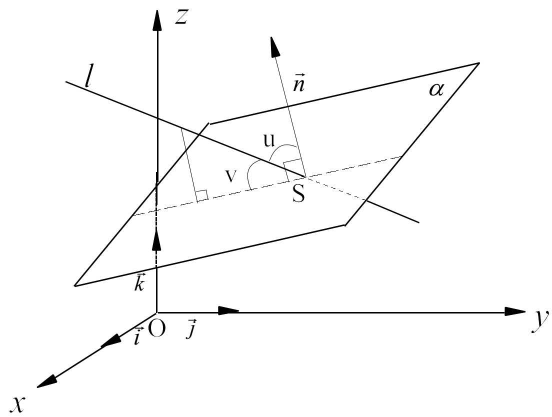



**Fig. 14.17** . *Vinkel mellem linie og plan*

Vinklen v mellem en linie *l* med retningsvektor $\vec{l}$ og en plan $\alpha$ med normalvektor $\vec{n}$ beregnes lettest ved, at man først beregner den spidse vinkel u mellem retningsvektoren for linien og planens normalvektor. Derefter er v = $90^0$ - u (se figur 14.17)

Da $\cos(u) = \sin(90 - u) = \sin \mathrm{v}$ fås $\sin \mathrm{v} = \dfrac{\left|\vec{l} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\vec{l}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|}$

**Eksempel 14.18. Vinkel mellem linie og plan.**

Lad der være givet en linie *l*: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og en plan $\alpha$: $2x + 2y + z - 11 = 0$

Find vinklen v mellem linien og planen

**Løsning:**

$$\sin \mathrm{v} = \frac{\left|\vec{l} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\vec{l}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{6}\sqrt{9}} = \frac{7}{3\sqrt{6}} = 0.9526 \qquad \mathrm{v} = \underline{\underline{72.28^0}}$$

**TI 89:**

sin$^{-1}$(abs(dotP(unitV([2,1,1]),unitV([2,2,1])))) Resultat: $72.28^0$

# 14.7 Polyedre, cylinder, kegle og deres rumfang.

## Polyedre

**Indledning.** Ved et <u>polyeder</u> forstås et legeme, der er begrænset af et endeligt antal plane polygoner. Disse polygoner kaldes polyederets <u>sideflader</u>, og deres sider og vinkelspidser betegnes henholdsvis som polyederets <u>kanter</u> og <u>hjørnespidser</u>.. En <u>diagonal</u> er en ret linie, der forbinder to hjørnespidser uden at ligge i en af polyederets sideflader. (se figur 14.18).
Et <u>konvekst polyeder</u> er et polyeder, hvor det for vilkårlige punkter A og B i polyederet gælder, at hele liniestykket AB tilhører polyederet..

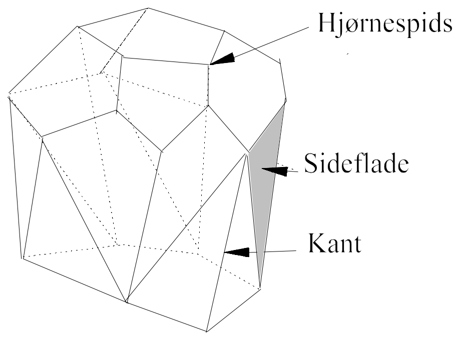


**Fig 14.18.** *Polyeder*

### Prisme.

Lad der være givet to polygoner *F* og *G*, som ikke ligger i samme plan, og hvor *F* kan føres over i *G* ved en parallelforskydning. (se figur 14.19). Ved <u>prismet bestemt af *F* og *G*</u> forstås det polyeder, hvis kanter er siderne i *F* og *G* samt forbindelsesstykkerne mellem tilsvarende vinkelspidser i de to polygoner. Afstanden mellem *F* og *G* (prismets grundflader) kaldes prismets <u>højde.</u>

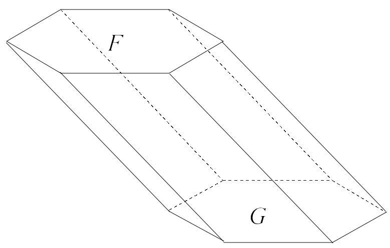
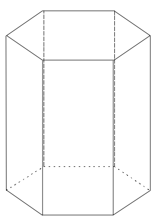
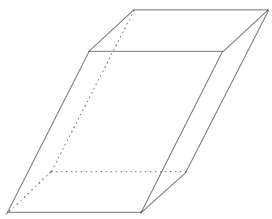


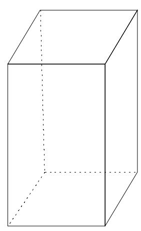
**Fig. 14.19.** *Prisme*

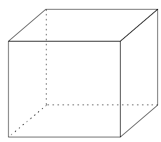
**Rumfanget af et prisme** er $G \cdot h$ hvor G er grundfladens areal og h er højden, dvs. afstanden mellem de to parallelle flader.

Nedenstående figurer viser specielle prismer.


Ret prisme (sidekanter vinkelret på grundflade)


Parallelepipedum (grundflader er parallelogrammer)


Kasse (alle flader er rektangler)


Terning (alle flader er kvadrater)

**Pyramide**

Ved en <u>*n* - sidet pyramide</u> forstås et polyeder, der frembringes ved, at vinkelspidserne i en given plan *n* - kant ABC, . . . forbindes med et punkt T uden for polygonens plan (se figur 14.20).
Polygonen ABC... kaldes pyramidens <u>grundflade</u> og trekanterne TAB, TBC, ... kaldes pyramidens <u>sideflader</u>. Er H projektionen af toppunktet T på grundfladen, kaldes HT for pyramidens <u>højde</u>
Af specielle pyramider kan nævnes de tidligere omtalte <u>tetraedre</u>, som er begrænset af fire trekanter.

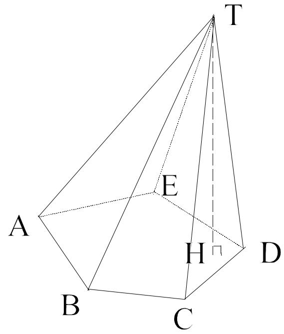



**Fig. 14.20.** *Pyramide*

**Rumfanget af en pyramide** $\frac{1}{3}\cdot G\cdot h$ hvor G er grundfladens areal og h er højden

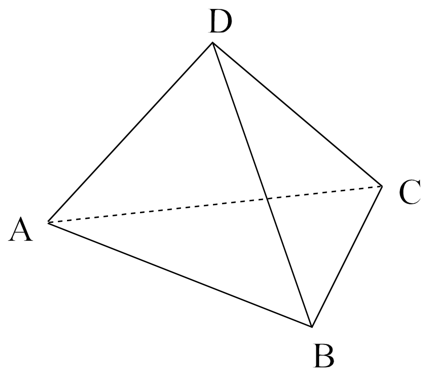



**Fig. 14.21.** *Tetraeder*

**Rumfanget af en cylinder** er $G\cdot h$ hvor G er grundfladens areal og h er højden, dvs. afstanden mellem de to parallelle flader.

**Rumfanget af en kegle** er $\frac{1}{3}\cdot G\cdot h$ hvor G er grundfladens areal og h er højden.

# 14.8 Kuglen

På figur 14.22 er tegnet en kugle med centrum i C = $(x_0, y_0, z_0)$ og radius $r$.

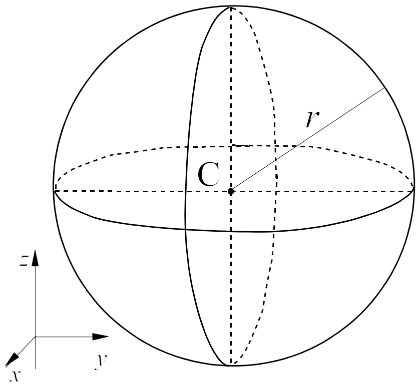



**Fig 14.22.** *Kugle med radius r*

Kuglen kan vises at have rumfanget V $= \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ og overfladen O $= 4 \cdot \pi \cdot r^2$

## Sætning 14.3.Kuglens ligning

En kugle med centrum i C = $(x_0, y_0, z_0)$ og radius $r$ har ligningen

$$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2}$$

Bevis:
Lad P = $(x, y, z)$være et vilkårligt punkt på periferien af kuglen.
Da Kugleperiferien består af netop de punkter, hvis afstand til centrum er radius $r$, er $|CP| = r$ .
I følge afstandsformlen haves nu

$$|CP| = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = r \Leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$$

◆

## Eksempel 14.19 Kugle

Opskriv ligningen for kuglen med centrum i C = (1, -2, 5) og radius $r = 5$ .

**Løsning.**

$$\underline{\underline{(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 25}}$$

◆

Ganges kuglens ligning ud fås

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2 = r^2$$

Vi kan derfor omvendt se, at hvis vi har en ligning indeholdende leddet $x^2 + y^2 + z^2$ så fremstiller det muligvis en kugle.

### Eksempel 14.20 Kugle

Undersøg om ligningen $x^2+y^2+z^2-2x+4y-12z+32=0$ fremstiller en kugle, og angiv i bekræftende fald kuglens centrum og radius.

**Løsning:**

Vi har, at $-2x_0=-2 \wedge -2y_0=4 \wedge -2z_0=-12 \Leftrightarrow x_0=1 \wedge y_0=-2 \wedge z_0=6$

Hermed fås $x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2=41$ dvs. 41- 32 = 9 = $r^2$ eller $\underline{\underline{r=3}}$

Lad en kugle have centrum C og radius $r$. Ved kuglens tangentplan i et punkt P på periferien, forstås den plan, som går gennem P og står vinkelret på CP.

### Eksempel 14.21. Tangentplan

En kugle har centrum C = (3, 4,5) og radius $r=\sqrt{69}$ .

1) Vis, at punktet P = (4, 2, -3) ligger på kugleperiferien.
2) Find ligningen for tangentplanen til kuglen i punktet P.

**Løsning:**

1) $\vec{CP}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-8\end{pmatrix}$ $\quad \left|\vec{CP}\right|=\sqrt{1+4+64}=\sqrt{69}$

Da $\left|\vec{CP}\right|=r$ ligger P på kuglens periferi.

2) Tangentplanen går gennem P og har normalvktoren $\vec{CP}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-8\end{pmatrix}$

Tangentens ligning: $1(x-4)+(-2)(y-2)+(-8)(z+3)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x-2y-8z=24}}$

# Opgaver til kapitel 14

**14.1** Afsæt i et koordinatsystem punktet P = (1, 2, 0) og punktet Q = (0, -2, 3). Afsæt endvidere punktet R, således at vektoren $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, og angiv R's koordinater.

**14.2** Lad der være givet punkterne A =(-1, 0, 0), B = (3, 0, 4) og C = (6, 3, 7).
1) Bestem længden af $|AB|$
2) Bestem koordinaterne til punktet D, så ABCD danner et parallelogram.

**14.3** Find det arbejde som kraften $\vec{k} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ udfører på en partikel, når denne bevæger sig retlinet fra punktet A = (8, -2, -3) til punktet B = (-2, 0, 6).

**14.4** Undersøg om vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ er indbyrdes ortogonale (dvs. står vinkelrette på hinanden).

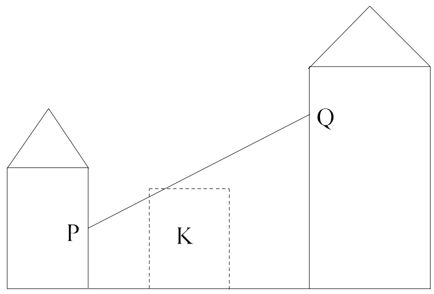
**14.5** I terningen ABCD - EFGH med kantlængden a, skal man finde vinklen u mellem diagonalen i grundfladen AC og diagonalen AG. Find endvidere vinklen v mellem diagonalerne AG og BH.

**14.6** Linien $l$ går gennem punkterne A = (2,-3,4) og B = (-1,4 , 3)
Angiv en parameterfremstilling for $l$.
En anden linie $m$ har parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
Undersøg om linierne $l$ og $m$ skærer hinanden.

**14.7** Lad en partikel P bevæge sig med jævn hastighed bestemt ved $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, hvor t angiver tiden i sekunder og afstande regnes i meter.
a) Find farten (i m/s)
b) Find den strækning ( i m) som legemet gennemløber i 5 sekunder.

**14.8** Givet punkterne A = (4, 3, -2), B = (5, 9, 1), C = (2, -1, -1) og D = (4, 19, 12).
Lad $l$ være linien gennem A og B og lad $m$ være linien gennem C og D.
a) Find koordinaterne til linierne $l$ og $m$'s skæringspunktet E (forudsat naturligvis at de skærer hinanden).
b) Undersøg om liniestykkerne AB og CD skærer hinanden.
c) Find vinklen mellem de to linier.

**14.9** Et retlinet rør med en diameter på $\frac{1}{10}$, skal føres fra punktet P i én bygning til punktet Q i en anden bygning. Rørets centerlinie går gennem P = (-2, 1, 3) og Q = (5, 4, 6).
a) Find en parameterfremstilling for linien gennem P og Q.
b) Undersøg om rørstykket frit kan passere en kommende kasseformet udbygning K givet ved K $= \{(x, y, z) | -1 \le x \le 1 \wedge 2 \le y \le 4 \wedge 0 \le z \le 4\}$
(Vink: tegn figuren set ovenfra).




**14.10** En kugle med radius 4 m og med centrum i koordinatsystemets begyndelsespunkt roterer om z - aksen med en vinkelhastighed $\omega = 2$ rad/sec ("højre om").
Find hastighedsvektorerne $\vec{v}_P$ og $\vec{v}_Q$ i punkterne P =$(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 0)$ og
Q = (2, 3, $-\sqrt{3}$ ).

**14.11** Lad der være givet et stativ af stænger af form som et tetraeder. Under samme betingelser som i eksempel 14.12 skal man finde reaktionskræfterne i punkterne A = (3, 0, 0), B = (2, 1, 0) og C = (-1, -2, 0), når punktet D = (1, 2, 6) er påvirket af kraften $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

**14.12** Find arealet af $\Delta$ ABC., hvor A = (2, 0, -1), B = (1, -1, 2) og C = (0, 2, 1)

**14.13** a) Angiv ligningen for en plan $\alpha$, som går gennem punkterne
A = (3, 1, -2), B = (1, 2, 3) og C = (-1, 3, 2).
b) Angiv ligningen for en plan, der går gennem D = (1, 3, 2) og er parallel med $\alpha$.

**14.14** Vinkelspidserne i en trekant ABC har koordinaterne
A = (1, 1, 1), B = (3, 1, 0) og C = (2, 3, 4).
a) Find vinkel A (den indvendige vinkel i trekanten)
b) Find koordinaterne til punktet D, hvor D er fodpunktet for højden fra C.

**14.15** Lad der være givet punkterne A = (2, 1, 1), B = (-1, 2, 3) og C = (0, 1, 2).
a) Find ligningen for den plan $\alpha$ , som indeholder A, B og C.
b) Find ligningen for den plan $\beta$, som indeholder A, B og er parallel med $z$ - aksen.
c) Find ligningen for den plan $\gamma$ , som indeholder A, og er parallel med y$z$ - planen.
d) Find de tre planers skæringspunkter med $x$ - aksen.

**14.16** I tetraederet ABCD er A = (6, 0, 0), B = (2, 0, 3) og C = (0, 0, 0). Idet D har positive koordinater, $|DB| = |DA| = \frac{13}{2}$ og D's projektion på $xz$ - planen falder på liniestykket AB, skal man
a) Skitsere tetraederet i et retvinklet koordinatsystem og finde D's koordinater.
b) Idet P er det punkt på BD for hvilke $|BP| = \frac{2}{3}|BD|$ , skal P's koordinater angives.

**14.17** To rette linier $l$ og $m$ er givet ved parameterfremstillingerne

$$l\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in R \qquad \text{og} \qquad m\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in R$$

Find en ligning for den plan $\alpha$ , som indeholder $l$ og er parallel med $m$.

**14.18** a) Undersøg om linierne

$$l\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in R \quad \text{og} \quad m\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s \in R \quad \text{skærer hinanden.}$$

b) Find skæringspunktet mellem linien $l$ og planen $\alpha$ med ligningen $\alpha\colon\ 6x + 7y + 2z = 26$

**14.19** Beregn toplansvinklen mellem to diagonalplaner i en terning.

**14.20** Taghældningen er overalt $45^0$ på en firlænget gård (hvor længerne står vinkelret på hinanden.
Find vinklen mellem to sammenstødende tagflader tilhørende hver sin længe.

**14.21** Tetraederet ABCD er bestemt ved
A = (8, 2, 0), B = (0, 4, 0), C = (3, -1, 0) og D = (0, 0, 2).
a) Find afstanden fra C til planen ABD.
b) Idet rumfanget af en tetraeder er $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ , hvor $G$ er grundfladens areal og $h$ er højden skal man finde rumfanget af tetraederet ABCD
c) Find vinklen mellem kanten CD og planen ABD.

**14.22** Der er givet et punkt P = (2, 3, 1), samt en ret linie *m* med parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in R.$$

a) Find ligningen for den plan $\alpha$ , som indeholder punktet P og den rette linie *m*.
b) Bestem en parameterfremstilling for linien gennem P, som skærer *m* under en ret vinkel.
c) Find koordinaterne til punktet P's symmetriske punkt med hensyn til linien *m*.

**14.23** En kugle har centrum i C = (3, 5, -2) og går gennem punktet P = (0,2, -3).
Opskriv kuglens ligning.

**14.24** Angiv en ligning for den kugle, der går gennem punktet P = (4, 6, 9) og som tangerer xy-planen i punktet O = (0.0.0)

**14.25** Bestem centrum og radius for de kugler, hvis ligninger er
a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 16y + 64 = 0$
b) $x^2 + y^2 + z^2 - 8y + 15 = 0$

# 15 Deskriptiv Statistik

## 15.1 Indledning

**Statistik kan lidt løst sagt siges, at være en samling metoder til at opnå og analysere data for at træffe afgørelser på grundlag af dem.**
Statistik er et uundværligt værktøj til at træffe beslutninger, men kan naturligvis som alt andet også misbruges, bevidst eller ubevidst. Beslutninger der kan basere sig på tal (statistik), får stor troværdighed. Det kan bevirke at man slår sin "sunde fornuft" fra. Selv den bedste statistiske teori er værdiløs, hvis tallene man bygger på ikke er troværdige, eller relevante, og det er derfor ikke så mærkeligt, at en kendt politiker engang udtalte:"Der findes 3 slags løgn: løgn, forbandet løgn og statistik".

Ved **populationen** forstås hele den gruppe man er interesseret i. Eksempelvis hvis det drejer sig om folketingsvalg i Danmark, så er populationen alle stemmeberettigede personer i Danmark .
Ved en **stikprøve** forstås en delmængde af populationen. Før et folketingsvalg udtager et opinionsinstitut således en stikprøve på eksempelvis 1000 vælgere.

Der er to grundlæggende anvendelser af statistik:
1) Deskriptiv statistik, hvor man sammenligner og beskriver data.
   Eksempelvis kunne man sammenligne hvor mange personer, der stemte på partierne ved sidste og næstsidste valg.
2) "inferens" statistik , hvor man ved anvendelse af statistiske metoder søger at slutte (informere) fra en stikprøve til hele proportionen.
   Eksempelvis før et folketingsvalg på basis af en stikprøve på 1000 personer der bliver spurgt om hvem de vil stemme på give en prognose for den forventede mandatfordeling for hele landet (populationen)
   Her vil det være nødvendigt med at kende nogle statistiske metoder til eksempelvis at vide hvor stor en (repræsentativ) stikprøve man skal udtage for at usikkerheden på resultatet er under 5%

## 15.2.Grafisk beskrivelse af data

I den **deskriptive statistik** (eller beskrivende statistik) beskrives de indsamlede data i form af tabeller, søjlediagrammer, lagkagediagrammer, kurver samt ved udregning af centrale tal som gennemsnit, median, spredning osv.
Kurver og diagrammer forstås lettere og mere umiddelbart end kolonner af tal i en tabel. Øjet er uovertruffet til mønstergenkendelse ("en tegning siger mere end 1000 ord").

I dette afsnit vil vi ikke benytte TI89 (selv om den godt kan fremstille visse af disse kurver).
Imidlertid vil et regneark som eksempelvis Excel bedre kunne illustrerer disse diagrammer. Desuden vil statistiske data meget ofte foreligge som Excel filer, der direkte kan anvendes til videre bearbejdning. Excel vil derfor blive benyttet i dette afsnit.

### 15.2.1 Kvalitative data

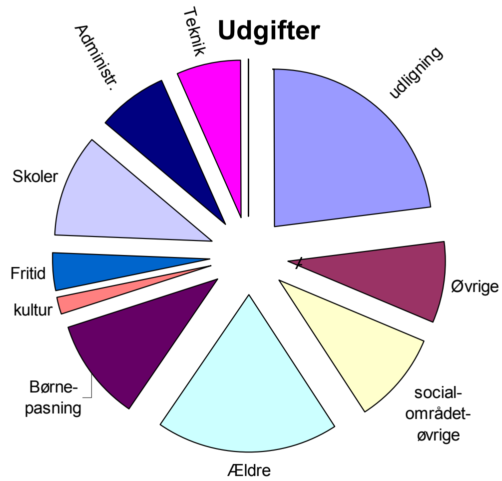
Hvis der er en naturlig opdeling af talmaterialet i klasser eller kategorier siges, at man har kategorisk eller kvalitative data .
Alle spørgeskemaundersøgelser, hvor man eksempelvis bliver bedt om at sætte kryds i nogle rubrikker "meget god" , god, acceptabel osv. er af denne type.

Til illustration af disse data bruges sædvanligvis lagkagediagrammer eller søjlediagrammer

### Eksempel 15.1 Lagkagediagram

Et eksempel ses overfor, hvor et lagkagediagram søger at give et anskueligt indtryk af hvordan en kommunes udgifter fordeler sig på de forskellige områder.
I Excel opskrives

| | |
|---|---|
| Udligning | 23,1 |
| øvrige | 8,4 |
| Socialområdet,øvrige | 9,4 |
| Ældre | 18,6 |
| Børnepasning | 10,4 |
| Bibliotek | 1,9 |
| fritid | 3,8 |
| Skoler | 10,5 |
| Administration | 7,3 |
| Teknik,anlæg | 6,6 |




Excel-ordrer:
**2003**: Marker udskriftsområde ⇒ Vælg på værktøjslinien "Guiden diagram" ⇒ Cirkel ⇒ Marker ønsket figur ⇒ Næste ⇒ Navn på kategori ⇒ Udfør
**2007**: Marker udskriftsområde ▶ Vælg på værktøjslinien "Indsæt" ▶ Cirkel ▶ Marker ønsket figur

◆

### Eksempel 15.2 (kvalitative data)

Følgende tabel angiver mandattallet ved de to sidste folketingsvalg.

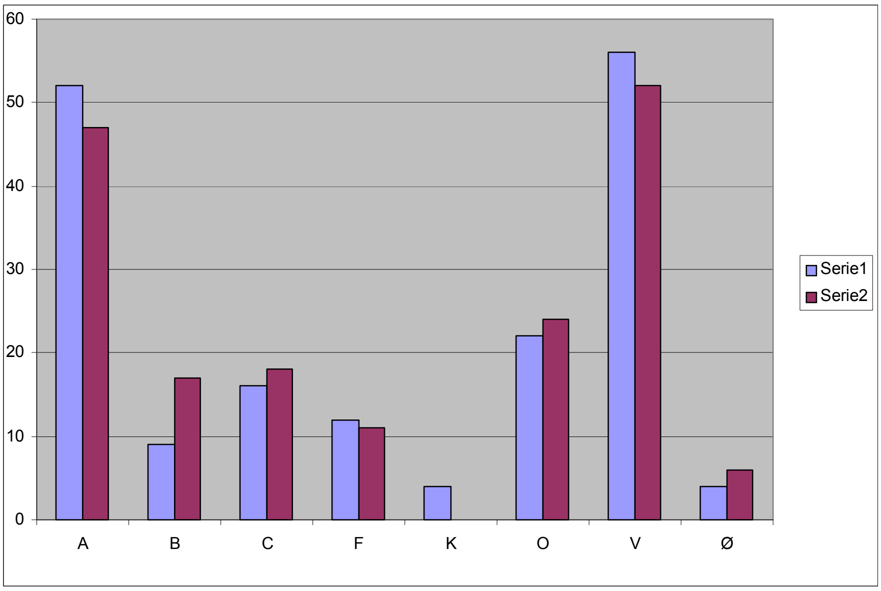
| Partier | | A | B | C | F | K | O | V | Ø |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mandater | 2001 | 52 | 9 | 16 | 12 | 4 | 22 | 56 | 4 |
| | 2005 | 47 | 17 | 18 | 11 | 0 | 24 | 52 | 6 |

A = Socialdemokraterne, B =Radikale venstre, C = Konservative folkeparti , F =Socialistisk folkeparti, K = Kristendemokraterne, O = Dansk Folkeparti, V = Venstre, Ø = Enhedslisten

Et søjlediagram fås i Excel ved at opskrive

| A | B | C | F | K | O | V | Ø |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 52 | 9 | 16 | 12 | 4 | 22 | 56 | 4 |
| 47 | 17 | 18 | 11 | 0 | 24 | 52 | 6 |

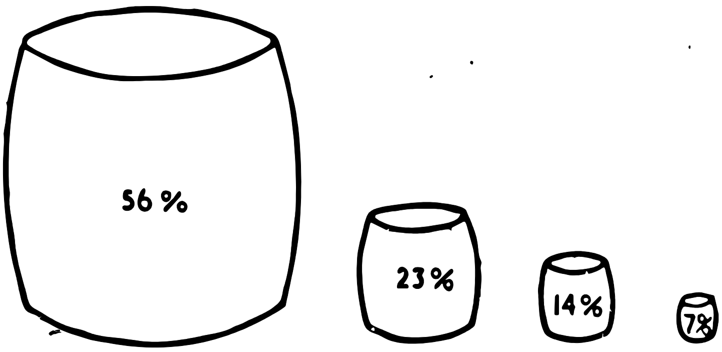
**2003**: Vælg på værktøjslinien "Guiden diagram" ▶ Søjle ▶ Marker ønsket figur ▶ Næste ▶ marker udskriftsområde ▶ Næste ▶ Næste ▶ Udfør
**2007**: Marker udskriftområde ▶ Vælg på værktøjslinien "Indsæt" ▶ Søjle ▶ Marker ønsket figur




◆

Fordelen ved en grafisk fremstilling er, at de væsentligste egenskaber ved data opnås hurtigt og sikkert. Men netop det, at figurer appellerer umiddelbart til os, gør at vi kan komme til at lægge mere i dem, end det som tallene egentlig kan bære. Eksempelvis viser forsøg, at i lagkagediagrammer, hvor man skal sammenligne vinkler (eller arealer), da vil denne sammenligning afhænge noget af i hvilken retning vinklens ben peger.
Nedenstående eksempel viser hvordan en figur kan være misvisende uden direkte at være forkert.

**Eksempel 15.3. Misvisende figur**
Tønderne i figuren nedenfor skal illustrere hvordan osteeksporten fordeler sig på de forskellige verdensdele. Den giver imidlertid et helt forkert indtryk. Det er højderne på tønderne der angiver de korrekte forhold, men af tegningen vil man tro, at det er rumfangene af tønderne. De 3 små tønder kan umiddelbart være flere gange indeni den store tønde, men det svarer jo ikke til talforholdene.




◆

De mest almindelige figurer til at give et visuelt overblik over større talmaterialer er histogrammer (søjlediagrammer) og kurver i et koordinatsystem.

### 15.2.2. Kvantitative data (variable)

Kvantitative data er data, hvor registreringen i sig selv er tal, der angiver en bestemt rækkefølge, f. eks. som i eksempel 15.4 hvor data registreres efter det tidspunkt hvor registreringen foregår eller som i eksempel 15.5, hvor det er størrelsen af registrerede værdi der er af interesse.

**Eksempel 15.4. Kvantitativ variabel: tid**

Fra "statistikbanken (adresse http://www.statistikbanken.dk/) er hentet følgende data ind i Excel, der beskriver hvorledes indvandringer og udvandringer er sket gennem tiden.

Excel: Vælg "Befolkning og valg" ▶ Ind- og udvandring ▶ Ind- og udvandring efter bevægelse ▶ under "bevægelse" vælges alle og under "måned" vælges år og derefter alle ▶ Tryk på tabel ▶ Drej tabel med uret ▶ Gem som Excel fil

Indvandringer og udvandringer efter tid

| | Indvandrede | Udvandrede |
|---|---|---|
| 1983 | 27718 | 25999 |
| 1984 | 29035 | 25053 |
| 1985 | 36214 | 26715 |
| 1986 | 38932 | 27928 |
| 1987 | 36296 | 30123 |
| 1988 | 35051 | 34544 |
| 1989 | 38391 | 34949 |
| 1990 | 40715 | 32383 |
| 1991 | 43567 | 32629 |
| 1992 | 43377 | 31915 |
| 1993 | 43400 | 32344 |
| 1994 | 44961 | 34710 |
| 1995 | 63187 | 34630 |
| 1996 | 54445 | 37312 |
| 1997 | 50105 | 38393 |
| 1998 | 51372 | 40340 |
| 1999 | 50236 | 41340 |
| 2000 | 52915 | 43417 |
| 2001 | 55984 | 43980 |
| 2002 | 52778 | 43481 |
| 2003 | 49754 | 43466 |
| 2004 | 49860 | 45017 |
| 2005 | 52458 | 45869 |

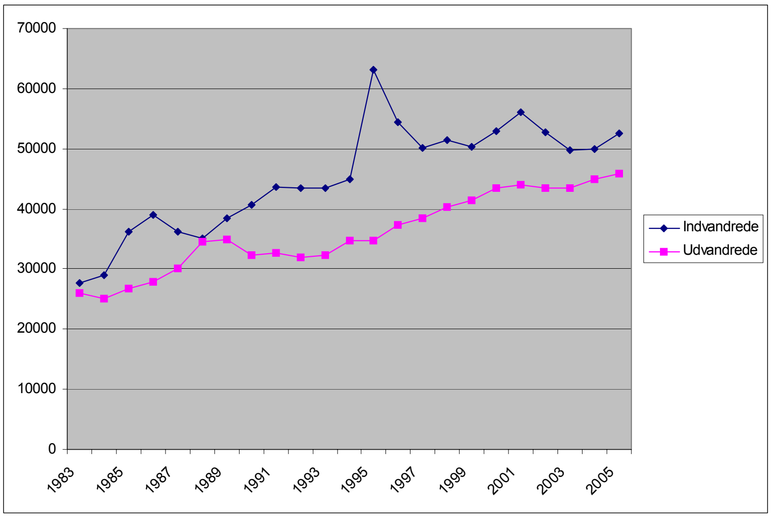
Giv en grafisk beskrivelse af disse data.

**Løsning:**

Da dataene er registreret efter tid (år) (den kvantitative variabel "tid") tegnes to kurver i samme koordinatsystem:

Excel:2003: Marker udskriftsområde ▶ Vælg på værktøjslinien "Guiden diagram" ▶ Kurve ▶ Marker ønsket figur ▶ Næste ▶ Næste ▶ Næste ▶ Udfør

Excel 2007:Marker udskriftsområde ▶ Vælg på værktøjslinien " Indsæt" ▶ Streg ▶ Marker ønsket figur




## Eksempel 15.5. Kvantitativ variabel , sideafvigelse ved skydning.

Man har 100 gange målt sideafvigelsen ved skydning med maskingevær.
Resultaterne (som kan findes på adressen www.larsen-net.dk ) var følgende:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 33.22 | 21.75 | 5.60 | 4.70 | 9.19 | 11.03 | -0.8 | -19.01 | 11.08 | 10.91 | 6.93 | 14.6 |
| -11.5 | 2.19 | 14.47 | 11.27 | 22.06 | 11.81 | 19.53 | 13.25 | 6.1 | 1.14 | 14.1 | -4.23 |
| 9.33 | 14.26 | -4.16 | 20.88 | -13.29 | -6.53 | -3.03 | 0.49 | 13.08 | 3.7 | -0.56 | -0.36 |
| 22.29 | 9.01 | 21.49 | 5.1 | 17.88 | 2.68 | 5.23 | 2.81 | -5.64 | 11.63 | 3.21 | -0.19 |
| 18.67 | 17.01 | -6.34 | 21.6 | 11.26 | 9.63 | -5.97 | 6.42 | 14.65 | -0.77 | 0.31 | -0.43 |
| 2.26 | 6.14 | 12.56 | 11.81 | 11.76 | 23.92 | 4.66 | 23.98 | 4.81 | 26.44 | 4.67 | 21.38 |
| -0.52 | 5.51 | -24.44 | -5.0 | 13.95 | -6.66 | 10.63 | 10.00 | -1.69 | -0.37 | 7.59 | 24.22 |
| 24.16 | 30.22 | -11.84 | 14.45 | -12.27 | 18.94 | 0.85 | 9.93 | 8.89 | 9.64 | -3.28 | 16.27 |
| 16.63 | 5.87 | 4.35 | 6.7 | | | | | | | | |

Giv en grafisk beskrivelse af disse data.

**Løsning:**

I dette tilfælde, hvor vi er interesseret i at få et overblik over tallenes indbyrdes størrelse er det fordelagtigt at tegne et **histogram**.

Et histogram ligner et søjlediagram, men her gælder, at antallet af enheder i hver søjle repræsenteres ved søjlens areal (histo er græsk for areal). Man bør så vidt muligt sørge for at grupperne er lige brede, da antallet af enheder så svarer til højden af søjlen.

Excel kan umiddelbart tegne er histogram, men af hensyn til det følgende forklares hvordan man bestemmer intervalopdeling m. m.

Først findes det største tal $x_{max}$ og det mindste tal $x_{min}$ i materialet og derefter beregne **variationsbredden** $x_{max} - x_{min}$. Vi ser, at største tal er 33.22 og mindste tal er -24.44 og variationsbredden derfor 33.22 -(-24.44) = 57.66.

Dernæst deles tallene op i et passende antal intervaller (klasser). Som det første bud vælges ofte et antal nær $\sqrt{n}$ . Da $\sqrt{100} = 10$ vælges ca. 10 klasser. Da $\frac{57.66}{10} \approx 5.8$ deler vi op i de klasser, der ses af tabellen. Dette giver 11 intervaller. Vi tæller op hvor mange tal der ligger i hvert interval (gøres nemmest ved at starte forfra og sæt en streg i det interval som tallet tilhører).

| Klasser | | Antal *n* |
|---|---|---|
| ]-24.5 ; -18.7] | // | 2 |
| ]-18.7 ;  -12.9] | / | 1 |
| ]-12.9 ; - 7.1] | /// | 3 |
| ]-7.1 ; - 1.3] | /////////// | 11 |
| ]-1.3 ; 4.5] | /////////////////// | 19 |
| ]4.5 ; 10.3] | /////////////////////// | 23 |
| ]10.3 ; 15.1] | //////////////////// | 20 |
| ]15.1 ; 21.9] | //////////// | 12 |
| ]21.9 ; 27.7] | /////// | 7 |
| ]27.7 ; 33.5] | // | 2 |

I Excel sker det på følgende måde:

Data indtastes i eksempelvis søjle A1 til A100 ( data findes på adressen www.larsen-net.dk )

**2003:** Vælg “Funktioner”, Dataanalyse, Histogram

**2007:** Vælg “Data”, Dataanalyse, Histogram

I den fremkomne tabel udfyldes “inputområdet” med A1:A100 og man vælger “diagramoutput”..

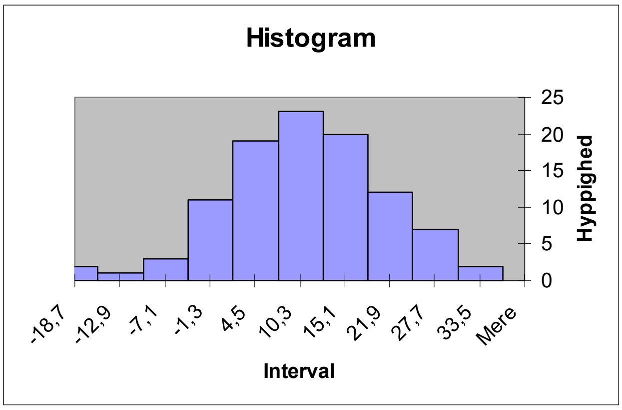
1) Trykkes på OK fås en tabel med hyppigheder, og en figur, hvor intervalgrænserne er fastlagt af Excel.
2) Ønsker man selv at bestemme grænserne, skal man også udfylde intervalområdet. Dette gøres ved at skrive de øvre grænser i en søjle (f.eks. i B1 -18.7, i B2 -12.9 osv. ) og så skrive B1:B11 i inputområdet

Nedenstående figurer er blevet gjort lidt “pænere” ved

a) cursor på en søjle ▶ tryk højre musetast ▶ formater dataserie ▶ indstilling ▶ mellemrumsbredde = 0 ▶ ok

I tilfælde 2 fremkommer følgende

| *Interval* | *Hyppighed* | *Kumulativ %* |
|---|---|---|
| -18,7 | 2 | 0,00% |
| -12,9 | 1 | 2,00% |
| -7,1 | 3 | 3,00% |
| -1,3 | 11 | 6,00% |
| 4,5 | 19 | 17,00% |
| 10,3 | 23 | 39,00% |
| 15,1 | 20 | 52,00% |
| 21,9 | 12 | 79,00% |
| 27,7 | 7 | 91,00% |
| 33,5 | 2 | 98,00% |
| Mere | 0 | 100,00% |




Det ses, at de fleste målinger ligger fra ca. - 1.3 til ca. 15.1 og så falder hyppigheden nogenlunde symmetrisk til begge sider.

Man regner normalt med, at resultaterne af forsøg, hvor man har foretaget målinger (hvis man lavede nok af dem) har et sådant klokkeformet histogram

◆

**Sumpolygon**
Ud over at tegne histogrammer for en stikprøve er det også ofte nyttigt, at betragte en sumpolygon for en stikprøve.

**Eksempel 15.6 Sumpolygon**
Lad os igen betragte de 100 sideafvigelser i eksempel 15.5.
Vi foretager nu en opsummering(kaldes kumulering), og derefter beregnes ved division med 100 (antal sideafvigelser) tallene i % af det totale antal
Derved fremkommer følgende tabel:

| Klasser | Antal | Sum | Kumuleret relativ hyppighed |
|---|---|---|---|
| ]-24.5 ; -18.7] | 2 | 2 | 0.02 |
| ]-18.7 ; -12.9] | 1 | 3 | 0.03 |
| ]-12.9 ; -7.1] | 3 | 6 | 0.06 |
| ]-7.1 ; - 1.3] | 11 | 17 | 0.17 |
| ]-1.3 ; 4.5] | 19 | 36 | 0.36 |
| ]4.5 ; 10.3] | 23 | 59 | 0.59 |
| ]10.3 ; 15.1] | 20 | 79 | 0.79 |
| ]15.1 ; 21.9] | 12 | 91 | 0.91 |
| ]21.9 ; 27.7] | 7 | 98 | 0.98 |
| ]27.7 ; 33.5] | 2 | 100 | 1.00 |

Afsættes punkterne (-18.7 , 0.02), (-12.9, 0.03) . . . (33.5, 1.00 ) (bemærk at x-værdierne er værdierne i højre intervalendepunkt), og forbindes de enkelte punkter med rette linier, fås den i figur 1.1 angivne sumpolygon, hvoraf man kan aflæse, at 25% af sideafvigelserne ligger under ca. 1. (kaldes 25% fraktilen eller første kvartil).

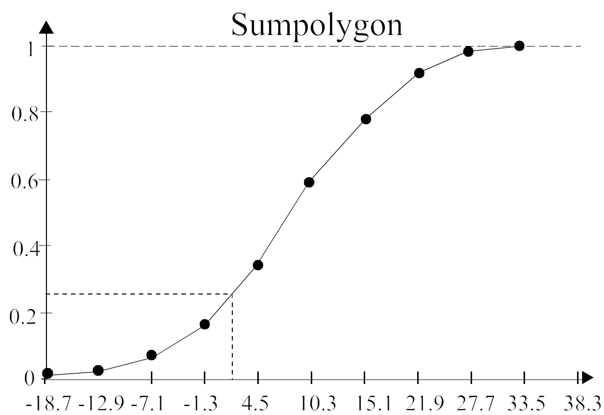



**Fig 15.1** *Sumpolygon*

◆

## 15.3. Karakteristiske tal

I dette afsnit søger man ved nogle få karakteristiske tal, at karakterisere hele populationen eller hvis det er uoverkommeligt en stikprøve af populationen .

Vi vil i dette og de følgende afsnit igen benytte TI89 , men nu på eksempler hvor antallet af tal er mere overkommeligt at indtaste i lommeregneren.

Til karakterisering af stikprøven vælges dels et tal der ligger “i midten” af tallene, dels et tal der angiver hvor meget tallene “spreder” sig.
Er histogrammet rimeligt symmetrisk(som i eksempel 15.5) siges de at være “normalfordelte.
Det afhænger af om dette er tilfældet, eller histogrammet er meget “skæv” hvilke midtertal og spredningstal man foretrækker.

**Symbolik.**
Kendes hele populationen kan man beregne en “eksakt” midterværdi. Denne kaldes **middelværdien** og benævnes $\mu$ (græsk my) eller $E(X)$ (Expected value) .
Tilsvarende kan beregnes et “eksakt” spredningsmål. Denne kaldes **spredningen** eller standardafvigelse (engelsk: standard deviation) og benævnes $\sigma(X)$ eller kort $\sigma$ .

Kendes kun en stikprøve, så beregnes en tilnærmet værdi (kaldet et **estimat**) for $\mu$ Denne kaldes gennemsnittet og benævnes $\bar{x}$ (kaldt x streg).
Tilsvarende kaldes et estimat for $\sigma$ for s.

### 15.3.1. Normalfordelte observationer

**Gennemsnit $\bar{x}$ :**

Kaldes observationerne i en stikprøve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$

Eksempel: Tallene 35.9, 33.3, 34.7, 34.1 har gennemsnittet $\bar{x} = \dfrac{35.9 + 33.3 + 34.7 + 34.1}{4} = 34.5$

TI 89: MATH\Statistics\mean({35.9,33.3,34.7,34.1}) Resultat: $\bar{x}$ =34.5

**Spredning *s*:**

Kaldes observationerne i en stikprøve er $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er $s = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$

Eksempel: Tallene 35.9, 33.3, 34.7, 34.1 har spredningen

$$s = \sqrt{\frac{(35.9-34.5)^2 + (33.3-34.5)^2 + (34.7-34.5)^2 + (34.1-34.5)^2}{4-1}} = 1.095$$

TI 89: MATH\Statistics\stdDev({35.5,33.3,34.7,34.1}) Resultat: $\bar{x}$ =1.095

Formlen begrundes ikke her, men man kan umiddelbart se, at ligger observationerne tæt ved gennemsnittet, så bliver *s* lille.
Tallene 34.3, 34.6, 34.7 34.4 har samme gennemsnit som i forrige eksempel, men de ligger meget tættere ved gennemsnittet 34.5. Spredningen på 0.183 er da også som forventet langt mindre.

**Vurdering af størrelsen af stikprøvens spredning**.

Man kan vise, at for "normalfordelte" observationer gælder, at mellem $\bar{x} - 2 \cdot s$ og $\bar{x} + 2 \cdot s$ ligger ca. 95% af observationerne, og mellem $\bar{x} - 3 \cdot s$ og $\bar{x} + 3 \cdot s$ ligger ca. 99% af observationerne.

Dette benyttes bl.a. i statistisk kvalitetskontrol, hvor man løbende udtager stikprøver af produktionen. Eksempelvis kan man om en måling, der giver en værdi, der ligger udenfor intervallet $[\bar{x} - 3 \cdot s; \bar{x} + 3 \cdot s]$ sige, at hvis ikke det er en fejlmåling, så er der noget galt ved produktionen (en maskine løbet varm eller lignende)

*Man kan vise den meget vigtige sætning, at selv om observationerne ikke er normalfordelte, så er gennemsnittet rimelig normalfordelt blot antallet af observationer er over ca. 30.*
*Samtidig gælder, at*
*Stikprøvegennemsnittet $\bar{x}$ varierer med en spredning på $s(\bar{x}) = \dfrac{s}{\sqrt{n}}$, hvor n er stikprøvestørrelsen.*

For tallene fra før 35.9, 33.3, 34.7, 34.1 gælder således, at gennemsnittet $\bar{x} = 34.5$ har en spredning på $s(\bar{x}) = \dfrac{1.095}{\sqrt{4}} = 0.548$

Dette stemmer med at man umiddelbart føler, at et gennemsnit er mere sikkert end den enkelte måling.
Man opnår altså en væsentligt mere præcist estimat (resultat) , hvis man beregner et gennemsnit på 100 målinger, da spredningen på den enkelte måling så skal divideres med 10.
Er det meget dyre målinger er det dog sædvanligvis klogest f.eks. at nøjes med 25 målinger, og bruge ressourcerne på anden vis.
Fordelen ved at gå fra 25 målinger til 100 målinger er begrænset, da spredningen jo kun bliver halveret derved.

Har man mange observationer, vil man i TI89 med fordel kunne anvende metoden i følgende eksempel:

**Eksempel 15.7. Fartkontrol**

Færdselspolitiet overvejede, om der burde indføres en fartgrænse på 70 km/h på en bestemt landevejsstrækning, hvor der hidtil havde været en fartgrænse på 80 km/h.
Som et led i analysen af hensigtmæssigheden af den overvejede ændring observeredes inden for et bestemt tidsrum ved hjælp af radarkontrol de forbipasserende bilers fart. Resultatet af målingerne var:

| 30 observationer | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 64 | 72 | 82 | 52 | 60 | 95 | 86 | 70 | 63 | 48 |
| 98 | 63 | 35 | 80 | 77 | 41 | 96 | 88 | 84 | 103 |
| 69 | 59 | 65 | 99 | 65 | 76 | 76 | 68 | 51 | 80 |

a) Find gennemsnitsfarten
b) Find spredningen på farten.
c) Find spredningen på gennemsnitsfarten

**Løsning:**

a) TI89: APPS\ STAT/LIST. Indtast de 30 data i list1,
F4\1-Var Stats\List = list1 (Vælg VAR LINK og vælg listnavne herfra), ENTER
En række tal viser sig.
Man finder $\bar{x} = 72.16$, dvs. gennemsnitsfarten er 72.16 km/timen

b) Man finder, i samme udskrift ud for $s_X$, at spredningen s = 17.3843

c) $s(\bar{x}) = \dfrac{17.38}{\sqrt{30}} = 3.17$, dvs. vi nu ved, at med 95% sikkerhed ligger gennemsnitsfarten mellem
72.16 - 3.17 = 68.98 til 72.16 + 3.17 = 75.33

◆

## 15.3.2. Ikke normalfordelte observationer

I tilfælde hvor observationerne fordeler sig meget skævt (histogrammet er ikke rimelig symmetrisk) kan det være hensigtsmæssig i stedet at beregne median og kvartilafstand som vist i det følgende.

**Median**: Medianen beregnes på følgende måde:

1) Observationerne ordnes i rækkefølge efter størrelse.
2a) Ved et ulige antal observationer er medianen det midterste tal
2b) Ved et lige antal er medianen gennemsnittet af de to midterste tal.

<u>Eksempel:</u> Observationer 35.9, 33.3, 34.7, 34.1.

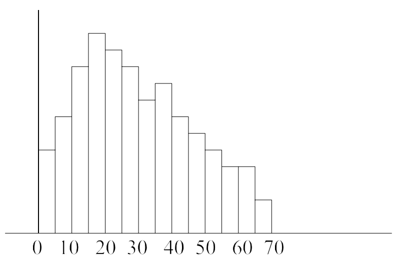
Ordnet i rækkefølge: 33.3, 34.1, 34.7, 35.9. Median $\dfrac{34.3+34.7}{2} = 34.4$

TI 89: MATH\Statistics\median({35.9,33.3,34.7,34.1}) Resultat: m = 34.4

Medianen kaldes også for **50% fraktilen**, fordi den brøkdel (fraktil) der ligger under medianen er ca. 50% .
Ved **1 kvartil** = 25% fraktilen, forstås det tal som 25% af observationerne ligger under
Ved **3 kvartil** = 75% fraktilen , forstås det tal som 75% af observationerne ligger under

Er medianen mindre end gennemsnittet er der muligvis tale om en "højreskæv" fordeling som har den "lange" hale til højre.(se figuren)

Er medianen større end gennemsnittet, er der muligvis tale om en venstreskæv fordeling



At man eksempelvis i lønstatistikker[1] angiver medianen og ikke gennemsnittet fremgår af følgende lille eksempel.
Lad os antage at en virksomhed har 10 ansatte, med månedslønninger ordnet efter størrelse på 20000, 21000, 22000, 23000, 24000, 25000, 26000, 27000, 28000, 100000
Gennemsnittet er her 31600, mens medianen er 24500.
Medianen ændrer sig ikke selv om den højeste løn vokser fra 100000 til 1 million, mens gennemsnittet naturligvis vokser. Medianen giver derfor en mere rimelig beskrivelse af middellønnen i firmaet.

**Kvartilafstand:**
I nævnte lønstatistik[1] er også angivet "nedre og øvre kvartil".
Disse som er henholdsvis 25% fraktilen og 75% kvartilen, dvs. henholdsvis det tal som 25% af lønningerne ligger under og som 75% af lønningerne ligger under.
Ved at angive dem, får man et indtryk af, hvor stor lønspredningen er. Et mål for denne spredning kunne være kvartilafstanden.

**Eksempel 15.8 Kvartilafstand**
I den tidligere omtalte lønstatistik findes bl.a. følgende tal, idet de to sidste kolonner er vor bearbejdning af tallene.

| | | Løn pr. præsteret time | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nr | | gennemsnit $\bar{x}$ | nedre kvartil k1 | median m | øvre kvartil k3 | $\frac{\bar{x}}{m}$ | $\frac{k3-k1}{m}$ |
| 1 | Ledelse på højt niveau | 353.41 | 231.63 | 313.38 | 433.78 | 1.13 | 0.64 |
| 2 | Kontorarbejde | 196.82 | 158.86 | 186.99 | 222.78 | 1.05 | 0.34 |

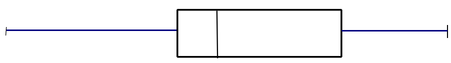
Af kolonnen $\frac{\bar{x}}{m}$ ses, at for begge rækker er gennemsnittet større end medianen dvs. begge fordelinger er højreskæv, men det gælder mest for række nr. 1. Her gælder åbenbart, at nogle få forholdsvis høje lønninger trækker gennemsnittet op.
Skal man sammenligne lønspredningen i de to tilfælde, må man tage hensyn til, at medianen er meget forskellig. Man vil derfor som der er sket i sidste kolonne beregne den **relative kvartil-afstand.**
Den viser også, at lønspredningen er væsentlig mindre for kontorarbejde end for ledelse.
◆

Hvis man har mistanke om, at fordelingen er skæv, så kan man i TI89 tegne et såkaldt boxplot. Den giver samtidig mulighed for at beregne medianer og kvartiler.
Medianer og kvartiler kan også findes på den udskrift som fremkom i eksempel 15.7.
Medx = median, Q1x og Q3x er 1 og 3. kvartil.

[1]jævnfør statistisk årbog 2005 tabel 144 eller se www.statistikbanken.dk Og vælg løn\lønstatistik for den statslige sektor\løn32\klik for at vælge\alle værdier\hovedgrupper\ledelse på højt niveau+kontorarbejde

**Eksempel 15.9 = eksempel 15.7 fortsat**
a) Tegn et boxplot for tallene i eksempel 15.7
Afgør ud fra den
b) Om fordelingen nogenlunde symmetrisk
c) Aflæs på plottet **1 kvartil**, dvs. den hastighed som 25% af hastighederne ligger under ( og altså 75% ligger over)
d) Aflæs på plottet 3 kvartil, dvs. den hastighed som 75% af hastighederne ligger under ( og altså 25% ligger over)
e) Aflæs på boxplottet den største og mindste hastighed, der forekommer.

**Løsning**
a) TI89: APPS\ STAT/LIST.
F2:Plots\1:Plot Setup\F1:Define\Plot type = Boxplot\ x = list1 (Vælg VAR LINK og vælg listnavne herfra), ENTER\ Graph
Der fremkommer følgende boxplot



b) Ved at trykke på F3 : Trace og flytte cursor til linien midt i kassen aflæses medianen til 71.0
Man ser at medianen ligger forskudt til venstre i kassen, hvilket betyder, at fordelingen er højreskæv. Det stemmer også med at gennemsnittet var 72.6 km/time, dvs. højere end medianen
c) Ved at flytte cursor til venstre kant af kassen aflæses 1 kvartil til 63, dvs. 25% af de der kører langsomst kører under 63 km/time
d) Tilsvarende ved at flytte cursor til højre kant af kassen aflæses 3 kvartil til 84 km, dvs. 75% af bilisterne kører 84 km/time eller derunder.
Da den hidtidige hastighedsgrænse er 70 km/time overskrider over 50% denne grænse, og 25% meget betydeligt.
e) Ved at flytte cursor til de to yderpunkter aflæses, at højeste hastighed er 103 km/time og laveste hastighed er 35 km/time

◆

## 15.4. Grupperede fordelinger.

I mange statistiske tabeller angiver man for overskuelighedens skyld ikke de oprindelige data, men grupperer tallene og angiver så kun hyppighederne indenfor hver gruppe.

For at få estimat for gennemsnit og spredning antager man nu, at alle observationer ligger i midten af intervallet.
Man siger, at gennemsnittet er et **vægtet gennemsnit**, fordi hver værdi indgår med en vægt svarende til andelen af værdier i hvert interval.

På tilsvarende måde kan man finde spredningen af formlen $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\cdot\dfrac{n}{100}}{100-1}}$

**Eksempel 15.10 Grupperet fordeling**
I statistikbanken findes følgende tabel over aldersfordelingen af elever fra København, som er under uddannelse til forsvaret i 2004.

| alder | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30-34 | 35-39 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| antal | 1 | 11 | 44 | 48 | 45 | 34 | 21 | 22 | 15 | 19 | 2 |

Beregn gennemsnit og spredning
**Løsning:**

$$\bar{x} = \frac{1\cdot 21 + 11\cdot 22 + 44\cdot 23 + \ldots + 15\cdot 29 + 19\cdot 32 + 2\cdot 37}{1+11+44+48+45+34+21+22+15+19+2} = \frac{6736}{262} = \underline{\underline{25.7}}$$

$$s = \sqrt{\frac{1\cdot(21-25.7)^2 + 11\cdot(22-25.7)^2 + \ldots + 2\cdot(37-25.7)^2}{262-1}} = \underline{\underline{10.74}}$$

Median: Der summeres op til man når 131. Heraf ses, at median er $\underline{\underline{25}}$

◆

# 15.5. Stikprøver

## 15.5.1. Indledning

I langt de fleste i praksis forekomne tilfælde vil det bl.a. af tidsmæssige og omkostningsmæssige grunde være umuligt at foretage en totaltælling af hele populationen. Helt klart er dette ved afprøvningen ødelægger emnet (åbning af konservesdåser) eller populationen i princippet er uendelig ( for at undersøge om en metode giver et større udbytte end et andet eller undersøge sideafvigelserne ved skydning med maskingevær) da der her ingen øvre grænse for antal delforsøg)
Som det senere vil fremgå kan selv en forholdsvis lille repræsentativ stikprøve give svar på væsentlige forhold omkring hele populationen.
Det er imidlertid klart, at en betingelse herfor er, at stikprøven er **repræsentativ**, dvs. at stikprøven med hensyn til den egenskab der ønskes er et "mini-billede" af populationen.
Det er her vigtigt at følgende 2 spørgsmål bliver afklaret:
1) Hvordan stikprøven udtages
2) Hvor stor stikprøven skal være

## 15.5.2. Udtagelse af stikprøve

Dette sker sædvanligvis ved en eller anden form for lodtrækning (kaldes **randomisering**).
Afhængig af problemet kan dette gøres på forskellig måde.

**Simpel udvælgelse:** Den enkleste form for stikprøveudtagning er, at man nummererer populationens elementer, og så **randomiserer** (ved lodtrækning, evt. ved at benyttet et program der generer tilfældige tal) udtager de N elementer der skal indgå i stikprøven.
<u>Eksempel:</u> For at undersøge om en ny pille mod en bestemt lidelse var effektiv udvalgte man ved lodtrækning 20 patienter som fik den nye pille.

Fejlkilde: Det er en erfaring at bare det, at man ved, man prøver en ny medicin kan forbedre ens helbred. Man kan derfor fejlagtigt tro, at pillen er virkningsfuld. Man vælger derfor sædvanligvis 40 patienter ved lodtrækning, hvoraf de 20 får den nye pille og de øvrige en virkningsløs kalktablet. (placebobehandling).

**Stratificeret udvælgelse.**
Under visse omstændigheder er det fordelagtigt (mindre stikprøvestørrelse for at opnå samme sikkerhed) at opdele populationen i mindre grupper (kaldet strada), og så foretage en simpel udvælgelse indenfor hver gruppe. Dette er dog kun en fordel, hvis elementerne indenfor hver gruppe er mere ensartet end mellem grupperne.
Eksempel: Ønsker man at spørge vælgerne om deres holdning til et skattestop kunne det uden tvivl være nødvendigt at dele stikprøven op efter indkomstgrupper (høj, mellem og lav) .

**Systematisk udvælgelse:**
Det er jo ikke sikkert at man kender alle elementer i populationen. I så fald kunne man foretage en såkaldt systematisk udvælgelse, hvor man vælger at udtage hver k'te element fra populationen.
Eksempel: En detailhandler ønsker at måle tilfredsheden hos sine kunder. Der ønskes udtaget 40 kunder i løbet af en speciel dag.
Da man naturligvis ikke på forhånd kender de kunder der kommer i butikken, vælges en systematisk udvælgelse, ved at vælge hver 7'ende kunde der forlader butikken. Man starter dagen med ved lodtrækning at vælge et af tallene fra 1 til 7. Lad det være tallet 5. Man udtager nu kunde nr. $5, 5+1\cdot 7 = 12, 5+2\cdot 7 = 19, \dots, 5+39\cdot 7 = 278$ . Derved har man fået valgt i alt 40 kunder.
Problemet er naturligvis, om tallet 7 er det rigtige tal. Hvis man får valgt tallet for stort, eksempelvis sætter det til 30, så vil en stikprøve på 40 kræve, at der er 1175 kunder den dag, og det behøver jo ikke at være tilfældet. Omvendt hvis tallet er for lille, så får man måske udtaget de 40 kunder i løbet af formiddagen, og så er stikprøven nok ikke repræsentativ, da man ikke får eftermiddagskunderne med.

**Klyngeudvælgelse** (Cluster sampling)
Denne metode kan med fordel benyttes, hvis populationen består af eller kan inddeles i delmængder (klynger) . Metoden består i, at man ved randomisering vælger et mindre antal klynger, som så totaltælles.

Eksempel: I et vareparti på 2000 emner fordelt på 200 kasser hver med 10 emner ønsker man en vurdering af fejlprocenten.
Man udtager randomiseret 5 kasser, og undersøger alle emnerne i kasserne.

## 15.5.3. Stikprøvens størrelse

### 15.5.3.1 Indledning

Udtages en stikprøve fra en population er det jo for, at man ud fra stikprøven kan fortælle noget centralt om hele populationen.
I eksempel 15.5 var vi således interesseret i hvor meget sideafvisningen var for det pågældende maskingevær. Vi fandt, at for gennemsnittet af 100 skud var den 7.79 enheder mod venstre.
Et sådant gennemsnit er imidlertid også behæftet med en vis usikkerhed.
Havde vi skudt andre 100 skud, havde vi uden tvivl fået et lidt andet gennemsnit.
Det er derfor ikke nok, at angive at den "sande" middelværdi er $\bar{x}$ , vi må også angive et "usikkerhedsinterval".
Et interval indenfor hvilket den "sande værdi" $\mu$ med eksempelvis 95% sikkerhed vil ligge, kaldes et **95% konfidensinterval**.

Vi må nu skelne mellem to situationer
1) **Normalfordelte observationer**. Resultaterne er her tal, der i princippet kan angives med et stort antal decimaler, som eksempelvis ovennævnte sideafvigelse, eller bilernes fart.
2) **Observationer resulterer i hele (ikke negative) tal**. Et eksempel er markedsundersøgelser, hvor man spørger 1000 personer, om de bedst kan lide produkt A, B eller C. Her er det antallet af personer der er resultaterne.

### 15.5.3.2.Normalfordelte observationer.

Lad os antage, at stikprøven har $n$ observationer, og at man har beregnet gennemsnittet $\bar{x}$ og spredningen $s$ .
Man kan vise, at et 95% konfidensinterval for middelværdien $\mu$ bestemmes ved formlen

$\bar{x} - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ , hvor $t$ er et tal, der afhænger af $n$.

Beregningen kan automatisk foretages af TI89

### Eksempel 15.11 = 15.7 fortsat

Beregn et 95% konfidensinterval for de 30 observationer af farten.
**Løsning:**
Efter at have tastet tallene ind i "list1" vælges
F7\ 2: t-interval\ data\ENTER
I den fremkomne menu vælges List1 (fra VAR-link) og C level til 0.95 (da vi vil have et 95% konfidensinterval) Resultat [65.68 ; 78.66]
Den gennemsnitlige fart var 72.17 km/time , men det vi ved nu, er,
<u>at med 95% sikkerhed ligger den gennemsnitlige fart mellem 65.7 km/time og 78.7 km/time.</u>

Ønskes usikkerheden bragt ned, så må man gøre stikprøven større.
Et grundlæggende problem er her, at man jo ikke kender spredningen s. Man er derfor nødt til at få et indtryk af størrelsen af s ved at lave nogle indledende forsøg.
Hvor meget man skal forøge $n$ med gøres nok lettest ved at prøve sig frem, som der følgende eksempel viser.

**Eksempel 15.12. Stikprøvens størrelse**
En forstmand er interesseret i at bestemme middelværdien af diameteren af voksne egetræer i en bestemt fredet skov.
Der blev målt diameteren på 7 tilfældigt udvalgte egetræer (i 1 meters højde over jorden)
Resultatet ses i følgende skema.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| diameter (cm) | 64.0 | 33.4 | 45.8 | 56.0 | 51.5 | 29.2 | 63.7 |

a) Beregn $\bar{x}$ og s og et 95% konfidensinterval for middelværdien $\mu$.
Forstmanden fandt, at konfidensintervallet der blev beregnet på basis af 7 træer var for bredt.
Han ønskede, at 95% konfidensintervallet højst skulle have en "radius" på 5 cm.
c) Hvor stor en stikprøve skal han med tilnærmelse op på.
**Løsning:**
a) Efter at have tastet tallene ind i "list2" vælges
F7\ 2: t-interval\ data\ENTER
I den fremkomne menu vælges List2 (fra VAR-link) og C level til 0.95 (da vi vil have et 95% konfidensinterval)
Resultat $\bar{x}$ = 49,08571 s =13,7957 95% konfidensinterval [36.33 ; 61.84]
b) Det ses, at længden af konfidensintervallet er 61.84 - 36.33 = 25.51 dvs. meget større end de 10 cm ,der ønskes
Idet vi nu antager at s er uændret 13.80,
F7\ 2: t-interval\ Stats\ENTER
I den fremkomne menu vælges $\bar{x}$ = 49 , s = 13.8 og forsøgsvis n = 20. Man får [42.6; 55.5], dvs. længden er ca. 13cm
Der gættes nu på $n$ = 30, og man får [43.9 ; 54.2]. Vi er nu meget tæt på 10 cm.
Vælges n = 32 fås [44.1 ; 54.1] dvs. stikprøvestørrelsen skal være 32.

◆

Da der som sagt bl.a. er usikkert, om $s$ stadig er 13.8, skal sådanne beregninger altid efterfølgende kontrolleres når man har lavet forsøgene.

### 15.5.3.3 Observationer resulterer i hele (ikke negative) tal.

I aviser, TV m.m. optræder utallige opinionsundersøgelser og markedsundersøgelser, hvor man spørger en forhåbentlig repræsentativ stikprøve om deres mening.
Resultaterne er naturligvis usikre, men sjældent fortælles der om hvor stor usikkerheden er.
Følgende eksempel illustrerer dette.

**Eksempel 15.13. Opinionsundersøgelse.**
Ved valget i 2007 stemte 25.5% af vælgerne på socialdemokraterne.
I en opinionsundersøgelse 4 måneder efter valget svarede 1035 vælgere på spørgsmålet om hvilket parti det var mest sandsynligt de ville stemme på hvis der var valg i morgen.
22.7% svarede, at de ville stemme på Socialdemokraterne.
På grundlag heraf blev der konkluderet, at partiet var gået signifikant tilbage siden valget.
Er denne konklusion rimelig?

◆

En metode til at afgøre dette på, er at angive et passende "usikkerhedsinterval" for sandsynligheden *p* for svarprocenten.

Et interval, hvor man vil være 95% sikker på at den sande sandsynlighed *p* ligger indenfor intervalgrænserne , kaldes et 95% konfidensinterval for *p*.
Lad n være antal personer der har svaret, og lad x være antal positive svar.

Idet $\hat{p} = \frac{x}{n}$ kan man vise, at et 95% konfidensinterval for *p* bestemmes af formlen

$$\hat{p} - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p} + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} \quad \text{forudsat } n\cdot\hat{p}\cdot(1-\hat{p}) \ge 10$$

Ønskede vi eksempelvis et 90% konfidensinterval erstattes 1.96 med 1.645 (intervallet bliver bredere.)

## Eksempel 15.13 Beregning af konfidensinterval

I eksempel 15.13 svarede 1035 vælgere på spørgsmålet om hvilket parti det var mest sandsynligt de ville stemme på hvis der var valg i morgen. 22.7% svarede, at de ville stemme på Socialdemokraterne. Opstil et 95% konfidensinterval for sandsynligheden *p* for at man vil stemme på socialdemokraterne.

**Løsning:**

Da $\hat{p}$ =0.227 fås $n\cdot\hat{p}\cdot(1-\hat{p}) = 1035\cdot 0.227\cdot(1-0.227) \approx 182 \ge 10$ Forudsætning ok.

Antal der svarer positivt er $x = 1035\cdot 0.227 \approx 235$
Vælg APPS\F7\1-PropZInt. Udfyld menu x = 235\ n = 1035\ C Level =0.95 ENTER
Resultat: [0.2015 ; 0.2526 ]

Vi ser altså, at da valgresultatet lå på 25.5%, så må man konkludere, at socialdemokraterne med stor sikkerhed er gået tilbage i forhold til valget.

Benyttes formel fås : $0.227 - 1.96\cdot\sqrt{\frac{0.227\cdot(1-0.227)}{1035}} \le p \le 0.227 - 1.96\cdot\sqrt{\frac{0.227\cdot(1-0.227)}{1035}}$

$\Leftrightarrow 0.227 - 0.026 \le p \le 0.227 + 0.026 \Leftrightarrow 0.202 \le p \le 0.253$

◆

Før man starter sine målinger, kunne det være nyttigt på forhånd at vide nogenlunde hvor mange målinger man skal foretage, for at få resultat med en given nøjagtighed.
Hvis man antager, at ovennævnte formel for konfidensradius gælder, så ved vi , at radius for et 95% konfidensinterval er $r = 1.96\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$ .

Løses denne ligning med hensyn til *n* fås

$$\boxed{n = \left(\frac{1.96}{r}\right)^2 \hat{p}\cdot(1-\hat{p})}$$

Det grundlæggende problem er her, at man næppe kender $\hat{p}$ eksakt.
Man kender muligvis på basis af tidligere erfaringer størrelsesordenen af $\hat{p}$ . Hvis ikke kunne man

eventuelt udtage en lille stikprøve, og beregne et $\hat{p}$ på basis heraf.

Endelig er der den mulighed, at sætter $\hat{p} = 0.5$, som er maksimumsværdien af $\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})$

Benyttes denne værdi får man den størst mulige værdi af $n$ for en given værdi af $r$.
Ulempen er, at dette fører til en større stikprøvestørrelse end nødvendigt.
Det følgende eksempel illustrerer fremgangsmåden.

**Eksempel 15.14. Dimensionering.**
I den i eksempel 15.13 nævnte undersøgelse ønskes inden udtagning af stikprøven, at antallet skal være så stort, at radius i konfidensintervallet højst er 2%.
**Løsning:**
**Metode 1**. For at få en øvre grænse, sættes $\hat{p} = 0.5$.

Vi får $n = \left(\frac{1.96}{r}\right)^2 \hat{p} \cdot (1 - \hat{p}) = \left(\frac{1.96}{0.02}\right)^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{2401}}$

**Metode 2** Da man på forhånd ved, at ved sidste valg fik ingen partier mere end 30% af stemmerne sættes $\hat{p} = 0.3$.

$$n = \left(\frac{u_{0.975}}{r}\right)^2 \hat{p} \cdot (1 - \hat{p}) = \left(\frac{1.96}{0.02}\right)^2 0.3 \cdot 0.7 = \underline{\underline{2017}}$$

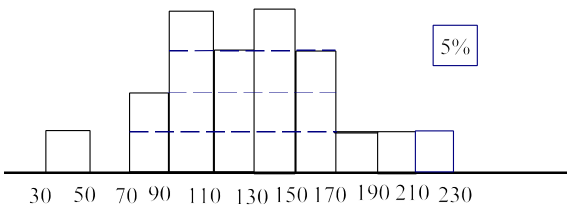
Som kontrol kan man beregne konfidensintervallet ved TI89
Da 30% af 2000 = 600 indsætte x = 600 og n = 2000. Man finder [0.28 ; 0.32] hvilket svarer meget godt til at bredden er 4% og radius dermed 2%. ◆

# Opgaver

**Opgave 15.1.**
30 kadetter blev spurgt om hvor ofte de havde været i biografen det sidste år.
Svarene var 10, 7, 4, 4, 3, 6, 9, 7, 4, 3, 8, 7, 7, 6, 7, 4, 3, 3, 8, 9, 8, 7, 6, 4, 10, 4, 3, 7, 9, 6
a) Tegn et boxplot af tallene
b) Beregn gennemsnit og median, og vurder ud fra dem og boxplottet om fordelingen er højreskæv, venstreskæv eller symmetrisk
c) Hvor stor en procentdel af kadetterne har haft 8 eller flere besøg i biografen.

**Opgave 15.2.**
For at kunne sammenligne to klasser i matematik fik klasserne samme prøve, hvor de maksimalt kunne få 100 point.
SB1: 60 , 65, 40, 80, 50, 60, 50, 95, 65, 60, 65
SB2: 65, 65, 70, 75, 85, 75, 85, 40, 60, 70, 60
a) Tegn (på samme tegning) de to klassers boxplot, og vurder ud fra tegningen om pointene fordeler sig symmetrisk.
Vurder endvidere grafisk hvilken klasse der har klaret sig bedst og er mest homogen.
b) Angiv de to klassers medianer og deres gennemsnit.
c) Angiv de to klassers spredning og deres kvartilafstand
d) Vurder ud fra svarene i b) og c) om svaret i a) stadig er korrekt.

**Opgave 15.3**
Givet følgende histogram
a) Tegn den tilhørende sumkurve
b) Angiv median, gennemsnit, spredning og nedre og øvre kvartil




**Opgave 15.4**
I en politisk forening med 85 medlemmer fremgår medlemmernes alder af følgende skema:

| Alder | 40-45 | 46-50 | 51-55 | 56-60 | 61-65 | 66-70 | 71-75 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Antal | 10 | 12 | 20 | 15 | 18 | 8 | 2 |

a) Tegn et histogram, og en sumkurve over aldersfordelingen
b) Beregn gennemsnittet og medianen for medlemmernes alder.

**Opgave 15.5**
I forbindelse med en ny byggeplan i en mindre by blev 20 tilfældige fodgænger på byens hovedgade spurgt om de støttede planen. 16 var modstandere af planen.
a) Hvad er populationen?
b) Hvad er stikprøven?
c) Synes du stikprøven er repræsentativ? Begrundelse skal gives.

**Opgave 15.6**
Et byggemarked ønsker via en stikprøveundersøgelse at få et indtryk af kundernes tilfredshed med betjeningen.
Der overvejes følgende måder at udtage de kunder man vil spørge
a) Alle kunder mellem kl 13 og 14
b) Alle kunder der er blevet betjent af en bestemt medarbejder
c) Alle kunder, der har købt for mere end 500 kr
d) Hver 5'te kunde
Hvilken metode synes du er bedst?

**Opgave 15.7**
Den følgende tabel viser vægtene (i kg) af 80 kaniner.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.90<br>2.60 | 2.55<br>2.45 | 2.95<br>2.65 | 2.70<br>3.15 | 3.20<br>3.40 | 2.75<br>2.90 | 3.20<br>3.00 | 2.85<br>2.50 | 2.60<br>2.95 | 2.90<br>3.00 | 2.85<br>3.25 | 2.70<br>2.80 | 2.80<br>2.70 | 2.55<br>2.60 | 3.10<br>2.80 | 2.90<br>2.70 |

a) Foretag en vurdering af, om fordelingen er nogenlunde symmetrisk (normalfordelt) ved at tegne et boxplot
Idet det antages, at det er tilfældet, skal man beregne
b) Gennemsnit og spredning
c) Angive det interval hvori den "sande# middelværdi med 95% sikkerhed ligger.
d) Angiv hvor stor en procent af kaninerne, der "approksimativt" overstiger en vægt på 3 kg

**Opgave 15.8**
Trykstyrken i beton blev kontrolleret ved at man støbte 12 betonklodser og testede dem. Resultatet var:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2216 | 2225 | 2318 | 2237 | 2301 | 2255 | 2249 | 2281 | 2275 | 2204 | 2263 | 2295 |

a) Find et estimat for trykstyrkens middelværdi $\mu$ og spredning $\sigma$.
b) Angiv et 95% konfidensinterval for $\mu$.
c) Man fandt, at radius i konfidensintervallet var for stor.
Bestem med tilnærmelse antallet af målinger der skal udføres, hvis radius højst skal være 20.

**Opgave 15.9**
Ved en fabrikation af et bestemt sprængstof er det vigtigt, at en reaktoropløsning har en pH-værdi omkring 8.50. Der foretages 6 målinger på en bestemt reaktantopløsning. Resultaterne var:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| pH | 8.54 | 7.89 | 8.50 | 8.21 | 8.15 | 8.32 |

Den benyttede pH-målemetode antages på baggrund af tidligere lignende målinger at give normalfordelte resultater.
a) Angiv et estimat for opløsningens middelværdi og spredning.
b) Angiv et 95% konfidensinterval for pH.
c) Man finder, at radius i konfidensintervallet er for bredt.
Angiv med tilnærmelse antallet af målinger der skal foretages, hvis radius skal være 0.2.

**Opgave 15.10**
De 10 øverste ark papir i en pakke med printerpapir har følgende vægt

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.21 | 4.33 | 4.26 | 4.27 | 4.19 | 4.30 | 4.24 | 4.24 | 4.28 | 4.24 |

Angiv 95%-konfidensintervaller for middelværdi og spredning af papirets vægt.

**Opgave 15.11**
Til undersøgelse af alkoholprocenten i en persons blod foretages 4 uafhængige målinger, som gav følgende resultater (i ‰):

| | | | |
|---|---|---|---|
| 108 | 102 | 107 | 98 |

Opstil et 95% konfidensinterval for personens alkoholkoncentration.

**Opgave 15.12**
I rapporten "Analyse af elevkampagnen 2006" udarbejdet af "Forsvarets rekruttering" returnerede 604 personer et udsendt spørgeskema.
På side 10 er en opgørelse over hvilke medier der var udslagsgivende for materialebestilling.
Heraf fremgår at TV-spot var udslagsgivende for $p$ = 34%

Der påstås side 7, at den usikkerhed der knytter sig til målingerne er $\pm 3.5\%$

a) Beregn et 95% konfidensinterval for $p$, og kommenter ovennævnte påstand.
b) Hvor mange personer (afrund op til nærmeste med 10 delelige tal) skulle have indsendt spørgeskemaet, hvis påstanden om de 3.5% skulle være korrekt idet vi stadig antager, at $p$ = 34%.

**Opgave 15.13**
I en analyse af arbejdsgivernes tilfredshed med jobnet, svarede 488 arbejdsgivere på spørgsmålet. Det viste sig, at kun ca. 5% var utilfredse med jobnet.
a) Beregn et 95% konfidensinterval for $p$ = 0.05.
b) Giv et skøn over hvor mange arbejdsgivere (afrund op til nærmeste med 10 delelige tal) man skulle have haft svar fra, hvis et 95% konfidensinterval for $p$ skulle have radius 0.01.
Det antages, at $p$ stadig ligger omkring 5%

**Opgave 15.14**
I en analyse blev 428 arbejdsgivere spurgt om hvilke jobtyper de annoncerede på jobnet.
Det viste sig, at kun 7% benyttede jobnet til at annoncere efter ledere.
a) Beregn et 95% konfidensinterval for $p$ = 0.07
b) Giv et skøn over hvor mange arbejdsgivere (afrund op til nærmeste med 10 delelige tal) man skulle have haft svar fra, hvis et 95% konfidensinterval for $p$ skulle have radius 0.02.
Det antages, at $p$ stadig ligger omkring 7 %

## Facitliste

**1.1** a) 26 b) -5 c) 29 d) 54 e) 0
**1.2** a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{8}{9}$ e) $\frac{2}{9}$
**1.3** a) 2a+4b b) $2+\dfrac{4b}{a}$ c) 2 d) $\dfrac{2a}{b-2}$ e) $3a^{10}$ f) $\dfrac{3x-2}{3x+9}$
**1.4** a) $13x+7$ b) $xy-x-12y-19$ c) $20xy$ d) $-3x^{10}+x^9+6x^6$ e) $6x^2-3y^2+7xy$
**1.5.** a) $\dfrac{4}{3}a^2$ b) $\dfrac{4b^2}{3a^4c^4}$ c) $4x^8$
**1.6.** a) -6 b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{2}{17}$
**1.7** a) $a^2$ b) $a^{15}$ c) 1
**1.8.** a) $\pm 2$ b) 1, -2 c) 2 , 3, -3
**1.9.** 8

**2.1.** $\sqrt{122}$
**2.2.** 8.544, 5.099, 3.606
**2.3.** nej
**2.4** $y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$
**2.5.** $y=x+4$
**2.6.** a) - b) $y = 2x - 5$ c) (0,5) $(\frac{5}{2},0)$
**2.7.** a) $y=3x-12$ b) $y=-3x-\frac{1}{3}$
**2.8.** $y=\frac{1}{4}x-1$
**2.9.** nej
**2.10** a) $(x+2)^2+(y-3)^2=25$ b) - c) (2,0) (-6,0)
**2.11** a) C = (0,3) r = 2 b) C = (-2, 6) r = 5
**2.12** a) C = (-1, 3) r = 4 b) C = ( 5, 0) r = 3 c) C = (-1, -4) r = 5
**2.13.** $\frac{15}{2}$, $\frac{28}{3}$
**2.14** a) $y=0.789\cdot x$ b) -
**2.15** a) $y=\dfrac{2000}{x}$ b) -
**2.16** a) c=10, b= $\sqrt{75}$ b) a=4, b = $\sqrt{48}$
**2.17** 0.5000, 0.9397, 0.9397, - 1.5399 -0.5000
**2.18** a) $76.44^0$ b) $13.56^0$ og $166.44^0$ c) $110.22^0$
**2.19** b = c = 13.30, $\angle$ B = $\angle$ C = $72.5^0$
**2.20** $25.64^0$
**2.21** 280.06 m
**2.22** a) $4\sqrt{3}=6.92$ b) $60^0$
**2.23** 434.93 m

**3.1** -

**3.2** $\dfrac{20}{3}, \quad \dfrac{4}{3}$

**3.3** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

**3.4** a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ b) 5

**3.5** $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

**3.6** C = (4,5), D = (-6,10)

**3.7** $|\vec{a}| = \sqrt{50}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{34}, \quad |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{52}$

**3.8** $\begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ \frac{5}{13} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{12}{13} \\ -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$

**3.9** - 16, 25, - 23

**3.10** 2, $-\frac{3}{2}$

**3.11** a) 3.60, $\angle$ -123.69 b) 3.60, $\angle$ -56.31 c) 3.47, 3.60 d) 3.23, $\angle$ 81.74

**3.12** (-1.092, 3.388)

**3.13** a) 93 sm b) $40.326^0$, 91.588 sm

**3.14** $165.75^0$

**3.15** $\angle$ A=$95.91^0$, $\angle$ B = $35.42^0$, $\angle$ C = $48.67^0$

**3.16** a) - b) $69.72^0$

**3.17** $\angle$ A=$68.19^0$, $\angle$ B = $90^0$, $\angle$ C = $21.80^0$

**3.18** 3, -2

**3.19** $\begin{pmatrix} -\frac{28}{29} \\ \frac{70}{29} \end{pmatrix}, \quad \dfrac{14}{\sqrt{29}}$

**3.20** $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

**3.21** B = (0,6), C = (5,5), D = (4,0)

**3.22** C = (14,8), D = (11,4) M = (10,6)

**3.23** $\vec{0}$

**3.24** $33.69^0$

**3.25** $\vec{a} - 2\hat{a}$, $116.57^0$

**3.26** 62, 2

**3.27** 5

**4.1** a) $x + 2y - 8 = 0$ b) $-2x + y + 1 = 0$

**4.2** $x + 12y - 68 = 0$

**4.3** a) $45^0$ b) $18.44^0$ c) $33.69^0$

**4.4** $\dfrac{21}{\sqrt{10}}$

**4.5** a) $\dfrac{22}{\sqrt{13}}$, b) 22, c) A = $57.53^0$ B = $74.75^0$ C = $42.73^0$

**4.6** a) 5, $\sqrt{17}$ b) ja c) nej

**4.7** a) - b) $-x+3y+5=0$

**4.8** (1) (x,y) = (2,-3) (2) (x,y) = $\left(\dfrac{1}{2},3\right)$

**4.9.** (44,-24)

**4.10** 20, 40

**4.11** y=1

**4.12** $(x-3)^2+(y-5)^2=13$

**4.13** (x,y) = (1,7) (x,y) = $\left(\frac{145}{17},\frac{87}{17}\right)$

**4.14** (x,y) = (2,3) (x,y) = $\left(\frac{38}{13},\frac{31}{13}\right)$

**4.15** a) A = $114.98^0$, B= $42.83^0$ C = $22.19^0$
b) a = 5.97 B = $49.38^0$ C = $65.62^0$
c) c = 5.798 A = $35.26^0$ C = $24.74^0$
d) a = 8.9067 c = 4.739 A = $40^0$

**4.16** 3.659 sm

**4.17** a) 4.09 sm b) $7.34^0$ c) 23 minutter

**4.18** 47.76 m

**4.19** a) 16.91 sm b) 23.18

**4.20** a) (6.25, 9.63) b) 17.55 knob $39.73^0$ c) 16.10 sm

**5.1** a) R, $\dfrac{1-x}{3}$, R b) $x \ge -1$, $f^{-1}(x) = x^2-1$, $x \ge 0$

**6.1.** $b^{n \cdot q}$

**6.2** $x^2$

**6.3** a) (7,0) , (1,0) b) (4,-9) c) -

**6.4** a) (4,0) , (-1,0), (0,4) b) $\left(\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right)$ c) -

**6.5** (0,1) (3,4)

**6.6** 1.38 m

**6.7** 2 , 1.547

**6.8** 0, 1.584

**6.9** -2

**6.10** 5

**6.11** 1.95

**6.12** a) -2.155, 28919 b) 28.1

**6.13** 5.98 = 6%

**6.14** 27490

**6.15** 41263
**6.16** a) 1.162 b) 221
**6.17** 28,69 mm
**6.18** $\pm 0.3398 + 2 \cdot p \cdot \pi$, $\pm 2.8018 + 2 \cdot p \cdot \pi$, $p$ et helt tal
**6.19** $\pm 0.6591 + p \cdot \pi$ , $p$ et helt tal
**6.20** $3.6652 + 2 \cdot p \cdot \pi$, $-0.5236 + 2 \cdot p \cdot \pi$, $3.4814 + 2 \cdot p \cdot \pi$, $-0.3398 + 2 \cdot p \cdot \pi$, $p$ et helt tal
**6.21** kl17.09 , kl 5.46
**6.22** a) 3, 0.5 2 b) 0.0454, 0.2954 c) -

**7.1.** a) $r^2 = 0.705$ , - b) $y = 40.78 + 0.766 \cdot x$ c ) - d) 79.06 e) [72.5 ; 85.6]
**7.2** a) $y = 35131087 - 17855.5 \cdot x$ b) $r^2 = 0.9986$ c ) nej
**7.3** a) $r^2 = 0.9968$ , - b) $y = 78.899 + 6.396 \cdot x$ c ) 6.4 cm d) 168.4 e) nej
**7.4** a) $r^2 = 0.9805$ , - b) $y = 100 - 171.77 \cdot 0.8534^t$ c ) 92,77
**7.5** a) $r^2 = 0.9997$ , - b) $y = 4344{,}092 \cdot 0.976243^t$ c ) 28.83 timer d) 89.92 timer
**7.6** a) $r^2 = 0.9999$ , - b) $P = 1.02 \cdot 10^{-5} \cdot V^{-3}$ c) P = 9.97
**7.7** a) $r^2 = 0.9464$ , - b) $\mathrm{P} = 42663{,}12 \cdot \mathrm{v}^{-1.5697}$ c) 297%
**7.8** a) $r^2 = 0.9964$ , - b) $y = 13.269 \cdot x^{2.0285}$ c ) 4.12
**7.9** a) $r^2 = 0.9606$ , - b) $r^2 = 0.9947$ - c ) $y = 57.8655 \cdot 0.9707^x$ d ) 13.08
**7.10** a) Potensmodel $r^2 = 0.9999$ b) 12.04

**8.1** -1, $\infty$
**8.2** $\frac{\sqrt{2}}{4}$

**9.1** a) $4x$ b) $6 \cdot e^{3x}$ c) $10\cos(5x) - 3\sin(3x)$ d) $\frac{3}{x}$ e) $3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
**9.2** a) $\sin(2x) + 2x\cos(2x)$ b) $5\ln(8x) + 5$ c) $(3 + 6x) \cdot e^{2x}$
**9.3** a) $12x^3 - 10x + 2$ b) $x \cdot \sin x$
**9.4** a) 150 b) $\frac{5}{(x+2)^2}$
**9.5** a) $\frac{1}{x-1}$ b) $2xe^{2x}(1+x)$ c 1
**9.6** a) $-\frac{x+8}{(x-2)^2}$ b) $\frac{5\sqrt{2}}{8} - 1$
**9.7** $y = -2x + 6$
**9.8** $y = 2{,}7x - 1.7$
**9.9** a) $y = -2x + 2$, $y = -2x + 10$ b) $\frac{12}{\sqrt{5}}$

**9.10** $59.8^0$
**9.11** a) 1 m/s b) 1 s c) $-\frac{1}{8}$ m/s$^2$
**10.1** a) R b) y=1 c) - d) $\frac{1}{3}$ 3 e) -
**10.2** a) R b) y=2 c) 0, intet d) $0 \le y < 2$ e) -
**10.3** a) $x \neq 3$ b) x=3 c) $-\infty < y \le 50$ d) -
**10.4** a) $-\sqrt{2} \le y \le \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$
**10.5** a) -5.005 b) 5, 1, 0.93
**10.6** a) 2.237 4.046 b) $\frac{5}{4}$ c) -
**10.7.** $0.7166 \le x < 2$

**11.1** $\frac{1}{2}$
**11.2** 10
**11.3** a) $\sqrt{\dfrac{a}{3}}$, b) 1 , 1
**11.4** a) $x \cdot y + \dfrac{\pi}{4}x^2$, $2y + (1+\dfrac{\pi}{2})x$ b) $\dfrac{a}{4+\pi}$ c) 1.40 m$^2$
**11.5** 24.00
**11.6** $\sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}} = 1.471$, $\sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}} = 1.471$
**11.7** 20
**11.8** a) 0.5029 b) 1.00
**11.9** 30
**11.10** 400
**11.11** a) 8.33 b) 100 c) 50 d) 1.047
**11.12** 679.17 b)2.94 c) 14.81
**11.13** a) $13.90^0$, $76.09^0$ b) 19.57 s 79.04 s
**11.14** a) t=1, (3,0) t= 2, (0,0) t=3, (-1,0) b) t=2 , (0,0) t=4, (0,6)
c) t= 2.58 (-0.82, -0.39), t = 1.42 (1.44, 0.39) d) t = 3 (-1,0) e) - f)
**11.15** a) - b) (2.1), (-2,1) c) (0,0) (0,3) d) $60^0$ e) $\left(-\dfrac{2\sqrt{7}}{9}, \dfrac{7}{9}\right)$, $\left(\dfrac{2\sqrt{7}}{9}, \dfrac{7}{9}\right)$
**11.16** a) - b) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$
**11.17** a) 1) 79700 600 2) 62000 6000 3) 52300 b) 40 c) 15

**12.1** a) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$ b) $-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ c) $\frac{1}{3}\sin 3x - \cos 4x$ d) $\frac{1}{3}e^{3x}$
**12.2** a) 1 b) 2 c) ln(2)
**12.3** a) $\dfrac{2 \cdot (3 \cdot \sin(x) + 1)^{\frac{3}{2}}}{9}$ b) $x - \ln(e^x + 1)$ c) $\dfrac{e^{2x^2}}{4}$

**12.4** a) 0.961 b) 6.70 c) 2.41
**12.5** $\frac{14}{3}$
**12.6** $\frac{28}{3}$
**12.7** a) - b) $\frac{1}{12}$
**12.8** 0.3667, 104.5
**12.9** a) - b) $\frac{32}{3}$
**12.10** 3.83
**12.11** a) $\frac{8}{15}$ b) $\frac{\pi}{3}$
**12.12** a) $y = x$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{12}\pi$ d) $\frac{2}{15}\pi$
**12.13** $\frac{32}{3}\pi$
**12.14** a) - b) $\frac{8}{15}$ c) $\frac{208\pi}{315}$ =2.074

**13.1** a) $y = 9x - 7$ b) voksende
**13.2** a) $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ b) voksende
**13.3** ja
**13.4** a) voksende for x>0, aftagende for x < 0, b) $y = 2x - 2$
**13.5** ja
**13.6** a) $y = 2 + C \cdot e^{-4x}$ b) $y = 2$, $y = 2 + e^{-4x}$
**13.7** a) $y = x^2 - x + 3 + C \cdot e^{-2x}$ b) $y = x^2 - x + 3$
**13.8** a) $y) - e^{-2x} + C \cdot e^{-\frac{3}{2}x}$ b) $y) - e^{-2x} + 3 \cdot e^{-\frac{3}{2}x}$
**13.9** a) $y = -\frac{3}{5}\cos(2x) + \frac{1}{5}\sin(2x) + C \cdot e^{-\frac{2}{3}x}$ b) $y = -\frac{3}{5}\cos(2x) + \frac{1}{5}\sin(2x)$
c) $y = 0.6324 \cdot \sin(2x - 1.249)$
**13.10** 1a) $y' = k \cdot y$ 1b) $y = 100 \cdot e^{1.5t}$ 2a) $y' = (b - a \cdot y)y$ 2b) $y = \dfrac{17000 \cdot 29.9641^t}{29.9641^t + 169}$ 2c )-
**13.11** a) 0.03954 b) 11.78 c) 6.61
**13.12** 20.23
**13.13** a) $i = \dfrac{11}{12}\cos(4t) + \dfrac{11}{12}\sin(4t) - \dfrac{11}{12}e^{-4t}$ b) $\dfrac{11\sqrt{2}}{12}$
**13.14** a) $\dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{c}{\pi \cdot r^2}\sqrt{h}$, b) $h = (2 - t)^2$ c) 2
**13.15** a) $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot (\tan v)^2 \cdot h^3$ b) $\dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{c}{\pi \cdot (\tan v)^2} h^{-\frac{3}{2}}$ c) $h = (32 - 31t)^{\frac{1}{5}}$ d) 1.03
**13.16** a) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}$ b) $y = C_1 e^x \cos(3x) + C_2 e^x \sin(3x)$
**13.17** $y = \left(\sqrt{2}\cos(2x) - \sqrt{2}\sin(2x)\right)e^{4x}$

**13.18** $y=\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{9}\right)e^{-x}+C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}$

**13.19** a) $y=\left(2x-\frac{2}{3}\right)e^{x}+2x+1+C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$ b) $y=\left(2x-\frac{2}{3}\right)e^{x}+2x+1+\frac{2}{3}e^{-2x}$

**14.1** $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

**14.2** (2.3.3)
**14.3** 2
**14.4** ja, de er
**14.5** u = 35.26$^0$ , v = 70.53$^0$
**14.6** Nej
**14.7** a) 3 b)15
**14.8** a) (0,-21,-14), b) Nej

**14.9** a) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}7\\3\\3\end{pmatrix}$ b) nej

**14.10** $\begin{pmatrix}4\sqrt{2}\\4\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-6\\4\\0\end{pmatrix}$

**14.11** $\vec{k}_A=\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{k}_B=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$, $\vec{k}_C=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

**14.12** $\sqrt{20}$
**14.13** a) $x + 2y = 0$ b) $x + 2y = 7$

**14.14** a) 96.86$^0$ b) $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\1\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$

**14.15** a) $x - y + 2z - 3 = 0$ b) $x + 3y - 5 = 0$ c) $x - 2 = 0$ d) (3,0,0) , (5,0, 0), (2,0,0)
**14.16** a) - $\left(4,6,\frac{3}{2}\right)$ b) $\left(\frac{10}{3},4,2\right)$
**14.17** $x - 5y + 3z = 0$
**14.18** a) nej b) (-3, 4,8)
**14.19** 90$^0$
**14.20** 60$^0$
**14.21** a) $\frac{17}{9}$ b) $\frac{34}{3}$ c) 30.32$^0$

**14.22** a) $2x-2y-z+3=0$ b) (4, 7, -3) c) (6, 11,-7)
**14.23** $(x-3)^2+(y-5)^2+(z+2)^2=19$
**14.24** $(x-4)^2+(y-6)^2+(z-9)^2=133$
**14.25** a) (3, -8, 0), r = 3 b) (0, 4, 0), r = 1
**15.1.** a) - b) 6.1, 6.5 venstreskæv c) 25%
**15.2.** a) - b) SB1: 60 , 62.72 SB2: 70, 68.18 c) SB1:15, 14.89 SB2: 12.71, 15 d) -
**15.3**. a) - b) m=130 $\bar{x}$ =130, s = 42.19 nedre Kvartil = 100, øvre kvartil = 160
**15.4.** a) - b) m = 55 $\bar{x}$ =55.5
**15.5** **-**
**15.6**. -
**15.7** a) - b) 2.84 0.232 c) [2.76 ; 2.93] d) 25%
**15.8**. a) 2259.92 35.569 b) [2237 : 2283] d) ca 50
**15.9** a) 8.286 0.241 b) [8.02 ; 8.52] c) ca 25
**15.10** [4.23 ; 4.29] [0.028 ; 0.076]
**15.11** [0.965 ; 1.111]
**15.12** a) [0.30 ; 0.38] b) 710
**15.13** a) [0.03 ; 0.07] b) 1830
**15.14** a) [0.046 ; 0.094 ] b) 630

# STIKORD