

SUPPLEMENT

til

Anvendt statistik

INDHOLD

2A	BEVISER VEDRØRENDE NORMALFORDELINGEN	2
3A	χ^2 - FORDELINGEN	3
3B	t - FORDELINGEN	6
3C	F - FORDELINGEN	7
4A	DEFINITIONER OG EKSEMPLER PÅ CENTRALE OG EFFEKTIVE ESTIMATORER	9
4B	BEVISER FOR FORMLER FOR KONFIDENSINTERVALLER	11
5A	BEVISER FOR FORMLER I HYPOTHESETEST	13
5B	OC-KURVER OG DIMENSIONERING	16
7A	BEVIS FOR MIDDELVÆRDI OG SPREDNING FOR HYPERGEOMETRISK VARIABEL	18
7B	BEVISER FOR FORMLER I BINOMIAL- OG POISSON-TEST	19
7C	BEVISSKITSE FOR TÆTHEDSFUNKTIONEN FOR POISSONFORDELINGEN	21
9.1	BEGRUNDELSE FOR GRÆNSERNE FOR KONTROLKORT	23
13.1	FORMLER TIL BEREGNING AF ENSIDET VARIANSANALYSE	25
14.1	FORMLER TIL BEREGNING AF TOSIDET VARIANSANALYSE	27
15.1	FORMLER TIL BEREGNING AF REGRESSIONSANALYSE UDEN GENTAGELSER	29
15.2	FORMLER TIL BEREGNING AF REGRESSIONSANALYSE MED LIGE MANGE GENTAGELSER	31

SUPPLEMENT: 2A BEVISER VEDRØRENDE NORMALFORDELINGEN.

I definitionen af normalfordelingen indgår, at $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$ er en tæthedsfunktion,

dvs. $f(x) \geq 0$ og $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

Bevis: Da en eksponentialfunktion er positiv, er $f(x) \geq 0$.

$$\text{Substitueres } t = \frac{x-\mu}{\sigma} \text{ fås } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt = \sqrt{2\pi}$$

$$\text{Sættes } I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt \text{ fås}$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} u^2} du = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} (t^2 + u^2)} dt du$$

Indføres nu polære koordinater $t = r \cdot \cos v$, $u = r \cdot \sin v$ fås

$$I^2 = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} r^2} r dr = -2\pi \left[e^{-\frac{1}{2} r^2} \right]_0^{\infty} = 2\pi. \quad \text{Heraf fås det ønskede.}$$



SÆTNING 2.1 (Middelværdi og spredning for normalfordeling). Normalfordelingen $n(\mu, \sigma)$ har middelværdien μ og spredningen σ .

$$\text{Bevis: } E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} dx.$$

$$\text{Substitueres } t = \frac{x-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow x = \mu + \sigma \cdot t \text{ fås}$$

$$E(X) = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} t^2} dt + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} t^2} dt$$

Det første integral er 1, da integranden er en tæthedsfunktion, og det andet integral er 0, da integranden er en ulige funktion. Følgelig er $E(X) = \mu$.

$$3) \quad V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2 \cdot \pi} \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} dx. \quad \text{Substitueres } t = \frac{x-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow x = \mu + \sigma \cdot t \text{ fås}$$

$$V(X) = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} t^2} dt = \sigma^2 \left[-\frac{t}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} t^2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} t^2} dt = \sigma^2$$

(delvis integration, samt som før at sidste integral er 1).



SUPPLEMENT 3A χ^2 -FORDELINGEN

Definition af χ^2 -fordelingen. Lad $U_1, U_2, \dots, U_f$ være uafhængige normerede normalfordelte variable. Sandsynlighedsfordelingen for den statistiske variabel $\chi^2 = U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_f^2$ kaldes χ^2 -fordelingen med frihedsgradstallet f og betegnes $\chi^2(f)$.

Det kan vises, at tæthedsfunktionen for $\chi^2(f)$ er bestemt ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{f}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} x^{\frac{f}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor Gammafunktionen $\Gamma(x)$ er defineret ved $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ ¹

SÆTNING 3A.1 (middelværdi og varians for χ^2 -fordeling).
 χ^2 -fordelingen med f frihedsgrader har middelværdien $E(\chi^2) = f$ og variansen $V(\chi^2) = f$.

Bevis: I kapitel 1 blev det for en vilkårlig statistisk variabel X vist, at

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2. \quad (1)$$

Lad U være den normerede normalfordeling.

Da $E(U) = 0$ og $V(U) = 1$ fås af regel (1), at $E(U^2) = 1$.

Idet $\chi^2 = U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_f^2$ fås af linearitetsreglen, at

$$E(\chi^2) = E(U_1^2) + E(U_2^2) + \dots + E(U_f^2) = 1 + 1 + \dots + 1 = f$$

Benyttes regel (1) på den statistiske variabel U^2 fås $V(U^2) = E(U^4) - (E(U^2))^2$.

Af definitionen på middelværdi fås

$$E(U^4) = \int_{-\infty}^{\infty} u^4 \cdot f(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^4 \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} du = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^3 \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} d\left(-\frac{1}{2}u^2\right)$$

Benyttes delvis integration fås:

$$\begin{aligned} E(U^4) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^3 \cdot d\left(e^{-\frac{1}{2}u^2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[u^3 \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du^3 \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(0 - 3 \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} du \right) = 3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 3 \cdot E(U^2) = 3 \end{aligned}$$

Vi har nu $V(U^2) = E(U^4) - (E(U^2))^2 = 3 - 1 = 2$

Da $U_1, U_2, \dots, U_f$ er uafhængige fås $V(\chi^2) = V(U_1^2) + V(U_2^2) + \dots + V(U_f^2) = 2 + 2 + \dots + 2 = 2 \cdot f$



¹ Specielt gælder $\Gamma(x) = \begin{cases} (x-1)! & \text{for } x \in \{1, 2, 3, \dots\} \\ \sqrt{\pi} & \text{for } x = \frac{1}{2} \\ (x-1) \cdot (x-2) \cdot \dots \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} & \text{for } x \in \{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots\} \end{cases}$

SÆTNING 3A.2 (additionssætning for χ^2 - fordelte variable). Lad $\chi_1^2, \chi_2^2, \dots, \chi_k^2$ være uafhængige χ^2 - fordelte variable med frihedsgradstallene henholdsvis $f_1, f_2, \dots, f_k$. Den statistiske variabel $\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + \dots + \chi_k^2$ er da χ^2 - fordelt med frihedsgradstallet $f = f_1 + f_2 + \dots + f_k$

Bevis:

Da hver af de k χ^2 - fordelte variable er en sum af kvadraterne på en række normerede uafhængige normalfordelte variable, vil χ^2 naturligvis også være det. Det samlede antal led i χ^2 er f , hvormed sætningen er bevist.



Vi vil i de følgende sætninger gå ud fra, at $X_1, X_2, \dots, X_n$ er normalfordelte statistiske variable med middelværdi μ og spredning σ . Lad endvidere som sædvanlig

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}, \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} \quad \text{og} \quad S_\mu^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{n}.$$

Uden bevis anføres følgende sætning:

SÆTNING 3A.3 (Uafhængighed af $\bar{X}$ og S^2). De statistiske variable $\bar{X}$ og S^2 er uafhængige.

SÆTNING 3A.4 ($\frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2}$ er χ^2 - fordelt).

Den statistiske variabel $\frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$ er fordelt $\chi^2(n-1)$.

Bevis: Idet

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^n ((X_i - \mu) + (\mu - \bar{X}))^2 = \sum_{i=1}^n ((X_i - \mu)^2 + (\mu - \bar{X})^2 + 2(X_i - \mu)(\mu - \bar{X})) \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + \sum_{i=1}^n (\mu - \bar{X})^2 + 2(\mu - \bar{X}) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + n(\mu - \bar{X})^2 + 2(\mu - \bar{X}) \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + n(\mu - \bar{X})^2 + 2(\mu - \bar{X})(n\bar{X} - n\mu) = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n \cdot (\bar{X} - \mu)^2 \\ \text{fås} \quad \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} - \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Idet $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \right)^2$ er en sum af kvadrerede normerede normalfordelte variable, er den χ^2 -

fordelt med n frihedsgrader.

Endvidere ses, at $\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right)^2$ er en kvadreret normeret normalfordelt variabel, så den er χ^2 - fordelt med 1 frihedsgrad.

De to led i (1) er ifølge sætning 3A.3 uafhængige χ^2 - fordelte variable statistiske variable.

Da en sum af uafhængige χ^2 - fordelte variable atter er χ^2 - fordelte ifølge sætning 3A.2, har vi derfor, at

$$\frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} - \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right)^2 \text{ er } \chi^2 \text{ - fordelt.}$$

Det kan endvidere vises, at $f = n - 1$.



SÆTNING 3A.5 (varians af S^2 og S_μ^2). $V(S^2) = \frac{2 \cdot \sigma^4}{n-1}$ og $V(S_\mu^2) = \frac{2 \cdot \sigma^4}{n}$.

Bevis:

a) Af omskrivningen $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sigma^2}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n-1} \chi^2$ hvor χ^2 er fordelt $\chi^2(n-1)$, fås

$$V(S^2) = \left(\frac{\sigma^2}{n-1} \right)^2 V(\chi^2) = \left(\frac{\sigma^2}{n-1} \right)^2 \cdot 2 \cdot (n-1) = \frac{2 \cdot \sigma^4}{n-1}$$

b) Af omskrivningen $S_\mu^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n} \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n} \chi^2$ hvor χ^2 er fordelt $\chi^2(n)$, fås

$$V(S_\mu^2) = \left(\frac{\sigma^2}{n} \right)^2 V(\chi^2) = \left(\frac{\sigma^2}{n} \right)^2 \cdot 2 \cdot n = \frac{2 \cdot \sigma^4}{n}.$$



SUPPLEMENT 3B t - FORDELINGEN

DEFINITION af t - fordelingen. Lad U være normalfordelt $n(0,1)$ og χ^2 være fordelt $\chi^2(f)$. Hvis U og χ^2 er uafhængige kaldes sandsynlighedsfordelingen for den statistiske variabel $t = \frac{U}{\sqrt{\frac{\chi^2}{f}}}$ for t-fordelt med frihedsgradstallet f og betegnes $t(f)$.

Det kan vises, at tæthedsfunktionen for $t(f)$ er bestemt ved $f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi \cdot f} \cdot \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{f}\right)^{-\frac{f+1}{2}}$

Da $f(x) = f(-x)$ er t - fordelingerne alle symmetriske om y-aksen, med $E(X) = 0$.

For de statistiske anvendelser er følgende sætning vigtig:

SÆTNING 3B.1 ($\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ er t-fordelt).

Lad $X_1, X_2, \dots, X_n$ være normalfordelte statistiske variable med middelværdi μ og spredning σ . Lad endvidere $\bar{X}$ og S^2 være de sædvanlige estimater for middelværdi og varians.

Den statistiske variabel $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ er da t-fordelt $t(n-1)$.

Bevis: Vi har $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{(\bar{X} - \mu) \cdot \sqrt{n}}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}}{\frac{S}{\sigma \sqrt{n}}} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}}}$

Her er tælleren $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ normeret normalfordelt, mens $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ er χ^2 - fordelt med $f = n - 1$ frihedsgrader. Ifølge

sætning 3A.3 er $\bar{X}$ og S^2 uafhængige, hvilket gør, at betingelserne er opfyldt for, at T er t-fordelt.



SUPPLEMENT **3C F-FORDELINGEN**

DEFINITION af F-fordelingen. Lad χ_T^2 og χ_N^2 være statistisk uafhængige og fordelt henholdsvis

$\chi^2(f_T)$ og $\chi^2(f_N)$. Sandsynlighedsfordelingen for den statistiske variabel $F = \frac{\frac{\chi_T^2}{f_T}}{\frac{\chi_N^2}{f_N}}$ siges at være F-fordelt med tællerfrihedsgradstallet f_T og nævnerfrihedsgrads-tallet f_N og betegnes $F(f_T, f_N)$.

Det kan vises, at tæthedsfunktionen for $F(f_T, f_N)$ er bestemt ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{f_T + f_N}{2}\right) \cdot f_T^{\frac{f_T}{2}} \cdot x^{\frac{f_T}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{f_T}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{f_N}{2}\right) \cdot f_N^{\frac{f_N}{2}} \cdot \left(1 + \frac{f_N}{f_T} x\right)^{\frac{f_T + f_N}{2}}} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og har middelværdien $E(F) = \frac{f_N}{f_N - 2}$ (for $f_N > 2$)

og spredningen $\sigma(F) = \frac{f_N}{f_N - 2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (f_T + f_N - 2)}{f_T \cdot (f_N - 4)}}$ (for $f_N > 4$)

SÆTNING 3C.1 . (relationer vedrørende F-fordelingen).

$$a) F_p(f_T, f_N) = \frac{1}{F_{1-p}(f_N, f_T)} \quad b) \quad F_{1-p}(1, f_N) = \left(t_{1-\frac{p}{2}}(f_N)\right)^2$$

Bevis: a) Lad F være fordelt $F(f_T, f_N)$. Der foretages omskrivningen

$$F = \frac{\frac{\chi_T^2}{f_T}}{\frac{\chi_N^2}{f_N}} = \frac{1}{\left(\frac{\frac{\chi_N^2}{f_N}}{\frac{\chi_T^2}{f_T}}\right)} = \frac{1}{F^*}, \quad \text{hvor } F^* \text{ er fordelt } F(f_N, f_T). \text{ Heraf følger:}$$

$$P(F \leq x) = p \Leftrightarrow P\left(\frac{1}{F^*} \leq x\right) = p \Leftrightarrow P\left(F^* \geq \frac{1}{x}\right) = p \Leftrightarrow P\left(F^* < \frac{1}{x}\right) = 1 - p.$$

Herved er a) bevist.

b) Lad F være fordelt $F(1, f_N)$ og t være fordelt $t(f_N)$. Der foretages omskrivningen

$$F = \frac{\frac{\chi_1^2}{f_N}}{\frac{\chi_N^2}{f_N}} = \frac{U^2}{\frac{\chi_N^2}{f_N}} = \left(\frac{U}{\sqrt{\frac{\chi_N^2}{f_N}}} \right)^2 = t^2. \text{ Heraf følger:}$$

$$P(F \leq x) = 1 - p \Leftrightarrow P(t^2 \leq x) = 1 - p \Leftrightarrow P(-\sqrt{x} \leq t \leq \sqrt{x}) = 1 - p \Leftrightarrow P(t \leq \sqrt{x}) = 1 - \frac{p}{2}$$

Herved er b) bevist.



SÆTNING 3C.2 $\left(\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \text{ er } F\text{-fordelt} \right)$

Lad X_1 og X_2 være normalfordelte statistiske uafhængige normalfordelte variable, lad n_1 og n_2 betegne stikprøvestørrelsen for de to variable, og lad endvidere $\bar{X}_1, \bar{X}_2, S_1^2$ og S_2^2 være de sædvanlige estimater for middelværdierne og varianserne μ_1, μ_2, σ_1^2 og σ_2^2

Den statistiske variabel $F = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}$ er da fordelt F -fordelt $F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

Bevis

Ved anvendelse af sætning 3A.4 fås følgende omformning:

$$F = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} = \frac{\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2(n_1 - 1)}}{\frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2(n_2 - 1)}} = \frac{\frac{\chi_1^2}{(n_1 - 1)}}{\frac{\chi_2^2}{(n_2 - 1)}}$$

Af definitionen på F -fordelingen følger da, at sætningen er bevist.



Som et vigtigt specialtilfælde ses, at hvis de to variable har samme varians, vil $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ være F -fordelt $F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

Supplement 4A DEFINITIONER OG EKSEMPLER PÅ CENTRALE OG EFFEKTIVE ESTIMATORER

Central estimator.

Et rimeligt krav til en estimator Φ er, at Φ i middel skal "ramme" den ukendte parameter, dvs. ikke systematisk angive en for lille værdi eller en for stor værdi.

DEFINITION af central estimator. En punktestimator Φ siges at være central for φ hvis $E(\Phi) = \varphi$.

Eksempelvis er $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ en central estimator, da vi i kapitel 1 afsnit 1.6 viste, at $E(\bar{X}) = \mu$.

Effektiv estimator.

Blandt de centrale estimators har estimators med en lille varians særlig interesse. Har man således 2 centrale estimators for den samme parameter, vil man naturligt vælge den med mindst varians. Man siger, at en sådan estimator er mere **effektiv** end den anden.

DEFINITION af effektiv estimator. En central estimator Φ kaldes en effektiv estimator for φ , hvis $V(\Phi) \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$.

En effektiv estimator vil altså for stor stikprøvestørrelse n have både den rigtige middelværdi og lille varians. Eksempelvis er $\bar{X}$ en effektiv estimator, da vi i kapitel 1 afsnit 1.6 viste, at $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$, og det deraf følger, at $\sigma(\bar{X}) \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$.

Der vil nu blive bevist, at de estimators vi tidligere har benyttet, er såvel centrale som effektive.

SÆTNING 4A.1. (centrale estimators) Lad X være en statistisk variabel med middelværdi μ og varians σ^2 .

Lad $X_1, X_2, \dots, X_n$, være en stikprøve af størrelsen n fra X .

a) $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ er en central estimator for middelværdien μ :

b) $S^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ er en central estimator for variansen σ^2

c) $S_\mu^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{n}$ er en central estimator for variansen σ^2 .

d) $S_1^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n}$ er ikke en central estimator for variansen σ^2

Bevis:

a) I kapitel 2 afsnit 2.3 viste vi, at $E(\bar{X}) = \mu$, dvs. $\bar{X}$ er central.

b) Som en del af beviset for sætning 3A.4 viste vi, at $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n \cdot (\bar{X} - \mu)^2$

$$\begin{aligned} \text{Heraf fås } E(S^2) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n E(X_i - \mu)^2 - n \cdot E(\bar{X} - \mu)^2 \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n V(X) - n \cdot V(\bar{X}) \right) = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot V(X) - n \frac{V(X)}{n} \right) = V(X) = \sigma^2, \text{ dvs. } S^2 \text{ er central.} \end{aligned}$$

$$\text{c) } E(S_\mu^2) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V(X) = \sigma^2$$

$$\begin{aligned} \text{d) } E(S_\mu^2) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}\right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n E(X_i - \mu)^2 - n \cdot E(\bar{X} - \mu)^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n V(X) - n \cdot V(\bar{X}) \right) = \frac{1}{n} \left(n \cdot V(X) - n \frac{V(X)}{n} \right) = \frac{n-1}{n} V(X) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \end{aligned}$$



SÆTNING 4A.2. (effektive estimatorer) Lad X være en statistisk variabel med middelværdi μ og varians σ^2 .

Lad $X_1, X_2, \dots, X_n$, være en stikprøve af størrelsen n fra X .

a) $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ er en effektiv estimator for middelværdien μ :

b) $S^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ er en central estimator for σ^2 forudsat X er normalfordelt

c) $S_\mu^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{n}$ er en effektiv estimator for σ^2 forudsat X er normalfordelt og μ er kendt.

d) Forudsat μ er kendt vil S_μ^2 være en mere effektiv estimator end S^2 for variansen σ^2 .

Bevis: a) I kapitel 1 afsnit 1.6 blev det bevist, at $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$.

Heraf følger at $\sigma(\bar{X}) \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$.

b) I kapitel 3 sætning 3A.5 bliver det bevist, at $V(S^2) = \frac{2 \cdot \sigma^4}{n-1}$.

Heraf følger, at $\sigma(S^2) \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$.

c) I kapitel 39 sætning 3A.5 bliver det bevist, at $V(S_\mu^2) = \frac{2 \cdot \sigma^4}{n}$.

Heraf følger, at $\sigma(S_\mu^2) \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$.

d) Da $V(S_\mu^2) = \frac{2 \cdot \sigma^4}{n} < \frac{2 \cdot \sigma^4}{n-1} = V(S^2)$ har S_μ^2 en mindre varians end S^2 .



Supplement 4B Beviser for formler for konfidensintervaller

Vi vil i dette supplement bevise de 4 første formler for konfidensintervaller der findes i appendix 4.1

Lad i den følgende sætning X være en normalfordelt statistisk variable med middelværdi μ og spredning σ , og lad $X_1, X_2, \dots, X_n$ være en stikprøve af størrelsen n fra X . Lad endvidere som sædvanlig

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}, \quad S^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1} \quad \text{og} \quad S_\mu^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{n}.$$

SÆTNING 4 B.1 ($100 \cdot \beta$ % konfidensintervaller for normalfordelte variable). Lad $\alpha = 1 - \beta$

1) Konfidensinterval for μ , hvis σ **er kendt**: $\bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,
hvor $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ er $1 - \frac{1}{2}\alpha$ fraktilen i den normerede normalfordeling.

2) Konfidensinterval for μ , hvis σ **er ukendt**: $\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$,
hvor $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ er $1 - \frac{1}{2}\alpha$ fraktilen i t -fordelingen med $n - 1$ frihedsgrader.

3) Konfidensinterval for σ^2 , hvis μ **er kendt**:
$$\frac{(n-1)s^2 + n \cdot (\bar{x} - \mu)^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2 + n \cdot (\bar{x} - \mu)^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)},$$

hvor $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ og $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ er henholdsvis $\frac{1}{2}\alpha$ og $1 - \frac{1}{2}\alpha$ fraktilen i χ^2 -fordelingen med n frihedsgrader.

4) Konfidensinterval for σ^2 , hvis μ **er ukendt**: $\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}$,
hvor $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ og $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ er henholdsvis $\frac{1}{2}\alpha$ og $1 - \frac{1}{2}\alpha$ fraktilen i χ^2 -fordelingen med $n - 1$ frihedsgrader.

Bevis:

1) Er σ kendt vil $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ være normeret normalfordelt $n(\mu, \sigma)$. Da U -fordelingen er symmetrisk omkring 0,

$$\text{har vi følgelig, at} \quad P\left(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq U \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \beta \quad \text{eller} \quad P\left(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \beta$$

$$\text{Idet } -u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow -u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow \bar{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{er punkt 1 bevist.}$$

- 2) I kapitel 3 anførte vi, at $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ er t - fordelt med $f = n - 1$ frihedsgrader. De samme regninger som under punkt

1 kan nu gennemføres, hvilket er sket ved beviset for sætning 4.1. Hermed er punkt 2 bevist.

- 3) Ifølge beviset for sætning 3A.4 er $S_\mu^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{n}$ χ^2 - fordelt med $f = n$ frihedsgrader.

Vi har følgelig at $P\left(\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n) \leq S_\mu^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)\right) = \beta$ eller $P\left(\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n) \leq \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)\right) = \beta$.

Igen ifølge beviset for sætning 3A.4 er $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = (n-1) \cdot S^2 + n(\bar{X} - \mu)^2$.

Indsættes dette i ovenstående ulighed fås: $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n) \leq \frac{(n-1)S^2 + n(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$

$$\Leftrightarrow \sigma^2 \cdot \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n) \leq (n-1)S^2 + n(\bar{X} - \mu)^2 \leq \sigma^2 \cdot \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)S^2 + n(\bar{X} - \mu)^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2 + n(\bar{X} - \mu)^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)}.$$

Hermed er formel 3 bevist.

- 4) Ifølge beviset for sætning 3A.4 er $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ χ^2 - fordelt med $f = n - 1$ frihedsgrader.

Vi har følgelig at

$$P\left(\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) \leq \chi^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)\right) = \beta \text{ eller } P\left(\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)\right) = \beta.$$

Idet $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$

$$\Leftrightarrow \sigma^2 \cdot \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) \leq (n-1)S^2 \leq \sigma^2 \cdot \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \text{ er formel 4 bevist.}$$



SUPPLEMENT **5A.BEVISER FOR FORMLER I HYPOTSETEST**

Lad X være en normalfordelt statistisk variable med middelværdi μ og spredning σ , og lad $X_1, X_2, \dots, X_n$ være en stikprøve af størrelsen n fra X . Lad endvidere som sædvanlig $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ og $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$.

Lad testene alle have signifikansniveauet α .

Testformler i appendix 5.1 (σ ukendt og erstattes af s).

I sætning 3B viste vi, at såfremt $H_0: \mu = \mu_0$ er sand, er $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ t -fordelt med $f = n - 1$ frihedsgrader. Dette benyttes i det følgende

Række 1: Nulhypotese $H_0: \mu = \mu_0$. Alternativ hypotese $H: \mu > \mu_0$.

Af ovenstående og af definitionen på signifikansniveau fremgår, at H_0 forkastes, såfremt

$$p = P(T \geq t) < \alpha, \text{ hvor } T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}, \text{ og } T \text{ er } t\text{-fordelt med } f = n - 1 \text{ frihedsgrader.}$$

Række 2: Nulhypotese $H_0: \mu = \mu_0$. Alternativ hypotese $H: \mu < \mu_0$.

H_0 forkastes, såfremt $p = P(T \leq t) < \alpha$, hvor $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$, og T er t -fordelt med $f = n - 1$ frihedsgrader.

Række 3: Nulhypotese $H_0: \mu = \mu_0$. Alternativ hypotese $H: \mu \neq \mu_0$.

Ifølge definitionen på signifikansniveau, forkastes H_0 både når $\bar{X}$ er så stor, at $P(T \geq t) < \frac{1}{2}\alpha$, og når

$\bar{X}$ er så lille, at $P(T \leq t) < \frac{1}{2}\alpha$, hvor $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ og T er t -fordelt med $f = n - 1$ frihedsgrader.

Række 4: Nulhypotese $H_0: \mu = \mu_0$. Alternativ hypotese $H: \mu > \mu_0$.

Da $P(T \geq t) < \alpha \Leftrightarrow 1 - P(T < t) < \alpha \Leftrightarrow P(T < t) > 1 - \alpha \Leftrightarrow t > t_{1-\alpha}(n-1)$ er påstanden bevist.

Række 5: Nulhypotese $H_0: \mu = \mu_0$. Alternativ hypotese $H: \mu < \mu_0$.

Da $P(T \leq t) < \alpha \Leftrightarrow t < t_{\alpha}(n-1) \Leftrightarrow t < -t_{1-\alpha}(n-1)$

(da t -fordelingen er symmetrisk om 0, se figur 5.1) er formelen bevist.

Række 6: Nulhypotese $H_0: \mu = \mu_0$. Alternativ hypotese $H: \mu \neq \mu_0$.

Hvis $\bar{X} \geq \mu_0$ kan regningerne under række 4 gentages, og vi får $t > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$.

Hvis $\bar{X} < \mu_0$ kan regningerne under række 5 gentages, og vi får $t < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$.

Generelt fås derfor, at $|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ og dermed er formelen bevist.

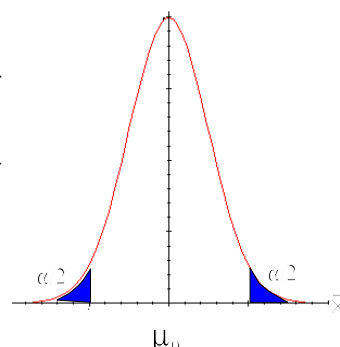


Fig 5.1. t -fordeling

Testformler i appendix 5.2 (σ antages kendt). Lad Y være fordelt $n\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

- Række 1:** Nulhypotese $H_0: \mu = \mu_0$. Alternativ hypotese $H: \mu > \mu_0$.
Ifølge definitionen på signifikansniveau, forkastes H_0 såfremt $p = P(Y \geq \bar{x}) < \alpha$
- Række 2:** Nulhypotese $H_0: \mu = \mu_0$. Alternativ hypotese $H: \mu < \mu_0$.
Ifølge definitionen på signifikansniveau, forkastes H_0 såfremt $p = P(Y \leq \bar{x}) < \alpha$
- Række 3:** Nulhypotese $H_0: \mu = \mu_0$. Alternativ hypotese $H: \mu \neq \mu_0$.
Ifølge definitionen på signifikansniveau, forkastes H_0 både når $\bar{x}$ er så stor, at $P(Y \geq \bar{x}) < \frac{1}{2}\alpha$ (se figur 5.1), og når $\bar{x}$ er så lille, at $P(Y \leq \bar{x}) < \frac{1}{2}\alpha$.
- Række 4:** Nulhypotese $H_0: \mu = \mu_0$. Alternativ hypotese $H: \mu > \mu_0$.

$$P(Y \geq \bar{x}) < \alpha \Leftrightarrow 1 - P(Y < \bar{x}) < \alpha \Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) < \alpha \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right) > 1 - \alpha \Leftrightarrow u > u_{1-\alpha}$$

$$\text{hvor } u = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}.$$

- Række 5:** Nulhypotese $H_0: \mu = \mu_0$. Alternativ hypotese $H: \mu < \mu_0$.
 $p = P(Y \leq \bar{x}) < \alpha \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right) < \alpha \Leftrightarrow u < u_\alpha$ hvor $u = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}$.

Da $u_\alpha = -u_{1-\alpha}$ er påstanden bevist.

- Række 6:** Nulhypotese $H_0: \mu = \mu_0$. Alternativ hypotese $H: \mu \neq \mu_0$.
Hvis $\bar{x} > \mu_0$ kan regningerne under række 4 gentages, og vi får $u > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$
Hvis $\bar{x} < \mu_0$ kan regningerne under række 5 gentages, og vi får $u < -u_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Generelt fås derfor, at $|u| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ og deraf formelen.

Testformler i appendix 5.3 for varians σ^2 (μ ukendt)

$$\text{I kapitel 3 sætning 3A viste vi, at såfremt } H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ er sand, er } \chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2}$$

χ^2 - fordelt med $f = n - 1$ frihedsgrader.

I det følgende vil vi endvidere antage, at Q er χ^2 - fordelt med $n - 1$ frihedsgrader.

- Række 1:** Nulhypotese $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$. Alternativ hypotese $H: \sigma^2 > \sigma_0^2$.
Af ovenstående og af definitionen på signifikansniveau fås, at H_0 forkastes, såfremt
 $p = P(Q \geq \chi^2) < \alpha$, hvor $\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma_0^2}$. Heraf følger formelen.
- Række 2:** Nulhypotese $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$. Alternativ hypotese $H: \sigma^2 < \sigma_0^2$.
Af ovenstående og af definitionen på signifikansniveau fås, at H_0 forkastes, såfremt $p = P(Q \leq \chi^2) < \alpha$,
hvor $\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma_0^2}$. Heraf følger formelen.
- Række 3:** Nulhypotese $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$. Alternativ hypotese $H: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.
Ifølge definitionen på signifikansniveau, forkastes H_0 både når χ^2 er så stor, at $P(Q \geq \chi^2) < \frac{1}{2}\alpha$, og når χ^2 er så lille, at $P(Q \leq \chi^2) < \frac{1}{2}\alpha$, hvor $\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma_0^2}$. Heraf følger formelen.
- Række 4:** Nulhypotese $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$. Alternativ hypotese $H: \sigma^2 > \sigma_0^2$.
 $P(Q \geq \chi^2) < \alpha \Leftrightarrow 1 - P(Q < \chi^2) < \alpha \Leftrightarrow P(Q < \chi^2) > 1 - \alpha \Leftrightarrow \chi^2 > \chi_{1-\alpha}^2 (n-1)$.

Række 5: Nulhypotese $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$. Alternativ hypotese $H: \sigma^2 < \sigma_0^2$.
Da $P(Q \leq \chi^2) < \alpha \Leftrightarrow \chi^2 < \chi_{\alpha}^2(n-1)$ er formelen bevist.

Række 6: Da $E(\chi^2) = f$, hvor $f = n - 1$ er frihedsgradstallet, fås:

Hvis $\chi^2 > n - 1$ kan regningerne under række 4 gentages, og vi får $\chi^2 > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$.

Hvis $\chi^2 < n - 1$ kan regningerne under række 5 gentages, og vi får $\chi^2 < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$.

Hermed fås formelen.

Testformler i appendix 5.4 for varians σ^2 (μ kendt)

I forbindelse med beviset for sætning 3A.4 blev vist, at såfremt $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ er sand, er $\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$

χ^2 - fordelt med $f = n$ frihedsgrader. Endvidere fandt vi, at $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = (n-1) \cdot S^2 + n(\bar{X} - \mu)^2$.

I det følgende vil vi endvidere antage, at Q er χ^2 - fordelt med n frihedsgrader.

Række 1: Nulhypotese $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$. Alternativ hypotese $H: \sigma^2 > \sigma_0^2$.

Af ovenstående og af definitionen på signifikansniveau fås, at H_0 forkastes, såfremt $p = P(Q \geq \chi^2) < \alpha$,

hvor $\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot s^2 + n(\bar{x} - \mu)^2}{\sigma_0^2}$. Heraf følger formelen.

Række 2: Nulhypotese $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$. Alternativ hypotese $H: \sigma^2 < \sigma_0^2$.

Af ovenstående og af definitionen på signifikansniveau fås, at H_0 forkastes, såfremt

$p = P(Q \leq \chi^2) < \alpha$, hvor $\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot s^2 + n(\bar{x} - \mu)^2}{\sigma_0^2}$. Heraf følger formelen.

Række 3: Nulhypotese $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$. Alternativ hypotese $H: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

Ifølge definitionen på signifikansniveau, forkastes H_0 både når χ^2 er så stor, at $P(Q \geq \chi^2) < \frac{1}{2}\alpha$, og når

χ^2 er så lille, at $P(Q \leq \chi^2) < \frac{1}{2}\alpha$, hvor $\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot s^2 + n(\bar{x} - \mu)^2}{\sigma_0^2}$. Heraf følger formelen.

Række 4: Nulhypotese $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$. Alternativ hypotese $H: \sigma^2 > \sigma_0^2$.

$P(Q \geq \chi^2) < \alpha \Leftrightarrow 1 - P(Q < \chi^2) < \alpha \Leftrightarrow P(Q < \chi^2) > 1 - \alpha \Leftrightarrow \chi^2 > \chi_{1-\alpha}^2(n)$.

Række 5: Nulhypotese $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$. Alternativ hypotese $H: \sigma^2 < \sigma_0^2$.

Da $P(Q \leq \chi^2) < \alpha \Leftrightarrow \chi^2 > \chi_{\alpha}^2(n)$ er formelen bevist.

Række 6: Nulhypotese $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$. Alternativ hypotese $H: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

Da $E(\chi^2) = f$, hvor $f = n$ er frihedsgradstallet, fås

Hvis $\chi^2 > n$ kan regningerne under række 4 gentages, og vi får $\chi^2 > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$.

Hvis $\chi^2 < n$ kan regningerne under række 5 gentages, og vi får $\chi^2 < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$.

Hermed fås formelen.



SUPPLEMENT 5B. OC-KURVER OG DIMENSIONERING.

Forudsætning som appendix 5.2

Række 1: Alternativ hypotese $H: \mu > \mu_0$ (σ antages kendt)

I sætning 5.1 og 5.2 udledes formler for OC-kurve og antal gentagelser n i tilfældet, der svarer til dette tilfælde.

Som det ses i det følgende forløber de tilsvarende beviser i de øvrige storårer ganske analogt.

Række 2: Alternativ hypotese $H: \mu < \mu_0$ (σ antages kendt)

OC-kurve:

$$H_0 \text{ accepteres p\aa signifikansniveau } \alpha, \text{ hvis } \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq u_{1-\alpha} \Leftrightarrow \bar{x} \leq \mu_0 + u_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Er den sande middelværdi μ , er $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ normalfordelt med middelværdi 0 og spredning 1.

$$\begin{aligned} \text{Vi har derfor, at } P(\text{type II fejl}) &= P\left(\bar{X} \geq \mu_0 + u_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - P\left(\bar{X} < \mu_0 + u_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0 + u_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(u_{\alpha} + \frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1 - \Phi\left(-u_{1-\alpha} + \frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \text{ d.v.s. } a(\mu) = 1 - \Phi\left(-u_{1-\alpha} + \frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right). \end{aligned}$$

Dimensionering: Af formelen for OC kurven fås, idet $\Delta = |\mu - \mu_0| = \mu_0 - \mu$ da $\mu < \mu_0$:

$$\begin{aligned} a(\mu_0 + \Delta) &= 1 - \Phi\left(-u_{1-\alpha} + \frac{\Delta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \leq \beta, \text{ dvs. } \Phi\left(-u_{1-\alpha} + \frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) \geq 1 - \beta \Leftrightarrow -u_{1-\alpha} + \frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma} \geq u_{1-\beta} \Leftrightarrow \frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma} \geq u_{1-\alpha} + u_{1-\beta} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{(u_{1-\beta} + u_{1-\alpha}) \cdot \sigma}{\Delta} \Leftrightarrow n \geq \left(\frac{(u_{1-\beta} + u_{1-\alpha}) \cdot \sigma}{\Delta}\right)^2. \end{aligned}$$

Række 3: Nulhypotese $H_0: \mu = \mu_0$ Alternativ hypotese $H_0: \mu \neq \mu_0$ (σ antages kendt).

OC-kurve:

H_0 accepteres p\aa signifikansniveau α , hvis

$$u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \mu_0 + u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu_0 + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Er den sande middelværdi μ , er $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ normalfordelt med middelværdi 0 og spredning 1. Vi har derfor,

$$\begin{aligned} P(\text{type II fejl}) &= P\left(\mu_0 + u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu_0 + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = P\left(\bar{X} < \mu_0 + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - P\left(\bar{X} < \mu_0 + u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu_0 + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 + u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \Phi\left(u_{1-\frac{\alpha}{2}} + \frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(u_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\ \text{d.v.s. } a(\mu) &= \Phi\left(u_{1-\frac{\alpha}{2}} + \frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(u_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right). \end{aligned}$$

Dimensionering:

Antages $\mu > \mu_0$ bliver sidste led i formlen for OC-kurven ca 0, og vi får samme formel som under stor række 1.

Antages $\mu < \mu_0$ bliver første led i formlen for OC-kurven ca 1, og vi får samme formel som under stor række 2.

I begge tilfælde er α dog erstattet af $\frac{1}{2}\alpha$

Dimensioneringsformlen bliver derfor den samme som før, hvor blot α er erstattet af $\frac{1}{2}\alpha$.

Dimensionering svarende til forudsætning i appendix 5.2. (spredning ukendt)

En dimensionering af forsøget er en del af forsøgsplanlægningen. Man har derfor endnu ikke foretaget nogle forsøg, og kender derfor ikke stikprøvens spredning s . Kan man ud fra tidligere lignende forsøg vurdere, at spredningen ikke bliver

større end σ , må dette bruges. Da dimensioneringen kun afhænger af forholdet $d = \frac{\Delta}{\sigma}$, kan man også nøjes med at angive et skøn for dette forhold.

Ønsker man eksempelvis at kunne opdage selv relativt små forskelle i middelværdien, kan d sættes til et tal mindre end 1, mens ønskes kun at finde relativt store forskelle i middelværdien kan d eksempelvis sættes til 2.

Når man skal finde sandsynligheden for en type II fejl, får man brug for at kende fordelingen af størrelsen

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \text{ når } H_0: \mu = \mu_0 \text{ er falsk}$$

Hvis den sande værdi af middelværdien er $\mu = \mu_0 + \Delta$, kan T skrives

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{(\bar{X} - (\mu_0 + \Delta))\sqrt{n}}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{U + \frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma}}{W}$$

Da U er normeret normalfordelt, og $\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma}$ er en konstant forskellig fra nul, er tælleren normalfordelt med middelværdi

$\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma}$ og spredning 1. $\frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2} = (n-1) \cdot W^2$ er χ^2 fordelt med $n-1$ frihedsgrader.

Den resulterende fordeling for T kaldes den ikke-centrale t -fordeling med $n-1$ frihedsgrader. Denne fordeling har en yderst besværlig tæthedsfunktion, så en nærmere beregning af $P(\text{type II fejl})$ og dimensionering af forsøg må sædvanligvis foretages ved benyttelse af edb. I nedennævnte notat er i et appendix er der således gengivet et Maple-program, som kan foretage disse beregninger. For ofte forekommende værdier af parametrene er der i tabel 8 udarbejdet en "dimensioneringstabel".

Dimensionering svarende til forudsætning i appendix 5.3 til 5.6

Disse begreber vil ikke blive gennemgået her, men man kan eksempelvis i Statgraphics under menupunktet "Describe", og derefter "Sample Size Determination" få et forslag til dimensionering af forsøget.

SUPPLEMENT: 7A Bevis for middelværdi og spredning for hypergeometrisk variabel.

Beviset for sætning 7.3 forudsætter, at man først læser kapitel 9.

SÆTNING 7.3. (middelværdi og spredning for den hypergeometriske fordeling)

Den hypergeometriske fordeling $h(N, M, n)$ har

$$E(X) = n \cdot p \text{ og } V(X) = n \cdot p \cdot (1-p) \cdot \frac{N-n}{N-1}, \text{ hvor } p = \frac{M}{N}$$

Bevis: Lad os betragte n statistiske variable $X_1, X_2, \dots, X_n$,

$$\text{hvor } X_i = \begin{cases} 1 & \text{hvis } i\text{'te udtrækning giver sort kugle.} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ er hypergeometrisk fordelt $h(N, M, n)$.

$$\text{Vi har } P(X_i) = \frac{\binom{M}{1} \binom{N-M}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{M}{N} = p \text{ for alle } i. \text{ Heraf følger } E(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p, \text{ og}$$

$$V(X_i) = (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot (1-p) = p - p^2 = p \cdot (1-p).$$

Af linearitetsreglen i kapitel 1 afsnit 6, fås

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \dots + E(X_n) = p + p + p + \dots + p = n \cdot p.$$

Som det fremgår af afsnit 9.2 gælder $V(X_i, X_j) = E(X_i \cdot X_j) - E(X_i) \cdot E(X_j)$

$$= 1 \cdot 1 \cdot P((X_i = 1) \wedge (X_j = 1)) - p \cdot p = P(X_i) \cdot P(X_j | X_i) - p^2$$

$$= \frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1} - p^2 = p \cdot \left(\frac{M-1}{N-1} - p \right) = p \cdot \left(\frac{M-1}{N-1} - \frac{M}{N} \right) = p \cdot \frac{M-N}{N \cdot (N-1)} = p \cdot \frac{p-1}{N-1}$$

Af kvadratreglen (afsnit 9.3):

$$V(X) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \cdot \sum_{i < j} V(X_i, X_j) = n \cdot p \cdot (1-p) + 2 \cdot \binom{n}{2} \cdot p \cdot \frac{p-1}{N-1}$$

$$= n \cdot p \cdot (1-p) + 2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot p \cdot \frac{1-p}{N-1} = n \cdot p \cdot (1-p) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1} \right) = n \cdot p \cdot (1-p) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$



SUPPLEMENT: 7B BEVISER FOR FORMLER I BINOMIAL- OG POISSON-TEST

Testformler i appendix 5.5 for parameter p i binomialfordeling.

Lad X være en binomialfordelt variabel $b(n, p)$, hvor n er kendt og p ukendt. Lad x være en stikprøveværdi på X .

Lad Y være fordelt $b(n, p_0)$, hvor p_0 er en given konstant. Det erindres om, (se eventuelt appendix 7.1), at for

$\frac{1}{10} \leq p_0 \leq \frac{9}{10}$ og $5 \leq n \cdot p_0 \leq n - 5$ kan man approksimere binomialfordelingen $b(n, p_0)$ med normalfordelingen

$n(\mu, \sigma)$, hvor $\mu = n \cdot p_0$ og $\sigma = \sqrt{n \cdot p_0 \cdot (1 - p_0)}$.

Række 1: Nulhypotese $H_0: p = p_0$. Alternativ hypotese $H: p > p_0$,

Ifølge definitionen på signifikansniveau, forkastes H_0 , såfremt $p = P(Y \geq x) < \alpha$

Række 2: Nulhypotese $H_0: p = p_0$. Alternativ hypotese $H: p < p_0$,

Ifølge definitionen på signifikansniveau, forkastes H_0 såfremt $p = P(Y < x) < \alpha$

Række 3: Nulhypotese $H_0: p = p_0$. Alternativ hypotese $H: p \neq p_0$.

Ifølge definitionen på signifikansniveau, forkastes H_0 både når x er så stor, at $P(Y \geq x) < \frac{\alpha}{2}$, og når x er så lille, at $P(Y \leq x) < \frac{\alpha}{2}$. Da $E(Y) = n \cdot p_0$ følger heraf formlen.

Række 4: Nulhypotese $H_0: p = p_0$. Alternativ hypotese $H: p > p_0$,

Er betingelserne for approksimation med normalfordelingen opfyldt, gælder

$$P(Y \geq x) < \alpha \Leftrightarrow 1 - P(Y < x) < \alpha \Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{x - \frac{1}{2} - n \cdot p_0}{\sqrt{n \cdot p_0 \cdot (1 - p_0)}}\right) < \alpha$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{x - \frac{1}{2} - n \cdot p_0}{\sqrt{n \cdot p_0 \cdot (1 - p_0)}}\right) > 1 - \alpha \Leftrightarrow u > u_{1-\alpha}, \quad \text{hvor } u = \frac{x - \frac{1}{2} - n \cdot p_0}{\sqrt{n \cdot p_0 \cdot (1 - p_0)}}$$

Række 5: Nulhypotese $H_0: p = p_0$. Alternativ hypotese $H: p < p_0$,

Er betingelserne for approksimation med normalfordelingen opfyldt, gælder

$$P(Y \leq x) < \alpha \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{x - \frac{1}{2} - n \cdot p_0}{\sqrt{n \cdot p_0 \cdot (1 - p_0)}}\right) < \alpha \Leftrightarrow u < u_\alpha \Leftrightarrow u < -u_{1-\alpha},$$

$$\text{hvor } u = \frac{x - \frac{1}{2} - n \cdot p_0}{\sqrt{n \cdot p_0 \cdot (1 - p_0)}}$$

Række 6: Nulhypotese $H_0: p = p_0$. Alternativ hypotese $H: p \neq p_0$.

Er betingelserne for approksimation med normalfordelingen opfyldt, haves

Hvis $x \geq n \cdot p_0$ kan regningerne under række 4 gentages, og vi får $u > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Hvis $x < n \cdot p_0$ kan regningerne under række 5 gentages, og vi får $u < -u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Generelt fås derfor, at $|u| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ og dermed formelen.

Testformler i appendix 5.6 for parameter μ i Poissonfordeling.

Lad X være en Poissonfordelt variabel $p(\mu)$, hvor μ er ukendt. Lad der foreligge en stikprøve på X af størrelsen n med gennemsnit $\bar{x}$. Lad Y være fordelt $p(n \cdot \mu_0)$, hvor μ_0 er en given konstant. Det erindres om, (se eventuelt appendix 7.1), at for $n \cdot \mu_0 \geq 10$ kan man approksimere Poissonfordelingen $p(n \cdot \mu_0)$ med normalfordelingen $n(n \cdot \mu_0, \sqrt{n \cdot \mu_0})$.

Række 1: Nulhypotese $H_0: \mu = \mu_0$. Alternativ hypotese $H: \mu > \mu_0$
Ifølge definitionen på signifikansniveau, forkastes H_0 , såfremt $p = P(Y \geq n \cdot \bar{x}) < \alpha$

Række 2: Nulhypotese $H_0: \mu = \mu_0$. Alternativ hypotese $H: \mu < \mu_0$,
Ifølge definitionen på signifikansniveau, forkastes H_0 såfremt $p = P(Y \leq n \cdot \bar{x}) < \alpha$

Række 3: Nulhypotese $H_0: \mu = \mu_0$. Alternativ hypotese $H: \mu \neq \mu_0$.
Da $E(Y) = n \cdot \mu_0$ følger heraf formlerne i denne række.

Række 4: Nulhypotese $H_0: \mu = \mu_0$. Alternativ hypotese $H: \mu > \mu_0$
Er betingelserne for approksimation med normalfordelingen opfyldt, gælder

$$P(Y \geq n \cdot \bar{x}) < \alpha \Leftrightarrow 1 - P(Y < n \cdot \bar{x}) < \alpha \Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{n \cdot \bar{x} - \frac{1}{2} - n \cdot \mu_0}{\sqrt{n \cdot \mu_0}}\right) < \alpha$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{n \cdot \bar{x} - \frac{1}{2} - n \cdot \mu_0}{\sqrt{n \cdot \mu_0}}\right) > 1 - \alpha \Leftrightarrow u > u_{1-\alpha}, \text{ hvor } u = \frac{n \cdot \bar{x} - \frac{1}{2} - n \cdot \mu_0}{\sqrt{n \cdot \mu_0}}.$$

Række 5: Nulhypotese $H_0: \mu = \mu_0$. Alternativ hypotese $H: \mu < \mu_0$,

Er betingelserne for approksimation med normalfordelingen opfyldt, gælder

$$P(Y \leq n \cdot \bar{x}) < \alpha \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{n \cdot \bar{x} + \frac{1}{2} - n \cdot \mu_0}{\sqrt{n \cdot \mu_0}}\right) < \alpha \Leftrightarrow u < u_\alpha \Leftrightarrow u < -u_{1-\alpha} \text{ hvor } u = \frac{n \cdot \bar{x} + \frac{1}{2} - n \cdot \mu_0}{\sqrt{n \cdot \mu_0}}.$$

Række 3: Nulhypotese $H_0: \mu = \mu_0$. Alternativ hypotese $H: \mu \neq \mu_0$.

Er betingelserne for approksimation med normalfordelingen opfyldt, haves

Hvis $\bar{x} \geq \mu_0$ kan regningerne under række 4 gentages, og vi får $u > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Hvis $\bar{x} < \mu_0$ kan regningerne under række 5 gentages, og vi får $u < -u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Generelt fås derfor, at $|u| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ og dermed formelen.

SUPPLEMENT: 7C BEVISSKITSE FOR TÆTHEDSFUNKTIONEN FOR POISSONFORDELINGEN.

SÆTNING 7.2 (Poissonfordeling). Lad X være en stokastisk variabel, som angiver antallet af impulser i et givet tidsrum (eller areal, volumen, produktionsenhed osv.), idet ethvert tidspunkt i tidsrummet har samme mulighed for at være impulstidspunkt som ethvert andet tidspunkt. Endvidere skal impulserne indtræffe tilfældigt og uafhængigt af hinanden *).

Hvis det gennemsnitlige antal impulser i tidsrummet er $\mu > 0$, så siges X at være Poissonfordelt $p(\mu)$ med sandsynlighedsfordelingen (tæthedsfunktionen) $f(x) = P(X = x)$ bestemt ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu} & \text{for } x \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Middelværdien for $p(\mu)$ er $E(X) = \mu$ og spredningen er $\sigma(X) = \sqrt{\mu}$.

I formuleringen af de ovennævnte betingelser kan efter behov "et lille tidsrum Δt " erstattes med "en lille længde $\Delta \ell$ ", "et lille areal ΔA " eller "et lille volumen ΔV ".

*) Præcis formulering: Følgende 3 betingelser skal være opfyldt:

- 1) Sandsynligheden for netop én impuls i et meget lille tidsrum Δt er med tilnærmelse proportional med Δt .

(Matematisk formulering $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(X=1)}{\Delta t} = \lambda$ (λ er en positiv konstant))

- 2) Sandsynligheden for 2 eller flere impulser i det meget lille tidsrum Δt er lille sammenlignet med Δt .

(Matematisk formulering $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(X > 1)}{\Delta t} = 0$)

- 3) Antal impulser i forskellige, ikke overlappende tidsrum er statistisk uafhængige.

Bevissskitse:

Lad μ være det gennemsnitlige antal impulser i tidsrummet $[0; T]$, og lad X være det aktuelle antal impulser i samme tidsrum.

Intervalleret $[0; T]$ opdeles i n delintervaller $\Delta t = \frac{T}{n}$. Ifølge forudsætning 2 er det muligt at vælge Δt så lille, at sandsynligheden for at mere end 1 impuls indtræffer i Δt sekunder er praktisk taget 0. I Δt sekunder kan derfor kun ske 2 ting:

A : netop 1 impuls, eller $\bar{A}$: netop 0 impulser.

X er derfor binomialfordelt $b(n, P(A))$.

Da der i T sekunder i gennemsnit er μ impulser, vil der i Δt sekunder være $\frac{\mu}{T} \cdot \Delta t = \frac{\mu}{T} \cdot \frac{T}{n} = \frac{\mu}{n}$ impulser.

Vi har derfor $P(A) = \frac{\mu}{n}$. Vi foretager nu følgende omformning:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \left(\frac{\mu}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-x} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-x+1)}{x!} \frac{\mu^x}{n^x} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^x}$$

$$= \frac{\mu^x}{x!} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-x+1)}{n^x} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^x} \cdot e^{n \cdot \ln\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)}$$

$$= \frac{\mu^x}{x!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^x} \cdot e^{\frac{\ln\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$$

For $n \rightarrow \infty$ vil tæller og nævner i brøken $\frac{\ln\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$ gå mod 0. Man kan derfor bruge l'Hospitals regel.

Vi får ved differentiation af tæller og nævner: $\frac{1}{1 - \frac{\mu}{n}} \cdot \frac{\frac{\mu}{n^2}}{\left(-\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{\mu}{n}} \cdot (-\mu) \rightarrow -\mu$ for $n \rightarrow \infty$

Vi har derfor, at $P(X=x) \rightarrow \frac{\mu^x}{x!} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} e^{-\mu} = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu}$ for $n \rightarrow \infty$.

Idet binomialfordelingen har middelværdien $E(X) = n \cdot p = \mu$ og spredningen

$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{\mu \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)}$, fås for $n \rightarrow \infty$, at Poissonfordelingen har middelværdien μ og spredningen

$\sqrt{\mu}$.



Supplement: 9.1. Begrundelse for grænserne for kontrolkort

Vi danner k undergrupper hver med n observationer.

Gruppe	Observationer	Gennemsnit	Variationsbredde	Spredning
1	$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}$	$\bar{x}_1$	R_1	s_1
2	$x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}$	$\bar{x}_2$	R_2	s_2
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
k	$x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}$	$\bar{x}_k$	R_k	s_k
Total		$\bar{\bar{x}}$	$\bar{R}$	$\bar{s}$

Grænser for R - kort. Det kan bevises, at $E(R) = d_2 \sigma$ og $\sigma(R) = d_3 \cdot \sigma$, hvor d_2 og d_3 kun afhænger af stikprøvestørrelsen n . Disse konstanter samt alle de i det følgende nævnte konstanter kan aflæses i tabel 9.2.

Tabel 9.1: Kontrolkort.

$\bar{x}$ - R - kontrolkort. Procesvariablen X er normalfordelt $n(\mu, \sigma)$.					
Procestilstand		Centerlinie	Nedre kontrolgrænse	Øvre kontrolgrænse	Estimator
Kendt:	$\bar{x}$ - kort R - kort	μ $d_2 \cdot \sigma$	$\mu - A_1 \cdot \sigma$ $D_1 \cdot \sigma$	$\mu + A_1 \cdot \sigma$ $D_2 \cdot \sigma$	
Ukendt:	$\bar{x}$ - kort R - kort	$\bar{\bar{x}}$ $\bar{R}$	$\bar{\bar{x}} - A_2 \cdot \bar{R}$ $D_3 \cdot \bar{R}$	$\bar{\bar{x}} + A_2 \cdot \bar{R}$ $D_4 \cdot \bar{R}$	$\hat{\sigma} \approx \frac{\bar{R}}{d_2}$
$\bar{x}$ - s - kontrolkort. Procesvariablen X er normalfordelt $n(\mu, \sigma)$.					
Kendt	$\bar{x}$ - kort s - kort	μ $c_4 \cdot \sigma$	$\mu - A_1 \cdot \sigma$ $B_5 \cdot \sigma$	$\mu + A_1 \cdot \sigma$ $B_6 \cdot \sigma$	
Ukendt	$\bar{x}$ - kort s - kort	$\bar{\bar{x}}$ $\bar{s}$	$\bar{\bar{x}} - A_3 \cdot \bar{s}$ $B_3 \cdot \bar{s}$	$\bar{\bar{x}} + A_3 \cdot \bar{s}$ $B_4 \cdot \bar{s}$	$\hat{\sigma} \approx \frac{\bar{s}}{c_4}$

Tabel 9.2. Konstanter til fastlæggelse af kontrolgrænser ved hjælp af $\bar{x}$ - kort, R - kort og s -kort.

n	$\bar{x}$ - kort			R - kort						s - kort				
	A_1	A_2	A_3	d_2	d_3	D_1	D_2	D_3	D_4	c_4	B_3	B_4	B_5	B_6
2	2.121	1.880	2.659	1.128	0.853	0	3.686	0	3.267	0.798	0	3.267	0	2.606
3	1.732	1.023	1.954	1.693	0.888	0	4.358	0	2.575	0.886	0	2.568	0	2.276
4	1.500	0.729	1.628	2.059	0.880	0	4.698	0	2.282	0.921	0	2.266	0	2.088
5	1.342	0.577	1.427	2.326	0.864	0	4.918	0	2.115	0.940	0	2.089	0	1.964
6	1.2251	0.483	1.287	2.534	0.848	0	5.078	0	2.004	0.952	0.030	1.970	0.029	1.874
7	.134	0.419	1.182	2.704	0.833	0.205	5.203	0.076	1.924	0.959	0.118	1.882	0.113	1.806
8	1.061	0.373	1.099	2.847	0.820	0.387	5.307	0.136	1.864	0.965	0.185	1.815	0.179	1.751
9	1.000	0.337	1.032	2.970	0.808	0.546	5.394	0.184	1.816	0.969	0.239	1.761	0.232	1.707
10	0.949	0.308	0.975	3.078	0.797	0.687	5.469	0.223	1.777	0.973	0.284	1.716	0.276	1.669
11	0.905	0.285	0.927	3.173	0.787	0.812	5.534	0.256	1.744	0.975	0.321	1.679	0.313	1.637
12	0.866	0.266	0.886	3.258	0.778	0.924	5.592	0.284	1.716	0.978	0.354	1.646	0.346	1.610
13	0.832	0.249	0.850	3.336	0.770	1.026	5.646	0.308	1.692	0.979	0.382	1.618	0.374	1.585
14	0.802	0.235	0.817	3.407	0.762	1.121	5.693	0.329	1.671	0.981	0.406	1.594	0.399	1.563
15	0.775	0.223	0.789	3.472	0.755	1.207	5.737	0.348	1.652	0.982	0.428	1.572	0.421	1.544
16	0.750	0.212	0.763	3.532	0.749	1.285	5.779	0.364	1.636	0.983	0.448	1.552	0.440	1.526
17	0.728	0.203	0.739	3.588	0.743	1.359	5.817	0.379	1.621	0.984	0.466	1.534	0.458	1.511
18	0.707	0.194	0.718	3.640	0.738	1.426	5.854	0.392	1.608	0.985	0.482	1.518	0.475	1.496
19	0.688	0.187	0.698	3.689	0.733	1.490	5.888	0.404	1.596	0.986	0.497	1.503	0.490	1.483
20	0.671	0.180	0.680	3.735	0.729	1.548	5.922	0.414	1.586	0.987	0.510	1.489	0.504	1.470

Et R - kort med 3σ - grænser er derfor bestemt ved :

$$NKG_R = (d_2 - 3 \cdot d_3) \cdot \sigma \text{ og } \text{ØKG}_R = (d_2 + 3 \cdot d_3) \cdot \sigma.$$

Idet et estimat for $E(R) \approx \bar{R}$, fås $\sigma \approx \frac{\bar{R}}{d_2}$

Indsættes dette, fås $NKG_R = (d_2 - 3 \cdot d_3) \cdot \frac{\bar{R}}{d_2} = D_3 \cdot \bar{R}$ og $\text{ØKG}_R = (d_2 + 3 \cdot d_3) \cdot \frac{\bar{R}}{d_2} = D_4 \bar{R}$.

Grænser for s - kort. Selv om der gælder, at $E(s^2) = \sigma^2$, gælder det ikke, at $E(s) = \sigma$.

Man kan imidlertid vise, at $E(s) = c_4 \cdot \sigma$ og $\sigma(s) = \sqrt{1 - c_4^2} \cdot \sigma$.

Følgelig er et s - kort med 3σ - grænser bestemt ved :

$$NKG_s = (c_4 - 3 \cdot \sqrt{1 - c_4^2}) \cdot \sigma = B_3 \cdot \sigma \text{ og } \text{ØKG}_s = (c_4 + 3 \cdot \sqrt{1 - c_4^2}) \cdot \sigma = B_6 \cdot \sigma.$$

Idet et estimat for $E(s) \approx \bar{s}$, fås $\sigma \approx \frac{\bar{s}}{c_4}$.

Indsættes dette, fås $NKG_s = \left(1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}\right) \cdot \bar{s} = B_3 \cdot \bar{s}$ og $\text{ØKG}_s = \left(1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}\right) \cdot \bar{s} = B_5 \cdot \bar{s}$.

Grænser for $\bar{x}$ - kort. Idet $E(\bar{x}) = \mu$ og $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, er et $\bar{x}$ - kort med 3σ - grænser:

$$NKG_{\bar{x}} = \mu - 3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - A_1 \cdot \sigma \text{ og } \text{ØKG}_{\bar{x}} = \mu + 3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu + A_1 \cdot \sigma$$

Benyttes et R - kort er $\sigma \approx \frac{\bar{R}}{d_2}$, og dermed

$$NKG_{\bar{x}} = \bar{x} - 3 \cdot \frac{\bar{R}}{d_2 \cdot \sqrt{n}} = \mu - A_2 \cdot \bar{R} \text{ og } \text{ØKG}_{\bar{x}} = \bar{x} + 3 \cdot \frac{\bar{R}}{d_2 \cdot \sqrt{n}} = \mu + A_2 \cdot \bar{R}$$

Benyttes et s kort er $\sigma \approx \frac{\bar{s}}{c_4}$, og dermed $NKG_{\bar{x}} = \bar{x} - 3 \cdot \frac{\bar{s}}{c_4 \cdot \sqrt{n}} = \mu - A_3 \cdot \bar{s}$ og $\text{ØKG}_{\bar{x}} = \bar{x} + 3 \cdot \frac{\bar{s}}{c_4 \cdot \sqrt{n}} = \mu + A_3 \cdot \bar{s}$.

Supplement 13.1. Formler til beregning af ensidet variansanalyse

I denne oversigt vises hvorledes man kan beregne en ensidet variansanalyse, blot man har en lommeregner der kan beregne gennemsnit og spredning.

For hvert observationssæt udregnes gennemsnit og spredning.

Faktor	Observationer	Gennemsnit	Spredning
R ₁	$x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{1n_1}$	$\bar{x}_1$	s_1
R ₂	$x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots, x_{2n_2}$	$\bar{x}_2$	s_2
R ₃	$x_{31}, x_{32}, x_{33}, \dots, x_{3n_3}$	$\bar{x}_3$	s_3
R _r	$x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}, \dots, x_{rn_r}$	$\bar{x}_r$	s_r

Forudsætning: x_{ij} - værdierne er uafhængige observationer af statistisk uafhængig normalfordelte variable X_i med middelværdi μ_i og samme varians σ^2 .

Beregninger:

Lad $N = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r$

Der beregnes et "vægtet" gennemsnit af varianserne (vægtet efter frihedsgraderne)

$$s_e^2 = \frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2 + (n_3 - 1) \cdot s_3^2 + \dots + (n_r - 1) \cdot s_r^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + (n_3 - 1) + \dots + (n_r - 1)} = \frac{SAK_1 + SAK_2 + \dots + SAK_r}{N - r}$$

Sidste omskrivning følger af, at $s^2 = \frac{SAK}{n - 1}$

s_e^2 er variansen for "forsøgsfejlen" eller på engelsk "error". s_e^2 har $N - r$ frihedsgrader.

Vi har nu $SAK_e = (N - r) \cdot s_e^2$. Man indtaster alle N målinger og beregner variansen s_{total}^2

Heraf fås $SAK_{total} = (N - 1) \cdot s_{total}^2$

Man kan vise, at $SAK_R + SAK_e = SAK_{total}$ og at det tilsvarende gælder for frihedsgraderne

Tallene indsættes nu traditionelt i en såkaldt variansanalysetabel, og P-værdien beregnes.

Variansanalysetabel: (ANOVA = ANALYSIS OF VARIANCE)

Variation (Source)	SAK (SS)	f (df)	$s^2 = \frac{SAK}{f}$	F	P - værdi
Behandlinger (Between groups)	SAK_R	$r - 1$	$s_R^2 = \frac{SAK_R}{r - 1}$	$F_R = \frac{s_R^2}{s_0^2}$	
Gentagelser (Within groups) (error)	SAK_e	$N - r$	$s_e^2 = \frac{SAK_e}{N - r}$		
Total	SAK_{total}	$N - 1$			

Testprocedure.

Nulhypotese: $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r \Leftrightarrow H_0: R = 0$

Lad α være signifikansniveau.

H_0 forkastes, hvis P - værdi = $P(Z > F_R) < \alpha$, hvor Z er F - fordelt $(f_T, f_N) = (r - 1, N - r)$.

Konfidensintervaller: Lad $r_{kon} = t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{s_e^2}{n}}$ **Konfidensinterval for μ_i :** $[\bar{x}_i - r_{kon}; \bar{x}_i + r_{kon}]$

LSD Konfidensinterval for μ_i : $[\bar{x}_i - \frac{r_{kon}}{\sqrt{2}}; \bar{x}_i + \frac{r_{kon}}{\sqrt{2}}]$

Varianshomogenitet. $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$ Test for, at de variable Y_i har samme varians σ^2

a) Simplificeret F-test.

Lad den største værdi af de k estimerede varianser være $s_{\max}^2$ og den mindste være $s_{\min}^2$.

Beregn teststørrelsen $F = \frac{s_{\max}^2}{s_{\min}^2}$.

Supplement 13.1 Formler til beregning af variansanalyse

Lad Y være F -fordelt med frihedsgraderne $f_{tæller} = f_{nævner} = n - 1$

H_0 forkastes, hvis P -værdi $= P(Y > F) < \frac{\alpha}{2}$.

Hvis nulhypotesen accepteres, så antages kravet om varianshomogenitet at være opfyldt.

Hvis nulhypotesen forkastes, må anvendes en test med større styrke såsom Bartlett's test eller Levines test.

b) **Bartlett's test.** Denne test er beregningsmæssigt vanskelig, og har den svaghed, at den er særdeles følsom overfor afvigelser fra normalitet.

$$\text{Beregn teststørrelsen } \chi^2 = \frac{(N-k) \cdot \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) \cdot s_i^2}{N-k} \right) - \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \cdot \ln(s_i^2)}{1 - \frac{1}{N-k} - \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i - 1}}$$

Lad Y være χ^2 -fordelt med frihedsgrade $k - 1$.

H_0 forkastes, hvis P -værdi $= P(Y > \chi^2) < \alpha$.

c) **Levines test.** God test, som imidlertid kræver mere end 2 gentagelser.

Lad $d_{ij} = |y_{ij} - \hat{y}_i|$ hvor $\begin{cases} i = 1, 2, \dots, k \\ j = 1, 2, \dots, n_i \end{cases}$, hvor $\hat{y}_i$ er medianen af de n_i gentagelser af i 'te behandling. Man udfører en sædvanlig ensidet variansanalyse på tallene d_{ij}

Median af en række tal Tallene ordnes i voksende rækkefølge:

Ulige antal tal: median = midtertal blandt de ordnede tal,

Lige antal tal: median = gennemsnit af de to midterste blandt de ordnede tal

Eksempel:

		$\hat{y}_i$	d_{ij}	En ensidet variansanalyse på d_{ij} giver $F = 0.15$, og dermed P -værdi $= 0.9285$, dvs. en accept af nulhypotesen.
T_1	108, 110, 112	110	2, 0, 2	
T_2	105, 110, 109	109	4, 1, 0	
T_3	108, 111, 113	111	3, 0, 2	
T_4	117, 119, 112	117	0, 2, 5	

Forklaring på konstruktion af normalfordelingsplot.

Et koordinatsystem har en lodret akse, hvor inddelingen er "normalfordelt", dvs fordelingsfunktionen for en normeret normalfordeling vil i dette koordinatsystem blive en ret linie.

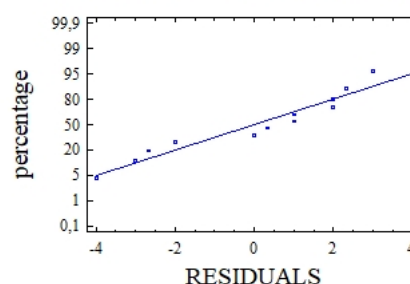
I dette koordinatsystem placeres residualerne som vist:

Lad residualerne (fra eksempel 13.1) -2, 0, 2, -3, 2, 1, 2.7, -2.3, -0.3, 1, 3, -4

De ordnes i rækkefølge og man beregner deres kumulative frekvens.

i	Residualer x	$\frac{i - 0.5}{12} \cdot 100 \%$
1	-4	4.1
2	-3	12.5
3	-2.3	20.8
4	-2	29.1
5	0	37.5
6	-0.3	45.8
7	1	54.2
8	1	62.5
9	2	70.8
10	2	79.2
11	2.7	87.5
12	3	95.8

Normal Probability Plot for RESIDUALS



Hvis residualerne er aproksimativt normalfordelt burde punkterne (x,y) afsat i koordinatsystemet tilnærmelsesvis ligge på en ret linie.

Supplement 14.1. Formler til beregning af tosidet variansanalyse

I denne oversigt vises hvorledes man kan beregne en tosidet variansanalyse, blot man har en lommeregner med gennemsnit og spredning.

Som taleksempel benyttes eksempel 14.2. Forsøgsresultaterne er følgende:

		Karburator	
		K ₁	K ₂
Olieblanding	O ₁	830 860	810 840
	O ₂	940 990	1050 1020
	O ₃	855 815	930 910

Beregning af gennemsnit.		Karburator		
		K ₁	K ₂	Rækkegennemsnit
Olieblanding	O ₁	845	825	835
	O ₂	965	1035	1000
	O ₃	835	920	877.5
	Søjlesum	881.667	926.667	

Antal rækker $r = 3$, Antal søjler $q = 2$, Antal delforsøg i celler $n = 2$

Antal delforsøg i række $= n \cdot q = 2 \cdot 2 = 4$. Antal delforsøg i søjle $n \cdot r = 2 \cdot 3 = 6$

Antal celler $r \cdot q = 3 \cdot 2 = 6$, Totalt antal forsøg $N = r \cdot q \cdot n = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

Spredning på de r rækkegennemsnit: $s_{xr} = 85.6714$

Spredning på de q søjlegennemsnit: $s_{xq} = 31.8198$

Spredning på de $r \cdot q$ cellegennemsnit: $s_{celler} = 84.4048$

Beregninger:

$$SAK_{rækker} = (N - n \cdot q) s_{xr}^2 = (12 - 4) \cdot 85.6714^2 = 58716.67, \quad f_R = r - 1 = 2$$

$$SAK_{søjler} = (N - n \cdot r) \cdot s_{xq}^2 = (12 - 6) \cdot 31.8198^2 = 6075.00, \quad f_C = q - 1 = 1$$

$$SAK_{celler} = (N - n) \cdot s_{celler}^2 = (12 - 2) \cdot 84.4048^2 = 71241.66, \quad f_{celler} = r \cdot q - 1 = 5$$

$$SAK_{vekselvirkning} = SAK_{celler} - SAK_{rækker} - SAK_{søjler} = 6450.00, \quad f_{RC} = f_{celler} - f_R - f_C = 2$$

$$SAK_{total} = (N - 1) s_{total}^2 = (12 - 1) \cdot 82.485^2 = 74841.66, \quad f_{total} = N - 1 = 11$$

$$SAK_{e(=error=residual)} = SAK_{total} - SAK_{celler} = 600.00 \quad f_0 = f_{total} - f_{celler} = 6$$

Opstilling af variansanalysetabel:

Variation	SAK=SS	f	$s^2 = \frac{SAK}{f}$	F
Rækkefaktor R : Olieblanding	SAK _R =58716.67	$f_R = r - 1 = 2$	$s_R^2 = 29358.33$	
Søjlefaktor C : Karburator	SAK _C =6075.00	$f_C = q - 1 = 1$	$s_C^2 = 6075.00$	
Vekselvirkning R*C	SAK _{RC} =6450.00	$f_{RC} = (r - 1)(q - 1) = 2$	$s_{RC}^2 = 3225.00$	$F_{RC} = \frac{s_{RC}^2}{s_e^2} = 5.38$
Gentagelser (residual, error)	SAK _e =3600.00	$f_e = r \cdot q \cdot (n - 1) = 6$	$s_e^2 = 600.00$	
Total	74841.67	$f_{total} = N - 1 = 11$		

Test:

Lad α være signifikansniveau.

1) $H_0: R * C = 0$ (Ingen signifikant vekselvirkning)

H_0 forkastes, hvis P -værdi $= P(Z > F_{RC}) < \alpha$, hvor Z er F -fordelt $(f_T, f_N) = (f_{RC}, f_e)$.

2a) Hvis H_0 forkastes, så opstilles konfidensintervaller til nærmere vurdering af faktorernes virkning.

2b) Hvis H_0 accepteres, antages, at der ikke er nogen signifikant vekselvirkning, og man pooler de to varianser sammen, til et nyt estimat for forsøgsfejlens variation (støjen).

$$s_m^2 = \frac{SAK_{RC} + SAK_e}{f_{RC} + f_e} \quad \text{med } f_m = f_{RC} + f_e$$

Dette estimat benyttes så til en samtidig vurdering af hovedvirkningerne.

$$2b.1) \quad H_0: R = 0 \text{ (Ingen signifikant virkning af rækkefaktor)} \quad \text{Lad } F_R = \frac{s_R^2}{s_m^2}$$

H_0 forkastes hvis P -værdi $= P(Z > F_R) < \alpha$, hvor Z er F -fordelt $(f_T, f_N) = (f_R, f_m)$.
Hvis H_0 forkastes, så opstilles konfidensintervaller til vurdering af faktorerens virkning.

$$2b.2) \quad H_0: C = 0 \text{ (Ingen signifikant virkning af søjlefaktor)} \quad \text{Lad } F_R = \frac{s_C^2}{s_m^2}$$

H_0 forkastes, hvis P -værdi $= P(Z > F_C) < \alpha$, hvor Z er F -fordelt $(f_T, f_N) = (f_C, f_m)$.
Hvis H_0 forkastes, så opstilles konfidensintervaller til vurdering af faktorerens virkning.

Opstilling af konfidensintervaller og drage konklusion.

Lad $\bar{x}_{ij}$ være gennemsnittet af værdierne i cellen i i 'te række og j 'te søjle.

Lad $\bar{x}_i$ være gennemsnittet af værdierne i den i 'te række.

Lad $\bar{x}_j$ være gennemsnittet af værdierne i den j 'te søjle.

$$1) \quad R * C \neq 0^1 \quad \text{Konfidensintervaller for hver celle: } \left[\bar{x}_{ij} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(r \cdot q \cdot (n-1)) \frac{s_0}{\sqrt{n}}; \bar{x}_{ij} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(r \cdot q \cdot (n-1)) \frac{s_0}{\sqrt{n}} \right],$$

$$2) \quad R * C = 0^2 \quad R \neq 0 \wedge C \neq 0:$$

For celle i i 'te række og j 'te søjle er den estimerede middelværdi

$$\tilde{\mu}_{ij} = \bar{x}_i + \bar{x}_j - \bar{x}.. \quad (\text{jævnfør betragtningerne i afsnit 2.3.2.2 side 59.})$$

Konfidensintervaller for hver celle:

$$\left[\tilde{\mu}_{ij} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-r-q+1) \sqrt{\frac{(r+q-1)}{N}} s_m; \tilde{\mu}_{ij} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-r-q+1) \sqrt{\frac{(r+q-1)}{N}} s_m \right]$$

Det giver et bedre overblik, hvis man udregner de marginale konfidensintervaller:

$$\text{Konfidensintervaller for hver række: } \left[\bar{x}_i - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-r-q+1) \frac{s_m}{\sqrt{n \cdot q}}; \bar{x}_i + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-r-q+1) \frac{s_m}{\sqrt{n \cdot q}} \right]$$

$$\text{Konfidensintervaller for hver søjle: } \left[\bar{x}_j - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-r-q+1) \frac{s_m}{\sqrt{n \cdot r}}; \bar{x}_j + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-r-q+1) \frac{s_m}{\sqrt{n \cdot r}} \right]$$

$$3) \quad R * C = 0, \quad R \neq 0 \wedge C = 0:$$

$$\text{For hver række } i \text{ beregnes et rækkegennemsnit } \bar{x}_i. \quad s_{m1}^2 = \frac{SAK_e + SAK_{RC} + SAK_C}{f_0 + f_{RC} + f_C},$$

$$f_{m1} = f_e + f_{RC} + f_C = N - r$$

$$\text{Konfidensintervaller for hver række: } \left[\bar{x}_i - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-r) \frac{s_{m1}}{\sqrt{n \cdot q}}; \bar{x}_i + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-r) \frac{s_{m1}}{\sqrt{n \cdot q}} \right]$$

$$4) \quad R * C = 0, \quad R = 0 \wedge C \neq 0:$$

$$\text{For hver søjle } j \text{ beregnes et søjlegennemsnit } \bar{x}_j. \quad s_{m2}^2 = \frac{SAK_e + SAK_{RC} + SAK_R}{f_0 + f_{RC} + f_R},$$

$$f_{m2} = f_e + f_{RC} + f_R = N - q$$

$$\text{Konfidensintervaller for hver søjle: } \left[\bar{x}_j - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-q) \frac{s_{m2}}{\sqrt{n \cdot r}}; \bar{x}_j + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-q) \frac{s_{m2}}{\sqrt{n \cdot r}} \right]$$

¹Kort skrivemåde for, at $H_0: R * C = 0$ forkastes.

²Kort skrivemåde for, at $H_0: R * C = 0$ accepteres

Supplement 15.1. Formler til beregning af enkelt regressionsanalyse uden gentagelser.

I dette appendix vises hvorledes man kan beregne en enkelt regressionsanalyse uden gentagelser, blot man har en lommeregner med regressionsprogram. I eksempelet er formlerne anvendt på et konkret eksempel.

Forudsætning:

Data :

x	x_1	x_2	x_3			x_N
y	y_1	y_2	y_3	...		y_N

De N -værdier er uafhængige observationer af stokastisk uafhængig normalfordelte variable Y_i med samme varians σ^2 .

Det antages endvidere at man har fundet, at data kan beskrives ved en lineær model.

Vi har derfor at **middelværdien** af den statistiske variable Y er en lineær funktion af x af formen

$$E(Y|x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

Beregninger:

- 1) De N punktpar indtastes i lommeregner.

Regressionsprogram aktiveres, og blandt beregnede størrelser findes estimater for

regressionskoefficienter: $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$, korrelationskoefficient r , gennemsnit $\bar{x}$, spredning s_y .

- 2) Udfylder variansanalysetabel:

$$\text{Udregner } SAK_{\text{total}} = (N-1) \cdot s_y^2, \quad SAK_{\text{model}} = r^2 \cdot SAK_{\text{total}} \text{ og} \\ SAK_{\text{residual}} = SAK_{\text{total}} - SAK_{\text{model}}.$$

Variation (Source)	SAK (SS)	f (df)	$s^2 = \frac{SAK}{f}$	F
Model	SAK_{model}	1	$s_{\text{model}}^2 = \frac{SAK_{\text{model}}}{1}$	$F_{\text{model}} = \frac{s_{\text{model}}^2}{s_{\text{residual}}^2}$
Residual	SAK_{residual}	$N - 2$	$s_{\text{residual}}^2 = \frac{SAK_{\text{residual}}}{N - 2}$	
Total	SAK_{total}	$N - 1$		

Test:

Lad α være signifikansniveau.

- 1) H_0 : Regressionslinien er vandret $\Leftrightarrow H_0: y$ er uafhængig af $x \Leftrightarrow H_0: \text{Model} = 0 \Leftrightarrow H_0: \beta_1 = 0$

Metode 1.

Hvis modellen gælder så burde punkterne (uanset om H_0 er sand eller ej) ligge eksakt på en ret linie (og dermed $s_{\text{residual}}^2 = 0$), hvis ikke forsøgsresultaterne havde været påvirket af "støjen".

Et estimat for forsøgsfejls (støjens) varians σ^2 er derfor s_{residual}^2 .

Er H_0 sand, så burde (jævnfør definitionen af SAK_{model}) s_{model}^2 være nul. Når det ikke er tilfældet skyldes det, at forsøgsresultaterne har været påvirket af "støjen". Af samme grund som før må derfor også s_{model}^2 være et estimat for σ^2 .

Vi har følgelig, at hvis H_0 er sand, så er $F_{\text{model}} = \frac{s_{\text{model}}^2}{s_{\text{residual}}^2} \approx 1$.

Det kan vises, at hvis nulhypotesen ikke er sand, så vil $F_{\text{model}} > 1$, og at F_{model} er F-fordelt med en tællerfrihedsgrad på 1 og en nævnerfrihedsgrad på $N - 2$.

Testen bliver følgelig en ensidet F -test, dvs.

H_0 forkastes, hvis P -værdi $= P(Z < F_{\text{model}}) < \alpha$, hvor Z er F -fordelt $(f_T, f_N) = (1, N - 2)$.

Metode 2. Lad $t = \frac{\hat{\beta}_1}{s_{\beta_1}}$, hvor $s_{\beta_1} = \frac{|\hat{\beta}_1| \cdot s_{\text{residual}}}{s_{\text{model}}}$ er et estimat for spredningen på β_1 .

Det kan vises, at t er t -fordelt med $N - 2$ frihedsgrader.

Lad T være t -fordelt med $N - 2$ frihedsgrader

H_0 forkastes, hvis P -værdi $= P(T > |t|) < \frac{\alpha}{2}$.

En fordel ved denne metode er, at man også kan teste $H_0: \beta_1 > 0$ og $H_0: \beta_1 < 0$ ved ensidede test.

Hvis begge variable X og Y er statistiske variable kan man tilsvarende teste korrelationen ρ ved ovennævnte t -test.

2) $H_0: \beta_1 = a$, hvor a er en given konstant.

Lad $t = \frac{\hat{\beta}_1 - a}{s_{\beta_1}}$, hvor $s_{\beta_1} = \frac{|\hat{\beta}_1| \cdot s_{\text{residual}}}{s_{\text{model}}}$

H_0 forkastes, hvis $|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2)$ (for $a = 0$ svarer det til ovennævnte metode 2).

Konfidensinterval for β_1 : $\left[\hat{\beta}_1 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) \cdot s_{\hat{\beta}_1}; \hat{\beta}_1 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) \cdot s_{\hat{\beta}_1} \right]$ hvor $s_{\beta_1} = \frac{|\hat{\beta}_1| \cdot s_{\text{residual}}}{s_{\text{model}}}$.

Lad $\hat{\mu} = E(Y|x = x_0)$ være et estimat for middelværdien μ for Y for en given værdi $x = x_0$

Konfidensinterval for μ $\left[\hat{\mu} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) \cdot \sqrt{\hat{V}(\mu)}; \hat{\mu} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) \cdot \sqrt{\hat{V}(\mu)} \right]$

hvor $\hat{\mu} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0$, $\hat{V}(\mu) = s_{\text{residual}}^2 \cdot \left(\frac{1}{N} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2 (\hat{\beta}_1)^2}{SAK_{\text{model}}} \right)$

Prædiktionsinterval: (Konfidensinterval) for 1 ny observation for en given x -værdi:

$\left[\hat{\mu} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) \cdot \sqrt{\hat{Q}}; \hat{\mu} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) \cdot \sqrt{\hat{Q}} \right]$, hvor $\hat{Q} = s_{\text{residual}}^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{N} + \frac{(x - \bar{x})^2 (\hat{\beta}_1)^2}{SAK_{\text{model}}} \right)$

Supplement 15.2. Beregning af enkelt regressionsanalyse med lige mange gentagelser

Forudsætning: Data :

x	x_1	x_2	x_3			x_k
y	y_{11}	y_{21}	y_{31}	...		y_{k1}
	y_{12}	y_{22}	y_{32}			y_{k2}
	...	...	...			...
	y_{1n}	y_{2n}	y_{3n}			y_{kn}

y_{ij} - værdierne er uafhængige observationer af statistisk uafhængig normalfordelte variable Y_i .

For hver af de k x - værdier er der lige mange gentagelser n af y - værdier, dvs. i alt $N=n \cdot k$ observationer.

Der antages, at der er varianshomogenitet (ønskes dette testet se under punkt b)

Lad α være signifikansniveau.

Beregninger:

a) "Lack og fit test:

H_0 : Lineær model gælder $\Leftrightarrow H_0: (x_i, \mu_i)$ ligger på en ret linie

$\Leftrightarrow H_0$: Residual for gennemsnitspunkter = 0.

1) For hver x - værdi x_i indtastes de n y -værdier, og man beregner spredningen s_i .

Der beregnes et estimat for den fælles varians $s_e^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_k^2}{k}$.

s_e^2 har $k(n-1) = N - k$ frihedsgrader.

2) De $N=n \cdot k$ punktpar (x_i, y_{ij}) indtastes i lommeregner.

Regressionsprogram aktiveres, og blandt beregnede størrelser findes estimater for:

regressionskoefficienter: $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$, korrelationskoefficient r , gennemsnit $\bar{x}$, spredning s_y .

3) Man udregner $SAK_{\text{total}} = (N-1) \cdot s_y^2$, $SAK_{\text{model}} = r^2 \cdot SAK_{\text{total}}$ og $SAK_e = (N-k) \cdot s_e^2$

$SAK_{\text{lack of fit}} = SAK_{\text{total}} - SAK_{\text{model}} - SAK_e$

4) Udfylder variansanalysetabel:

Variation (Source)	SAK (SS)	f (df)	$s^2 = \frac{SAK}{f}$	F
Model	SAK_{model}	1	$s_{\text{model}}^2 = \frac{SAK_{\text{model}}}{1}$	$\left(F_{\text{model}} = \frac{s_{\text{model}}^2}{s_{\text{residual}}^2} \right)$
Lack of fit	$SAK_{\text{lack of fit}}$	$k-2$	$s_{\text{lack of fit}}^2 = \frac{SAK_{\text{lack of fit}}}{k-2}$	$F_{\text{lack of fit}} = \frac{s_{\text{lack of fit}}^2}{s_0^2}$
Gentagelser (error)	SAK_e	$N-k$	$s_e^2 = \frac{SAK_e}{N-k}$	
Total	SAK_{total}	$N-1$		

5) H_0 forkastes, hvis P - værdi $= P(Z > F_{\text{lack of fit}}) < \alpha$, hvor Z er F - fordelt $(f_T, f_N) = (k-2, N-k)$.

Såfremt H_0 accepteres (og et residualplot også virker rimelig) fortsætter testningen:

Da såvel s_e^2 som $s_{\text{lack of fit}}^2$ nu er et udtryk for forsøgsfejls varians σ^2 , foretages en pooling:

$$s_{\text{residual}}^2 = \frac{(N-k) \cdot s_e^2 + (k-2) \cdot s_{\text{lack of fit}}^2}{N-2} = \frac{SAK_e + SAK_{\text{lack of fit}}}{N-2},$$

og F_{model} beregnes (se variansanalysetabel).

6) Formlerne for de forskellige test svarer nu fuldstændig til formlerne i afsnit 13.1.

b) Varianshomogenitet (se supplement 13.1)