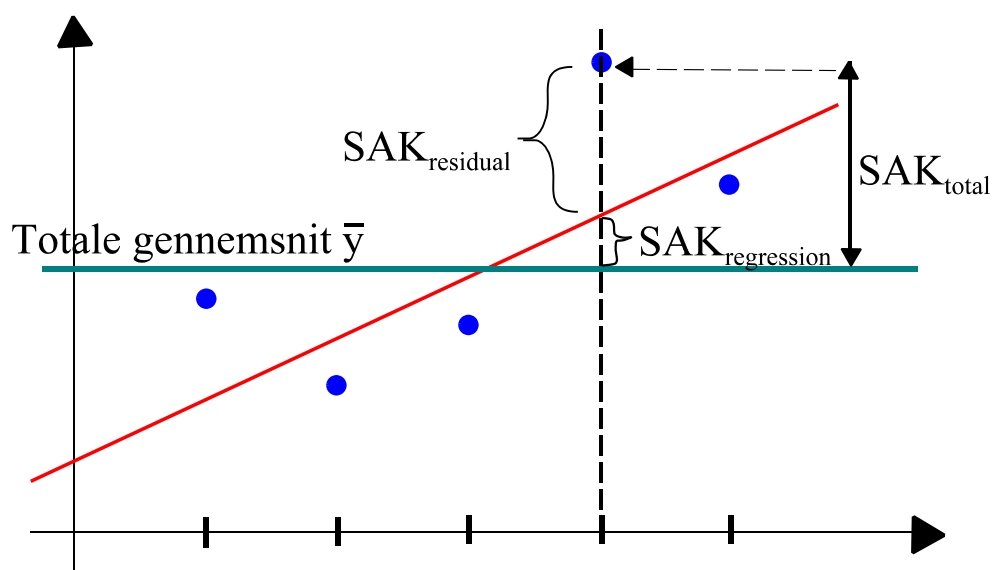


VIDEREGÅENDE STATISTIK med Excel



FORORD

Denne bog er en fortsættelse af lærebogen “M. Oddershede Larsen : Statistiske grundbegreber”.

Det forudsættes, at man har rådighed over en lommeregner med programmer indbygget, der til givne data kan beregne gennemsnit og spredning. Det kan dog være en lettelse, hvis lommeregneren også har indbygget et regressionsprogram, der kan beregne regressionskoefficienter og korrelationskoefficient.

Ved de mere regneteknisk komplicerede analyser som eksempelvis tosidet variansanalyse er det imidlertid langt lettere at benytte en PC med et passende statistisk software.

Regnearkprogrammet “Microsoft Excel” er ikke udviklet med henblik på statistik, men har den fordel, at den findes på et stort antal PC-er. Notatet bygger derfor for visse kapitlers vedkommende på, at læseren har adgang til programmet “Exell”, og at man der har installeret “tilføjelsesprogrammet” “Analysis Toolpak”.

Ved mere avancerede statistiske problemer kan det dog anbefales at købe et egentligt statistikprogram. Der findes særdeles mange udmærkede statistikprogrammer, som kan udføre disse analyser.

Forfatteren har skrevet en udvidet version af dette notat (indeholder flere statistiske metoder), hvori der benyttes statistikprogrammet “Statgraphics”. Der er her i en række eksempler vist, hvorledes man kan udnytte et sådant software, og hvorledes udskrifter herfra kan tolkes. Specielt er de grafiske muligheder fremhævet.

Juni 2003 Mogens Oddershede Larsen

I 2 udgave er der udover en række mindre ændringer foretaget en ombytning af kapitlerne 11 og 12.

Februar 2004

INDHOLD

10 HYPOTESETESTNING (TO STATISTISKE VARIABLE)

10.1 Indledning	1
10.2 Planlægning af forsøg	1
10.3 Test og konfidensintervaller for 2 normalfordelte variable	4
10.4 Test og konfidensintervaller for 2 binomialfordelte variable	11
10.5 Test og konfidensintervaller - 2 Poissonfordelte variable	13
Opgaver	14

11 ENKELT REGRESSIONSANALYSE

11.1 Indledning	18
11.2 Valg af model, der bedst mulig “beskriver” de fundne data	18
11.2.1 Lineær model	19
11.2.2 Regressionslinie og regressionskoefficienter	19
11.2.3 Bestemmelse af regressionslinie ved mindste kvadraters metode	20
11.2.4 Vurdering af om model beskriver data godt	22
11.3 Statistisk analyse af lineær regressionsmodel	26
11.3.1 Forudsætninger for regressionsanalyse	26
11.3.2 Test af om Y er uafhængig af X	27
11.3.3 Enkelt regressionsanalyse med én y - observation for hver x - værdi	29
11.3.3.1 Analyse beregnet med lommeregner med regressionsprogram .	29
11.3.3.2 Analyse beregnet ved Excel	31
11.3.4 Enkelt regressionsanalyse med flere y - observationer for hver x - værdi ..	35
11.3.4.1 Analyse beregnet med lommeregner med regressionsprogram .	37
11.3.4.2 Analyse beregnet ved Excel	39
11.3.5 Transformation af data inden regressionsanalyse foretages	41
Opgaver	44

12 VARIANSANALYSE

12.1 Indledning	50
12.2 Ensidet variansanalyse	50
12.2.1 Ensidet variansanalyse beregnet på lommeregner	52
12.2.2 Ensidet variansanalyse beregnet ved Excel	55
12.3 Tosidet variansanalyse	56
12.3.1 Indledning	56
12.3.2 Planlægning af forsøg	56
12.3.2.1 Én faktor ad gangen	56
12.3.2.2 Fuldstændig faktorstruktur	57
12.3.3 Forudsætninger for variansanalyse	59
12.3.4 Testprocedure	59
12.3.5 Tosidet variansanalyse udført med lommeregner	61
12.3.6 Tosidet variansanalyse udført ved Excel	61
12.3.6.1 Model med vekselvirkning	61
12.3.6.2 Additiv model: Model uden vekselvirkning	63
12.4 Fuldstændigt randomiseret blokforsøg	65
Opgaver	68

13 ANTALSTABELLER

13.1 Indledning	73
13.2 En -vejs tabel	74
13.3 To -vejs tabel	76
Opgaver	79

APPENDIX

A: Statistik med Excel	82
a1. Generelle forhold	82
a2. Inddata	82
a3. Beregning af (statistiske) funktioner	82
a3.1 Normalfordeling	82
a3.2 χ^2 - fordeling	83
a3.3 t - fordeling	83
a3.4 F - fordeling	83
a3.5 Hypergeometrisk fordeling	84
a3.6 Binomialfordeling	84
a3.7 Poissonfordeling	84

a4. Beregning af gennemsnit og spredning af n tal	84
a5. Beregning af histogram	84
a6. Konfidensintervaller for 1 normalfordelt variabel	85
a6.1 95% konfidensinterval for middelværdi af stikprøve, idet σ er kendt	85
a6.2 95% konfidensinterval for middelværdi af stikprøve, idet σ er ukendt	85
a6.3 95% konfidensinterval for spredning af stikprøve, idet μ er uendt	85
a7. Hypotesetest: 1 kontinuert variabel	86
a7.1. $H_0: \mu \leq \mu_0$, σ kendt	86
a7.2. $H_0: \mu \geq \mu_0$, σ kendt	86
a7.3. $H_0: \mu = \mu_0$, σ kendt.	86
a7.4 $H_0: \mu \geq \mu_0$, σ er ukendt	86
a7.5 $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$, μ er ukendt	86
a8. Sandsynlighedsregning	86
a8.1 Beregn faktoriel $n!$	86
a8.2 Beregn kombination $K(n,p)$	86
a9. Hypotesetest: 2 kontinuerte variable	87
a9.1. $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$	877
a9.2. $\sigma_1 = \sigma_2: H_0: \mu_1 \leq \mu_2$	87
a9.3. $\sigma_1 \neq \sigma_2: H_0: \mu_1 \leq \mu_2$	87
a9.4. $\sigma_1 \neq \sigma_2: H_0: \mu_1 = \mu_2$	87
a9.5. Parvise observationer	87
a10 Regressionsanalyse	88
a10.1. Korrelationskoefficient	88
a11 Variansanalyse	88
a11.1. Ensidet variansanalyse	88
a11.2. Tosidet variansanalyse	89
a12 Antalstabeller	89
a11.1. En - vejs tabel	89
a11.2. To - vejs tabel	89
10.1. Oversigt over konfidensintervaller (2 variable)	90
10.2. Oversigt over test af middelværdier μ_1 og μ_2 for 2 normalfordelte variable (σ_1 og σ_2 kendte)	92
10.3. Oversigt over test af middelværdier μ_1 og μ_2 for 2 normalfordelte variable (σ_1 og σ_2 ikke begge kendte)	93

Indhold

10.4. Oversigt over test af varianser σ_1^2 og σ_2^2 for 2 normalfordelte variable	95
10.5. Oversigt over test af parametre p_1 og p_2 for binomialfordelte variable	97
10.6. Oversigt over test af parametre μ_1 og μ_2 for Poissonfordelte variable	98
11.1. Formler til beregning af enkelt regressionsanalyse med én y - værdi for hver x - værdi	99
11.2. Formler til beregn.af enkelt regressionsanalyse med flere y - værdier for hver x - værdi	101
11.3. Transformation til lineær model	103
12.1. Formler til beregning af ensidet variansanalyse	104
12.2. Formler til beregning af tosidet variansanalyse	107
13.1. χ^2 - test af hypotese om multinomiale sandsynligheder	111
13.2. χ^2 - test af hypotese i 2 - vejs tabel	112
STATISTISKE TABELLER	
TABEL 1. Fordelingsfunktionen for U - fordelingen	115
TABEL 2. Fraktiler i U - fordelingen	117
TABEL 3. Fraktiler i χ^2 - fordelingen	118
TABEL 4. Fraktiler i t - fordelingen	120
TABEL 5. 95% - fraktiler i F - fordelingen	121
TABEL 6. 97,5 % - fraktiler i F - fordelingen	122
TABEL 7. Dimensioneringstabel for 2 variable	123
FACITLISTE	126
STIKORD	130

10 HYPOTESETESTNING

(TO STATISTISKE VARIABLE)

10.1 Indledning

Afsnit 10,2 giver en kort beskrivelse af hvorledes forsøg bedst planlægges ud fra et statistisk synspunkt. Hertil anvendes bl.a. den i tabel 8 angivne dimensioneringsstabel. I afsnit 10.3 sammenlignes to normalfordelte variable, mens de variable i afsnit 10.4 og 10.5 forudsættes at være henholdsvis binomial - og Poisson - fordelte. I appendix 10.1-10.6 findes en række oversigter over de forskellige test.

De grundlæggende begreber vedrørende konfidensintervaller og hypotesetest for én statistisk variabel, blev beskrevet i “Statistiske Grundbegreber”. Da det er de samme begreber og analoge udledninger der anvendes, når det drejer sig om at sammenligne 2 statistiske variable, vil de ikke blive gentaget her.

10.2 Planlægning af forsøg

Vi vil i dette afsnit som udgangspunkt tage følgende eksempel.

Eksempel 10.1. Problemstilling.

En fabrik der producerer maling, har udviklet to nye additiver A_1 og A_2 , som bevirker en kortere tørretid. Additiv A_1 er det dyreste, men man forventer også, at det giver den korteste tørretid. På grund af prisforskellen, skal tørretiden dog være mindst 10 minutter kortere for A_1 , før man vil gå over til den. For at undersøge disse forhold produceres nogle liter maling, som derefter deles op i mindre portioner. Til nogle af portionerne tilsættes additiv A_1 og til andre additiv A_2 . Tørretiden måles derefter.

Generelt gælder, at hvert delforsøg i et forsøg udføres under en række forsøgsbetingelser, De betingelser som med forsæt varieres som led i forsøgets formål, kaldes forsøgsbehandlingerne eller blot behandlingerne (engelsk: treatment). Alle andre delforsøgsbetingelser sammenfattes i et begreb, der kaldes forsøgsenheden. I eksempel 10.1 er additiverne = behandlingerne og forsøgsenhederne er den enkelte portion maling, anvendt apparatur og personale, tidspunkt for delforsøget og de forhold med hensyn til temperatur, luftfugtighed osv. som gælder på forsøgstidspunktet. Bemærk, at forsøgsenhederne ofte indeholder faktorer, som ikke kan gøres ensartet fra delforsøg til delforsøg. Dette bevirker, at resultatet af de enkelte delforsøg varierer. Dette giver forsøgsvariablens variation” eller kort forsøgets “støj” .

Randomisering.

For at sikre et statistisk gyldigt forsøg foretager man en såkaldt fuldstændig randomisering. Dette betyder at man ved lodtrækning fordeler "forsøgsenhederne" tilfældigt på behandlinger. Dette sker, for at man ikke ubevidst kommer til at favorisere en af de to behandlinger. Hvis man eksempelvis helt systematisk i eksempel 10.1 først laver alle delforsøg med additiv A_1 , kunne dette bevirke en favorisering af A_1 nemlig hvis forsøgsomstændighederne (apparater, personale, luftfugtighed) er mest "gunstige" ved begyndelsen af forsøgsperioden.

For at anskueliggøre denne randomiseringsproces antager vi, at vi i eksempel 10.1 skal lave 4 forsøg med hver additiv. Endvidere antages, at forsøgene skal indgå i den almindelige produktionsgang, dvs. at man af tidsmæssige, personalemæssige og på grund af begrænset mængde apparatur må lade forsøgene forløbe over flere dage. Da dage apparatur og laborant kunne tænkes at have betydning lader vi dem indgå i forsøgsenhederne. I forsøgsenhederne indgår sandsynligvis også andre forhold udenfor vor kontrol, og som tilsammen bevirker, at selv om man udfører gentagne forsøg med samme behandling, så får vi afvigende resultater.

Lad os antage at der gælder følgende:

Mandag er det kun muligt at lave 1 forsøg, idet apparatur nr 1 og laborant A er de eneste der er ledige.

Tirsdag er der kapacitet ledig til 3 forsøg:

Ét forsøg hvor apparatur nr 2 og laborant A benyttes

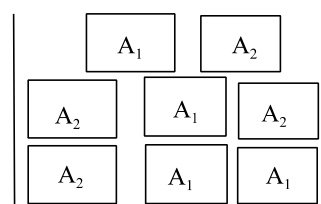
Ét forsøg hvor apparatur nr 1 og laborant B benyttes, og

Ét forsøg hvor apparatur nr 3 og laborant C benyttes.

Onsdag kan der også laves 3 forsøg osv. (se det følgende skema).

Forsøgsenheder			Behandlinger (apparater)
Dag	Apparatur	Laborant	
mandag	1	A	
tirsdag	2	A	
tirsdag	1	B	
tirsdag	3	C	
onsdag	3	B	
onsdag	4	C	
onsdag	1	A	
torsdag	3	B	

Vi foretager nu randomiseringen som kort sagt er en form for lodtrækning. Sædvanligvis vil man benytte et program der kan generere tilfældige tal (mange lommeregner har et sådant program). For at anskueliggøre randomiseringen vil vi mere primitivt foretage lodtrækningen på følgende måde. På 4 sedler skrives A_1 , på andre 4 sedler skrives A_2 . Hver seddel krølles sammen til en kugle og placeres i en dåse. Sedlerne blandes ved at dåsen rystes (se figur). Hvis den første seddel der udtrækkes er A_2 så betyder det, at det delforsøg der mandag udføres med apparatur 1 og laborant A skal anvende additiv A_2 .



Hvis den næste seddel der udtrækkes er A_1 så betyder det, at det delforsøg der tirsdag udføres med apparatur 2 og råvareleverance 1 skal anvende additiv A_1 osv. Resultaterne kunne eksempelvis være som angivet på følgende skema:

Forsøgsenheder			Behandlinger (apparater)
Dag	Apparatur	Laborant	
mandag	1	A	A ₂
tirsdag	2	A	A ₁
tirsdag	1	B	A ₁
tirsdag	3	C	A ₂
onsdag	3	B	A ₂
onsdag	4	C	A ₁
onsdag	1	A	A ₂
torsdag	3	B	A ₁

På denne måde sikrer man sig, at vi får et så vidt muligt "statistisk gyldigt" forsøg. Hvis vi derfor efter beregninger (som ses i de følgende kapitler) konkluderer, at der er forskel på additiverne, så er det "korrekt", idet det ville være helt tilfældigt, hvis én af additiverne har været begunstiget med særlig gode forsøgsenheder.

Herved har man også sikret sig, at de to stikprøver (variable) er statistisk uafhængige.

Forsøg bør udføres, så alle behandlinger får lige mange gentagelser.

Ved planlægningen af forsøget er det ganske klart, at hvis man eksempelvis har ressourcer til at lave 20 delforsøg, så ville det være en meget dårlig plan, hvis man lavede 18 delforsøg med A₁ og kun 2 delforsøg med A₂. Der bør i naturligvis tilstræbes at lave 10 delforsøg med hver behandling. Forsøg kan mislykkes, så målet i praksis ikke bliver opfyldt, og i sådanne tilfælde kan de i de følgende kapitler anførte statistiske analyser stadig gennemføres. Resultaterne bliver dog mere usikre, og beregningerne mere komplicerede og vil i visse tilfælde ikke blive anført i dette notat. I stedet antages et statistikprogram benyttet.

Dimensionering

Analogt med forklaringen i "Statistiske Grundbegreber" side 57 kan man under visse forudsætninger beregne hvor mange gentagelser (portioner) der skal anvendes for hver behandling, hvis $P(\text{fejl af type I}) \leq \alpha$ og $P(\text{fejl af type II}) \leq \beta$.

Man skal naturligvis angive en bagatelgrænse Δ , men desuden kræver beregningerne, at spredningerne ved de to behandlinger er (tilnærmelsesvis) ens, og at man kan give et nogenlunde realistisk skøn for denne fælles spredning σ . Det er naturligvis en svaghed ved dimensioneringen, at man inden forsøget er udført skal give et sådant skøn.

En vurdering heraf kunne baseres på erfaringer fra tilsvarende forsøg. Findes sådanne erfaringer ikke kunne man først at lave nogle få forsøg og derfra få et rimeligt gæt på spredningen σ .

At spredningerne er nogenlunde ens vil i praksis ofte være tilfældet, da forsøgsenhederne jo er valgt ved randomisering. Når forsøget så er lavet, kan man (lidt sent) se, om man har skønnet rigtigt.

Dimensioneringen skal jo bevirke, at man laver det "rigtige" antal gentagelser. Man kan fristes til at tro, at jo flere gentagelser jo bedre. Dette er imidlertid jo ikke tilfældet, idet man med "for mange" gentagelser kan risikere at opdage så små forskelle, at de ikke har praktisk betydning, og så er de mange forsøg jo spild af arbejdskraft og penge.

Formler for dimensionering af 2 variable findes i appendix 10.2 og 10.3, en tabel til dimensionering findes i tabel 7.

10. Hypotesetestning (2 statistiske variable)

Eksempel 10.2. (fortsættelse af eksempel 10.1) Dimensionering.

- a) Hvor mange portioner skal anvendes ved forsøget, hvis man ønsker, at $P(\text{fejl af type I}) = \alpha \leq 0.05$, $P(\text{fejl af type II}) = \beta \leq 0.10$ og bagatelgrænsen $\Delta = 10$ minutter, idet man fra mange tilsvarende forsøg ved, at den fælles spredning er $\sigma = 15$ minutter.
- b) Samme spørgsmål og krav som i spørgsmål a), men nu antages, at man ikke kender spredningen, men ud fra nogle få delforsøg skønner, at den er ca. 15 minutter.
- c) Samme spørgsmål og krav som i spørgsmål b), men nu antages $P(\text{fejl af type I}) = \alpha \leq 0.01$.

LØSNING:

- a) Af oversigt appendix 10.2 fås

$$n \geq 2 \cdot \left(\frac{u_{1-\alpha} + u_{1-\beta}}{\frac{\Delta}{\sigma}} \right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{u_{0.95} + u_{0.90}}{\frac{10}{15}} \right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{1.645 + 1.282}{\frac{10}{15}} \right)^2 = 38,55$$

dvs. der skal udføres i alt $n = 39$ delforsøg af hver behandling

- b) Af tabel 7 fås idet $\frac{\Delta}{\sigma} \approx \frac{2}{3} = 0.67$, at det største tal mindre end 0.67 fås for $n \approx 40$

10.3 Test og konfidensintervaller for 2 normalfordelte variable.

Lad os igen betragte det i eksempel 10.1 og 10.2 angivne forsøg. For hver af de 2 additiver udføres en række delforsøg. Forsøgsresultaterne kan generelt skrives:

For additiv A_1 : Statistisk variabel X_1 . Stikprøve: $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{1n_1}$.

For additiv A_2 : Statistisk variabel X_2 . Stikprøve: $x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots, x_{2n_2}$.

Vi antager, at X_1 og X_2 er statistisk uafhængige normalfordelte variable med henholdsvis middelværdierne μ_1 og μ_2 og spredningerne σ_1 og σ_2 .

Sædvanligvis vil både middelværdier og spredninger ikke være kendt eksakt, og må derfor estimeres ud fra forsøgsresultaterne.

Generelt er man interesseret i at teste nulhypotesen

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 + d, \text{ hvor } d \text{ er en given konstant (sædvanligvis } 0)$$

Denne omskrives til $H_0: \mu_1 - \mu_2 - d = 0$.

Testproceduren er nu baseret på fordelingen af differensen $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d$.

Ifølge additionssætningen (se eventuelt "Statistiske Grundbegreber side 34) er $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d$ normalfordelt og fra regnereglerne fås $E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d) = E(\bar{X}_1) - E(\bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$ og

$$V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d) = V(\bar{X}_1) + V(\bar{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}.$$

Heraf følger, at hvis spredningerne er kendt (eksakt), vil $U = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ være normeret normalfor-

delt, og på sædvanlig måde kunne anvendes til test af nulhypotesen.

Er spredningerne ikke kendt, vil det være naturligt at betragte teststørrelsen

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \quad (10.1)$$

Denne er imidlertid ikke normalfordelt.

Man kan så benytte "Satterthwaite's approksimation" som angivet i appendix 10-3.

Har de to variable samme spredning, vil teststørrelsen (10.1) være t -fordelt. Denne har større styrke¹ end "Satterthwaite's approksimation", og må derfor foretrækkes.

Er stikprøvestørrelserne store (over 30) er teststørrelsen (10.1) med god tilnærmelse normalfordelt, og det er da ikke nødvendigt at foretage en indledende testning af, om spredningerne er ens eller forskellige.

Testning af $H_0: \mu_1 = \mu_2 + d$ foretages derfor i følgende rækkefølge:

- 1) Er stikprøvestørrelserne ≥ 30 foretages en U -test (jævnfør eksempel 10.3 og appendix 10.2)
- 2) Er stikprøvestørrelserne < 30 undersøges først om varianserne er ens (selvom det egentlige formål er at undersøge forskelle i middelværdier)

Man opstiller nulhypotesen $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ mod den alternative hypotese $H: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Testen bygger på, at størrelsen $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ er F -fordelt (jævnfør appendix 10.4)

Får man en accept af nulhypotesen, har man naturligvis ikke hermed vist at varianserne er ens, men da testen er robust overfor mindre forskelle i varianserne, blot vi har samme antal gentagelser, er det tilladeligt i den følgende test af middelværdierne at antage dette.

- 2a) Accepteres nulhypotesen $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, beregner man et estimat for den fælles varians som et vægtet gennemsnit s_0^2 af de to estimater for varianserne s_1^2 og s_2^2 . Disse vægtes i forhold til frihedsgraderne, dvs. $s_0^2 = \frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$. Frihedsgradstallet for

s_0^2 er $f_0 = n_1 + n_2 - 2$. Man siger man har foretaget en "pooling" af de to estimater.

Man tester nu nulhypotesen $H_0: \mu_1 = \mu_2$ på basis af teststørrelsen $t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d}{s_0 \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ som

er t -fordelt med f_0 frihedsgrader (jævnfør eksempel 10.4 og appendix 10.3).

- 2b) Forkastes nulhypotesen $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, benyttes "Satterthwaite's approksimation" (jævnfør eksempel 10.5 og appendix 10-3).

Hvis spredningerne kan antages ens kan man foretage en dimensionering, dvs. vælge antal gentagelser n , så $P(\text{fejl af type II})$ holdes under β . Hvorledes dette kan gøres er beskrevet i eksempel 10.2.

¹ En test har "større styrke" end en anden, hvis den med givne data og et givet signifikansniveau giver den største chance for at forkaste nulhypotesen.

10. Hypotesetestning (2 statistiske variable)

De følgende 3 eksempler belyser disse 3 situationer.

Eksempel 10.3. Store stikprøvestørrelser (≥ 30) (fortsættelse af eksempel 10.1).

På basis af resultatet i eksempel 10.2 udførte man 40 delforsøg af hver behandling. Efter at forsøgsrækken var afsluttet, opdagede man, at et af forsøgene var mislykket og måtte kasseres. Der var følgelig kun 39 delforsøg med additiv A_1 . Man fik følgende resultater (i minutter)

A_1	117,0	130,7	117,4	142,4	106,8	115,7	116,5	86,7	124,7	127,9	103,0	133,4	103,6	114,4	132,0	130,2	110,5	119,4	117,2	125,6	126,5	94,0	122,7	106,0	124,0	135,2	124,1	107,9	113,4	116,2	113,9	131,4	125,6	128,0	110,6	97,2	124,4	134,1	115,7	
A_2	116,7	112,2	133,7	108,9	111,6	157,6	124,2	124,9	102,6	124,1	158,6	136,9	127,4	127,5	138,9	122,7	120,5	133,2	122,4	143,0	135,6	135,4	136,8	121,4	116,2	135,7	128,2	122,1	132,7	107,0	138,2	121,6	131,1	157,3	162,5	130,2	126,0	138,6	138,5	106,5

1) Kan man ud fra disse data bevise på mindst signifikansniveau $\alpha = 0.05$, at malingen med additivet A_1 tilsat har en mindre middeltørretid end konkurrentens?

2) Hvad vil du anbefale virksomheden at gøre, når man også tager det økonomiske (bagatelgrænsen) i betragtning.

LØSNING:

1) X_1 = tørringstiden for maling tilsat additiv A_1 .

X_2 = tørringstiden for maling tilsat additiv A_2 .

X_1 og X_2 antages at være uafhængige normalfordelte variable, med henholdsvis middelværdierne μ_1 og μ_2 og spredningerne σ_1 og σ_2 .

Nulhypotese $H_0: \mu_1 \geq \mu_2$ Alternativ hypotese: $H: \mu_1 < \mu_2$

Vi finder ud fra stikprøverne, at $\bar{x}_1 = 118.6$, $s_1 = 12.13$ og $\bar{x}_2 = 129.2$, $s_2 = 14.2$.

Da stikprøvestørrelserne er over 30 anvendes en U-test (se eventuelt appendix 10.2).

$$u = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{118.6 - 129.2}{\sqrt{\frac{12.13^2}{39} + \frac{14.2^2}{40}}} = -3.57$$

Da $-u_{0.999} = -3.090 > -3.57$ (eller P-værdi $= P(U < -3.57) = \Phi(-3.57) = 0,000178529 < 0.001$ forkastes nulhypotesen (3-stjernet) dvs.

der er et stærkt statistisk bevis for at additiv A_1 i middel har en kortere tørringstid end additiv A_2 .

2) Et 95% konfidensinterval for differensen er (se eventuelt appendix 10.1 nummer 1)

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm u_{0.975} \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = 118.6 - 129.2 \pm 1.96 \sqrt{\frac{12.13^2}{39} + \frac{14.2^2}{40}} = -10.6 \pm 5.82$$

Konfidensintervallet er $[-16.43; -4.78]$.

Da bagatelgrænsen er 10, og differensen kun er 10.6, således at næsten 50% af konfidensintervallet ligger under 10, kan det ikke anbefales at gå over til det mere kostbare additiv.

Bemærk, at dimensioneringen reelt kun har betydning i en acceptsituation, hvor man så med stor sikkerhed kan konkludere, at muligvis giver additiv A_1 en kortere størkningstid, men ikke så meget kortere, at det har praktisk betydning.

Excel løsning: Man foretager analysen på samme måde, som det vises i de følgende 2 eksempler. ◆

Som det fremgår af det følgende eksempel er det overkommeligt ved hjælp af en lommeregner at foretage de nødvendige test i tilfældet, hvor der er samme spredning. Excel kan dog også udføre disse test.

Eksempel 10.4. Små stikprøvestørrelser (< 30), accept af ens spredning.

To katalysators indflydelse på udbyttet ved en kemisk proces skal undersøges. Den ene katalysator K_1 er billigere end den anden katalysator K_2 , så hvis K_2 ikke i middel giver et udbytte, som er mindst 2 enheder større end det udbytte K_1 giver, vil vi vælge katalysator K_1 .

Da forsøgene er både tidskrævende og kostbare, har man kun afsat midler til 8 forsøg med hver katalysator. Resultaterne blev:

K_1	86.41	91.92	86.27	88.99	92.59	89.38	91.40	88.70
K_2	93.65	92.97	97.96	94.01	91.56	91.85	99.99	90.99

- 1) Undersøg på basis af disse resultater, om det på et signifikansniveau på 5% kan påvises at K_2 giver et udbytte der er 2 enheder større end K_1
- 2) Angiv endvidere et 95% konfidensinterval for differensen mellem de to middeludbytter.

LØSNING:

- 1) Lad X_1 = udbyttet ved anvendelse af katalysator K_1 og X_2 = udbyttet ved anvendelse af katalysator K_2 .

X_1 og X_2 antages approksimativt normalfordelte med middelværdi og spredning henholdsvis μ_1, σ_1 og μ_2, σ_2 .

Ved indtastning af forsøgsresultaterne i lommeregneren fås de tilsvarende estimater

$$\bar{x}_1 = 89.46, s_1 = 2.387 \text{ og } \bar{x}_2 = 94.12, s_2 = 3.213.$$

- a) Først testes om varianserne er ens, dvs. $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ mod den alternative hypotese $H: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Vi anvender formlen i appendix 10.4 storrekke 2:

$$\text{Teststørrelsen } F = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{3.213^2}{2.387^2} = 1.811, \text{ er } F\text{-fordelt } F(f_2, f_1) = F(7, 7).$$

(Bemærk: Vælg tæller og nævner i F , så brøken bliver større end 1, så skal kun vurderes "opad").

Ved opslag i tabel 6 findes $F_{0,975}(7, 7) = 4.99$.

Da $1.811 < 4.99$ (eller P -værdi = $P(X > 1.811) = 0.23 > 0.025$) accepteres nulhypotesen, dvs. vi vil i den følgende test antage, at spredningerne er ens.

Et estimat for den fælles spredning er

$$s_0^2 = \frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(8 - 1) \cdot 2.387^2 + (8 - 1) \cdot 3.213^2}{14} = 8.01 \text{ med } f_0 = 14$$

- b) Vi tester nu om udbyttet ved katalysator K_2 er 2 større end ved katalysator K_1 , hvilket betyder, at vi opstiller nulhypotesen $H_0: \mu_2 \leq \mu_1 + 2$ mod den alternative hypotese $H: \mu_2 > \mu_1 + 2$.

$$\text{Af appendix 10.3 fås teststørrelsen } t = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1 - 2}{s_0 \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{94.12 - 89.46 - 2}{\sqrt{8.01} \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}} = 1.88$$

Da $t = 1.88 > t_{0,95}(14) = 1.76$ (eller P -værdi = $P(X > 1.88) = 0.041 < 0.05$) forkastes nulhypotesen, dvs. vi har et (svagt) statistisk bevis for at K_2 giver et udbytte der er 2 enheder større end K_1 (vi er dog tæt på en accept).

Excell løsning: I appendix A afsnit a9 ses, hvilke ordrer der er nødvendige.

a) Først testes om varianserne er ens, dvs.

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ mod den alternative hypotese } H_0: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

Lad stikprøveværdierne for K_1 og K_2 stå i to søjler eksemplevis i cellerne A1 til A8 og B1 til B8

Inddata:

86,41	93,65
91,92	92,97
86,27	97,96
88,99	94,01
92,59	91,56
89,38	91,85
91,4	99,99
88,7	90,99

Test af nulhypotese $H_0: \mu_2 \leq \mu_1 + 2$ (samme spredning)

Indtast data fra eksempel 10.4. K_1 's værdier placeres i cellerne A1 - A8. K_2 's værdier placeres i cellerne B1 - B8

1) Først testes om spredningerne er ens: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$:

Metode 1: P -værdi = FTEST(A1:A8;B1:B8) = 0.451401 . Da 0.451 > 0.05 accepteres H_0 .

Metode 2: Vælg "Funktioner", "Dataanalyse", "F-test: Dobbelt stikprøve for varians"

Den fremkomne tabel udfyldes:

"Område for variabel 1": A1:A8 "Område for variabel 2": B1:B8

"Outputområde": Skriv cellenummer for øverste venstre celle i det ønskede outputområde.

Udskrift:

F-test: Dobbelt stikprøve for varians

	Variabel 1	Variabel 2
Middelværdi	89,4575	94,1225
Varians	5,699364	10,32305
Observationer	8	8
fg	7	7
F	0,552101	
P(F<=f) en-halet	0,225701	<u><u>H_0 accepteres, da P-værdi=0.2257 < 0.025</u></u>
F-kritisk en-halet	0,264058	

2) Nu testes $\sigma_1 = \sigma_2 : H_0: \mu_2 \leq \mu_1 + 2$

Metode 1: P -værdi = TTEST(B1:B8;A1:A8 + 2;1;2) = 0,040314

Da 0.040314 < 0.05 forkastes H_0

Metode 2: Vælg "Funktioner", "Dataanalyse", "t-test: to stikprøver med ens varians"

Den fremkomne tabel udfyldes:

"Område for variabel 1": B1:B10 "Område for variabel 2": A1:A8

"Hypotese for forskel i middelværdi": 2

"Outputområde": Skriv cellenummer for øverste venstre celle i det ønskede outputområde.

Udskrift:

10.3 Test og konfidensintervaller for 2 normalfordelte variable

t-test: To stikprøver med ens varians

	Variabel 1	Variabel 2
Middelværdi	94,1225	89,4575
Varians	10,32305	5,699364
Observationer	8	8
Puljevarians	8,011207	
Hypotese for forskel i middelværdi	2	
fg	14	
t-stat	1,883121	
P(T<=t) en-halet	0,040314	<u><u>H₀ forkastes, da P-værdi=0,0404 < 0,05</u></u>
t-kritisk en-halet	1,761309	
P(T<=t) to-halet	0,080628	
t-kritisk to-halet	2,144789	

Det ses, at vi får de samme resultater og konklusion som før.

2) Et 95% konfidensinterval for differensen er (se eventuelt appendix oversigt 10.1 nummer 2)

$$\bar{x}_2 - \bar{x}_1 \pm t_{0,975}(14) \cdot s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 94.12 - 89.46 \pm 2.15 \cdot \sqrt{8.01} \cdot \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = 4.67 \pm 3.0427$$

Konfidensintervallet er $[1.63 ; 7.71]$.

At konfidensintervallet indeholder 2 skyldes, at ved ensidede test er et 95% konfidensinterval for differensen også "ensidet" $[g ; \infty]$ hvor den nedre grænse g er bestemt ved:

$$g = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 - t_{0,95}(14) \cdot s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 94.12 - 89.46 - 1.76 \cdot \sqrt{8.01} \cdot \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = 4.67 - 2.49 = 2.18$$

dvs. differensen er større end 2.18.

Excell kan ikke umiddelbart beregne konfidensintervallet, men man må opskrive formlen for konfidensradius r .

Forudsættes varianserne i forrige skem placeret i P16 og Q16 osv. fås radius af formlen

$$r = ((P16*(P17-1)+Q16*(Q17-1))/(P16+Q16-2))^{(0,5)}*(1/P17+1/P18)^{(0,5)}*TINV(0,05;14)$$

Hvis der er stor forskel på stikprøvestørrelserne, er det meget vigtigt for anvendelsen af ovenstående test, at forudsætningen om, at varianserne er ens er holdbar. Til gengæld er det også i sådanne tilfælde, man virkelig ser den store forbedring ved at benytte t -testen fremfor "Satterthwaite's approksimation".

Eksempel 10.5. Små stikprøvestørrelser (< 30), forskellig spredning.

Lad os antage, at vi har samme problemstilling som i eksempel 10.4, men at vi denne gang anvender to andre katalysatorer A og B. Der planlægges med 10 delforsøg men desværre mislykkedes to af forsøgene med katalysator A, så der ikke er lige mange gentagelser.

Vi får følgende resultater:

A	84.66	77.51	78.32	83.71	86.88	79.26	91.3	85.71		
B	87.82	87.9	90.43	89.46	84.99	86.36	89.47	86.86	87.39	86.25

Undersøg på basis af disse resultater, om det på et signifikansniveau på 5% kan påvises, at B giver et udbytte der er 2 enheder større end A.

LØSNING:

1) Lad X_A = udbyttet ved anvendelse af katalysator A og

X_B = udbyttet ved anvendelse af katalysator B.

X_A og X_B antages approksimativt normalfordelte med middelværdi og spredning henholdsvis μ_A, σ_A og μ_B, σ_B .

Ved indtastning af forsøgsresultaterne i lommeregneren eller i Exell fås de tilsvarende estimater $\bar{x}_A = 83.4188$, $s_A = 4.7686$ og $\bar{x}_B = 87.693$, $s_B = 1.6925$

a) Først testes om varianserne er ens, dvs. $H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ mod den alternative hypotese $H: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$.

Af appendix 10.4 storække 2 fås, at teststørrelsen $F = \frac{s_A^2}{s_B^2} = \frac{4.7686^2}{1.6925^2} = 7.938$, er F - fordelt

$F(f_A, f_B) = F(7,9)$ (bemærk, at vi igen sørger for, at brøken bliver større end 1)

Idet $F_{0,975}(7,9) = 4.82$ (eller P - værdi = $P(X > 7.938) = 0,00302 < 0.025$) forkastes nulhypotesen, dvs. vi kan ikke tillade os at antage, at spredningerne er ens.

b) Vi tester nu om udbyttet ved katalysator B er 2 større end ved katalysator A, hvilket betyder, at vi opstiller nulhypotesen $H_0: \mu_B \leq \mu_A + 2$ mod den alternative hypotese $H: \mu_B > \mu_A + 2$.

Af appendix 10.3 fås teststørrelsen $t = \frac{\bar{x}_B - \bar{x}_A - 2}{\sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}}} = \frac{87.693 - 83.4188 - 2}{\sqrt{\frac{4.7686^2}{8} + \frac{1.6925^2}{10}}} = 1.2857$

Frihedsgradstallet f beregnes ved Satterthwaite's metode som det nærmeste hele tal, som er større

$$\text{end } g = \frac{\left(\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_A^2}{n_A}\right)^2}{n_A - 1} + \frac{\left(\frac{s_B^2}{n_B}\right)^2}{n_B - 1}} = \frac{\left(\frac{4.7686^2}{8} + \frac{1.6925^2}{10}\right)^2}{\frac{\left(\frac{4.7686^2}{8}\right)^2}{8-1} + \frac{\left(\frac{1.6925^2}{10}\right)^2}{10-1}} = 8.42 \approx 8$$

Da $t = 1.286 < t_{0,95}(8) = 1.86$ (eller P - værdi = $0.117 > 0.05$), accepteres nulhypotesen.

Vi kan ikke på dette grundlag vise, at udbyttet ved katalysator B er 2 større end ved katalysator A.

Excel løsning: På grund af de omfattende regninger kan det her anbefales at benytte et statistikprogram

a) Test af om varianserne er ens: $H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ mod den alternative hypotese $H: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$.

F-test: Dobbelt stikprøve for varians

	Variabel 1	Variabel 2	
Middelværdi	83,41875	87,693	
Varians	22,73936	2,864579	
Observationer	8	10	
fg	7	9	
F	7,938115		
P(F<=f) en-halet	0,00302		<u><u>H_0 accepteres, da P-værdi=0.003 < 0.025</u></u>
F-kritisk en-halet	3,29274		

b) Vi tester nu om udbyttet ved katalysator B er 2 enheder større end ved katalysator A.

10.4 Test og konfidensintervaller for 2 binomialfordelte variable

t-test: To stikprøver med forskellig varians

	Variabel 1	Variabel 2	
Middelværdi	87,693	83,41875	
Varians	2,864579	22,73936	
Observationer	10	8	
Hypotese for forskel i middelværdi	2		
fg	8		
t-stat	1,285713		
P(T<=t) en-halet	0,117254		<u>H_0 accepteres, da</u>
			<u>P-værdi=0.2257 <</u>
			<u>0.025</u>
t-kritisk en-halet	1,859548		
P(T<=t) to-halet	0,234508		
t-kritisk to-halet	2,306006		

Det ses, at vi får de samme resultat som ved benyttelse af tabel. ◆

10.4 Test og konfidensintervaller for 2 binomialfordelte variable.

Som nævnt i bind 1 kan man ofte approksimere en binomialfordeling med en normalfordeling. Det er en sådan approksimation, som formlerne i appendix 10.5 bygger på. I praksis vil disse forudsætninger for approksimation sædvanligvis være opfyldt.

Vi belyser anvendelsen af oversigten ved følgende eksempel.

Eksempel 10.6. Binomialfordelingstest.

Ved et forsøg der skulle afgøre om C - vitamin har en forebyggende virkning mod forkølelse, fik halvdelen af en gruppe på 280 franske skiløbere C - vitamin mens de øvrige fik kalktabletter (placebobehandling). Fordelingen skete randomiseret, og forsøgspersonerne var uvidende om gruppeinddeling og hvilket medikament de fik.

Efter en passende tid optales hvor mange af forsøgspersonerne der var forkølede.

Resultaterne kan ses af følgende skema:

	Forkølet	Ikke forkølet	Total
C-vitamin	17	122	139
Kalktabletter	31	109	140

Bemærk, at en enkelt forsøgsperson gled ud af forsøget, så grupperne blev ikke helt lige store.

- 1) Kan det på et signifikansniveau på 5% vises, at C - vitamin har en forebyggende virkning?
- 2) I bekræftende fald angiv er 95% konfidensinterval for differensen mellem parametrene.

10. Hypotesetestning (2 statistiske variable)

LØSNING:

X_1 = antal forkølede personer der har fået C-vitamin. X_1 er binomialfordelt $b(139, p_1)$.

X_2 = antal forkølede personer der har fået Kalktabletter. X_2 er binomialfordelt $b(140, p_2)$.

Da vi ønsker at vise, at $p_1 < p_2$ bliver

nulhypotesen $H_0: p_1 \geq p_2$ mod den alternative hypotese $H: p_1 < p_2$.

Appendix 10.5 stor række 2 anvendes :

$$\tilde{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{17}{139}, \tilde{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{31}{140} \text{ og } \tilde{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{17 + 31}{139 + 140} = \frac{48}{279}.$$

$$\text{Da } n_1 \cdot \tilde{p} = 139 \cdot \frac{48}{279} = 23.9 \in [5; 139 - 5] \text{ og } n_2 \cdot \tilde{p} = 140 \cdot \frac{48}{279} = 24.1 \in [5; 140 - 5]$$

er forudsætningerne for at approksimere med normalfordelingen opfyldt. Vi finder af formel (1)

$$u = \frac{\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2}{\sqrt{\tilde{p} \cdot (1 - \tilde{p}) \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{\frac{17}{139} - \frac{31}{140}}{\sqrt{\frac{48}{279} \cdot \left(1 - \frac{48}{279}\right) \cdot \left(\frac{1}{139} + \frac{1}{140}\right)}} = \frac{-0.099}{0.0452} = -2.193$$

Da $u_{0.95} = 1.645 < 2.193 < u_{0.99} = 2.326$ (eller P - værdi = $\Phi(-2.193) = 0.0142$) forkastes nulhypotesen ('enstjernet'), dvs.

der er på signifikansniveau 5% vist, at C-vitamin har en vis forebyggende virkning mod forkølelse.

Et 95% konfidensinterval for differensen $p_1 - p_2$ er ifølge appendix 10.1 række 8:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{p}_1(1-\tilde{p}_1)}{n_1} + \frac{\tilde{p}_2(1-\tilde{p}_2)}{n_2}} &\leq p_1 - p_2 \leq \tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{p}_1(1-\tilde{p}_1)}{n_1} + \frac{\tilde{p}_2(1-\tilde{p}_2)}{n_2}} \\ \Leftrightarrow 0.122 - 0.223 - 1.960 \cdot \sqrt{\frac{0.122(1-0.122)}{139} + \frac{0.223(1-0.223)}{140}} &\leq p_1 - p_2 \leq 0.122 - 0.223 + 1.960 \cdot \sqrt{\frac{0.122(1-0.122)}{139} + \frac{0.223(1-0.223)}{140}} \\ \Leftrightarrow -0.1007 - 0.08787 &\leq p_1 - p_2 \leq -0.1007 + 0.08787 \Leftrightarrow \underline{\underline{-0.1886 \leq p_1 - p_2 \leq -0.0128}} \end{aligned}$$

Excell har ikke direkte nogle programmer til beregningerne, så eneste mulighed er at beregne direkte ud fra formlerne.



10.5 Test og konfidensintervaller for 2 Poissonfordelte variable.

Som nævnt i bind 1 kan man ofte approksimere en Poissonfordeling med en normalfordeling. Det er en sådan approksimation, som formlerne i appendix 10.6 bygger på. I praksis vil disse forudsætninger for approksimation sædvanligvis være opfyldt. Vi belyser anvendelsen af oversigten ved følgende eksempel.

Eksempel 10.7. Poissonfordelingstest.

En bestemt type TV-apparat produceres på 2 fabrikker A og B. Man har mistanke om, at der er forskel på antallet af loddefejl der findes i apparater fra de to fabrikker. For at teste dette, udtages af den løbende produktion stikprøver på 5 TV-apparater, og man optalte antallet af loddefejl i de 5 apparater. Resultaterne blev:

Fabrik A: På 20 apparater fandtes i alt 12 loddefejl

Fabrik B: På 19 apparater fandtes i alt 7 loddefejl (et apparat måtte udskydes)

Test på dette grundlag, om der er forskel på fejlintensiteten på de to fabrikker.

LØSNING

X_1 = antal loddefejl pr. apparat på fabrik A. X_1 antages Poissonfordelt $p(\mu_1)$.

X_2 = antal loddefejl pr. apparat på fabrik B. X_2 antages Poissonfordelt $p(\mu_2)$.

Da vi ønsker at vise, at $\mu_1 \neq \mu_2$ bliver

nulhypotesen $H_0: \mu_1 = \mu_2$ mod den alternative hypotese $H: \mu_1 \neq \mu_2$.

Appendix 10.6 stor række 3 anvendes :

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{12}{20}, \bar{x}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{7}{19}, \text{ og } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{12 + 7}{20 + 19} = \frac{19}{39}.$$

$$\text{Da } n_1 \cdot \bar{x} = 20 \cdot \frac{19}{39} = 9.74 \geq 5 \text{ og } n_2 \cdot \bar{x} = 19 \cdot \frac{19}{39} = 9.26 \geq 5$$

er forudsætningerne for at approksimere med normalfordelingen opfyldt.

$$\text{Vi finder : } u = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\bar{x} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} = \frac{\frac{12}{20} - \frac{7}{19}}{\sqrt{\frac{19}{39} \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{19} \right)}} = \frac{0.2316}{0.2236} = 1.036$$

Da $u = 1.036 < u_{0.975} = 1.960$ (eller P -værdi = $P(X > 1.036) = 1 - \Phi(1.036) = 0.1501 > 0.025$) accepteres nulhypotesen, dvs. man kan ikke på det grundlag vise, at der er forskel på fejlintensiteten på de to fabrikker.



Excell har ikke direkte nogle programmer til beregningerne, så eneste mulighed er at beregne direkte ud fra formlerne.

OPGAVER

Opgave 10.1^T

Det påstås at modstanden i en tråd af type A er større end modstanden i en tråd af type B. Til afklaring af denne påstand udtages ved et fuldstændigt randomiseret forsøg tilfældigt n tråde af hver type og deres modstande måles.

Find det mindste antal n

- 1) hvis man ønsker at $P(\text{fejl af type I}) = \alpha \leq 0.05$, $P(\text{fejl af type II}) = \beta \leq 0.05$ og bagatelgrænsen er $\Delta = 0.1$ ohm, og man ved, at spredningen $\sigma = 0.1$ ohm.
- 2) hvis man ønsker at $P(\text{fejl af type I}) = \alpha \leq 0.05$, $P(\text{fejl af type II}) = \beta \leq 0.05$ og bagatelgrænsen er $\Delta = 0.1$ ohm, og man har en forhåndsformodning om, at spredningen er ca. $\sigma = 0.1$ ohm.
- 3) Hvilke konklusioner vedrørende behandlingernes virkning kan gøres, såfremt man ved testning af forsøgsresultaterne finder a) signifikans b) ingen signifikans
- 4) Hvilke yderligere analyser af forsøgsresultaterne bør foretages, såfremt testningen a) viser signifikans b) ikke viser signifikans.

Opgave 10.2

I et forsøg ønsker man at sammenligne udbyttet ved benyttelse af 2 reaktortyper.

Man ønsker at kunne påvise eventuelle forskelle i middeludbytte ned til ca. $\Delta = 6.0$.

Find den mindste værdi af $n =$ "antal delforsøg med hver reaktortype", for hvilken

$P(\text{fejl af type I}) = \alpha \leq 0.05$, $P(\text{fejl af type II}) = \beta \leq 0.10$.

Man kender ikke spredningen eksakt, men mener, den højst er ca 7 enheder.

Opgave 10.3^T

Et levnedsmiddelfirma havde udviklet en diæt, som har lavt indhold af fedt, kulhydrater og kolesterol. Diæten er udviklet med henblik på patienter med hjerteproblemer, men firmaet ønsker nu at undersøge diættens virkning på folk med vægtproblemer.

To stikprøver på hver 100 personer med vægtproblemer blev udtaget tilfældigt. Gruppe A fik den nye diæt, mens gruppe B fik den diæt, man normalt gav. For hver person blev registreret størrelsen af vægttabet i en 3 ugers periode.

Man fandt følgende værdier for gennemsnit og spredning:

Gruppe A: $\bar{x}_A = 9.31$ kg, $s_A = 4.67$

Gruppe B: $\bar{x}_B = 7.40$ kg, $s_B = 4.04$.

- 1) Undersøg om vægttabet for gruppe A er signifikant større end for gruppe B. Signifikansniveau $\alpha = 5\%$.
- 2) Beregn et 95% konfidensinterval for differensen mellem de to grupper middelværdier.

Opgave 10.4

På et laboratorium undersøgte filtreringstiden for en opløsning af et bestemt gødningsstof ved benyttelsen af to forskellige filtertyper (F_1) og (F_2). Følgende stikprøveværdier observeredes:

(F_1)	8	10	12	13	13	9	14	4
(F_2)	9	10	10	7	9			

Det antages, at filtreringstiderne X_1 og X_2 er normalfordelte $n(\mu_1, \sigma_1)$ og $n(\mu_2, \sigma_2)$

- 1) Test, om det kan antages, at $\sigma_1 = \sigma_2$.
- 2) Test under hensyntagen til det i 1) fundne, om det kan antages, at $\mu_1 = \mu_2$.
- 3) Opstil et 95% -konfidensinterval for: a) $\mu_1 - \mu_2$, b) $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$.

Opgave 10.5^T

Det påstås at modstanden i en tråd af type A er større end modstanden i en tråd af type B. Til afklaring af denne påstand udtages tilfældigt 6 tråde af hver type og deres modstande måles.

Følgende resultater fandtes:

Modstand i tråd A (i ohm)	0.140	0.138	0.143	0.142	0.144	0.137
Modstand i tråd B (i ohm)	0.135	0.140	0.142	0.136	0.138	0.140

Hvilke konklusioner kan drages med hensyn til påstanden?

Opgave 10.6

I et laboratorium foretoges 15 uafhængige bestemmelser af furfurols kogepunkt, idet 8 af bestemmelserne foretoges af én kemiingeniør, de resterende bestemmelser af en anden kemiingeniør. Resultaterne var ($^{\circ}\text{C}$):

1. ingeniør	162.2	161.3	161.9	161.2	163.4	162.4	162.5	162.0
2. ingeniør	163.3	162.6	161.8	163.8	163.0	163.2	164.1	

Undersøg, om de to ingeniørers resultater i middel er ens.

Opgave 10.7

Med henblik på at sammenligne de farmakologiske virkninger af stofferne morphin og nalbuphin foretoges et fuldstændigt randomiseret forsøg, hvorved man på 10 forsøgspersoner målte ændringen i pupildiameter (millimeter) efter indsprøjtning af en standarddosis af en opløsning af morphin (M) eller nalbuphin (N).

Forsøgsplan og forsøgsresultater var:

M: 1.0	N: 0.0	M: 1.9	M: 2.0	N: 0.8	M: 0.8	M: 0.1	N: - 0.3	N: 0.4	N: 0.2
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	----------	--------	--------

Analyser forsøgsresultaterne og opstil et 95%-konfidensinterval for differensen $\mu(M) - \mu(N)$ mellem de to middelværdier.

Opgave 10.8

En produktion af plastikvarer må omlægges på grund af bestemmelser i en ny miljølov.

Ved den fremtidige produktion kan inden for miljølovens rammer vælges mellem 2 produktionsmetoder I og II. Metode I er den dyreste, og fabrikanten har regnet ud, at det (kun) kan betale sig at benytte metode I, såfremt den giver et middeludbytte, som er mindst 10 måleenheder (udbytteprocenter) større end udbyttet ved benyttelse af metode II.

Ved et fuldstændigt randomiseret forsøg fandtes følgende måleresultater:

Metode I	35.2	38.1	37.6	37.6	34.9	37.9	36.5	40.0	36.2	37.4	37.2	37.9
Metode II	26.2	22.2	24.3	24.5	22.0	27.6	23.8	22.8	23.4	20.8		

Fabrikanten valgte herefter at benytte metode I.

Foretag en undersøgelse af, om valget var statistisk velmotiveret.

Opstil et 95% - konfidensinterval for differensen mellem middeludbytteerne ved benyttelse af metoderne I og II.

Opgave 10.9^T

To sjællandske fabrikker producerer begge en bestemt type kvægfoder, for hvilken det ønskes, at proteinindholdet i færdigvaren skal være 26%. På de 2 fabrikkers driftslaboratorier foretoges følgende målinger af proteinindholdet i en uges produktion:

Fabrik 1	27.3	26.1	26.9	24.8	26.2	25.7	26.5
----------	------	------	------	------	------	------	------

Fabrik 2	26.0	26.7	25.6	26.1	26.2	25.5	26.0	26.1	26.2	25.9
----------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Foretag en statistisk vurdering af, om de to produktioner kan antages i middel at give kvægfoder med samme proteinindhold.

Opgave 10.10

Måling af intelligenskvotient på 16 tilfældigt udvalgte studerende ved en diplom-retning (med mere end 200 studerende) viste et gennemsnit på $\bar{x}_1 = 107$ og en empirisk varians på $s_1^2 = 100$, medens en tilsvarende måling på 14 tilfældigt udvalgte studerende fra en anden diplomretning viste et gennemsnit på $\bar{x}_2 = 112$ og en empirisk varians på $s_2^2 = 64$.

Tyder disse tal på en forskel på studentermaterialet på de to retninger?

Opgave 10.11

1) 100 studerende, 52 piger og 48 drenge, indstillede sig til en prøve, ved hvilken 39 piger og 27 drenge bestod.

Undersøg, om det anførte tyder på, at resultatet ved den pågældende prøve afhænger af deltagerens køn.

2) Det oplyses supplerende, at pigerne ved ovennævnte prøve opnåede et gennemsnit på 64% med en empirisk spredning på 10%, medens drengenes gennemsnit var 59% med en empirisk spredning på 8%.

Undersøg, om det anførte kan tages som vidnesbyrd om, at piger i almindelighed klarer sig bedre end drenge ved den omhandlede prøve.

Opgave 10.12^T

To sjællandske fabrikker producerer begge en bestemt type kvægfoder, for hvilken det ønskes, at proteinindholdet i færdigvaren skal være 26%. For den omhandlede produktion er der fastsat en øvre og en nedre tolerancegrænse for proteinindholdet. Partier med et proteinindhold uden for toleranceintervallet klassificeres som "dumpere".

I en 3-måneders periode havde fabrik 1 af en produktion på 60 foderstofpartier 5 dumpere, medens fabrik 2 af en produktion på 100 foderstofpartier havde 12 dumpere. Kan det heraf statistisk konkluderes, at dumpeprocenten i middel har været størst for fabrik 2?

Opgave 10.13

To virksomheder A og B fremstiller dåser med nominelt 100 g rejeost. 10 tilfældigt udtagne dåser fra A's produktion og 20 tilfældigt udtagne dåser fra B's produktion viste følgende resultater:

	Virksomhed	
	A	B
Totalt antal rejer	81	216
Gennemsnittet \bar{x} af nettoindhold	101.2 g	98.3 g
Empirisk spredning s af nettoindhold	1.0 g	2.7 g

- 1) Test, om det gennemsnitlige antal rejer pr. dåse kan antages at være det samme for virksomhedernes produktion.
- 2) Test, om det gennemsnitlige nettoindhold i en dåse kan antages at være det samme for virksomhedernes produktion.

Opgave 10.14

- 1) Mange forbrugere tror, at såkaldte "mandagsbiler", dvs. biler produceret om mandagen, har flere alvorlige fejl end biler produceret på ugens øvrige arbejdsdage.
For at undersøge, om der er noget grundlag for denne tro, udtog man på en bilfabrik tilfældigt 100 "mandagsbiler" og undersøgte dem for fejl. Man fandt at 8 biler havde alvorlige fejl. Tilsvarende udtog man tilfældigt 200 biler, der var produceret på ugens øvrige arbejdsdage, og man fandt 12 biler, der havde alvorlige fejl.
Giver denne undersøgelse støtte til formodningen om, at "mandagsbiler" er af dårligere kvalitet end andre biler.
- 2) De 100 ovennævnte "mandagsbiler" havde i alt 1030 konstaterede større eller mindre enkeltfejl, medens de 200 ovennævnte andre biler i alt havde 1899 konstaterede fejl. Tyder dette på, at der er forskel i fejlintensiteten på bilerne i de to grupper?

Opgave 10.15

Ved en undersøgelse af en eventuel sammenhæng mellem luftforurening og forekomsten af lungecancer sammenlignedes bl.a. sygdommens forekomst i byen X - købing inden for den gamle bygrænse (i nærheden af byens industrivirksomheder) med dens forekomst i samme bys forstadsområde (villakvarter):

	Antal tilfælde af lungecancer	Samlet indbyggerantal
Indre by	30	9000
Forstadsområde	40	27000

- 1) Det ses, at den relative hyppighed af cancertilfælde i den indre by afviger fra den relative hyppighed i forstadsområdet. Kan dette forklares som et tilfældigt udsving? Den opstillede nulhypotese, som testes, ønskes specificeret med angivelse af den alternative hypotese.
- 2) Diskuter muligheden for at drage årsagsmæssige konklusioner ud fra det fundne testresultat.

11 ENKELT REGRESSIONSANALYSE

11.1 Indledning

I dette kapitel betragtes forsøg, hvor man har målt sammenhørende værdier af to variable x og y . Det følgende eksempel demonstrerer et sådant tilfælde.

Eksempel 11.1

I et spinderi udtrykkes garnets kvalitet bl.a. ved en norm for den forventede trækstyrke. Kvaliteten anses således for at være i orden, hvis middeltrækstyrken mindst er lig med 10 måleenheder (me). Ved uldgarn opfylder garnets naturlige trækstyrke ikke det nævnte kvalitetskrav, hvorfor der tilsættes en vis mængde kunstfibre, hvilket forøger trækstyrken. Herved sker der dog det, at andre kvalitetsegenskaber, såsom elasticitet og isoleringsevne, forringes. Man har eksperimenteret med forskellige tilsatte mængder kunstfibre x og registreret garnets trækstyrke y ved disse forskellige mængder. Herved fremkom følgende observationsmateriale:

Mængde x (i gram) af kunstfibre pr kg uld	40	50	55	60	70	75	80	85	90	95	100	105	110	120	130
Trækstyrke (me): Y	4.5	6.5	5.4	7.0	8.2	8.0	7.1	8.9	8.2	10.3	9.6	10.8	10.5	11.2	12.0

Mængden af kunstfibre x er blevet bestemt på forhånd (har fået ganske bestemte værdier), så den er ikke en statistisk variabel. Trækstyrken Y synes derimod udover mængden af kunstfibre også at være påvirket af andre ukendte og ukontrollable “støjfaktorer”. Y må derfor opfattes som en statistisk variabel.

I andre situationer er både X og Y statistiske variable. Dette gælder eksempelvis, hvis man ønsker at undersøge om der er en sammenhæng mellem personers højde Y og vægt X , og derfor for en række personer måler sammenhørende værdier af højde og vægt.

Er den ene variabel som i eksempel 11.1 en (kontrolleret) ikke statistisk variabel, så har man mulighed for hver x -værdi, at foretage gentagne målinger af den statistiske variabel Y (randomiseret). Dette giver mulighed for at beregne et estimat for den spredning der skyldes støjen, hvilket (som det vises i afsnit 11.3.6) kan udnyttes i regressionsanalysen.

11.2. Valg af model, der “bedst mulig” beskriver de fundne data.

Betragtes igen eksempel 11.1 ville man umiddelbart sige, at da man har 15 punktpar, så vil et polynomium af fjortende grad gå igennem alle punkter, og det må derfor være en god model. Dette er imidlertid ikke tilfældet, da Y -værdierne jo er resultater af forsøg der er påvirket af ukontrollable støjkilder. Polynomiets koefficienter vil derfor afspejle disse tilfældige udsving, og det giver derfor en ganske meningsløs model. Endvidere er modellen alt for matematisk kompliceret til at kunne bruges i praksis. Vi søger derfor en enklere model.

11.2.1. Lineær model.

Ved en lineær model forstås her en model der er lineær med hensyn til parametrene.

Et polynomium af 2. grad $y = a + bx + cx^2$ er således lineær i de 3 parametre a , b og c (selv om grafen naturligvis ikke er en ret linie).

Et andet eksempel er $y = a + b \cdot P + c \cdot T$, hvor den afhængige variable afhænger af to uafhængige variable "temperatur" T og "tryk" P . Vi har så en såkaldt "multipel regressionsanalyse".

Som et eksempel på en model der ikke er lineær i parametrene kan nævnes $y = a + bx^c$.

Ved en regressionsanalyse søger man at finde den lineære model, som indeholder det færreste antal koefficienter (parametre), og som samtidig beskriver dataene tilstrækkelig godt.

Vi vil i dette kapitel betragte det ved anvendelserne meget ofte forekomne tilfælde, som kaldes enkelt regressionsanalyse, og hvor modellen er lineær i 2 parametre.

Som eksempler herpå kan nævnes $y = a + bx$ og $\ln y = a + b \cdot \ln x$.

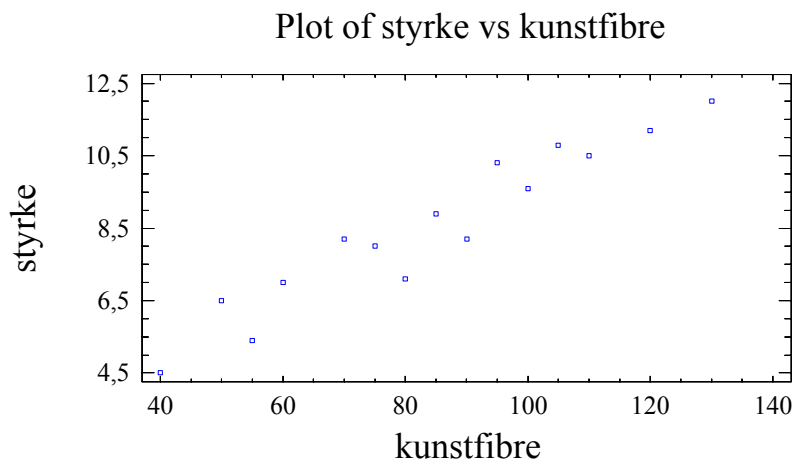
Benyttes et egentligt statistikprogram (som eksempelvis Statgraphics) til beregningsarbejdet, kan metoderne herfra nemt overføres til mere komplicerede regressionsmodeller som:

$$Y = \alpha_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \dots + \beta_p x^p \quad \text{og} \quad Y = \alpha_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4.$$

11.2.2. Regressionslinie og regressionskoefficienter.

Lad os antage, at der foreligger en række målinger af sammenhørende værdier af to størrelser x og y . Som eksempel herpå betragter vi igen dataene i eksempel 11.1.

Afsættes de målte punktpar (x_i, y_i) i et koordinatsystem for at få et overblik over forløbet, fås følgende tegning:



Punkterne ligger ikke eksakt på en ret linie, men det synes rimeligt at antage, at afvigelserne fra en ret linie kan forklares ved den tilfældige variation (støjen).

Derfor er det nærliggende at antage, at **middelværdien** af den statistiske variable Y er en lineær funktion af x af formen $E(Y|x) = \beta_0 + \beta_1 x$. (1)

$E(Y|x)$ skal læses middelværdien af Y for fastholdt x .

Vi vil i det følgende ofte i ligningen (1) kort skrive Y eller μ fremfor $E(Y|x)$.

Ligning (1) kaldes **regressionsligningen** (eller den teoretiske regressionsligning), grafen kaldes for **regressionslinien** (eller den teoretiske regressionslinie), og konstantledet β_0 og hældningskoefficienten β_1 kaldes **regressionskoefficienterne**.

Mens middelværdien af Y ligger på regressionslinien, kan den aktuelle observerede værdi af Y ikke forventes at ligge på den.

For et punktpar (x_i, y_i) gælder derfor, at $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, hvor ε_i kaldes den i 'te residual.

11.2.3. Bestemmelse af regressionslinien ved mindste kvadraters metode.

På basis af en række sammenhørende værdier af x og y bestemmes estimatorer $\tilde{\beta}_0$ og $\tilde{\beta}_1$ for regressionskoefficienterne ved "mindste kvadraters metode".

Det følgende eksempel viser metoden anvendt på et så (urealistisk) lille talekseksempel, at regningerne kan gennemføres uden anvendelse af et egentligt regressionsprogram.. De angivne metoder kan imidlertid umiddelbart generaliseres til mere komplicerede eksempler.

Eksempel 11.2. Bestemmelse af regressionskoefficienter ved mindste kvadraters metode.

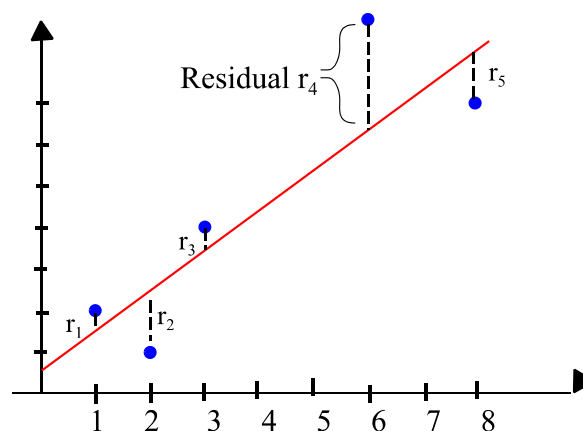
I et medicinsk forsøg måles på en forsøgsperson sammenhørende værdier af en bestemt medicin i blodet (i %) og reaktionstiden.

Resultaterne var:

x	1	2	3	6	8
y	2	1	4	9	7

Bestem ved mindste kvadraters metode et estimat for regressionslinien. ◆

Residual. Ved et punkts residual til en linie forstås den "lodrette" afstand fra punktet til linien (se tegningen).



På figur 11.1 er afsat de 5 punkter, og indtegnet en ret linie.

Figur 11.1 Residualer

Mindste Kvadraters metode. Regressionslinien $\tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x$ bestemmes som den af alle mulige rette linier, for hvilket summen af kvadratet af residualerne til linien er mindst.

I eksempel 11.2 er kvadratsummen $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2$.

Løsningen af dette optimeringsproblem er angivet nedenfor (med petit).

Bestemmelse af regressionsligningen ved mindste kvadraters metode

LØSNING:

I vort tilfælde hvor vi har 5 punkter, indsættes vi disse i ligningen $y = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x$. Dette giver:

$$2 = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \cdot 1, \quad 1 = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \cdot 2, \quad 4 = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \cdot 3, \quad 9 = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \cdot 6, \quad 7 = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \cdot 8.$$

De 5 ligninger med 2 ubekendte $\tilde{\beta}_0$ og $\tilde{\beta}_1$ kan i matrixnotation skrives:

$$Y = X \cdot B \text{ hvor } Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ og } B = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_0 \\ \tilde{\beta}_1 \end{pmatrix}$$

De søgte værdier af $\tilde{\beta}_0$ og $\tilde{\beta}_1$ findes som den løsning til dette overbestemte ligningssystem som giver den mindste RMS - fejl. Løsningen er (se evt. "Matematik for ingeniører" bind 3) bestemt ved normalligningssystemet $X^T \cdot X \cdot B = X^T \cdot Y$.

Da matricen $X^T \cdot X$ er en kvadratisk symmetrisk matrix, som sædvanligvis ved regressionsanalyse har en invers matrix $(X^T \cdot X)^{-1}$, så er løsningen $B = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y$.

I vort talekseksempel er

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 20 & 114 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 23 \\ 126 \end{pmatrix} = \frac{1}{170} \begin{pmatrix} 114 & -20 \\ -20 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 23 \\ 126 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102 \\ 170 \\ 170 \\ 170 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

Regressionsligningen bliver følgelig $y = 0.6 + 1.0x$.



I praksis vil man benytte et færdigt program til bestemmelse af regressionskoefficienterne. Dataene indtastes enten i en lommeregner med regressionsprogram (som TI83) eller i et statistikprogram. I "Statistiske Grundbegreber" er der i appendix A for en række lommeregnere angivet, hvorledes man kan finde et estimat for korrelationskoefficienten r . Samtidig hermed beregner programmerne regressionskoefficienterne.

I ovenstående tilfælde vil man således af disse programmer finde, at $\tilde{\beta}_0 = 0.6$ og $\tilde{\beta}_1 = 1.0$

Liniens ligning bliver altså $\tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x = 0.6 + 1.0x$

11.2.4. Vurdering af om model beskriver data godt.

Det er altid muligt ved mindste kvadraters metode at finde en sådan "mindste kvadraters linie". Det er den af alle rette linier, der har den mindste kvadratsum af residualerne, men det betyder ikke nødvendigvis, at linien så også er en rimelig model, som kan anvendes til at beskrive sammenhængen. Til vurdering (eventuel test) heraf foretages følgende:

a) **Tegning.**

"Mindste kvadraters linie" tegnes linien i et koordinatsystem sammen med punkterne. Hvis den lineære model skal beskrive dataene godt, skal punkterne fordeles sig tilfældigt omkring linien.

b1) **Model med gentagelser.**

Hvis der til hver x -værdi er foretaget gentagne målinger af y har man (jævnfør afsnit 11.3.4) mulighed for at beregne et estimat for den spredning der skyldes "støj". Den benyttes så til at foretage en statistisk test af om modellen kan accepteres ("lack of fit test").

b2) **Model uden gentagelser.**

Er der ingen gentagelser kan man ikke foretage en "lack of fit test". I stedet vil man udregnes **forklaringsgraden** (også kaldet determinationskoefficient) r^2 .

Den angiver et talmæssigt mål for hvor tæt punkterne ligger på linien.

Definitioner:

SAK_{total} = sum af kvadrater af residualerne til den vandrette linie $y = \bar{y}$,

$SAK_{residual}$ = sum af kvadrater på de enkelte punkters afstand fra den fundne regressionslinie

$SAK_{regression}$ = sum af kvadrater af "regressionsliniens afstand" fra det totale gennemsnit \bar{y} .

Endvidere gælder følgende frihedsgradstal:

SAK_{total} har frihedsgradstallet $f_{total} = (\text{totale antal punkter}) - 1$

$SAK_{residual}$ har frihedsgradstallet $f_{residual} = (\text{totale antal punkter}) - 2$

$SAK_{regression}$ har frihedsgradstallet $f_{regression} = (\text{antal koefficienter i ligningen}) - 1$

Der gælder generelt, at $SAK_{total} = SAK_{residual} + SAK_{regression}$, og $f_{total} = f_{residual} + f_{regression}$

Forklaringsgraden r^2 er bestemt ved

$$r^2 = \frac{SAK_{regression}}{SAK_{total}} = \frac{SAK_{total} - SAK_{residual}}{SAK_{total}} = 1 - \frac{SAK_{residual}}{SAK_{total}}$$

Anskuelig forklaring:

Hvis Y er uafhængig af x vil regressionslinien være vandret med ligningen $y = \bar{y}$.

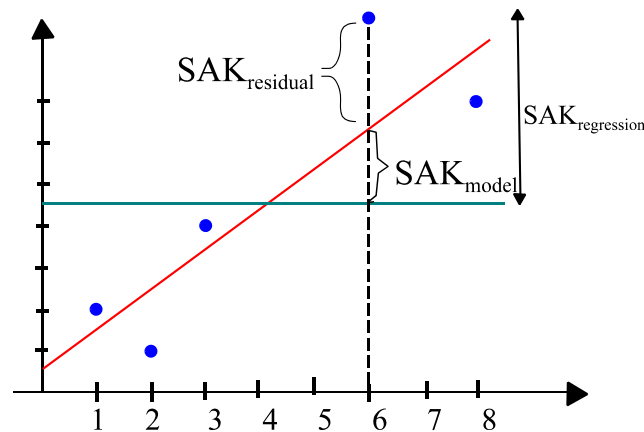
Det betyder igen at $SAK_{residual} \approx SAK_{total}$ og dermed at $r^2 \approx 0$.

Hvis derimod Y er lineært afhængig af x vil regressionslinien have en hældning forskellig fra nul. Det betyder igen at $SAK_{residual} \ll SAK_{total}$, og dermed at $r^2 \approx 1$.

Man siger også, at den fundne model "forklarer" $r^2 \cdot 100\%$ af den "totale variation"

De enkelte SAK-størrelser kan anskueligt ses på figur 11.2.

11.2 Valg af model, der "bedst mulig" beskriver de fundne data



Figur 11.2. SAK - størrelser

Det følgende enkle taleksempel belyser yderligere ovennævnte grundlæggende begreber.

Eksempel 11.3. Beregning af forklaringsgrad (fortsættelse af eksempel 11.2)

Beregn de grundlæggende SAK-størrelser og forklaringsgraden for forsøget i eksempel 11.2 direkte ud fra definitionerne.

LØSNING:

Idet $\bar{y} = \frac{2 + 1 + 4 + 9 + 7}{5} = 4.6$ er de 5 punkters "residualer" til den vandrette linie $y = \bar{y}$.

$$r_1 = 2 - 4.6 = -2.6, r_2 = 1 - 4.6 = -3.6, r_3 = 4 - 4.6 = -0.6, r_4 = 9 - 4.6 = 4.4, r_5 = 7 - 4.6 = 2.4.$$

Vi får $SAK_{\text{total}} = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_5^2 = 2.6^2 + 3.6^2 + 0.6^2 + 4.4^2 + 2.4^2 = 45.2$.

Frihedsgradstallet for SAK_{total} er $f_{\text{total}} = (\text{totale antal punkter}) - 1 = 5 - 1 = 4$

Residualerne til den fundne regressionslinie $y = 0.6 + 1.0x$:

$$r_1 = 2 - (0.6 + 1 \cdot 1) = 0.4, r_2 = 1 - (0.6 + 1 \cdot 2) = -1.6, r_3 = 4 - (0.6 + 1 \cdot 3) = 0.4, \\ r_4 = 9 - (0.6 + 1 \cdot 6) = 2.4, r_5 = 7 - (0.6 + 1 \cdot 8) = 0.4.$$

$$SAK_{\text{residual}} = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_5^2 = 0.4^2 + (-1.6)^2 + 0.4^2 + 2.4^2 + 0.4^2 = 11.2$$

Frihedsgradstallet bliver $f_{\text{residual}} = (\text{totale antal punkter}) - 2 = 5 - 2 = 3$.

(jævnfør, at det overbestemte ligningssystem har 5 ligninger og 2 ubekendte).

Residualerne for regressionslinien $y = 0.6 + 1.0x$'s "afstand" fra det totale gennemsnit $\bar{y} = 4.6$.

$$r_1 = 0.6 + 1 \cdot 1 - 4.6 = -3.0, r_2 = 0.6 + 1 \cdot 2 - 4.6 = -2.0, r_3 = 0.6 + 1 \cdot 3 - 4.6 = -1.0, \\ r_4 = 0.6 + 1 \cdot 6 - 4.6 = 2.0, r_5 = 0.6 + 1 \cdot 8 - 4.6 = 4.0.$$

$$SAK_{\text{regression}} = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_5^2 = (-3.0)^2 + (-2.0)^2 + (-1.0)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 = 34$$

Frihedsgradstallet bliver $f_{\text{regression}} = (\text{antal koefficienter i ligningen}) - 1 = 2 - 1 = 1$

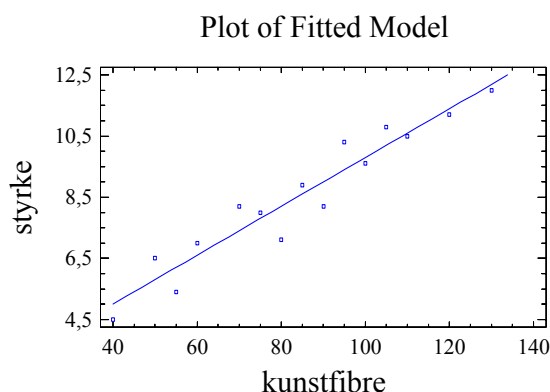
$$\text{Forklaringsgraden } r^2 = \frac{SAK_{\text{regression}}}{SAK_{\text{total}}} = \frac{34}{45.2} = 0.752$$

Den fundne model "forklarer" 75.2% af den totale variation. ◆

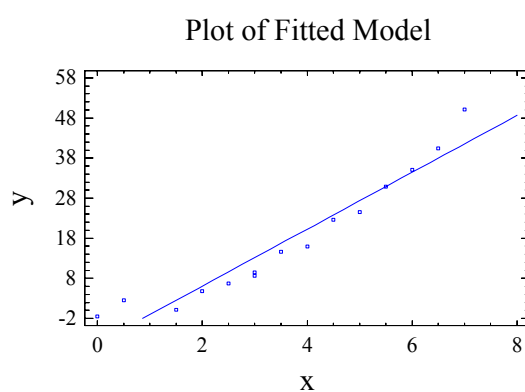
Sædvanligvis finder man, at den fundne model på tilfredsstillende måde beskriver data, hvis forklaringsgraden er på over 70% samtidig med, at tegningen viser, at punkterne fordeler sig tilfældigt omkring den fundne regressionskurve. At man ikke alene kan stole på forklaringsgraden illustreres ved følgende eksempel.

Eksempel 11.4 .Grafisk vurdering af model.

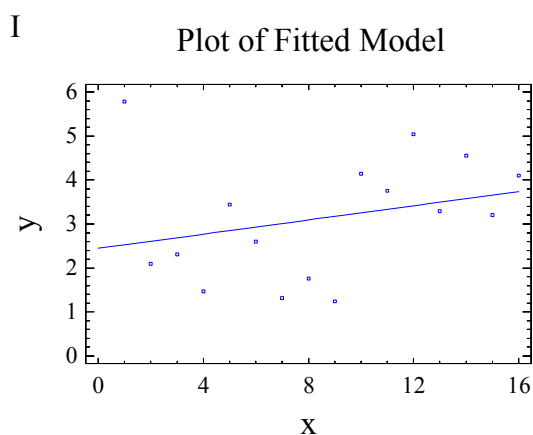
De følgende 4 figurer afspejler forskellige muligheder.



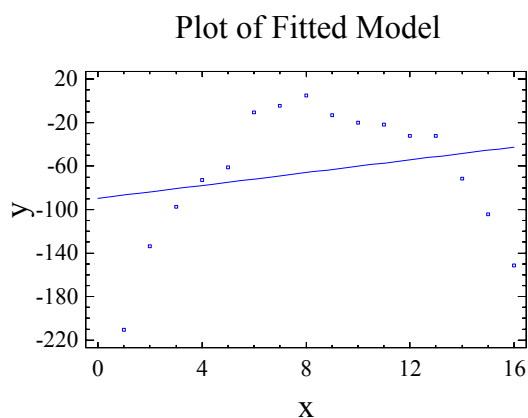
Figur 11.3a: $r = 0.959$ $r^2 = 91.9\%$



Figur 11.3b: $r = 0.962$ $r^2 = 92.6\%$



Figur 11.3c: $r = 0.278$ $r^2 = 7.73\%$



Figur 11.3d: $r = 0.229$ $r^2 = 5.24\%$

figur 11.3a synes den lineære model at kunne beskrive dataene godt, idet punkterne fordeler sig tilfældigt omkring linien, og forklaringsgraden $r^2 = 91.9\%$ er høj.

I figur 11.3b er forklaringsgraden også høj, og punkterne ligger da også tæt ved linien. Imidlertid ligger punkterne ikke tilfældigt omkring linien. Yderpunkterne ligger over og de midterste punkter under linien, så det er næppe rimeligt at anvende en ret linie som model. I stedet kunne man overveje en eksponentialfunktion eller et andengradspolynomium.

I figur 11.3c er der næppe nogen relation mellem x og y . Er x og y uafhængige (ingen relation mellem x og y) vil punkterne fordele sig tilfældigt omkring gennemsnitslinien $y = \bar{y}$, og forklaringsgraden være 0. Vi ser, at regressionslinien er næsten vandret, og forklaringsgraden ringe.

I figur 11.3d er forklaringsgraden også lille, men alligevel må vi antage at der er en sammenhæng mellem x og y . Den er blot ikke lineær, men muligvis en parabel. ◆

c) **Outliers.** Hvis en enkelt eller to målinger afviger kraftigt fra den almindelige tendens kan det skyldes fejlmålinger. Da sådanne punkter i uheldige tilfælde på grund af et stort bidrag til residualsammen kan få regressionslinien til at dreje er det vigtigt at undersøge på en figur om sådanne punkter findes. Det er dog klart, at man ikke blot kan stryge sådanne "ubehagelige" punkter. Det må kun ske, hvis man er sikker på, at punktet skyldes en fejl af en eller anden art ved målingen.

d) **Transformation.** I eksempel 11.4 har vi set tilfælde på at der nok er en sammenhæng mellem x og y , men den ikke kan beskrives ved en ret linie. Man vil så søge efter en anden model som kan beskrive sammenhængen.

Det er velkendt fra matematikken, at graferne for eksponentialfunktioner og potensfunktioner ved en passende logaritmisk transformation kan blive til rette linier.

Eksempelvis vil en eksponentialfunktion $y = ae^{bx}$ ved en logaritmisk transformation

$\ln y = \ln a + bx$ blive lineær hvis man erstatter y - værdierne med $\ln y$.

Statistikprogrammer og også en del lommeregnerne kan let foretage en regressionsanalyse i sådanne tilfælde. I eksempel 11.8 er et sådant eksempel gennemgået.

Sammenhæng mellem korrelationskoefficient og forklaringsgrad.

Hvis både X og Y er normalfordelte statistiske variable (som eksempelvis når man aflæser sammenhørende værdier af højde og vægt for en række personer) angiver korrelationskoefficienten ρ (jævnfør eventuelt "Statistiske Grundbegreber kapitel 10) en størrelse mellem -1 og 1 som kan anvendes til at angive om der er en sammenhæng (korrelation) mellem X og Y . Den er således negativ hvis punkterne har en aftagende tendens. Et estimat for ρ er størrelsen r . Kvadreres den er r^2 den samme som forklaringsgraden.

Hvis kun Y er en statistisk variabel eksisterer ρ ikke, men r kan naturligvis stadig udregnes, men er så ikke estimat for ρ .

Ekstrapolation. Selv om modellen synes på tilfredsstillende måde at beskrive data, så er det jo faktisk kun sikkert indenfor måleområdet. Man skal være yderst forsigtig med at ekstrapolere, dvs. på basis af modellen for x - værdier udenfor måleområdet beregne hvad y er.

11.3 Statistisk analyse af lineær regressionsmodel.

11.3.1 Forudsætninger for regressionsanalyse:

De foregående betragtninger kræver ingen statistiske forudsætninger, idet man jo altid ved mindste kvadraters metode kan beregne regressionskoefficienterne, derefter beregne korrelationskoefficienten, tegne kurver og punkter ind i et koordinatsystem og så herudfra vurdere om modellen er acceptabel.

Ønsker vi at foretage en nøjere statistisk analyse som eksempelvis at teste "om Y er uafhængig af x , dvs. af om $\beta_1 = 0$ ", eller opstille konfidensintervaller for β_1 osv. må observationerne opfylde følgende krav:

Forudsætninger for regressionsanalyse:

1) De enkelte observationer y_i er indbyrdes uafhængige (eksempelvis hvis der udføres flere målinger for samme mængde medicin skal de være indbyrdes uafhængige, ligesom det også skal gælde målinger baseret på forskellige mængder medicin.

Punkt 1 kan opfyldes ved en hensigtsmæssig forsøgsplan. I eksempel 11.2 skal man således være sikker på at den foregående dosis medicin er ude af blodet inden man foretager en ny indsprøjtning, ligesom forsøgene skal være randomiseret. Man kan nok i dette tilfælde betvivle uafhængigheden, hvis man udfører forsøgene på samme person.

2) For hver værdi af x er $Y = E(Y|x) + \varepsilon = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$, hvor residualen ε er en statistisk variabel som forudsættes, at være normalfordelt med middelværdi 0 og konstant varians σ^2 . Da $V(Y) = V(\beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon) = V(\beta_0 + \beta_1 x) + V(\varepsilon) = 0 + \sigma^2$ betyder kravet om konstant varians, at variansen af Y skal være den samme uafhængig af x 's værdi, dvs. der forudsættes varianshomogenitet.

Kravene i punkt 2 er sædvanligvis opfyldt i praksis, da det heldigvis er sådan, at analysen stadig er gyldig, selv om der forekommer mindre afvigelser (testene er "robuste" overfor kravet normalitet og varianshomogenitet). Det er derfor unødvendigt at lave ekstra forsøg m.m. for at kunne kontrollere om kravene er opfyldt.

Er man i tvivl om kravet om normalitet er rimeligt opfyldt, kan man få et indtryk af, om der er alvorlige afvigelser, ved at tegne et normalfordelingsplot (vises i eksempel 11.7)

Har vi for hver x - værdi målt flere y - værdier kan vi teste kravet om varianshomogenitet på ganske samme måde som ved variansanalyse (vises også i eksempel 11.7).

Hvis der er det samme antal gentagelser for hver x - værdi er analysen så robust overfor afvigelser, at man kun behøver at kontrollere det, hvis man har en stærk mistanke til store forskelle.

Er der derimod et forskelligt antal gentagelser, bliver analysen følsom overfor afvigelser.

11.3.2. Test af, om Y er uafhængig af x .

Til hjælp ved analysen udarbejdes en såkaldt "variansanalysetabel", som på overskuelig form samler de væsentligste teststørrelser.

En sådan er angivet nedenfor. Her er N antallet af punkter, og i parentes er angivet de tilsvarende engelske betegnelser : SS = Sum of Squares, df = degree of freedom.

Variation (Source)	SAK (SS)	f (df)	$s^2 = \frac{\text{SAK}}{f}$	$F = \frac{s_{\text{model}}^2}{s_{\text{residual}}^2}$	P - værdi
Regression	$\text{SAK}_{\text{model}}$	1	$s_{\text{model}}^2 = \frac{\text{SAK}_{\text{model}}}{1}$	$F_{\text{model}} = \frac{s_{\text{model}}^2}{s_{\text{residual}}^2}$	$P(Z > F_{\text{model}})$
Residual	$\text{SAK}_{\text{residual}}$	$N - 2$	$s_{\text{residual}}^2 = \frac{\text{SAK}_{\text{residual}}}{N - 2}$		
Total	$\text{SAK}_{\text{total}}$	$N - 1$			

Den statistiske variabel Z er F - fordelt med frihedsgraderne $(f_T, f_N) = (1, N - 2)$.

Vi har i forbindelse med beregningen af forklaringsgrad forklaret betydningen af SAK's størrelser. Lad os antage, at de i afsnit 11.2.2 angivne forudsætninger er opfyldt, og at vi ved de i forrige afsnit beskrevne metoder har fundet, at modellen

$$E(Y|x) = \beta_0 + \beta_1 x. \quad (11.1)$$

gælder.

Dette medfører, at punkterne burde ligge eksakt på en ret linie (og dermed $s_{\text{residual}}^2 = 0$) hvis ikke forsøgsresultaterne havde været påvirket af "støjen".

Et estimat for forsøgsfejls varians σ^2 er derfor s_{residual}^2 .

Hvis Y er uafhængig af x betyder det, at regressionslinien er vandret, eller at hældningskoefficienten β_1 er 0.

Vi får altså: $H_0: Y$ er uafhængig af $x \Leftrightarrow H_0: \text{Regressionslinien er vandret} \Leftrightarrow H_0: \beta_1 = 0$.

Er H_0 sand, så burde (jævnfør definitionen af $\text{SAK}_{\text{regression}}$) $s_{\text{regression}}^2$ være nul. Når det ikke er tilfældet skyldes det, at forsøgsresultaterne har været påvirket af "støjen". Af samme grund som før må derfor også $s_{\text{regression}}^2$ være et estimat for σ^2 .

Vi har følgelig, at hvis H_0 er sand, så er $F_{\text{regression}} = \frac{s_{\text{regression}}^2}{s_{\text{residual}}^2} \approx 1$.

Det kan vises, at hvis nulhypotesen ikke er sand, så vil $F_{\text{regression}} > 1$

Testen bliver følgelig en ensidet F - test.

I eksempel 11.5 vises opstilling og testning på det lille taleksempel 11.2, mens de følgende eksempler viser, hvorledes beregningerne kan foretages på større og mere realistiske eksempler.

Eksempel 11.5. Test af uafhængighed (fortsættelse af eksempel 11.3)

Idet det forudsættes, at forudsætningerne for regressionsanalysen er opfyldt, ønskes testes om data fra forsøget i eksempel 11.2 viser, at Y er uafhængig af x , eller anderledes udtrykt om hældningskoefficienten for linien er nul

LØSNING:

H_0 : Y er uafhængig af x H_0 : Regressionslinien er vandret $\Leftrightarrow H_0: \beta_1 = 0$.

Variansanalysetabel opstilles (SAK-erne er beregnet i eksempel 11.3):

Variation (Source)	SAK (SS)	f (df)	$s^2 = \frac{SAK}{f}$	$F = \frac{s_{model}^2}{s_{residua}^2}$	P - værdi
Regression	34.0	1	$\frac{34.0}{1} = 34.0$	$\frac{34.0}{3.7333} = 9.11$	0.0569
Residual	11.2	3	$\frac{11.2}{3} = 3.7333$		
Total	45.2	4			

Da $F_{0.95}(1,3) = 10.11 > F = 9.11$ (eller P - værdi = $P(F > 9.11) = 0.0569$) har vi en accept af nulhypotesen, dvs. vi kan ikke afvise, at y er uafhængig af x (at hældningskoefficienten er 0).

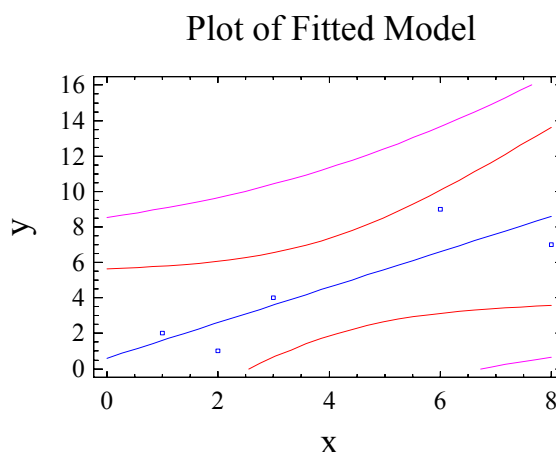
Konfidensintervaller og prædiktionsintervaller.

Et led i analysen kan være, at udregne et 95% konfidensinterval for β_1 . Endvidere vil man ofte være interesseret i en speciel værdi for x , for hvilken man ønsker beregnet såvel den tilsvarende “forventede” y - værdi (predicted value”) som et 95% -konfidensinterval for middelværdien $\tilde{\mu}$ og et 95% prædiktionsinterval for én ny observation.

I appendix 11.1 er angivet formler for bl.a. disse konfidensintervaller.

På figur 11.4 er her tegnet 95% konfidensintervaller for middelværdierne (de inderste buede kurver), og 95% prædiktionsintervaller (de yderste to kurver).

Man ser tydeligt, at konfidensintervallerne er smallest omkring “centrum” (\bar{x}, \bar{y}) .



Figur 11.4. Konfidensintervaller og prædiktionsintervaller

11.3.3. Enkelt regressionsanalyse med én y - værdi for hver x værdi.

For større datamaterialer er det alt for tidskrævende at foretage beregningerne manuelt. Derfor vil vi i dette afsnit forudsætte, at man enten har en lommeregner med regressionsprogram (afsnit 11.3.1) eller et regneark som Excel, der "automatisk" udregne de relevante størrelser, og man skal så "blot" tolke udskriften. Alle egentlige statistikprogrammer kan naturligvis endnu simplere udregne de nødvendige beregninger.

11.3.3.1. Regressionsanalyse beregnet ved hjælp af lommeregner med Regressionsprogram.

De forskellige typer lommeregnere har mere eller mindre avancerede regressionsprogrammer. Formlerne i appendix 11.1 kræver dog ikke andet, end hvad selv et meget enkelt regressionsprogram har.

Eksempel 11.6 Regressionsanalyse regnet på lommeregner(uden gentagelser).

I et spinderi udtrykkes garnets kvalitet bl.a. ved en norm for den forventede trækstyrke. Kvaliteten anses således for at være i orden, hvis middeltrækstyrken mindst er lig med 10 måleenheder (me). Ved uldgarn opfylder garnets naturlige trækstyrke ikke det nævnte kvalitetskrav, hvorfor der tilsættes en vis mængde kunstfibre, hvilket forøger trækstyrken. Herved sker der dog det, at andre kvalitetsegenskaber, såsom elasticitet og isoleringsevne, forringes. Man har eksperimenteret med forskellige tilsatte mængder kunstfibre x og registreret garnets trækstyrke y ved disse forskellige mængder. Herved fremkom følgende observationsmateriale:

Mængde x (i gram) af kunstfibre pr kg uld	40	50	55	60	70	75	80	85	90	95	100	105	110	120	130
Trækstyrke (me): Y	4.5	6.5	5.4	7.0	8.2	8.0	7.1	8.9	8.2	10.3	9.6	10.8	10.5	11.2	12.0

- 1) Opskriv regressionsligningen.
- 2) Beregn forklaringsgraden r^2 og anvend denne samt en figur på lommeregnerens grafiske display (eller figur 11.3a) til vurdering af modellen.
Der antages i det følgende at regressionsforudsætningerne er opfyldt.
- 3) Opskriv en variansanalysetabel, og test om Y er uafhængig af x .
- 4) Angiv et konfidensinterval for hældningskoefficienten β_1 .
- 5) Opstil et 95% konfidensinterval for middeltrækstyrken svarende til x - værdien 100.
- 6) Opstil et 95% prædeterminationsinterval for middeltrækstyrken svarende til x - værdien 100.

LØSNING:

De nødvendige formler findes i appendix 11.1.

De 15 punktpar indtastes i en lommeregner, og et regressionsprogram aktiveres.

Blandt de beregnede størrelser findes: $\bar{x} = 84.333$ og $s_x = 26.38$, $\bar{y} = 8.5467$ og $s_y = 2.198$.

Endvidere findes estimater for regressionskoefficienter: $\tilde{\beta}_0 = 1.8087$ og $\tilde{\beta}_1 = 0.0799$ og korrelationskoefficienten $r = 0.958802$.

- 1) Den estimerede regressionsligningen bliver $y = 0.0799x + 1.8087$
- 2) Forklaringsgraden er $r^2 = 0.958802^2 = \underline{0.919301}$.

Da punkterne på figuren fordeler sig tilfældigt omkring linien og der ikke er enkelte punkter (outliers) der afviger voldsomt fra linien, og forklaringsgraden samtidig er tæt på 1, så er den lineære model acceptabel.

11. Regressionsanalyse

3) Man udregner $SAK_{\text{total}} = (N - 1) \cdot s_y^2 = (15 - 1) \cdot 26.38^2 = 67.657$,

$$SAK_{\text{regression}} = r^2 \cdot SAK_{\text{total}} = 0.9588^2 \cdot 67.657 = 62.197 \text{ og}$$

$$SAK_{\text{residual}} = SAK_{\text{total}} - SAK_{\text{regression}} = 67.657 - 62.197 = 5.4599$$

Variansanalysetabel udfyldes:

Variation (Source)	SAK (SS)	f (df)	$s^2 = \frac{SAK}{f}$	F
Regression	62.1974	1	62.1974	148.09
Residual	5.4599	13	0.4200	
Total	67.657	14		

$H_0: y$ er uafhængig af $x \Leftrightarrow H_0: \text{Model} = 0 \Leftrightarrow H_0: \beta_1 = 0$.

H_0 forkastes (stærkt), da $F_{\text{regression}} = 148.09 > F_{0.999}(1,13) = 17.8$

(eller P -værdi = $P(Z < 148.09) = 0.00001 < 0.001$)

Y er ikke uafhængig af x .

$$4) \quad SAK_x = \frac{SAK_{\text{regression}}}{(\tilde{\beta}_1)^2} = \frac{62.197}{0.0790^2} = 9743.40 \quad \tilde{V}(\tilde{\beta}_1) = \frac{s_{\text{residual}}^2}{SAK_x} = \frac{0.4200}{9743.40} = 0.000043,$$

Konfidensinterval for β_1 :

$$\tilde{\beta}_1 \pm t_{0.975}(15 - 2) \cdot \sqrt{\tilde{V}(\tilde{\beta}_1)} = 0.0799 \pm 2.16 \cdot 0.006565 = 0.0799 \pm 0.01418$$

$$\underline{\underline{[0.0657; 0.0941]}}$$

5) Til x -værdien 100 er et estimat for middelværdien $\tilde{\mu} = 0.0799 \cdot 100 + 1.8087 = 9.80$

$$\tilde{V}(\tilde{\mu}) = s_{\text{residual}}^2 \cdot \left(\frac{1}{N} + \frac{(x - \bar{x})^2}{SAK_x} \right) = 0.4200 \left(\frac{1}{15} + \frac{(100 - 84.33)^2}{9743.40} \right) = 0.0386.$$

Konfidensinterval for $\tilde{\mu}$:

$$\tilde{\mu} \pm t_{0.975}(15 - 2) \cdot \sqrt{\tilde{V}(\tilde{\mu})} = 9.80 \pm 2.16 \cdot 0.1964 = 9.80 \pm 0.4243.$$

$$\underline{\underline{[9.38; 10.22]}}$$

6) Prædiktionsinterval for 1 ny observation svarende til x -værdien 100.

$$Q = s_{\text{residual}}^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{N} + \frac{(x - \bar{x})^2}{SAK_x} \right) = 0.4200 \left(1 + \frac{1}{15} + \frac{(100 - 84.33)^2}{9743.40} \right) = 0.4586.$$

$$\tilde{\mu} \pm t_{0.975}(15 - 2) \cdot \sqrt{Q} = 9.80 \pm 2.16 \cdot 0.6772 = 9.80 \pm 1.463.$$

$$\underline{\underline{[8.34; 11.26]}}$$



11.3.3.2. Regressionsanalyse beregnet ved Excel.

De nødvendige Excel - ordrer findes i appendix B

Eksempel 11.7. Regressionsanalyse regnet med Excel (uden gentagelser).

Opgaven er den samme som i eksempel 11.6, idet der ønskes svar på følgende spørgsmål:

- 1) Opskriv regressionsligningen.
 - 2) Vurdér modellen ved at se på forklaringsgraden r^2 , og på en figur med punkterne indtegnet. undersøg endvidere om der kunne tænkes at være outliers.
 - 3) Giv en grafisk vurdering af om kravet normalitet er opfyldt ved hjælp af et normalfordelingsplot.
- Det antages i det følgende, at regressionsforudsætningerne er opfyldt.
- 4) Test om Y er uafhængig af x .
 - 5) Angiv et konfidensinterval for hældningskoefficienten β_1 .
 - 6) Opstil et 95% konfidensinterval for middeltrækstyrken svarende til x - værdien 100.
 - 7) Opstil et 95% prædeterminationsinterval for middeltrækstyrken svarende til x - værdien 100.

LØSNING:

Data indtastes på sædvanlig måde i to søjler.

x	y
40	4,5
50	6,5
55	5,4
60	7
70	8,2
75	8
80	7,1
85	8,9
90	8,2
95	10,3
100	9,6
105	10,8
110	10,5
120	11,2
130	12

Vælg "Funktioner", Dataanalyse, Regression

Den fremkomne tabel udfyldes. Sædvanligvis er det ikke nødvendigt at udfylde alle felter, men for at kunne forstå de fremkomne udskrifter er dette sket her. Udskrifterne vises dog i en lidt anden rækkefølge.

1) Regressionsligning:

Udskrift 1:

	Koeffici- enter	Standard- fejl	t-stat	P-værdi	Nedre 95%	Øvre 95%	Nedre 95,0%	Øvre 95,0%
Skæring	1,808655	0,578421	3,126883	0,008021	0,559052	3,058258	0,559052	3,058258
x	0,079897	0,006565	12,1693	1,77E-08	0,065714	0,094081	0,065714	0,094081

Af udskriften ved "Skæring" aflæses $\tilde{\beta}_0 = 1.80866$ og ved "x" $\tilde{\beta}_1 = 0.0798$.

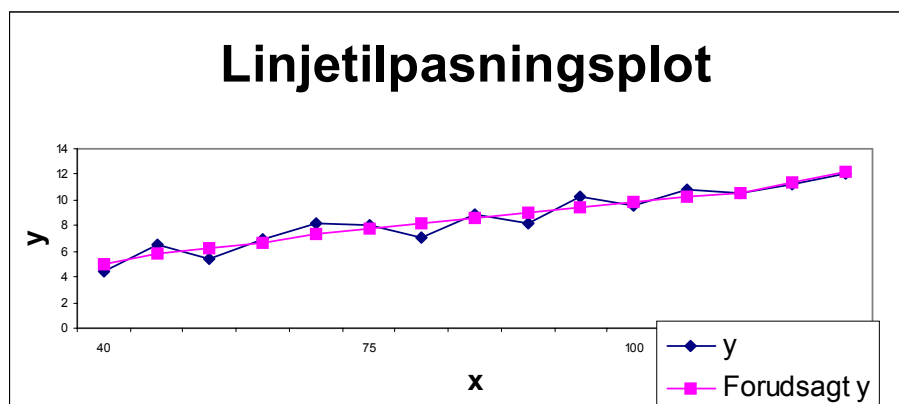
Regressionsligningen bliver derfor $y = 1.80866 + 0.07989 \cdot x$

2) Vurdering af model:

RESUMEOUTPUT	
Regressionsstatistik	
Multipl R	0,958802
R-kvadreret	0,919301
Justeret R-kvadreret	0,913093
Standardfejl	0,648068
Observationer	15

Af udskriften ses, at forklaringsgraden “R-kvadreret” er 0.9193. , hvilket er tilfredsstillende, da modellen altså “forklarer” 91,93% af variationen.

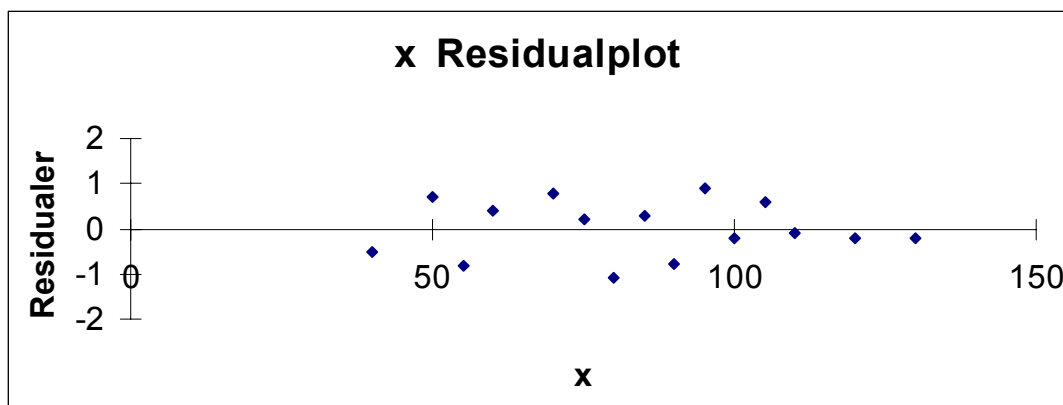
Nedenstående plot (som er blevet redigeret i forhold til det oprindelige tegning i Excel) viser, at punkterne fordeler sig tilfældigt omkring linien. Endvidere synes der ikke at være nogen “outliers” (punkter der afviger så kraftigt fra det generelle billede, at man kunne frygte de var fejlmålinger)



Residualplot:

Hvis modellen indeholder flere uafhængige variable (eksempelvis udbyttets afhængighed af temperatur og tryk) må man i stedet beregne residualerne og tegne et “residualplot” . Denne metode til at vurdere modellen er derfor mere generel.

Af nedenstående plot af residualerne, ses, at de fordeler sig tilfældigt omkring “0 - linien”.



Outliers:

Da undersøgelse af outliers er vigtig, har Excel endvidere beregnet såkaldte "Standardresidualer", hvor man har "normeret" residualerne hvorved der tages hensyn til, at prædiktionsintervallerne er smallest tæt ved "midtpunktet". Ligger en standardresidual numerisk udenfor 2 enheder er der grund til at undersøge om den dertil svarende værdi skulle være en "outliers".

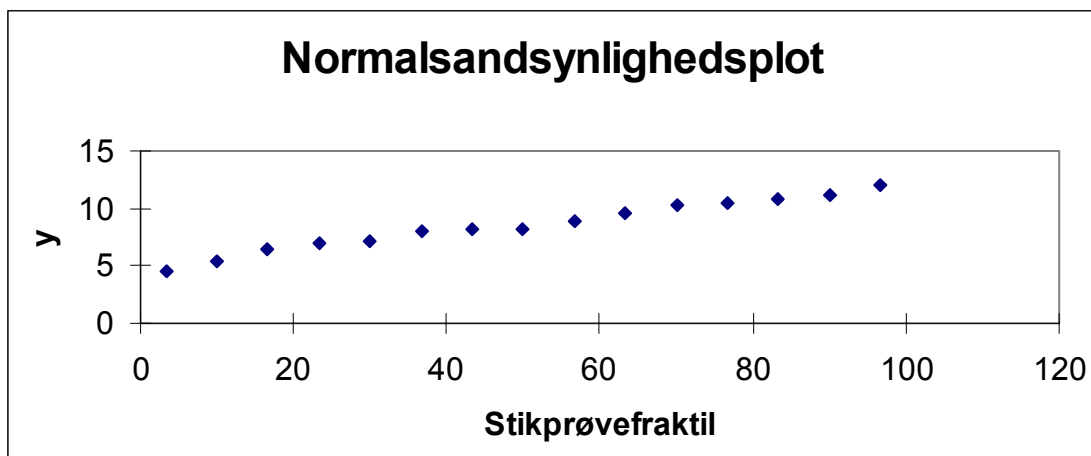
RESIDUALOUTPUT			SANDSYNLIGHEDSOUTPUT			
Observation	Forudsagt y	Residualer	Standardresidualer	Fraktil	y	
1	5,00455	-0,50455	-0,80793	3,333333	4,5	
2	5,803524	0,696476	1,115265	10	5,4	
3	6,203011	-0,80301	-1,28586	16,66667	6,5	
4	6,602497	0,397503	0,63652	23,33333	7	
5	7,401471	0,798529	1,278682	30	7,1	
6	7,800958	0,199042	0,318725	36,66667	8	
7	8,200445	-1,10044	-1,76214	43,33333	8,2	
8	8,599932	0,300068	0,480499	50	8,2	
9	8,999418	-0,79942	-1,28011	56,66667	8,9	
10	9,398905	0,901095	1,44292	63,33333	9,6	
11	9,798392	-0,19839	-0,31768	70	10,3	
12	10,19788	0,602121	0,964174	76,66667	10,5	
13	10,59737	-0,09737	-0,15591	83,33333	10,8	
14	11,39634	-0,19634	-0,3144	90	11,2	
15	12,19531	-0,19531	-0,31275	96,66667	12	

Da residualerne her ligger indenfor 2 enheder på hver side, ses igen at der ikke er nogen outliers.

Modellen synes på tilfredstillende måde at beskrive data.

3) Normalfordelingsplot:

Forudsætningerne om uafhængige målinger og varianshomogenitet antages opfyldt. For at få et anskueligt billede af om residualerne er rimeligt normalfordelte afsættes residualerne i et koordinatsystem, hvor skalaen på y-aksen er normalfordelt. Så bør residualpunkterne tilnærmelsesvis ligge på en ret linie.



Da residualpunkterne på ovenstående normalfordelingsplot tilnærmelsesvis ligger på en ret linie antages forudsætningen om normalitet at være opfyldt.

4) Test nulhypotesen H_0 : Y er uafhængig af x

Ud for x i udskrift 1 ses, at P -værdi = $1.7 \cdot 10^{-8} < 0.05$, dvs.

H_0 forkastes Y er ikke uafhængig af x .

Man kunne i stedet opskrive en variansanalysetabel:

ANOVA					
	fg	SK	MK	F	Signifikans F
Regression	1	62,19744	62,19744	148,0919	1,77E-08
Residual	13	5,459897	0,419992		
I alt	14	67,65733			

Det ses, ud for "Regression", at $F = 148.09$ og at P -value = $1.7 \cdot 10^{-8}$, dvs. samme resultat.

5) Konfidensinterval for $\tilde{\beta}$:

I udskrift 1 ud for x under "Nedre 95%" og "Øvre 95%" aflæses [0.0657; 0.0941]

I stedet kunne man benytte formelen for konfidensinterval:

Ud for " x " under "Standardfejl" står $\sqrt{\tilde{V}(\tilde{\beta}_1)} = 0.006565$.

$$\tilde{\beta}_1 \pm t_{0,975}(15-2) \cdot \sqrt{\tilde{V}(\tilde{\beta}_1)} = 0.0799 \pm 2.16 \cdot 0.006565 = 0.0799 \pm 0.01418$$

$$\underline{[0.0657; 0.0941]}$$

5) 95% konfidensinterval for middelværdien svarende til x -værdien 100.

Excel har desværre ikke beregnet dette, så vi må benytte formelen til beregningen.

Konfidensinterval for $\tilde{\mu}$: $\tilde{\mu} \pm t_{0,975}(15-2) \cdot \sqrt{\tilde{V}(\tilde{\mu})}$ hvor $\tilde{V}(\tilde{\mu}) = s_{residual}^2 \cdot \left(\frac{1}{N} + \frac{(x-\bar{x})^2}{SAK_x} \right)$

Til x -værdien 100 er et estimat for middelværdien $\tilde{\mu}_{100} = 0.0799 \cdot 100 + 1.8087 = 9.80$

Kunne også beregnes ved ordren $\tilde{\mu}_{100} = \text{TENDENS}(B2:B16;A2:A16;100) = 9,798392$

$s_{residual}^2 = 0.419992$ (ses af ANOVA-Tabel), $N = 15$ (antal punkter),

$SAK_x = \frac{SAK_{model}}{\beta_1^2}$, hvor $SAK_{model} = 62.19744$ (ses ud for Regression i ANOVA-tabel)

$$\text{og } \beta_1 = 0.079897. \quad SAK_x = \frac{62.19744}{0.079897^2} = 9743.42$$

Endelig kan \bar{x} beregnes som gennemsnittet af x -værdierne. $\bar{x} = \text{MIDDEL}(A2:A16) = 84,33333$

$$\tilde{V}(\tilde{\mu}) = s_{residual}^2 \cdot \left(\frac{1}{N} + \frac{(x-\bar{x})^2}{SAK_x} \right) = 0.4200 \left(\frac{1}{15} + \frac{(100-84.33)^2}{9743.40} \right) = 0.0386.$$

Konfidensinterval for $\tilde{\mu}$: $\tilde{\mu} \pm t_{0,975}(15-2) \cdot \sqrt{\tilde{V}(\tilde{\mu})}$ hvor $\tilde{V}(\tilde{\mu}) = s_{residual}^2 \cdot \left(\frac{1}{N} + \frac{(x-\bar{x})^2}{SAK_x} \right)$

Her er $s_{residual}^2 = 0.419992$ (ses af ANOVA-Tabel), $N = 15$ (antal punkter),

$$SAK_x = \frac{SAK_{model}}{\beta_1^2}, \text{ hvor } SAK_{model} = 62.19744 \text{ (ses ud for Regression i ANOVA-tabel)}$$

$$\text{og } \beta_1 = 0.079897. \quad SAK_x = \frac{62.19744}{0.079897^2} = 9743.42$$

Endelig kan \bar{x} beregnes som gennemsnittet af x - værdierne. $\bar{x} = \text{MIDDEL}(A2:A16) = 84,3333$

$$\tilde{V}(\tilde{\mu}) = s_{residual}^2 \cdot \left(\frac{1}{N} + \frac{(x - \bar{x})^2}{SAK_x} \right) = 0.4200 \left(\frac{1}{15} + \frac{(100 - 84.33)^2}{9743.40} \right) = 0.0386$$

Man kan naturligvis slå disse regninger sammen, idet mellemresultaterne jo står i bestemte celler: $\tilde{V}(\tilde{\mu}) = \text{G13} * (1/15 + (100 - \text{MIDDEL}(A2:A16))^2 / (\text{F12}/\text{E18}^2)) = 0,03858$

$$\tilde{\mu} \pm t_{0,975}(15 - 2) \cdot \sqrt{\tilde{V}(\tilde{\mu})} = 9.80 \pm 2.16 \cdot 0.1964 = 9.80 \pm 0.4243.$$

$$\underline{\underline{[9.38;10.22]}}$$

6) Prædiktionsinterval for 1 ny observation svarende til x - værdien 100.

$$Q = s_{residual}^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{N} + \frac{(x - \bar{x})^2}{SAK_x} \right) = 0.4200 \left(1 + \frac{1}{15} + \frac{(100 - 84.33)^2}{9743.40} \right) = 0.4586.$$

$$\tilde{\mu} \pm t_{0,975}(15 - 2) \cdot \sqrt{Q} = 9.80 \pm 2.16 \cdot 0.6772 = 9.80 \pm 1.463.$$

$$\underline{\underline{[8.34;11.26]}}$$



11.3.4. Enkelt Regressionsanalyse med flere y - værdier for hver x - værdi.

Hvis man selv fastlægger sine x - niveauer, er det ofte muligt for hver x - værdi, at foretage flere målinger af y - værdien. Vi siger kort at analysen er “med gentagelser”.

Dette er således tilfældet i følgende eksempel:

Eksempel 11.8 (F85) (regressionsanalyse med gentagelser)

Metalpladers overflader oxideres i en ovn ved 200° C. Med henblik på en undersøgelse af sammenhængen mellem det oxiderede lags tykkelse y (i ångstrøm) og tiden t (i minutter) foretog man følgende målinger:

Tiden t	20	30	40	60	70	90	100	120	150	180
Tykkelse	4.2	7.4	8.8	13.6	13.1	14.9	20.0	23.1	27.5	32.9
y	4.9	6.9	8.2	12.0	12.4	16.8	21.2	25.2	25.1	32.4



Fordelen herved er, at man nu kan få et estimat for forsøgsfejls spredning (“støjen”), som kan anvendes til at teste, om den lineære model kan accepteres, når man tager støjen i betragtning. Endvidere kan man, hvis man finder det nødvendigt, teste om der er varianshomogenitet.

Test af model.

For hver x -værdi beregnes gennemsnittet af de dertil hørende y -værdier. Disse “gennemsnitspunkter” bør ligge tæt på linien hvis modellen er god. Hvis modellen er den rigtige, så er den eneste grund til at “gennemsnitspunkterne ikke ligger eksakt på linien, at der er støj.

Vi kan derfor beregne et estimat (kaldet $s_{\text{lack of fit}}^2$) for variansen af denne støj ud fra de afvigelser som gennemsnitspunkterne har.

Da vi samtidig ud fra gentagelserne kan beregne et andet estimat for støjen (kaldet s_0^2), har vi

mulighed for at teste de to varianser mod hinanden, ved en sædvanlig F -test $F_{\text{lackoffit}} = \frac{s_{\text{lack of fit}}^2}{s_0^2}$

Får vi her en forkastelse, kan “gennemsnitspunkternes” afvigelser fra linien ikke forklares alene ved støjen, og vi må derfor forkaste modellen.

Vi vil belyse dette ved at regne det følgende eksempel 11.8 både med anvendelse af lommeregner og med anvendelse af Excel.

Test af varianshomogenitet.

Som tidligere nævnt, er analysen robust overfor afvigelser fra kravet om varianshomogenitet (konstant varians σ^2), hvis der er lige mange gentagelser (som i dette forsøg). Man vil derfor kun foretage en vurdering af dette krav, hvis man ud fra forsøgets natur mener, at varianserne kan tænkes at være voldsomt forskellige. Har man ingen gentagelser, må man i alle tilfælde basere sig på sin viden om, at “det er overvejende sandsynligt at der er nogenlunde samme varians”.

Vi vil derfor sædvanligvis i eksempler og øvelser undlade at foretage en testning.

Er der ikke lige mange gentagelser, så bør man dog foretage en nøjere undersøgelse af kravet, da analysen så er følsom overfor afvigelser.

For at demonstrere hvorledes en sådan testning kan foregå, vil den dog blive udført i de følgende to eksempler.

Hvis man har et statistikprogram er en enkel måde til at vurdere varianshomogenitet, at betragte et residualplot:

Da vi i eksempel 11.6 har 2 gentagelser i hver af de 6 celler, ligger residualerne to og to symmetrisk omkring 0 - linien. På et residualplot kan vi derfor se om afstanden mellem disse 10 punktpar er nogenlunde den samme. Hvis det er tilfældet kan man derfor godt tillade sig at konkludere, at der er en rimelig varianshomogenitet.

En anden enkel måde er at foretage “en simplificeret F -test” mellem den største og mindste varians. Får vi en accept herved går vi ud fra der er varianshomogenitet.

Får vi en forkastelse, bør man gå over til de mere avancerede test, som blev nævnt under variansanalyse, og kan findes i appendix 11.1

11.3.4.1. Regressionsanalyse beregnet med lommeregner med Regressionsprogram.

Eksempel 11.9. Regressionsanalyse regnet på lommeregner (med gentagelser)

Metalpladers overflader oxideres i en ovn ved 200°C . Med henblik på en undersøgelse af sammenhængen mellem det oxiderede lags tykkelse y (i ångstrøm) og tiden t (i minutter) foretog man følgende målinger:

Tiden t	20	30	40	60	70	90	100	120	150	180
Tykkelse y	4.2	7.4	8.8	13.6	13.1	14.9	20.0	23.1	27.5	32.9
	4.9	6.9	8.2	12.0	12.4	16.8	21.2	25.2	25.1	32.4

Det antages, at målingerne y er værdier af uafhængige normalfordelte variable med samme varians.

- 1) Foretag en testning af forudsætningen om varianshomogenitet.
- 2) Det formodes på forhånd, at der er en lineær sammenhæng mellem x og y .
Test denne formodning, og bestem i bekræftende fald ligningen for den empiriske regressionslinie.

Det antages i det følgende, at der er en lineær sammenhæng mellem x og y .

- 3) I litteraturen vedrørende dette problem påstås, at hældningskoefficienten β_1 er 0.15

Test om dette på et signifikansniveau på 5% kan være sandt.

- 4) Angiv et 95% konfidensinterval for middelværdien af tykkelsen y , når $t = 100$ minutter.

LØSNING:

De nødvendige formler findes i appendix 11.3.

- 1) test af nulhypotesen $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$

Estimater for varianserne beregnes: (i praksis er det hurtigst løbende at lægge varianserne sammen i et af regnemaskinens lagre.)

Tiden t	20	30	40	60	70	90	100	120	150	180
Tykkelse y	4.2	7.4	8.8	13.6	13.1	14.9	20.0	23.1	27.5	32.9
	4.9	6.9	8.2	12.0	12.4	16.8	21.2	25.2	25.1	32.4
s^2	0.245	0.125	0.180	1.280	0.245	1.805	0.720	2.205	2.880	0.125

$$\text{Da } F = \frac{s_{\max}^2}{s_{\min}^2} = \frac{2.880}{0.125} = 23.04 < F_{0.975}(1,1) = 647.8 \text{ (eller } P\text{-værdi} = P(F > 23.04) = 0.1718 > 0.025)$$

accepteres nulhypotesen, dvs. vi vil i det følgende antage, at forskellene i varians ikke er så store, at det ødelægger analysen.

$$\text{Vi får } s_0^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_k^2}{k} = \frac{9.81}{10} = 0.981.$$

- 2) De $N = n \cdot k = 2 \cdot 10 = 20$ punktpar (x_i, y_{ij}) indtastes i lommeregner.

Regressionsprogram aktiveres, og blandt beregnede størrelser findes:

Estimater for: Regressionskoefficienter: $\tilde{\beta}_0 = 1.654$ og $\tilde{\beta}_1 = 0.1730$,

korrelationskoefficient $r = 0.9892$, gennemsnit $\bar{x} = 86.0$ og spredning $s_y = 8.9412$.

11. Regressionsanalyse

Man udregner $SAK_{\text{total}} = (N - 1) \cdot s_y^2 = 19 \cdot 8.9412^2 = 1518.982$,

$$SAK_{\text{regression}} = r^2 \cdot SAK_{\text{total}} = 0.9892^2 \cdot 1518.982 = 1486.44,$$

$$SAK_0 = (N - k) \cdot s_0^2 = (20 - 10) \cdot 0.981 = 9.81$$

$$SAK_{\text{lack of fit}} = SAK_{\text{total}} - SAK_{\text{model}} - SAK_0 = 22.732$$

Udfylder variansanalysetabel:

Variation (Source)	SAK (SS)	f (df)	$s^2 = \frac{SAK}{f}$	F
Regression	1486.44	1	1486.44	
Lack of fit	22.732	8	2.8415	$F_{\text{lack of fit}} = \frac{2.8410}{0.981} = 2.90$
Gentagelser	9.81	10	0.981	
Total	1518.98	19		

H_0 : Lineær model gælder $\Leftrightarrow H_0: (x_i, \mu_i)$ ligger på en ret linie

Da $F_{\text{lack of fit}} = 2.90 < F_{0.95}(8,10) = 3.07$ (eller P - værdi = $P(F > 2.90) = 0.05891 > 0.05$)
accepteres H_0 , dvs. den lineære model gælder.

Vi er dog så tæt på forkastelse, at en nærmere undersøgelse kan være rimelig.

Den empiriske regressionslinie bliver: $y = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \cdot t = 1.654 + 0.1730 \cdot t$.

3) $H_0: \beta_1 = 0.15$

Beregner hjælpestørrelserne $SAK_x = \frac{SAK_{\text{regression}}}{(\tilde{\beta}_1)^2} = \frac{1486.44}{0.1730^2} = 49665.54$,

$$s_{\text{pool}}^2 = \frac{SAK_0 + SAK_{\text{lack of fit}}}{N - 2} = \frac{9.81 + 22.7328}{18} = 1.8079,$$

$$\tilde{V}(\tilde{\beta}_1) = \frac{s_{\text{pool}}^2}{SAK_x} = \frac{1.8079}{49665.54} = 0.000036, \quad t = \frac{\beta_1 - a}{\sqrt{\tilde{V}(\tilde{\beta}_1)}} = \frac{0.1730 - 0.15}{\sqrt{0.000036}} = 3.81$$

H_0 forkastes, da $t = 3.81 > t_{0.975}(17) = 2.11$, dvs.

data giver ikke den i litteraturen angivne hældningskoefficient..

4) 95% konfidensinterval for middelværdien af tykkelsen y , når $t = 100$ minutter.

Beregner hjælpestørrelserne $\tilde{\mu} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x = 1.654 + 0.1730 \cdot 100 = 18.95$,

$$\tilde{V}(\tilde{\mu}) = s_{\text{pool}}^2 \cdot \left(\frac{1}{N} + \frac{(x - \bar{x})^2}{SAK_x} \right) = 1.8079 \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{(100 - 86)^2}{49665.54} \right) = 0.0975,$$

Konfidensinterval for μ :

$$\left[\tilde{\mu} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) \cdot \sqrt{\tilde{V}(\tilde{\mu})}; \tilde{\mu} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) \cdot \sqrt{\tilde{V}(\tilde{\mu})} \right] = [18.95 - 2.10 \cdot 0.3123; 18.95 + 2.10 \cdot 0.3123]$$

$$= \underline{\underline{[18.29; 19.61]}}$$

11.3.4.2. Regressionsanalyse regnet med Excel.

Eksempel 11.10. Regressionsanalyse regnet med Excel (med gentagelser).

Opgaven er den samme som i eksempel 11.9.

LØSNING:

1) Undersøgelse af varianshomogenitet.

Excell har intet særligt program hertil, så det kan kun ske som angivet i eksempel 11.9

2) Vi vil teste H_0 : Lineær model gælder $\Leftrightarrow H_0: (x_i, \mu_i)$ ligger på en ret linie

Data indtastes søjlevis

20	4,2
20	4,9
30	7,4
30	6,9
40	8,8
40	8,2
60	13,6
60	12
70	13,1
70	12,4
90	14,9
90	16,8
100	20
100	21,2
120	23,1
120	25,2
150	27,5
150	25,1
180	32,9
180	32,4

Opstilling af regressionsanalysetabel

ANOVA

	fg	SK	MK	F	Signifikans F
Regression	1	1486,444	1486,444	822,2924	1,78E-16
Residual	18	32,53829	1,807683		
I alt	19	1518,982			

Da vi har gentagelser ignoreres den fremkomne udskrift i første omgang.

For at få et estimat for "støjen" foretages nu en såkaldt "ensidet variansanalyse" som er nærmere beskrevet i kapitel 12, og hvortil ordrene kan ses i appendix A.

For at kunne dette må data (desværre) omordnes til "rækker"

11. Regressionsanalyse

20	4,2	4,9
30	7,4	6,9
40	8,8	8,2
60	13,6	12
70	13,1	12,4
90	14,9	16,8
100	20	21,2
120	23,1	25,2
150	27,5	25,1
180	32,9	32,4

Vælg “Funktioner”, “Dataanalyse”, “ANAVA: enkelt faktor”

Den fremkomne tabel udfyldes

- 1) Inputområde udfyldes så hele området er med
- 2) Markér “rækker” (da vi har arrangeret data i rækker)
- 3) Markér “Etiketter i første række” da første række jo er “variabelnavne”
- 4) I “Outputområdet” skrives øverste venstre celle i det ønskede outputområde.

Udskrift:

ANAVA						
Variationskilde	SK	fg	MK	F	P-værdi	F krit
Mellem grupper	1509,172	9	167,6858	170,9335	9,42E-10	3,020382
Inden for grupper	9,81	10	0,981			
I alt	1518,982	19				

$$SAK_{\text{lack of fit}} = SAK_{\text{residual}} - SAK_{\text{inden for grupper}} = 32.53829 - 9,81 = 22.728 \text{ med}$$

$$f_{\text{lack of fit}} = f_{\text{residual}} - f_{\text{inden for grupper}} = 18 - 10 = 8$$

Vi kan nu på basis heraf foretage en “lack of fit” test

Variation (Source)	SAK (SS)	f (df)	$s^2 = \frac{SAK}{f}$	F
Lack of fit	22.728	8	2.8415	$F_{\text{lack of fit}} = \frac{2.8415}{0.981} = 2.90$
Gentagelser	9.81	10	0.981	
Total	1518.98	19		

Da $F_{\text{lack of fit}} = 2.90 < F_{0,95}(8,10) = 3.07$ (eller P - værdi = $P(F > 2.90) = 0.05891 > 0.05$)
accepteres H_0 , dvs. den lineære model gælder.

Vi ser, at vi (på nær afrundingsfejl) får samme udskrift som i eksempel 11.9.

De resterende regninger er nu ganske analoge til regningerne i eksempel 11.7.

Af udskriften

	Koeffici- enter	Standard- fejl	t-stat	P-værdi	Nedre 95%	Øvre 95%	Nedre 95,0%	Øvre 95,0%
Skæring	1,654147	0,599582	2,758832	0,012926	0,39447	2,913823	0,39447	2,913823
X-variabel	0,172975	0,006032	28,67564	1,78E-16	0,160302	0,185648	0,160302	0,185648

ses, at regressionsligningen bliver $y = 1.6542 + 0.1730 \cdot x$.

3) Test af om det kunne tænkes, at hældningskoefficienten er 0.15.

Vi betragte et 95% konfidensinterval for $\tilde{\beta}_1$

Af forrige udskrift fås intervallet [0.1657 ; 0.1857].

Da konfidensintervallet ikke indeholder 0.15, må der konkluderes, at hældningskoefficienten ikke kan være 0.15.

4) Find det til $t = 100$ svarende 95% konfidensinterval for tykkelsen y .

Metoden som beskrevet i eksempel 11.7.

$$\tilde{\mu}_{100} = \text{TENDENS}(M1:M20;L1:L20;100) = 18,95165$$

$$\text{(eller } \tilde{\mu}_{100} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x = 1.654 + 0.1730 \cdot 100 = 18.95,$$

$$\tilde{V}(\tilde{\mu}) = s_{\text{pool}}^2 \cdot \left(\frac{1}{N} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\text{SAK}_x} \right) = \text{H37} * (1/20 + (100 - \text{MIDDEL}(L1:L20))^2 / (\text{G36}/\text{F42}^2)) = 0,097516$$

Konfidensinterval for μ :

$$\left[\tilde{\mu} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) \cdot \sqrt{\tilde{V}(\tilde{\mu})}; \tilde{\mu} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) \cdot \sqrt{\tilde{V}(\tilde{\mu})} \right] = [18.95 - 2.10 \cdot 0.3123; 18.95 + 2.10 \cdot 0.3123]$$

$$= [18.29; 19.61]$$

Vi får følgende $y(100) = 18.95$ og 95% konfidensinterval [18.29 ; 19.61]



11.3.5. Transformation af data inden lineær regressionsanalyse kan foretages.

Ligger punkterne ikke tilnærmelsesvis på en ret linie, er det muligt, at man ved at vælge en passende transformation kan føre problemet over i en lineær model i de transformerede data.

På visse lommeregnerer såsom TI83 og HP48G kan man vælge mellem forskellige ofte anvendbare modeller. Man kan så hurtigt grafisk og ud fra forklaringsgraden se hvilken transformation, der bedst svarer til de opgivne data.

Den samme facilitet har mange statistikprogrammer. I appendix 11.3 er angivet en liste med kommentarer over en række muligheder.

Har man på forhånd en viden om, at en bestemt transformation skal anvendes, kan man uden større besvær foretage den pågældende transformation på dataene og så udføre regressionsanalysen på de transformerede data.

Dette illustreres ved følgende eksempel.

Eksempel 11.11 (Eksamensopgave F78 omskrevet)(transformation af udtryk).

Ved et forsøg ønskedes en bestemt luftarts adiabatexponent γ bestemt ved, at luftarten adiabatisk komprimeres til forskellige forudvalgte rumfang v , idet de tilsvarende værdier af trykket P målt.

Man formodede på forhånd, at der gælder regressionsmodellen $P = c \cdot v^{-\gamma}$.

Ved forsøget fandtes følgende resultater:

$v \text{ cm}^3$	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
$p \text{ kp/cm}^2$	29.58	15.42	11.67	7.48	7.29	3.90	3.63	1.69	2.95	2.16	2.11

11. Regressionsanalyse

Undersøg om formodningen er rimelig, og angiv ligningen for den fundne model

1) ved at benytte en lommeregner med regressionsprogram.

2) ved at benytte Excel.

LØSNING:

1) Lommeregner: Idet funktionen er en potensfunktion, tages logaritmen på begge sider (se evt. appendix 11.3 punkt 7). Vi får

$$P = c \cdot v^{-\gamma} \Leftrightarrow \ln P = \ln c - \gamma \ln v \Leftrightarrow y = \ln c - \gamma \cdot x, \text{ hvor } y = \ln P \text{ og } x = \ln v$$

Ved at tage logaritmen fås nu tabellen:

$x = \ln v$	4.605	5.010	5.298	5.522	5.703	5.859	5.992	6.109	6.215	6.310	6.397
$y = \ln P$	3.387	2.736	2.457	2.012	1.987	1.361	1.289	0.525	1.082	0.770	0.747

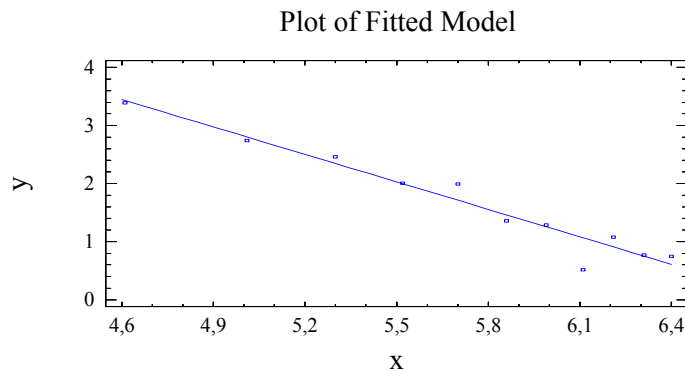
De 11 punktpar indtastes i lommeregner.

Regressionsprogram aktiveres, og blandt beregnede størrelser findes:

Estimer for regressionskoefficienter: $\tilde{\beta}_0 = \ln(c) = 10.6555$ og $\tilde{\beta}_1 = -\gamma = -1.5689$
og korrelationskoefficient $r = -0.9734$

Forklaringsgraden er $r^2 = 0.97219^2 = 0.9474$.

Indtegnes punkterne og regressionslinien i lommeregnerens grafiske display fås følgende figur, som viser, at punkterne på figuren fordeler sig tilfældigt omkring linien og der ikke er enkelte punkter (outliers) der afviger voldsomt fra linien. Da forklaringsgraden samtidig er tæt på 1, så er den lineære model acceptabel.



Figur 11.6 $r = -0.973$ $r^2 = 94.63$

Den estimerede regressionsligning bliver

$$\ln(P) = 10.6555 - 1.5689 \cdot \ln(v) \Leftrightarrow P = e^{10.6555} \cdot v^{-1.5689} \Leftrightarrow \underline{\underline{P = 42425.38 \cdot v^{-1.5689}}}$$

2) Excel løsning:

Data indtastes

v	p	ln_v	ln_p
100	29,58	4,60517	3,387098
150	15,42	5,010635	2,735665
200	11,67	5,298317	2,457021
250	7,48	5,521461	2,012233
300	7,29	5,703782	1,986504
350	3,9	5,857933	1,360977
400	3,63	5,991465	1,289233
450	1,69	6,109248	0,524729
500	2,95	6,214608	1,081805
550	2,16	6,309918	0,770108
600	2,11	6,39693	0,746688

Kolonnen med ln(v) beregnes ved at skrive =LN(A2) og kopiere resultatet til alle celler.

a) Regressionsligning: Findes af følgende udskrift:

	Koeffici- enter	Standard- fejl	t-stat	P-værdi	Nedre	95% Øvre	95% Nedre	Øvre
					95,0%	95,0%	95,0%	95,0%
Skæring	10,66109	0,716487	14,87968	1,21E-07	9,040283	12,2819	9,040283	12,2819
ln v	-1,56967	0,124502	-12,6076	5,05E-07	-1,85132	-1,28803	-1,85132	-1,28803

$$\ln(P) = 10.66109 - 1.56967 \cdot \ln(v) \Leftrightarrow P = e^{10.66109} \cdot v^{-1.56967} \Leftrightarrow \underline{\underline{P = 42663.11 \cdot v^{-1.56967}}}$$

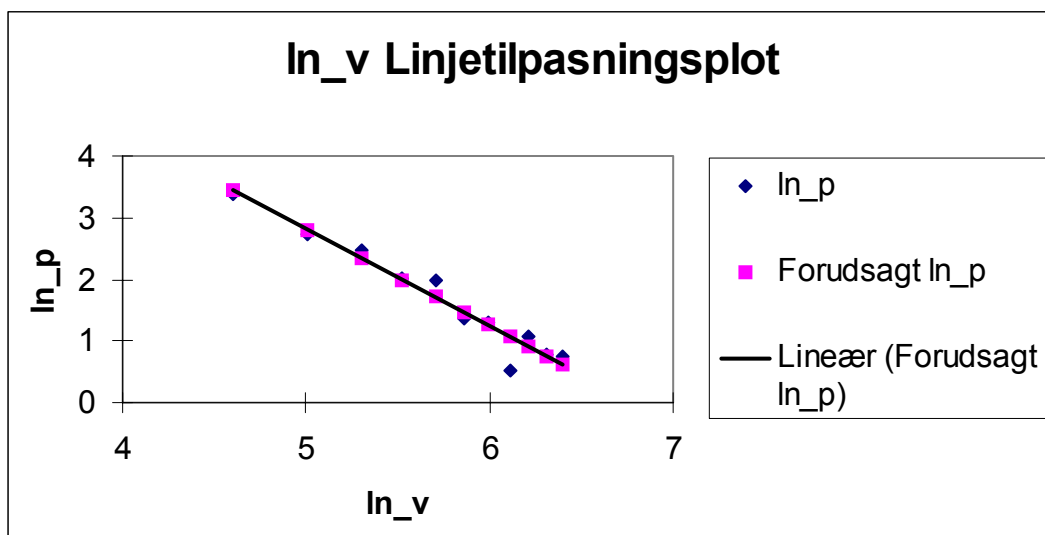
Kontrol af model:

RESUMEOUTPUT

Regressionsstatistik	
Multipel R	0,972838
R-kvadreret	0,946413
Justeret R-kvadreret	0,940459
Standardfejl	0,224716
Observationer	11

Vi ser, at forklaringsgraden $r^2 = 0.946413$ er høj.

Vi får følgende tegning:



Da punkterne fordeler sig tilfældigt omkring linien, og forklaringsgraden er høj, synes forhåndsformodningen om en potensfunktion synes korrekt.



OPGAVER

Opgave 11.1^T (E94 lettere omskrevet)

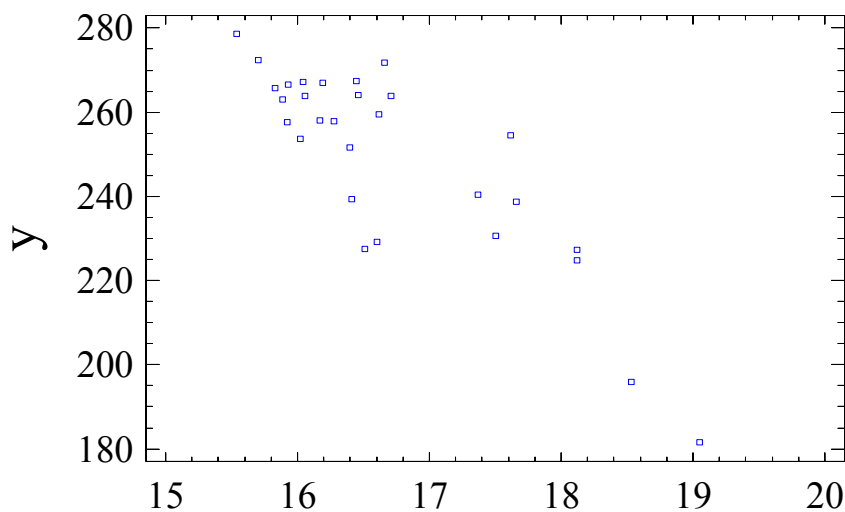
Nedenstående tabel angiver sammenhørende værdier af den "radiale" afbøjning X (i milliradi aner) og den totale energiflux Y (i kilowatt) på et solvarmeanlæg.

x	16.66	16.46	17.66	17.50	16.40	16.28	16.06	15.93	16.60	16.41	16.17	15.92	16.04	16.19	16.71
y	271.8	264.0	238.8	230.7	251.6	257.9	263.9	266.5	229.1	239.3	258.0	257.6	267.3	267.0	263.8
x	16.62	17.37	18.12	18.53	15.54	15.70	16.45	17.62	18.12	19.05	16.51	16.02	15.89	15.83	
y	259.6	240.4	227.2	196.0	278.7	272.3	267.4	254.5	224.7	181.5	227.5	253.6	263.0	265.8	

Der er på en lommeregner med regressionsprogram fundet følgende hjælpe størrelser:

	x	y
-----	-----	-----
Antal	29	29
Gennemsnit	16,7021	249,638
Varians	0,824796	524,355
Spredning	0,908183	22,8988
Korrelationskoefficient	-0,848837	
Regressionskoefficienter	$\tilde{\beta}_0 = 607.103,$	$\beta_1 = -21.4025$
-----	-----	-----

Punkterne er afsat på nedenstående figur.

Plot of y vs x 

- 1) Begrund i ord på baggrund af figuren og forannævnte oplysninger, om du finder det sandsynligt, at der er uafhængighed mellem X og Y .

I det følgende antages, at en lineær model $y = \beta_0 + \beta_1 x$ gælder.

- 2) Angivet 99% konfidensinterval for hældningen β_1 . (Bemærk, der ønskes et 99% interval).
- 3) Beregn et 95% konfidensinterval for middelfluxen y i det tilfælde, hvor den radiale afbøjning x er 16.5 milliradianer.

Hvis et statistikprogram er til rådighed, er det tilladeligt at anvende dette.

Opgave 11.2

Man ønskede på et universitet at undersøge om der var en sammenhæng mellem de point de studerende fik ved en indledende prøve i matematik, og de point de fik ved den afsluttende prøve i matematik.

Resultaterne var

Student	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Indledende prøve x	39	43	21	64	57	47	28	75	34	52
Afsluttende prøve y	65	78	52	82	92	89	73	98	56	75

- 1) Find en ligning for regressionslinien m , og tegn i et koordinatsystem såvel punkterne som linien m .
- 2) Man forventer en positiv korrelation mellem x og y . Finder du at dette er tilfældet? Det antages i det følgende at forudsætningerne for en regressionsanalyse er opfyldt.
- 3) Test om y er uafhængig af x (signifikansniveau $\alpha = 0.01$)
- 4) Find et 95% konfidensinterval for hældningskoefficienten β_1 .
- 5) En student har opnået 50 point ved den indledende prøve. Forudsig indenfor hvilket interval denne student pointtal vil ligge ved den afsluttende prøve. (signifikansniveau $\alpha = 0.05$)
- 6) Angiv et 95% konfidensinterval for middelværdien af det pointtal som studenter opnår ved den afsluttende prøve, når de alle ved den indledende prøve har opnået 50 point.

Opgave 11.3 (F81)

Ved en kemisk proces vides reaktionshastigheden v at afhænge af mængden x af et bestemt additiv, som virker som katalysator.

Man formoder, at der (approksimativt) gælder sammenhængen

$$v = \alpha_0 + \beta_1 \cdot \sqrt{x}. \quad (1)$$

Ud fra teoretiske overvejelser forventes det yderligere, at $\beta_1 = \text{ca } 45$. Ved et fuldstændigt randomiseret forsøg fandtes følgende observationer:

Tilsat mængde additiv x	0	0.2	0.5	1.0	1.5	2.0
Reaktionshastighed v	1	17	29	41	50	58

- 1) Foretag en vurdering af, om model (1) kan antages at gælde.
- 2) Test, idet det forudsættes, at model (1) gælder, nulhypotesen $H_0: \beta_1 = 45$.
- 3) Opstil et 95% - konfidensinterval for β_1 .
- 4) Opstil et 95%~konfidensinterval for middelværdien af reaktionshastigheden ved en additivtilsætning på 1.75.

Opgave 11.4 (F90)

I et forsøg undersøgte et ventilationsanlægs effektivitet. Målingerne foretoges ved at fylde et lokale med gas og vente til koncentrationen var stabil. Herefter startedes ventilationsanlægget og gaskoncentrationen C_t målte til forskellige tidspunkter t .

Følgende resultater fandtes:

t (min. efter anlæggets start)	2.67	4.59	6.75	7.67	11.34	14.34	16.25	18.25	23.09
C_t [ppm]	34	28	26	22	16	14	12	10	8

Følgende 2 modeller for funktionssammenhængen overvejes:

Model 1 (lineært henfald):
$$E(C_t|t) = \alpha_1 + \beta_1 \cdot t$$

Model 2 (eksponentielt henfald):
$$E(C_t|t) = \alpha_2 \cdot e^{\beta_2 \cdot t}$$

- 1) Indtegn punkterne i et koordinatsystem og vælg den af de to modeller du vurderer giver den bedste beskrivelse.
- 2) Beregn determinationskoefficienterne for hver af modellerne og vælg den model, for hvilken determinationskoefficienten er størst. Er der overensstemmelse med valget i spørgsmål 1)?
- 3) Antag, at model 2 gælder.

Bestem et 95%-konfidensinterval for halveringstiden $t_{0.5}$ bestemt ved $t_{0.5} = -\frac{\ln(2)}{\beta_2}$.

Opgave 11.5 (E85)

I et organisk-kemisk laboratorium undersøgte man forskellige reaktionskinetiske processer. Ud fra teoretiske overvejelser har man fundet frem til, at "middeludbyttet" (angivet i %-enheder) af en bestemt kemisk forbindelse for $t > 5$ er approksimativt bestemt ved et udtryk af formen

(1) $y = 100 - \alpha_0 \cdot e^{\beta_1 \cdot t}$, hvor t angiver reaktionstiden og y procesudbyttet.

For at efterprøve rigtigheden af de teoretiske overvejelser udførte man et forsøg med følgende resultater:

t	6.5	8.2	11.1	13.6	16.4	18.5	20.7	23.0	25.8	28.5	33.3
y	39.5	64.7	65.6	72.9	88.0	92.7	92.5	95.9	96.3	98.3	99.2

- 1) Omskriv ovennævnte udtryk for modellen således, at regressionsmodellen kan gøres lineær i parametrene ved en logaritmisk transformation.
- 2) Foretag den logaritmiske transformation og vurder såvel grafisk som ud fra forklaringsgraden om den formodede model (1) kan accepteres.
- 3) Foretag, idet det forudsættes, at modellen (1) gælder, en estimation af parametrene α_0 og β_1 .
- 4) Opstil et 95% - konfidensinterval for middelværdien af udbyttet y svarende til $t = 20$.

Opgave 11.6 (E84)

Ved en standardisering af et bestemt hormonpræparat behandler man et mindre antal mus med doser af forskellig størrelse og registrerer i hvert tilfælde tiden t , indtil musen dør. Fra tidligere undersøgelser ved man, at t er normalfordelt med konstant varians og med en middelværdi, som er en lineær funktion af logaritmen til dosis.

Til brug for standardiseringen af et produktionsparti af præparatet blev foretaget 5 delforsøg, som gav følgende resultater:

dosis (antal enheder)	1585	2239	2884	5248	6918
t (timer)	8.70	6.20	8.22	2.94	3.88

- 1) Angiv et estimat for regressionslinien, hvor t er en funktion af (totals)-logaritmen til dosis.
- 2) Opstil et 95% - konfidensinterval for koefficienten til logaritmen til dosis.
- 3) Opstil et 95% - konfidensinterval for middelværdien af t for en dosis på 6300 enheder.

Opgave 11.7 (E73) (regression, $n > 1$)

Man har erfaring for, at jerns viskositet Y under smeltning afhænger af jernets siliciumindhold x . Man besluttede sig til at foretage et forsøg med henblik på at undersøge denne sammenhæng nærmere. Ved forsøget foretoges 3 viskositetsmålinger for hver af 5 forskellige værdier af siliciumindholdet. Forsøgsresultaterne var:

	x				
	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
Y	47.5 55.0 37.5	60.0 55.0 50.0	65.0 67.5 70.0	72.5 75.0 75.0	77.5 85.0 75.0

- 1) Angiv forudsætningerne for at kunne udføre en variansanalyse.
- 2) Foretag en testning af forudsætningen om varianshomogenitet.
- 3) Test om der er en lineær sammenhæng mellem jerns viskositet og siliciumindholdet, og angiv i bekræftende fald ligningen for den empiriske regressionslinie.
Det antages i det følgende, at der er en lineær sammenhæng mellem x og y .
- 4) Foretag en testning af om regressionslinien er vandret.
- 5) Angiv et 95% konfidensinterval for hældningskoefficienten
- 6) Angiv et 95% konfidensinterval for middelværdien af middelviskositeten y , når $x = 1.60$.

Opgave 11.8 (F91) (regression, $n > 1$)

Koncentrationsbestemmelse af stoffet aprindin kan foretages ved hjælp af en gaskromatograf. Ved denne metode indsprøjtes en del af prøven indeholdende aprindin i gaskromatografen, og den såkaldte tophøjde bestemmes. Såfremt de laboratorietekniske procedurer er korrekt udført, skal tophøjden, bortset fra tilfældige udsving, være proportional med koncentrationen i prøven. I et eksperiment fremstillede man 12 prøver med kendte koncentrationer af aprindin og målte tophøjderne. Resultaterne fremgår af nedenstående tabel.

	Koncentration x ($\mu\text{g} / \text{ml}$)					
	0.5	1	2	3	4	5
Tophøjde	46	120	232	310	440	550
Y	55	90	241	318	435	539

- 1) Bestem den lineære regressionslinie for Y på x
- 2) Test, om en sådan lineær regression kan beskrive data.
- 3) Test, om tophøjden y kan antages at være proportional med koncentrationen x , dvs. $y = a \cdot x$.

Opgave 11.9 (F85)

I et fuldstændigt randomiseret forsøg undersøgte rotters væggtilvækst som funktion af mængde riboflavin tilsat foderet. Forsøgsresultaterne var:

	Tilsætning x af riboflavin i $\mu\text{g} / \text{dag}$				
	2.5	5	10	20	40
Tilvækst Y i g/uge for 20 rotter (4 for hver af de 5 tilsætninger)	11.1	9.3	13.8	22.8	22.5
	3.4	14.5	18.5	25.8	26.6
	7.9	9.1	20.3	23.0	19.3
	6.1	14.2	13.2	21.5	26.5

Følgende 2 modeller for funktionssammenhængen overvejes:

Model 1: $y = \alpha_0 + \beta_1 x$

Model 2: $y = \beta_0 + \beta_1 \ln(x)$

- 1) Foretag en grafisk testning af de to modeller og vælg den, der vurderes at give den bedste beskrivelse.
- 2) Udfør en testning af den i spørgsmål 1) valgte model.
- 3) Opstil, idet det forudsættes, at den i spørgsmål 2) udførte testning giver accept af den valgte model, et estimat og et 95% - konfidensinterval for middelvægttilvæksten ved tilsætning af 30 $\mu\text{g} / \text{dag}$.

Løsning opgave 11.10

Følgende sammenhørende data er 25 målinger mellem den jævnstrøm (y) en vindmølle udvikler og vindhastigheden (x).

x	5.00	6.00	3.40	2.70	10.0	9.70	9.55	3.05	8.15	6.20	2.90	6.35	4.60
y	1.58	1.822	1.057	0.500	2.236	2.386	2.294	0.588	2.166	1.866	0.653	1.930	1.562
x	5.80	7.40	3.60	7.85	8.80	7.00	5.45	9.10	10.20	4.10	3.95	2.45	
y	1.73	2.088	1.137	2.179	2.112	1.800	1.501	2.303	2.310	1.194	1.144	0.123	

- 1) Vurder grafisk om en ret linie kan siges at være en god model for forsøget (benyt både en figur med indtegnet regressionslinie og en figur med residualerne indtegnet til vurderingen).
- 2) Ud fra en fysisk model vurderes, at en model $Y = a + \frac{b}{X}$ kunne være en bedre model. Foretag på samme måde som i spørgsmål 1) en vurdering af denne model.
- 3) Angiv en ligning for den i spørgsmål 2 fundne kurve, og angiv et estimat og et 95% konfidensinterval for y svarende til en vindhastighed på $x = 7$.

12 VARIANSANALYSE

12.1 Indledning

I dette kapitel sammenlignes flere end to middelværdier. Det karakteristiske er, at de forekommende faktorer er kvalitative, dvs. har niveauer, som ikke er karakteriseret ved en målelig egenskab.

Såfremt faktorerne er kvantitative, dvs. har niveauer, som er karakteriseret ved en målelig egenskab, kan man godt bruge variansanalyse, men det vil her være bedre (give mest oplysning), hvis man som beskrevet i kapitel 11 anvender regressionsanalyse.

12.2 Ensidet variansanalyse

Vi vil i dette afsnit behandle problemer, af den type, som er vist i det følgende eksempel.

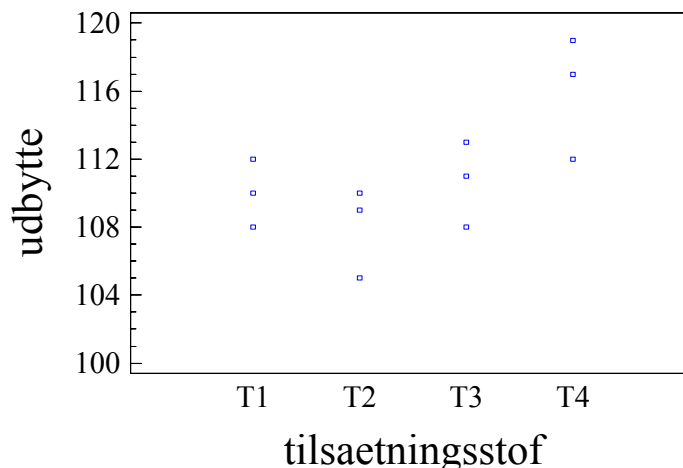
Eksempel 12.1 (én faktor). *Virkningerne af 4 tilsætningsstoffer T_1, T_2, T_3, T_4 på mængden af urenheder ved en kemisk proces ønskes sammenlignet. For hvert tilsætningsstof måles mængden af "uønsket stof" 3 gange.*

Forsøgsresultaterne blev følgende:

T_1	T_2	T_3	T_4
108	105	108	117
110	110	111	119
112	109	113	112

Der ønskes fundet det tilsætningsstof der giver den mindste urenhed.

Scatterplot by Level Code



Afsættes punkterne fås omstående figur:

Det der vil være af interesse er at teste om middelværdierne for de 4 stoffer afviger fra hinanden, og i bekræftende fald hvilket stof der giver det største udbytte.

Det svarer til på figuren, at man undersøger om middelværdierne ligger på en vandret linie.

Umiddelbart kunne man synes, at så foretager vi blot de samme parvise sammenligninger som i kapitel 10, hvor vi så på differenser mellem 2 middelværdier. Det giver i alt 6 sammenligninger, som anført nedenfor:

Multiple Range Tests for udbytte by tilsætningsstof

Method: 95,0 percent LSD			
Level	Count	Mean	Homogeneous Groups
T2	3	108,0	X
T1	3	110,0	X
T3	3	110,667	X
T4	3	116,0	X

Contrast	Difference	+/- Limits
T1 - T2	2,0	5,18496
T1 - T3	-0,666667	5,18496
T1 - T4	*-6,0	5,18496
T2 - T3	-2,66667	5,18496
T2 - T4	*-8,0	5,18496
T3 - T4	*-5,33333	5,18496

* denotes a statistically significant difference.

Metoden benævnes LSD (Least Significant Difference).

Problemet ved denne metode er, at har man mange niveauer, så skal der foretages særdeles mange sammenligninger. Eksempelvis ville $n = 6$ niveauer give $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ sammenligninger.

Selv om de forskellige stofferne giver samme udbytte, så ville støjen i forsøget bevirke, at de mange differenser fordelte sig "klokkeformet" (normalfordelt). Det bevirker, at den største og den mindste differens ved ovennævnte metode let vil ligge så langt fra hinanden, at deres konfidensintervaller ikke overlapper. Man slutter altså at der er forskel, selv om det ikke er tilfældet (fejl af type 1).

For at undgå dette, skal man derfor **altid** starte med at foretage en såkaldt variansanalyse (en F -test). Giver den, at der ikke er signifikant forskel på middeludbytte, så skal man rette sig efter det, og ikke derefter begynde at se på konfidensintervaller.

Det er muligt at foretage beregningerne ved hjælp af en lommeregner, og i appendix 12.1 er angivet de nødvendige formler til beregningerne. Det er dog naturligvis en betydelig lettelse at benytte Excel.

Det følgende eksempel tjener ikke kun til at vise, hvordan regningerne kan foretages med lommeregner, men søger også at give en forståelse for den teoretiske baggrund for variansanalyser.

12.2.1. Ensidet variansanalyse beregnet med lommeregner.

Vi betragter igen eksempel 12.1.

Eksempel 12.1 (én faktor). *Virkningerne af 4 tilsætningsstoffer T_1, T_2, T_3, T_4 på mængden af urenheder ved en kemisk proces ønskes sammenlignet. For hvert tilsætningsstof måles mængden af "uønsket stof" 3 gange.*

Forsøgsresultaterne blev følgende:

T_1	T_2	T_3	T_4
108	105	108	117
110	110	111	119
112	109	113	112

Der ønskes fundet det tilsætningsstof der giver den mindste urenhed.

Opstilling af nulhypotese.

Lad X_i = mængden af uønsket stof ved tilsætning af stof T_i hvor $i \in \{1,2,3,4\}$

Idet de 4 variables middelværdier kaldes μ_1, μ_2, μ_3 og μ_4 ønsker vi at teste

nulhypotesen

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4,$$

mod den alternative hypotese

H : "mindst én middelværdierne er forskellig fra de øvrige".

Forsøgets udførelse. Forsøget skal udføres som et **fuldstændigt randomiseret forsøg**. (jævnfør kapitel 10 hvor et sådant forsøg er beskrevet). Derved sikrer vi, at der udføres et "statistisk gyldigt" forsøg. Hvis vi derfor, efter at have foretaget en ensidet variansanalyse, konkluderer, at der er forskel på tilsætningsstofferne, så er det "korrekt", idet det ville være helt tilfældigt, hvis én af tilsætningsstofferne har været begunstiget med særlig gode forsøgsenheder.

Beregning af gennemsnit og spredning. For at få et skøn for mængden af urenheder, udregnes gennemsnittene for hvert tilsætningsstof. Disse er angivet i nedenstående skema. Umiddelbart ud fra gennemsnit synes T_4 at adskille sig fra de tre øvrige, men hvis der er stor spredning, kan det måske blot være et tilfælde. Det er derfor naturligt at udregne spredningerne, hvilket derfor også er anført i skemaet.

	T_1	T_2	T_3	T_4
Gennemsnit	110.0	108.0	110.67	116.0
Spredning	2.000	2.6458	2,5166	3.6056

Forudsætninger. Forudsætningerne er, at de 4 variable skal være statistisk uafhængige, at de er tilnærmelsesvis normalfordelte og har samme varians (kaldet at der er varianshomogenitet).

Uafhængigheden er meget væsentlig, og må være opfyldt i forbindelse med forsøgets udførelse.

Analysen er derimod robust overfor afvigelser fra normalitet og varianshomogenitet hvis blot antallet af gentagelser er den samme. Vi vil derfor i det følgende antage, at forudsætningerne er opfyldte, medmindre der gives udtryk for tvivl herom.

Kravet om at de variable er normalfordelte kan vurdere grafisk ved et normalfordelingsplot (beskre-

vet i kapitel 12).

Varianshomogenitet kan lettest testes ved den "simplificerede F - test", men får vi en forkastelse her, må man gå til Levines test, hvis vi har mere end 2 gentagelser, eller "Bartletts test". Disse test er beskrevet i appendix 12.1.

Pooling. Da de 4 varianser antages at være nogenlunde ens, "pooles" disse.

$$s_0^2 = \frac{(3-1) \cdot 2.000^2 + (3-1) \cdot 2.6458^2 + (3-1) \cdot 2.5166^2 + (3-1) \cdot 3.6056^2}{12-4}$$

$$= \frac{60.6667}{8} = \frac{SAK_0}{8} = 7.583$$

Idet hver varians er baseret på $n = 3$ målinger, har hver varians 2 frihedsgrad ($f = n - 1 = 3 - 1$). Den poolede varians har derfor $2 \cdot 4 = 8$ frihedsgrader.

Beregning af F - test. Antages nulhypotesen at være sand, dvs. udbyttet fra de 4 tilsætningsstoffer har samme middelværdi, er den eneste grund til, at vi ikke får samme gennemsnit i de 4 tilfælde, den ukontrollable "støj" (forsøgsvariablens variation) som forekommer ved forsøgets udførelse.

Indtastes de fire gennemsnit i en lommeregner findes $s_{\bar{x}}^2 = 11.667$.

Et gennemsnit af n tal har en varians, der er n gange mindre end variansen på den enkelte måling. I dette tilfælde er $n = 3$.

Et estimat for støjens varians forudsat nulhypotesen er sand er derfor

$$s_R^2 = 3 \cdot s_{\bar{x}}^2 = 3 \cdot 11.667 = 35.00 \text{ Frihedsgradstallet er } f_R = \text{antal niveauer} - 1 = 4 - 1 = 3$$

Hvis nulhypotesen er sand burde derfor $\frac{s_R^2}{s_0^2} \approx 1$, mens hvis de er forskellige er forholdet signifikant

større end 1. Da $F = \frac{s_R^2}{s_0^2} = \frac{35}{7.583} = 4.62$ er spørgsmålet derfor, om dette tal er signifikant større

end 1. Da forholdet mellem de to varianser (som sædvanlig) er F - fordelt med $f_R = 3$ frihedsgrader i tælleren og $f_0 = 8$ i nævneren kan vi afgøre dette ved opslag i en F - tabel, eller ved at regne P - værdien ud.

Da $F_{0.95}(3,8) = 4.07 < 4.62$ (eller P - værdi = $P(F < 4.07) = 0.0372 < 0.05$), må nulhypotesen forkastes, dvs. der er et signifikant forskel mellem mindst 2 af middelværdierne.

Resultaterne samles sædvanligvis i en variansanalysetabel (jævnfør eventuelt appendix 12.1):

$r =$ antal niveauer og $n =$ antal gentagelser af et niveau og $N = n \cdot r$ er det totale antal delforsøg.

Variation	SAK	f	s^2	F
Tilsætningsstof	105.0	$r - 1 = 4 - 1 = 3$	35.0	4.62
Gentagelser	60.667	$N - r = 12 - 4 = 8$	7.58	
Total	165.667	$N - 1 = 12 - 1 = 11$		

Konklusion: De fire tilsætningsstoffer har ikke samme virkning.

Konfidensintervaller.

Ud fra gennemsnittene ses, at T_2 er signifikant mindre end T_4 . Om de øvrige tilsætningsstoffer giver lige så lidt urenhed som T_2 må afgøres ved opstilling af konfidensintervaller.

Som nævnt i indledningen, må man kun foretage en vurdering ud fra konfidensintervaller, hvis ovennævnte F - test har vist, at der er en signifikant forskel.

Er der signifikant forskel er der naturligvis forskel mellem den største og den mindste værdi, men hvorledes de øvrige fordeler sig er ikke nogen entydig opgave, og man kan risikere, at finde forskelle som ikke er reelle (fejl af type 1), eller omvendt overse reelle forskelle (fejl af type 2).

De "sædvanlige" konfidensintervaller for hvert niveau (jævnfør appendix 12.1):

$$\bar{x}_i \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-r) \cdot \sqrt{\frac{s_0^2}{n}} = \bar{x}_i \pm t_{0.975}(8) \cdot \sqrt{\frac{7.583}{3}} = \bar{x}_i \pm 2.31 \cdot 1.589 = \bar{x}_i \pm 3.673$$

LSD konfidensinterval:

$$\bar{x}_i \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-r) \cdot \sqrt{\frac{s_0^2}{2n}} = \bar{x}_i \pm t_{0.975}(8) \cdot \sqrt{\frac{7.583}{6}} = \bar{x}_i \pm 2.31 \cdot 1.124 = \bar{x}_i \pm 2.597$$

	T_1	T_2	T_3	T_4
Gennemsnit	110.0	108.0	110.67	116.0
95% konfidensinterval	[106.33;113.67]	[104.33;111.67]	[107.00;114.33]	[112.33;119.67]
95% LSD-konfidensinterval	[107.40;112.60]	[105.40;110.60]	[108.07;113.26]	[113.40;118.60]

Som man ser, giver begge metoder, at man får den mindste urenhed, hvis man vælger enten T_1 , T_2 eller T_3 (de kan ikke adskilles).

Konklusion: Man skal ikke vælge tilsætningsstof T_4 , hvorimod de tre øvrige tilsætningsstoffer giver nogenlunde den samme mængde urenhed.

De fleste statistikprogrammer har en række andre metoder til beregning af konfidensintervaller, som søger at formindske sandsynligheden for at begå fejl af type 1 og type 2. Det ligger udenfor dette notats formål at gå nøjere ind på fordele og ulemper ved disse metoder, men et råd er, at har man rådighed over et sådant program ser man hvad de forskellige metoder giver af resultater, og så benytter det til at komme med konklusionen.



12.2.2. Ensidet variansanalyse beregnet ved Excell.

Vi betragter igen eksempel 12.1.

Opstilling af nulhypotese.

Lad X_i = mængden af uønsket stof ved tilsætning af stof T_i hvor $i \in \{1,2,3,4\}$

Idet de 4 variables middelværdier kaldes μ_1, μ_2, μ_3 og μ_4 ønsker vi at teste

nulhypotesen $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$, mod

alternativ hypotese H : "mindst én middelværdierne er forskellig fra de øvrige".

Opstilling af data.

Inddata har følgende udseende

T1	T2	T3	T4
108	105	108	117
110	110	111	119
112	109	113	112

Analyse af data.

Vælg "Funktioner", "Dataanalyse", "ANOVA: enkelt faktor"

Den fremkomne tabel udfyldes

- 1) Inputområde udfyldes så hele området er med (eksempelvis A1:D4)
- 2) Markér "rækker" (da vi har arrangeret data i rækker)
- 3) Markér "Etiketter i første række" da første række jo er "variabelnavne"
- 4) I "Outputområdet" skrives øverste venstre celle i det ønskede outputområde.

Udskrift:

Anava: Enkelt faktor

RESUME

Grupper	Antal	Sum	Gennemsnit	Varians
T1	3	330	110	4
T2	3	324	108	7
T3	3	332	110,6667	6,333333
T4	3	348	116	13

ANOVA

Variationskilde	SK	fg	MK	F	P-værdi	F krit
Mellem grupper	105	3	35	4,615385	0,03718	4,06618
Inden for grupper	60,66667	8	7,583333			
I alt	165,6667	11				

Det ses, at vi får samme variansanalysetabel som i eksemplet.

Det ses, at man her ikke behøver at slå op i en F -tabel, idet P -value direkte fortæller, at nulhypotesen forkastes 1 stjernet (3,72%).

Konklusion: De fire tilsætningsstoffer har ikke samme virkning.

Ud fra gennemsnittene ses, at T_2 er signifikant mindre end T_4 . Om de øvrige tilsætningsstoffer giver lige så lidt urenhed som T_2 må afgøres ved opstilling af konfidensintervaller.

Konfidensintervaller

Desværre kan Excell ikke direkte ud fra data udregne konfidensintervallerne, så man kan nok lettest udregne dem "i hånden" idet man af tabellen kan finde gennemsnittene og $s_0^2 = 87.58333$.

Kontrol af varianshomogenitet.

Simplificeret F-test:

Af tabellen ses, at T4 har den største varians på 13 og T1 har den minste varians på 4.

Vi danner $F = \frac{s_{\max}^2}{s_{\min}^2} = \frac{13}{4} = 3.25$.

Da $F_{0,95}(2,2) = 19 > 3.25$ (eller P -værdi = $0.897 > 0.05$) accepteres $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2$ dvs. vi antager at forudsætningen om varianshomogenitet er tilstrækkeligt opfyldt. ◆

De foregående betragtninger som var baseret på eksempel 12.1 kan som angivet i appendix 12.1 generaliseres til et vilkårligt antal niveauer..

12.3 Tosidet variansanalyse

12.3.1 Indledning.

Har man 2 kvalitative faktorer vil det også være naturligt at udføre en variansanalyse, men da man her kan risikere, at de to faktorer "spiller sammen" på en uventet måde, bliver forholdene noget mere kompliceret. Til gengæld kan begreberne her så umiddelbart generaliseres til forsøg med mere end 2 faktorer.

12.3.2 Planlægning af forsøg.

I dette afsnit benyttes følgende eksempel som illustration af begreberne.

Eksempel 12.2. En bilfabrikant ønsker at finde ud af hvorledes 3 olieblandinger O_1 , O_2 , og O_3 , og 2 karburatortyper K_1 og K_2 påvirker benzinformbruget.

Vi har et forsøg med 2 **kvalitative faktorer**: olieblanding og karburator.

Faktoren "olieblanding" er på 3 **niveauer** O_1 , O_2 , og O_3 , mens faktoren "karburator" har 2 niveauer nemlig K_1 og K_2 .

Man har (ved en dimensionering) fundet, at for at få de tilstrækkelig relevante oplysninger skal hvert niveau gentages mindst 4 gange.

12.3.2.1 Een faktor ad gangen

I mange forsøgsvejledninger står, at man bør kun variere en faktor ad gangen. Alle andre faktorer end den udvalgte fastholdes på et bestemt niveau.

En forsøgsplan efter disse retningslinier kunne eksempelvis være som skitseret nedenfor, hvor hvert delforsøg er markeret med et \times :

		Karburator	
		K_1	K_2
Olieblanding	O_1	$\times \times \times \times$	
	O_2	$\times \times \times \times$	$\times \times \times \times$
	O_3	$\times \times \times \times$	

I dette eksempel, hvor der kun er 2 faktorer, vælger vi først at variere olieblandingen, mens den anden faktor fastholdes.

Idet vi har valgt først at fastholde karburatoren på niveauet K_1 , kan forsøget udføres således: 12 af de 16 biler, som skal anvendes, udstyres med karburator K_1 , og derefter (randomiseret) får 4 af disse biler olieblending O_1 , 4 andre biler olieblending O_2 , og de sidste 4 biler olieblending O_3 . Efter at have kørt en udvalgt strækning måles benzinforbruget.

Derefter varieres den anden faktor (her karburator), mens olieblandingen fastholdes på O_2 , dvs. de sidste 4 biler udstyres med karburator K_2 og olieblending O_2 .

Igen gennemkøres den udvalgte strækning, og benzinforbruget måles.

Det er vigtigt, at **hver behandling har lige mange gentagelser**.

Da hvert af de 4 niveauer skal gentages mindst 4 gange, så må hver behandling gentages 4 gange, så der er i alt 16 delforsøg.

Indtegnes for hver karburator det gennemsnitlige benzinforbrug mod olie-blandingen, fremkommer tegningen på fig. 1.

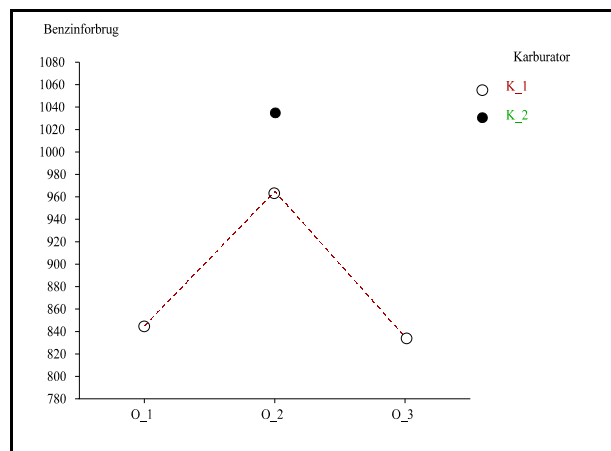


Fig. 1.

Umiddelbart ses, at K_1 giver lavest benzinforbrug, og O_1 (eller O_3) skal foretrækkes.

Hvad nu med benzinforbruget i karburator K_2 , hvis vi anvender olieblending O_1 eller O_3 ?

Kan man slutte, at benzinforbruget ved olieblending O_1 og O_3 er lavere, når man bruger karburator K_1 , end når man bruger karburator K_2 ?

Kun, hvis man ud fra tekniske eller andre grunde mener at vide, at "karburatorkurven" for K_2 er parallel med kurven for K_1 (ingen vekselvirkning), så er forsøgsplanen anvendelig, men ikke den bedste.

En statistisk set bedre forsøgsplan som endda ofte er mindre ressourcekrævende, er følgende:

12.3.2.2 Fuldstændig faktorstruktur

Denne plan består i, at hvert niveau af den ene faktor kombineres med ethvert niveau af den anden. Planen kan skitseres således:

		Karburator	
		K_1	K_2
Olieblending	O_1	× ×	× ×
	O_2	× ×	× ×
	O_3	× ×	× ×

12. Variansanalyse (mere end 2 variable)

Her er hver af de 6 behandlinger gentaget 2 gange, dvs. i alt er der udført 12 delforsøg. Hermed er kravet opfyldt om at hvert niveau skal gentages mindst 4 gange.

I "en faktor ad gangen" var vi tvunget til at udføre 16 delforsøg, mens vi kun skal lave 12 delforsøg i det "fuldstændige faktorforsøg".

Vi kan altså nøjes med færre delforsøg, når vi laver et fuldstændigt faktorforsøg.

Indtegnes for hver karburator det gennemsnitlige benzinforbrug mod olie-blandingen, viser det sig, at man får figur 2.

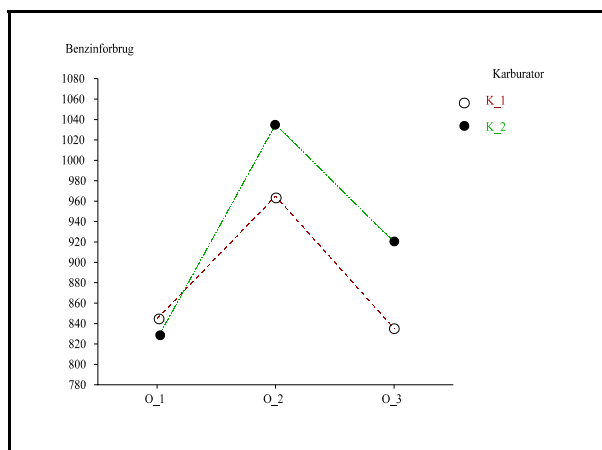


Fig. 2

Vi ser i modstrid med hvad vi troede ud fra "en faktor ad gangen forsøget", at kombinationen af katalysator K₂ og olieblending O₁ giver det laveste benzinforbrug.

Det ses, at de to kurver **ikke er parallelle**. Dette kunne være tilfældigt og blot skyldes forsøgets "støj", men det kunne også være signifikant, og derfor være udtryk for en vis såkaldt "**vekselvirkning**".

En model uden vekselvirkning (kurverne tilnærmelsesvis parallelle) siges at være **additiv**.

Anskuelig forklaring på hvorledes man kan beregne vekselvirkning: Her gives kun en kort forklaring, som kan tjene til at forstå baggrunden for beregningerne, der i øvrigt med fordel kan foretages af et statistikprogram som Statgraphics.

I nedenstående skema er skitseret et forsøg med 2 faktorer R og C. R er på 3 niveauer, og C er på 4 niveauer. Der er 2 gentagelser af hver "behandling"(treatment).

	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
R ₁	1 3	2 6	1 5	6 8
R ₂	7 11	8 14	8 12	13 15
R ₃	2 6	5 7	3 7	8 10

For hver af de 12 celler kan man udregne et skøn for spredningen. Hvis man forudsætter at spredningen er nogenlunde den samme i alle 12 tilfælde, kan man poole de 12 s² sammen til et fælles skøn s₀ for spredningen på forsøgsfejlen (støjen). Den vil have 12 frihedsgrader, da hvert enkelt s har 1 frihedsgrad.

I nedenstående skema er beregnet gennemsnit for hver celle, hver række, hver søjle og totalt.

	C_1	C_2	C_3	C_4	Gennemsnit
R_1	2	4	3	7	4
R_2	9	11	10	14	11
R_3	4	6	5	9	6
Gennemsnit	5	7	6	10	7

Tallene er konstrueret således, at vi har en helt præcis model uden vekselvirkning ($R_2 = R_1 + 7$, $R_3 = R_1 + 2$). For en sådan model gælder helt præcist, at resultatet i celle (i, j) fås af formlen $RC_{ij} = R_i + C_j$ - totale gennemsnit.

Eksempel: $RC_{2,3} = 10$ og $R_2 + C_3$ - totale gennemsnit = $11 + 6 - 7 = 10$.

I praksis vil dette naturligvis aldrig være tilfældet på grund af den tilfældige variation (støj), men udregnes kvadratet på afvigelserne (SAK), og disse afvigelser ikke er større end hvad er rimeligt i forhold til støjen (s_0), vil vi kunne konkludere at der ikke kan konstateres nogen vekselvirkning.

12.3.3. Forudsætninger for variansanalyse.

Som tidligere nævnt er forudsætningerne de samme som ved ensidet variansanalyse.

- 1) De observerede resultater (f.eks. benzinformbruget med en bestemt karburator og en bestemt olieblanding) er værdier af tilnærmelsesvis **normalfordelte** variable.
- 2) De observerede resultater er værdier af **uafhængige** variable. Dette kan man sædvanligvis sikre ved en fornuftig forsøgsplan (randomisering).
- 3) I hver celle skal resultaterne have tilnærmelsesvis samme varians s_0^2 . Metoden er robust overfor afvigelser, hvis antallet af gentagelser er det samme. Man kan eventuelt teste med Levine eller Bartlett's test.

Analysen er robust overfor afvigelser fra normalitet og varianshomogenitet, blot antallet af gentagelser i hver celle er den samme.

Er forudsætningerne ikke opfyldt, kan man i mange tilfælde foretage en transformation (f.eks. tage logaritmen til alle forsøgsresultater), som så medfører at forudsætningerne er nogenlunde opfyldte.

12.3.4. Testprocedure.

Formler hvorefter man ved hjælp af en lommeregner kan foretage de for en tosidet variansanalyse nødvendige beregninger kan findes i appendix 12.2.

I appendix 12.2 kan man også i detaljer se, hvordan testrækkefølgen er, og formler for konfidensintervaller m.m.

Da regningerne er temmelig omfattende, vil man dog sædvanligvis benytte et statistikprogram, der automatisk udregner en variansanalysetabel.

Nedenfor er kort beskrevet rækkefølgen for et fuldstændigt faktorforsøg med r rækker, q søjler og n gentagelser af hver behandling

		Søjlefaktor ("Karburator")			
		C_1	C_2	...	C_q
Rækkefaktor ("Olieblanding")	R_1	× ×...×	× ×...×	...	× ×...×
	R_2	× ×...×	× ×...×	...	× ×...×

	R_r	× ×...×	× ×...×	...	× ×...×

1) Man beregner et variansanalysekema som det nedenfor angivne, idet vi tænker os

Antal rækker $r = 5$, Antal søjler $q = 4$, Antal delforsøg i celler $n = 3$,

Totalt antal forsøg $N = r \cdot q \cdot n = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Variation	SAK=SS	f	$s^2 = \frac{SAK}{f}$	F
Rækkefaktor R	400	$f_R = r - 1 = 4$	100	
Søjlefaktor C	600	$f_C = q - 1 = 3$	200	
Vekselvirkning R*C	60	$f_{RC} = (r - 1)(q - 1) = 12$	5	$F_{RC} = \frac{s_{RC}^2}{s_0^2} = 1.0$
Residual	200	$f_0 = r \cdot q \cdot (n - 1) = 40$	5	
Total	1260	$f_{total} = N - 1 = 59$		

Testrækkefølge:

Lad α være signifikansniveau.

1) $H_0: R * C = 0$ (Ingen signifikant vekselvirkning)

H_0 forkastes, hvis P -værdi $= P(Z < F_{RC}) < \alpha$, hvor Z er F -fordelt $(f_T, f_N) = (f_{RC}, f_0)$,
 eller hvis $F_{RC} > F_{1-\alpha}(f_{RC}, f_0)$. ($F_{RC} = 1.0 < F_{0.95}(12, 40) = 2.00$, accept)

2a) Hvis H_0 forkastes, så beregnes for hver celle et gennemsnit \bar{x}_{ij} og der opstilles konfidensintervaller til nærmere vurdering af faktorernes virkning.

2b) Hvis H_0 accepteres, antages, at der ikke er nogen signifikant vekselvirkning, og man pooler de to varianser sammen, til et nyt estimat for forsøgsfejls variation (støjen).

$$s_m^2 = \frac{SAK_{RC} + SAK_0}{f_{RC} + f_0} \quad \text{med } f_m = f_{RC} + f_0 \cdot \left(s_m^2 = \frac{120 + 200}{12 + 40} = 6.13, f_m = 15 \right)$$

Dette estimat benyttes så til vurdering af hovedvirkningerne.

$H_0: R = 0$ (Ingen signifikant virkning af rækkefaktor)

H_0 forkastes, hvis P -værdi $= P(Z < F_R) < \alpha$, hvor Z er F -fordelt $(f_T, f_N) = (f_R, f_m)$.
 eller $F_R = \frac{s_R^2}{s_m^2} > F_{1-\alpha}(f_R, f_m)$ ($F_R = \frac{100}{6.13} = 16.31 > F_{0.95}(4, 15) = 3.06$, forkastelse)

Hvis H_0 forkastes, opstilles relevante konfidensintervaller.

Analogt testes for søjlevirkning.

12.3.5 Tosidet variansanalyse udført med lommeregner.

I appendix 12.2 er angivet de formler man skal benytte for at udregne de nødvendige SAK'er. Formlerne er endvidere anvendt på tallene i eksempel 12.2.

Har man først fundet SAK'erne er det beregningsmæssigt let at udfylde en variansanalysetabel og drage konklusioner.

Da det beregningsmæssigt bliver langt vanskeligere at foretage SAK-beregningerne hvis der ikke er lige mange gentagelser i hver celle, eller hvis der indgår mere end 2 faktorer, vil man imidlertid næppe i praksis benytte en lommeregner. I stedet benyttes et statistikprogram.

12.3.6 Tosidet variansanalyse udført ved Excel.

Som nævnt vil man sædvanligvis benytte et statistikprogram til at udføre flersidede variansanalyser. For at vise begge hovedtilfælde deles op i et tilfælde hvor der konstateres vekselvirkning, og et tilfælde hvor modellen er additiv (uden en signifikant vekselvirkning).

12.3.6.1 Model med vekselvirkning.

Som illustration af fremgangsmåden benyttes igen eksempel 12.2.

Eksempel 12.3 (model med vekselvirkning). En bilfabrikant ønsker at finde ud af, hvorledes 3 olieblandinger O_1 , O_2 , og O_3 , og 2 karburatorer K_1 og K_2 påvirker benzinforbruget. Forsøgsresultaterne er følgende:

		Karburator	
		K_1	K_2
Olieblanding	O_1	830 860	810 840
	O_2	940 990	1050 1020
	O_3	855 815	930 910

Angiv hvilke kombinationer af karburator og olieblanding der giver det laveste forbrug, og giv et estimat for dette forbrug.

LØSNING:

Data indtastes:

	K1	K2
O1	830	810
	860	840
O2	940	1050
	990	1020
O3	855	930
	815	910

Vælg "Funktioner", "Dataanalyse", "ANAVA: to faktor med gentagelse"

Den fremkomne tabel udfyldes

- 1) Inputområde udfyldes så hele området er med (eksempelvis A1:C7)
- 2) "Rækker pr. stikprøve" : Skriv antallet af rækker i hver stikprøve (i vort eksempel 2)
- 4) I "Outputområdet" skrives øverste venstre celle i det ønskede outputområde.

Udskrift:

Blandt mange tabeller fås også følgende variansanalysetabel:

ANOVA						
Variationskilde	SK	fg	MK	F	P-værdi	F krit
Stikprøve	58716,67	2	29358,33	48,93056	0,000193	5,143249
Kolonner	6075	1	6075	10,125	0,019028	5,987374
Interaktion	6450	2	3225	5,375	0,045963	5,143249
Indenfor	3600	6	600			
I alt	74841,67	11				

Opstille model med vekselvirkning.

Vi starter med en model med 2 faktorer K (karburator) og O (olieblanding), og med mulighed for vekselvirkning mellem de to faktorer.

Først testes om der er en vekselvirkning $K*O$ mellem karburator og olieblanding, dvs.

$$H_0: K * O = 0 \quad \text{mod} \quad H: K * O \neq 0$$

Det ses af tabellen, at forsøgsfejls varians ("Indenfor") er 600, mens bidraget fra en eventuel vekselvirkning ("Interaktion") er 3225, altså væsentlig større. Forholdet mellem de to led er $F = 5.375$, og sandsynligheden for at få dette tal, hvis der ingen vekselvirkning var, er under 5% (4.60%). Anvender vi som sædvanlig et 5% signifikansniveau, så forkaster vi nulhypotesen, dvs. vi konkluderer, at der er et svagt bevis for en vekselvirkning mellem karburator og olieblanding.

Opstille relevante konfidensintervaller og drage konklusion

Vi ønsker nu for en given olieblanding at finde hvilken karburator, der giver det laveste benzinforbrug.

Vi ser derfor nu på de øvrige tabeller der blev udskrevet:

Anova: To-faktor med gentagelse

RESUME	K1	K2	I alt
O1			
Antal		2	2
Sum	1690		1650
Gennemsnit	845		825
Varians	450		450433,3333
O2			
Antal		2	2
Sum	1930		2070
Gennemsnit	965		1035
Varians	1250		450
O3			
Antal		2	2
Sum	1670		1840
Gennemsnit	835		920
Varians	800		2002741,667
I alt			
Antal		6	6
Sum	5290		5560
Gennemsnit	881,6667		926,6667
Varians	4686,667		9066,667

Vi ved, der er en signifikant forskel mellem det laveste benzinforbrug (825), som fås med kombinationen $K_2 O_1$, og det højeste benzinforbrug (1035) svarende til kombinationen $K_2 O_2$. Det ses umiddelbart af gennemsnittene, men derimod er det ikke sikkert at der er en reel forskel mellem $K_2 O_1$, $K_1 O_3$ og $K_1 O_1$.

Dette kan man først vurdere ved at beregne konfidensradius r .

Af tabellen fås, at $s_0^2 = 600$ med $f_0 = 6$.

Vi får derfor (se appendix 12.2): $r = t_{0,975}(6) \sqrt{\frac{s_0^2}{n}} = 2.45 \sqrt{\frac{600}{2}} = 42.43$

Afstanden mellem 2 gennemsnit skal derfor være $2 \cdot r = 84.87$

benyttes LSD skal den være $\sqrt{2} \cdot r = 60.01$.

Det ses heraf, at umiddelbart giver kombinationen $K_2 O_1$ det laveste benzinforbrug (825), men af konfidensintervallerne ses, at der ingen signifikant forskel er mellem $K_2 O_1$, $K_1 O_3$ og $K_1 O_1$.

Man kan dog med sikkerhed sige, at man ikke bør vælge olieblending O_2 .



12.3.6.2. Additiv model: Model uden vekselvirkning

Eksempel 12.4 (model med vekselvirkning) I forbindelse med nogle brudstyrkebestemmelser for Portland-cement udføres et fuldstændigt randomiseret forsøg til undersøgelse af middelbrudstyrkens afhængighed af cementblandere og cementknusere.

Med hver af 4 cementblandere udstøbtes efter blanding med vand 12 cementterninger, som efter en uges lagring underkastedes en brudstyrkeprøve ved hjælp af en af 3 cementknusere.

Forsøgsresultaterne var:

		Cementknusere			
		1	2	3	4
Cementblandere	1	147, 175, 130	99, 85, 75	67, 23, 35	215, 97, 180
	2	211, 145, 163	131, 100, 145	75, 45, 71	151, 157, 167
	3	123, 85, 153	137, 143, 82	67, 25, 83	135, 91, 129

Angiv hvilke kombinationer af cementblender og cementknuser, der giver den største brudstyrke, og giv et estimat og et 95% konfidensinterval for denne største middelbrudstyrke.

LØSNING:

Data indtastes:

	knuser1	knuser2	knuser3	knuser4
blander1	147	99	67	215
	175	85	23	97
	130	75	35	180
blander2	211	131	75	151
	145	100	45	157
	163	145	71	167
blander3	123	137	67	135
	85	143	25	91
	153	82	83	129

Vælg "Funktioner", "Dataanalyse", "ANAVA: to faktor med gentagelse"

Den fremkomne tabel udfyldes

12. Variansanalyse (mere end 2 variable)

Udskrift:

Blandt mange tabeller fås også følgende variansanalysetabel:

ANOVA						
Variationskilde	SK	fg	MK	F	P-værdi	F krit
Stikprøve	4299,389	2	2149,694	2,425531	0,109798	3,402832
Kolonner	51995,22	3	17331,74	19,55565	1,24E-06	3,008786
Interaktion	7122,611	6	1187,102	1,339424	0,278669	2,508187
Indenfor	21270,67	24	886,2778			
I alt	84687,89	35				

Da P - value er 0.2787 for vekselvirkningen "Interaktion", og dette er over vort signifikansniveau på 5%, tillader vi os i det følgende at antage, at vekselvirkningen er forsvindende.

Vi foretages nu en "pooling":

Vælg "Funktioner", "Dataanalyse", "ANOVA: to faktor uden gentagelse"

Den fremkomne tabel udfyldes

Udskrift:

ANOVA						
Variationskilde	SK	fg	MK	F	P-værdi	F krit
Rækker	11370,39	8	1421,299	1,59979	0,177252	2,35508
Kolonner	51995,22	3	17331,74	19,50832	1,26E-06	3,008786
Fejl	21322,28	24	888,4282			
I alt	84687,89	35				

Vi ser nu, at forsøgsfejls varians er 946.44, og at cementknuserne har en stærk signifikant virkning, da P - value = 0.0000 er under 0.1%, mens cementblanderne ikke har en signifikant virkning, da P - value = 0.121 er over 5%.

Da cementblandere ikke mere indgår i modellen slettes de af modellen, hvorved vi jo får en ensidet variansanalyse:

Anava: Enkelt faktor

RESUME

Grupper	Antal	Sum	Gennemsnit	Varians
knuser1	9	1332	148	1234,5
knuser2	9	997	110,7778	791,6944
knuser3	9	491	54,55556	518,7778
knuser4	9	1322	146,8889	1541,611

ANOVA

Variationskilde	SK	fg	MK	F	P-værdi	F krit
Mellem grupper	51995,22	3	17331,74	16,96453	8,96E-07	2,901118
Inden for grupper	32692,67	32	1021,646			
I alt	84687,89	35				

Det ses umiddelbart, at knuser 1 må foretrækkes for knuser 3.

For at se om der er en signifikant forskel på knuser 4 og de 2 andre knusere beregnes konfidensradius r .

$$r = t_{0,975}(f_0) \sqrt{\frac{s_0^2}{n}} = t_{0,975}(32) \sqrt{\frac{1021,65}{9}} = 2.04 \cdot 10.654 = 21.73$$

Signifikant forskel er $2 \cdot r = 43.47$ (eller LSD: $\sqrt{2} \cdot r = 30.74$)

Konklusion: Man skal ikke vælge cementknuser 3, og nr 1 og 4 må foretrækkes.

Estimat for største middelbrudstyrke: 148.0 , 95 % konfidensinterval [126.3 ; 169.7]

12.4 Fuldstændigt randomiseret blokforsøg.

I forbindelse med planlægningen af et forsøg, kan man blive tvunget til at benytte forsøgsenheder, som er ret uensartede. Derved får den tilfældige forsøgsfejl en relativ stor spredning (stor "støj"). Dette kan bevirke, at man skal op på et urealistisk stort antal gentagelser for at kunne opnå den ønskede information. For at "dæmpe støjen" kan man inddele forsøgsenhederne i grupper (blokke), hvor de forsøgsenheder der ligger i samme blok er væsentlig mere ensartede end forsøgsenhederne i forskellige blokke. Man siger, at man har et fuldstændigt randomiseret blokforsøg, hvis hver behandling forekommer det samme antal gange (sædvanligvis netop én gang) i hver blok. Til illustration heraf, så betragter vi igen forsøget beskrevet i eksempel 12.2.

Eksempel 12.5 (randomiseret blokforsøg). En bilfabrikant ønsker at finde ud af, hvorledes 3 olieblandinger O_1 , O_2 , og O_3 , og 2 karburator typer K_1 og K_2 påvirker benzinforbruget. Forsøget planlægges som et fuldstændigt faktorforsøg idet hvert niveau skal gentages mindst 4 gange. Dette betyder at der skal udføres 12 delforsøg.

Et delforsøg med én bil tager 1 dag. (1 tank = 40 liter: Kører ca. 15 km/l så 40 liter = 600 km, hvilket giver ca. 7 timer med 80 km/time). Af tidsmæssige grunde kan man ikke benytte 12 dage til forsøget. Der benyttes 2 biler med tilhørende chauffør, hvilket forkorter forsøgstiden til 6 dage.

Da de to biler (med tilhørende chauffør) kan frygtes at give systematisk forskellige resultater, ønskes foretaget et **randomiseret blokforsøg** med biler som blokke.

- 1) Angiv fordele og ulemper ved at foretage et randomiseret blokforsøg fremfor et fuldstændigt randomiseret forsøg.
- 2) Beskriv hvorledes en randomisering kunne tænkes at foregå.
- 3) Skitser udseendet af en variansanalysetabel med angivelse af frihedsgrader.

LØSNING:

- 1) Fordele: Begrundelsen for ikke at foretage et fuldstændigt randomiseret forsøg er, at to biler frygtes at give så stor spredning, at selv betydelige forskelle ikke kan påvises.

Ved blokforsøget er støjen, der skyldes eventuelle forskelle mellem biler elimineret. Større mulighed for stabilt vejr i 6 dage end i 12 dage, hvilket også formindsker spredningen. Ret få delforsøg,

Ulempe: Selv på 6 dage kan vejret skifte og give anledning til stor spredning.

- 2) Randomisering: To dåser mærkes henholdsvis bil1 og bil2. Behandlingen O_1K_1 skrives på 2 sedler som anbringes i hver sin dåse, behandlingen O_1K_2 skrives på 2 sedler som anbringes i hver sin dåse osv. (se figuren).

Man trækker nu først de 6 sedler fra dåse med mærket bil 1.

Lad den første seddel der trækkes være O_1K_2 . Det betyder nu, at bil 1 skal forsynes med karburator 2 og olieblending 1 og køre dag 1. Lad den næste seddel der trækkes være O_3K_2 . Det betyder tilsvarende at bil 1 skal forsynes med karburator 2 og olieblending 3 og køre dag 2. Således fortsættes indtil alle 6 sedler er udtrukket

Resultatet blev:

bil 1	dag 1	dag 2	dag 3	dag 4	dag 5	dag 6
	O_1K_2	O_3K_2	O_2K_2	O_1K_1	O_2K_1	O_3K_1

O_1K_1	O_1K_2	O_3K_2
O_2K_1	O_3K_1	O_2K_2

Bil 1

12. Variansanalyse (mere end 2 variable)

Derefter fortsættes med at trække sedler fra dåsen med mærket bil 2. Resultatet blev:

bil 2	dag 1	dag 2	dag 3	dag 4	dag 5	dag 6
	O ₁ K ₁	O ₃ K ₂	O ₁ K ₂	O ₂ K ₁	O ₃ K ₁	O ₂ K ₂

O ₃ K ₁	O ₂ K ₁	O ₂ K ₂
O ₁ K ₂	O ₁ K ₁	O ₃ K ₂

Bil 2

3) Analyse: Tresidet variansanalyse:

Bemærk: Vi antager altid, at **blokke ikke vekselvirker med faktorerne**, idet vi forudsætter, at den ene blok (eksempelvis bil 1) bidrager med en systematisk højere resultat end den anden blok (eksempelvis at bil 1 på alle dage giver et større benzinforbrug end bil 2).

		K ₁	K ₂
Bil 1	O ₁	-	-
	O ₂	-	-
	O ₃	-	-
Bil 2	O ₁	-	-
	O ₂	-	-
	O ₃	-	-

Variansanalyse	SAK	f
Blokke (biler)		1
Olieblanding		2
Karburator		1
Olie * karburator		2
Residual		5
Total		11

Bemærk: Selv om analysen viser, at blokkene mod forventning ikke kan antages at have betydning, må man **ikke poole blokkene ned**, da det svarer til, at man analyserer forsøget som om det var et fuldstændigt randomiseret forsøg. ◆

Eksempel 12.6 (randomiseret blokforsøg).

I nedenstående tabel er anført resultaterne af et fodringsforsøg med svin. Formålet med forsøget var at undersøge, hvorvidt en ændring af vitaminindholdet i foderet gav en forskel i svinenes vægtforøgelse. Vægtforøgelsen afhænger imidlertid også af det enkelte individs genetiske egenskaber. Et fuldstændigt randomiseret forsøg vil derfor sandsynligvis kunne bevirke, at forsøgsfejls spredning bliver så stor, at intet kan påvises (forsøget drukner i støj). Da grise fra samme kuld må forventes at være mere ensartede, vælger man at lave et randomiseret blokforsøg med kuld som blokfaktor. Fra hvert af 4 forskellige kuld grise udtages 3 grise, der bliver fodret med hver sin af tre fodertyper A, B og C med forskelligt vitaminindhold.

Forsøgsresultaterne (vægtforøgelse i kg) var

		Fodertype		
		A	B	C
Kuld	1	7.0	14.0	8.5
	2	16.0	15.5	16.5
	3	10.5	15.0	9.5
	4	13.5	21.0	13.5

Test, om der er nogen væsentlig virkning af ændringen i foderets vitaminindhold.

Løsning:

Analyseres svarende til en tosidet variansanalyse uden vekselvirkning (da vi forudsætter at blokke ikke vekselvirker med faktorer).

Indtastning af data:

	A	B	C	
kuld1		7	14	8,5
kuld2		16	15,5	16,5
kuld3	10,5		15	9,5
kuld4	15,5		21	13,5

Vælg “Funktioner”, “Dataanalyse”, “ANAVA: to faktor uden gentagelse”

Den fremkomne tabel udfyldes:

Udskrift:

RESUME	Antal	Sum	Gennemsnit	Varians
Række 1	3	29,5	9,833333	13,58333
Række 2	3	48	16	0,25
Række 3	3	35	11,66667	8,583333
Række 4	3	48	16	18,75
Kolonne 1	4	47	11,75	15,08333
Kolonne 2	4	65,5	16,375	9,895833
Kolonne 3	4	48	12	13,66667

ANAVA						
Variationskilde	SK	fg	MK	F	P-værdi	F krit
Rækker	87,72917	3	29,24306	6,220089	0,028476	4,757055
Kolonner	54,125	2	27,0625	5,756278	0,040217	5,143249
Fejl	28,20833	6	4,701389			
I alt	170,0625	11				

Det ses heraf, at forsøgsfejls varians (residual) er 4.701.

Vi ser endvidere, at der på et signifikansniveau på 5 % er signifikant forskel på fodertyperne. Af gennemsnittene ses, at fodertype B (kolonne 2) er signifikant bedre end fodertype A (kolonne 1).

Om fodertype C er signifikant ringere end B kan kun afgøres ved at opstille konfidensintervaller.

Vi ser endvidere, at det var fornuftigt at dele op i kuld, da der også er signifikans for kuld.

Vi er imidlertid ikke interesseret i at finde ud af hvilket kuld der er det bedste, da vi jo blot har taget nogle tilfældige kuld ud.

Bemærk: Da der er en blokvirkning vil vægtforøgelsen jo afhænge af hvilket kuld man betragter. Konfidensintervaller kan derfor kun anvendes til relative sammenligninger. ◆

OPGAVER

Opgave 12.1

Fire forskellige typer teknik til blanding af cement ønskes undersøgt med hensyn til resultatets trykstyrke. Følgende data blev opnået:

Blandingsteknik	Trykstyrke (psi)			
B1	3129	3000	2865	2890
B2	3200	3300	2975	3250
B3	2800	2900	2985	3050
B4	2600	2700	2600	2765

Undersøg om forskellen i blandingsteknik har betydning for trykstyrken, og angiv i bekræftende fald den (de) blandingsteknik(er) der har størst trykstyrke.

Opgave 12.2 (E81)

I følgende tabel er angivet resultaterne af gentagne bestemmelser af blodets alkoholkoncentration (i promille) hos 6 forskellige personer efter indtagelsen af 4 cl. alkohol.

Person					
1	2	3	4	5	6
0.76	0.84	0.83	1.00	0.88	0.86
0.82	0.79	0.78	0.90	0.90	0.89
0.79	0.82	0.97	0.92	1.03	0.87
0.86	0.79	0.88	0.88	0.87	0.84

Vurdér på grundlag af dette materiale en antagelse om, at alkoholkoncentrationen i blodet ikke afhænger af andre faktorer end den indtagne alkoholemængde.

Opgave 12.3^T

Modstanden af 5 spoler målt for at kontrollere, om spolerne har samme elektriske modstand. For hver spole målt 4 uafhængige observationer:

Man fandt for hver spole følgende gennemsnit og varians:

Spole nr.	Antal gentagelser	Gennemsnit	Varians
1	4	15.2	0.035
2	4	14.95	0.015
3	4	14.8	0.0216667
4	4	15,15	0.0333333
5	4	14.7375	0.065625

- 1) Undersøg om det kan antages, at de 5 spolers modstande er ens.
- 2) På alle 5 spoler er angivet, at modstanden er 15.0 Ohm. Undersøg under hensyntagen til besvarelsen af spørgsmål 1) ved opstilling af et eller flere konfidensintervaller, om nogle af spolerne kan antages at have modstanden 15.0 Ohm og i bekræftende fald hvilke.

Opgave 12.4

I et forsøg undersøgtes, om det kemiske udbytte af en proces afhænger af hvilken af 2 katalysatorer, der anvendes. Endvidere kan man benytte 3 forskellige apparater, og de kunne også tænkes at have indflydelse på resultatet. Der fandtes følgende udbytter:

	Katalysator K_1	Katalysator K_2
Apparat A_1	69 72	65 66
Apparat A_2	72 71	70 69
Apparat A_3	70 71	72 73

- 1) Undersøg, om det kan antages, at udbyttet fra de 6 behandlinger har samme spredning.
- 2) Idet det antages at forudsætningerne for at udføre en variansanalyse er tilstede, skal der udføres en test til vurdering af, om middeludbyttets (eventuelle) afhængighed af de benyttede katalysatorer og apparater kan beskrives ved en additiv model.
- 3a) Hvis man af økonomiske grund vælger apparat A_1 hvilken katalysator skal man så vælge? Samme spørgsmål vedrørende apparat 2 og 3.
- 3b) Hvis man af økonomiske grunde vælger katalysator 1 hvilket apparat skal man så vælge? Samme spørgsmål vedrørende katalysator 2
- 3c) Hvilken (hvilke) kombinationer af apparat og katalysator giver det største udbytte.

Opgave 12.5^T

Man ønsker at undersøge den virkning som 2 faktorer (typen af glas og fosfor) har på skarpheden af billedet på en TV-skærm. Responsvariablen er den strøm (i microampere) som er nødvendig for at opnå et specifik skarpheds niveau.

Data er vist i nedenstående tabel:

		Fosfortype		
		1	2	3
Glastype	1	280	300	290
		290	310	285
		285	295	290
	2	230	260	220
		235	240	225
		240	235	230

- 1) Undersøg om forudsætningen om varianshomogenitet er opfyldt.
- 2) Idet det antages at forudsætningerne for at udføre en variansanalyse er tilstede, skal der udføres en test til vurdering af, om middelskarphedens (eventuelle) afhængighed af de benyttede glastyper og fosfortyper kan beskrives ved en additiv model.
- 3) Foretag en grafisk kontrol af, om kravet til at residualerne er tilnærmelsesvis normalfordelt er opfyldt. (betragt residualerne i et "normal probability plot"). Undersøg endvidere om enkelte observationer kunne være "outliers".
- 4) Ud fra svaret i spørgsmål 2 skal angives, hvilken glastype og fosfortype der giver den største skarphed (giver den mindste respons)

Opgave 12.6^T (E93)

På en fabrik for glasvarer ønsker man at undersøge hvilken blandt 3 typer lim, der er bedst ved sammenlimning af 3 forskellige glastyper. Forsøget foregik ved, at man limede to glasplader sammen, og efter en passende tid undersøgte, hvor stor en kraft der skulle til for at trække pladerne fra hinanden. Man valgte at lave et fuldstændigt faktorforsøg med 5 gentagelser af hver behandling. Resultatet af forsøget var:

	Glastype A	Glastype B	Glastype C	Gennemsnit
Lim I	- - - - -	- - - - -	- - - - -	21.3333
Lim II	- - - - -	- - - - -	- - - - -	25.9333
Lim III	- - - - -	- - - - -	- - - - -	24.8667
	25.06667	23.5333	23.5333	

En beregning af SAK' størrelserne gav følgende resultat:

	SAK
Lim	173.91111
Glastype	23.51111
Vekselvirkning	100.48889
Gentagelser	
Total	903.91111

- 1) Udfyld resten af variansanalysetabellen.
- 2) Angiv hvilke faktorer der har en virkning.
- 3) Angiv den eller de kombinationer af type lim og type glas, der har den største sammenhængskraft. Angiv et 95% konfidensinterval for de pågældende kombinationer.

Opgave 12.7 (E83)

Fabrikationen af et kemikalium baseres på en bestemt kemisk proces, som forudsætter tilsætning af katalysator og en PH - værdi på ca. 5.

Som led i en laboratiemæssig undersøgelse af mulighederne for at forøge procesudbyttet foretoges bl.a. et forsøg, hvor man dels sammenlignede virkningen af tilsætning af 3 forskellige katalysatorer, dels undersøgte, om udbyttet afhang af, om den nødvendige PH - værdi opnåedes ved tilsætning af HCl i stedet for som hidtil H₂SO₄.

Forsøgsresultaterne var (udbytteprocenter):

		Tilsat syre			
		HCl		H ₂ SO ₄	
Katalysatorer	1	27.0	27.7	30.1	29.1
	2	25.5	27.0	30.6	28.9
	3	26.5	25.0	25.8	28.0

- 1) Foretag en statistisk analyse af forsøgsresultaterne og drag konklusioner.
- 2) Estimer under hensyn til resultatet af den under punkt 1) foretagne analyse procesudbyttet ved benyttelse af katalysator 2 under tilsætning af HCl og opstil et 95% - konfidensinterval for dette udbytte.

Opgave 12.8^T (E78)

Hver af tre laboranter har bestemt hydroquinons smeltepunkt ($^{\circ}$ Celcius) med (de samme) 4 termometre. Resultaterne var:

		Termometre			
		1	2	3	4
Laboranter	1	174.0	173.0	171.5	173.5
	2	173.0	172.0	171.0	171.0
	3	173.5	173.0	173.0	172.5

Det antages, at de nødvendige variansanalyseforudsætninger er opfyldt, og at termometre og laboranter ikke vekselvirker.

Følgende 2 spørgsmål ønskes belyst:

1. Aflæser laboranterne termometrene på samme måde?
2. Viser termometrene ens.
3. Vurder ved et residualplot, om forudsætningen om at termometre og laboranter ikke vekselvirker er rimelig.

Opgave 12.9^T

På en ingeniørskole ønsker man at sammenligne effektiviteten af undervisningen, når man underviser efter tre forskellige undervisningsmaterialer. En række studerende meldte sig frivilligt til forsøget. I det følgende er angivet 12 studerende ordnet efter studentereksamensgennemsnit.

Navn	JK	AL	TS	BS	DT	HN	MO	FD	PJ	KM	SR	RA
Snit	6.3	6.8	7.3	7.3	7.9	8.2	8.4	8.5	9.0	10.2	11.1	11.2

- 1) Hvordan ville du opdele disse studenter på tre hold med 4 på hver hold?
- 2) Hvordan ville du gøre det, hvis karaktererne gik fra 7.8 til 8.2 ?

Opgave 12.10.

Følgende resultater blev opnået fra et eksperiment, hvor man ville undersøge om der var forskel på de resultater, som 5 analyseapparater gav, når man analyserede kvælstofindholdet i jordprøver.

På hver af 3 dage blev en portion jord udvalgt og delt i 5 dele, som ved lodtrækning blev givet til analyse i hver sin maskine. Resultaterne var:

		Maskiner				
		P	Q	R	T	U
	Tirsdag	376	379	399	373	376
	Onsdag	372	374	409	387	386
	Torsdag	332	339	365	350	342

Undersøg på dette grundlag om der er forskel mellem analyseapparaterne, og angiv i bekræftende fald hvilke der er forskellige.

Mener du, at det i denne situation var en god ide at foretage forsøget som et blokforsøg?

Opgave 12.11^T.

Fire forskellige produktionsmetoder P, Q, R, og T ønskes sammenlignet med hensyn til det procentiske udbytte ved udvinding af et metal fra et bestemt mineral. Da man ved forsøget er nødt til at benytte forskellige råvarepartier, og er bange for, at det vil give stor spredning, vælger man at lave et fuldstændigt randomiseret blokforsøg med råvarepartier som blokke. Nedenstående skema angiver resultatet af dette forsøg.

	Metode P	Metode Q	Metode R	Metode T
Råvareparti 1	2.5 2.7	4.7 3.3	2.8 3.3	5.5 5.0
Råvareparti 2	4.6 4.3	7.9 5.9	5.1 6.9	7.2 6.8
Råvareparti 3	4.7 3.9	4.7 4.4	4.4 3.7	6.4 5.7

- 1) Undersøg på grundlag af disse oplysninger, om der er forskel på metoderne, og angiv i bekræftende fald de(n) metode som give størst udbytte
- 2) Foretag grafisk en kontrol af den fundne model og så vidt det er muligt også af dens forudsætninger.

13 ANTALSTABELLER

13.1. Indledning

Vi vil i dette kapitel betragte observationer, som bliver katalogiseret i klasser (categorical data). Et eksempel herpå er følgende:

Eksempel 13.1.(antalstabel)

Et ministerium planlægger en oplysningskampagne om de fysiske og psykiske virkninger af at ryge hash. Før kampagnen viste en undersøgelse at 7% af indbyggerne ønskede at hash blev legaliseret, 65% at man beholde det nuværende forholdsvis liberale straffepolitik, 18% ønskede strengere straffe og 10% havde ingen mening. Efter kampagnen spurgte man 500 personer (repræsentativt udvalgt), og svarene fremgik af følgende tabel.

	Legalisering	Efter eksisterende lov	Strengere straf	Ingen mening
Efter kampagnen	39	336	99	26

Kan man på dette grundlag vise på et signifikansniveau på $\alpha = 0.01$, at kampagnen har betydet en ændring af folks mening? ◆

Af central betydning for testning af sådanne spørgsmål er begrebet “multinomial eksperiment”.

Definition af et multinomialt eksperiment.

- 1) Lad et eksperiment have k mulige udfald. Disse udfald kaldes “klasser”, “kategorier” eller “celler”
- 2) Eksperimentet gentages n gange uafhængigt af hinanden.
- 3) Sandsynligheden for de k udfald er p_1, p_2, \dots, p_k (hvor $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$) er de samme ved de n gentagelser.
- 4) De statistiske variable der er af interesse er antallet n_1, n_2, \dots, n_k i hver af de k klasser.

Betragter vi eksempel 13.1 ses, at betingelserne er opfyldt:

Eksperimentet består i tilfældigt at udtage $n = 500$ personer af en stor population og spørge dem om strafferammen for besiddelse af hash

- 1) Udfaldene er svar på spørgsmålet, og der er $k = 4$ (og kun 4) svarmuligheder (4 klasser).
- 2) Resultatet af hvad en person svarer vil være uafhængigt af hvad de øvrige svarer.
- 3) Sandsynligheden for udfaldene i de 4 klasser vil være p_1, p_2, p_3 og p_4 , hvor disse sandsynligheder er ukendte.
- 4) De statistiske variable X_i er antal personer blandt 500 som har en af de i meninger om straffen for hash.

13.2. En-vejs tabel

Eksempel 13.1.(fortsat)

Kan man på det i eksempel 13.1 angivne grundlag vise på et signifikansniveau på $\alpha = 0.01$, at kampagnen har betydet en ændring af folks mening?

LØSNING:

Lad

X_1 = antal personer blandt 500, der går ind for legalisering. $P(X_1) = p_1$.

X_2 = antal personer blandt 500, der går ind for den nuværende straffepolitik. $P(X_2) = p_2$.

X_3 = antal personer blandt 500, der går ind for en strengere straf. $P(X_3) = p_3$.

X_4 = antal personer blandt 500, der ingen mening har. $P(X_4) = p_4$.

Vi ønsker at teste nulhypotesen

$$H_0: p_1 = 0.07, p_2 = 0.65, p_3 = 0.18, p_4 = 0.10$$

mod den alternative

H : "Mindst én af sandsynlighederne afviger fra den angivne værdi i nulhypotesen."

Vi beregner nu de forventede værdier, forudsat nulhypotesen er sand.

Resultatet opstilles i det følgende skema:

nr	1	2	3	4
O_i	39	336	99	26
E_i	$E_1 = 500 \cdot 0.07 = 35$	$E_2 = 500 \cdot 0.65 = 325$	$E_3 = 500 \cdot 0.18 = 90$	$E_4 = 500 \cdot 0.1 = 50$

Da alle de forventede værdier er større end 5 er forudsætningerne for at kunne foretage en χ^2 -test opfyldt.

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(39 - 35)^2}{35} + \frac{(336 - 325)^2}{325} + \frac{(99 - 90)^2}{90} + \frac{(26 - 50)^2}{50} = 13.249.$$

Da $\chi^2 > \chi_{0.99}^2(4 - 1) = 11.35$ (eller P -værdi = 0.0041) forkastes nulhypotesen (tostjernet), dvs. kampagnen har haft en betydning for meningen om legalisering af hash.

Excel - løsning:

De observerede værdier skrives i en søjle, de forventede værdier i en anden søjle:

39	35
336	325
99	90
26	50

Vi får P -værdi =CHITEST(A1:A4;B1:B4) = 0,004127



Testning af fordelingstype.

Er der data nok, er der ved ovennævnte metode muligt at teste om en statistisk variabel har en forventet fordeling. Det følgende eksempel demonstrerer dette.

Eksempel 13.2. (Testning af om data er normalfordelt).

I Statistiske Grundbegreber eksempel 1.3 havde man for 75 patienter med dårligt knæ målt pH i ledvæsken. Man fandt, at $\bar{x} = 7.287$ og $s = 0.134$.

Lad $X = \text{pH}$ for en patient. Vi antog dengang, at X var normalfordelt $n(\bar{x}, s)$.

Foretag en χ^2 -test af denne påstand.

LØSNING:

Vi ønsker at teste nulhypotesen H_0 : X er normalfordelt $n(7.287, 0.134)$

I eksempel 1.3 blev intervallet fra den største pH-værdi til den mindste pH-værdi delt op i en passende mængde intervaller, og man talte op hvor mange resultater der faldt i hvert interval. Resultatet ses i nedenstående skema som de observerede værdier.

Under forudsætning af, at nulhypotesen er sand, kan man nu beregne det forventede antal i hvert interval. Som et eksempel på beregnes den forventede værdi i intervallet $]7.10 ; 7.18]$:

$$E_i = 75 \cdot \left(\Phi\left(\frac{7.18 - 7.287}{0.134}\right) - \Phi\left(\frac{7.10 - 7.287}{0.134}\right) \right) = 75 \cdot (\Phi(-0.7985) - \Phi(-1.3955))$$

$$= 75 \cdot (0.212 - 0.081) = 9.82 \approx 9.8 .$$

Da ingen forventede værdier må være under 1 slås de yderste klasser sammen. Da endvidere højst 20% må være under 5, slås yderligere sammen som vist på skemaet.

Klasser	Observerede værdier	Forventede værdier	Klasser sammenlægges	
$]-\infty - 6.94]$	0	0.36	1.73	6.10
$]6.94 - 7.02]$	2	1.37		
$]7.02 - 7.10]$	5	4.37	4.37	
$]7.10 - 7.18]$	8	9.8	9.8	9.8
$]7.18 - 7.26]$	17	15.6	15.6	15.6
$]7.26 - 7.34]$	18	17.5	17.5	17.5
$]7.34 - 7.42]$	16	13.9	13.9	13.9
$]7.42 - 7.50]$	4	7.84	7.84	7.84
$]7.50 - 7.58]$	3	3.12	3.12	4.21
$]7.58 - 7.66]$	1	0.88	1.09	
$]7.66 - 7.74]$	1	0.18		
$]7.74 - \infty [$	0	0.03		

$$\chi^2 = \frac{(7 - 6.10)^2}{6.10} + \frac{(8 - 9.8)^2}{9.8} + \dots + \frac{(5 - 4.21)^2}{4.21} = 2.95$$

Da vi har brugt to værdier (gennemsnit og spredning) til at udregne de forventede værdier, er $f = k - 1 - 2 = 7 - 3 = 4$.

Da $\chi^2_{0,95}(4) = 9.49 > 2.95$ (eller P - værdi = 0.566)

accepteres nulhypotesen, dvs. vi kan ikke på det grundlag afvise, at X er normalfordelt. ◆

Excel - løsning:

Det er så besværligt at foretage testen i Excel, at det næppe er umagen værd.

Excel sætter således frihedsgradstallet "forkert" til $k - 1 = 6$.

Data beregnes:

Eksempel:

$E_4 = 75 * (\text{NORMFORDELING}(A17;7,287;0,134;\text{SAND}) - \text{NORMFORDELING}(A16;7,287;0,134;\text{SAND})) = 9,814405$

Man kopierer cellerne nedad.

klasser	observerede	forventede	Sam_obs	Sam_forv
6,94	0	0,360381		
7,02	2	1,376319		
7,1	5	4,370493	7	6,107193
7,18	8	9,814405	8	9,814405
7,26	17	15,59016	17	15,59016
7,34	18	17,52109	18	17,52109
7,42	16	13,93208	16	13,93208
7,5	4	7,83749	4	7,83749
7,58	3	3,118565	5	4,197591
7,66	1	0,877413		
7,74	1	0,174486		
10000	0	0,027127		

P - værdi = $\text{CHIFORDELING}(\text{CHIINV}(\text{CHITEST}(D16:D22;E16:E22);6);4) = \underline{\underline{0,566932485}}$

Vi får samme P - værdi som før.

13.3. To-vejs tabel

I dette afsnit betragter vi multinominale eksperimenter hvor data er karakteriseret ved to kriterier. Et eksempel herpå er følgende:

Eksempel 13.3. (E87) (testning af uafhængighed)

Ved en uddannelsesinstitution indstillede et år 500 studerende sig til en årsprøve, der bl.a. omfattede matematik og fysik.

De opnåede karakterer i de to fag inddeltes i 4 grupper:

Observerede værdier		Fysikkarakterer				Total
		0, 3, 5	6, 7	8, 9	10, 11, 13	
Matematik-karakterer	0, 3, 5	18	46	13	0	77
	6, 7	22	60	42	5	129
	8, 9	7	123	42	16	188
	10, 11, 13	2	28	68	8	106
Total		49	257	165	29	500

Undersøg om der er en sammenhæng mellem de opnåede fysikkarakterer og de opnåede matematikkarakterer.

LØSNING:

X_1 = antal studerende med opnået matematikkarakter

X_2 = antal studerende med opnået fysikkarakterer

H_0 : X_1 og X_2 er statistisk uafhængige.

Udfaldene antages at være uafhængige, og da de studerende antages at være repræsentative for en årgang med samme sandsynlighed fra årgang til årgang.

Dette kan derfor opfattes som et multinomialt eksperiment.

Vi får følgende tabel over de forventede værdier:

Forventede værdier		Fysikkarakterer			
		0, 3, 5	6, 7	8, 9	10, 11, 13
Matematik- karakterer	0, 3, 5	$\frac{77 \cdot 49}{500} = 7.546$	$\frac{77 \cdot 257}{500} = 39.578$	$\frac{77 \cdot 165}{500} = 25.41$	$\frac{77 \cdot 29}{500} = 4.466$
	6, 7	$\frac{129 \cdot 49}{500} = 12.642$	$\frac{129 \cdot 257}{500} = 66.306$	$\frac{129 \cdot 165}{500} = 42.57$	$\frac{129 \cdot 29}{500} = 7.482$
	8, 9	$\frac{188 \cdot 49}{500} = 18.424$	$\frac{188 \cdot 257}{500} = 96.632$	$\frac{188 \cdot 165}{500} = 62.04$	$\frac{188 \cdot 29}{500} = 10.904$
	10, 11, 13	$\frac{106 \cdot 49}{500} = 10.388$	$\frac{106 \cdot 257}{500} = 54.484$	$\frac{106 \cdot 165}{500} = 34.98$	$\frac{106 \cdot 29}{500} = 6.148$

Da alle de forventede værdier er over 1, og kun 1 klasse af 16 ligger under 5 er betingelserne for en χ^2 - test opfyldt.

Vi beregner nu teststørrelsen

$$\chi^2 = \frac{(18 - 7.546)^2}{7.546} + \frac{(46 - 39.578)^2}{39.578} + \dots + \frac{(8 - 6.148)^2}{6.148} = 108.917$$

Frihedsgradstallet er $f = (r - 1) \cdot (q - 1) = (4 - 1) \cdot (4 - 1) = 9$

Idet $\chi^2 = 108.92 > \chi_{0.999}^2(9) = 27.9$ forkastes nulhypotesen (stærkt bevis) dvs.

der er ikke uafhængighed mellem fysikkaraktererne og matematik karaktererne.

Når vi ser på tallene er det tydeligt at gode karakterer i det ene fag også har en tendens til at bevirke gode karakterer i det andet fag.

Excel - løsning:

Det er ret besværligt at beregne de forventede værdier i Excel, men er det først gjort, er det nemt at få P-værdien.

Observerede data:

18	46	13	0
22	60	42	5
7	123	42	16
2	28	68	8

13 Antalstabeller

Forventede data:

Beregning i celle D1A1 sker ved følgende ordre:

$$=SUM(D1:G1)*SUM(D1:D4)/SUM(D1:G4) = 7.546$$

Bemærk at ønsker man at kopiere ned gennem en søjle, skal visse adresser være absolutte (med \$ tegn)

7,546	39,578	25,41	4,466
12,642	66,306	42,57	7,482
18,424	96,632	62,04	10,904
10,388	54,484	34,98	6,148

$$P - \text{værdi} = \text{CHITEST}(D1:G4;I1:L4) = 2,44228E-19$$



OPGAVER

Opgave 13.1(E79)

For en støvfyldt gasart ønskede man at bestemme antallet af støvpartikler pr. volumenenhed. Til brug herfor sendte man 500 gange en lysstråle gennem et volumen, der var så lille (10^{-6} cm^3), at det kun indeholdt få støvpartikler. Man iagttog hver gang volumenet gennem et ultramikroskop og optalte antallet af støvpartikler. Forsøgsresultaterne var:

Antal partikler	0	1	2	3	4	5	6	7	8	I alt
Antal gange	95	163	134	67	24	12	4	0	1	500

- 1) Angiv hvilken fordelingstype du vil benytte for antallet X af støvpartikler pr. 10^{-6} cm^3 .
- 2) Estimer parameteren/parametrene i den formodede fordeling.
- 3) Foretag en testning af den opstillede model.
- 4) Estimer middeltallet af støvpartikler pr. cm^3 .

Opgave 13.2(F93)

Ved måling af 100 akslers diametre fandtes følgende grupperede empiriske fordeling:

Intervalinddeling		Antal observationer
Nedre grænse	Øvre grænse	
1.155	1.165	1
1.165	1.175	7
1.175	1.185	10
1.185	1.195	22
1.195	1.205	27
1.205	1.215	18
1.215	1.225	8
1.225	1.235	7
I alt		100

Udfør en χ^2 -testning af, om akseldiameteren kan antages at være normalfordelt.

(Vink: Ved beregningen af estimater for middelværdi og spredning tænkes alle observationer i et interval samlet i midtpunktet af intervallet)

Opgave 13.3(E74)

En terning kastedes 120 gange, hvorved følgende resultater fandtes:

	Antal Øjne					
	1	2	3	4	5	6
Antal gange	25	17	15	23	24	16

Test nulhypotesen: Terningen er en ærlig" terning.

Opgave 13.4

5 typer vaccine mod en bestemt sygdom blev undersøgt ved, at 6 grupper på hver 200 forsøgsdyr (mus) blev udsat for smitte. De 5 af grupperne fik hver sin type vaccination, mens den sidste gruppe ikke blev vaccineret. Efter en passende tid undersøgte man hvor mange af de 200 dyr, der havde fået sygdommen. Følgende resultater fandtes:

Gruppe nr	1	2	3	4	5	6
Antal syge dyr	12	13	18	10	16	27

Vi ønsker at foretage en statistisk analyse af, om procenten af smittede dyr i de 6 grupper kan antages at være den samme.

Opgave 13.5(E81)

En kemikaliefabrik har påbegyndt en fabrikation af kunstgødning. Ved fabrikationen hældes gødningen i sække af 5 "ens" maskiner, idet det tilstræbes, at nettoindholdet i sækkene er 25 kg i hver .

Ved indkørselen af produktionen fandt man, at der var mange overvægtige og undervægtige sække. Følgende antalstabel indeholder produktionsresultatet ved første prøvekørsel:

		Maskiner				
		1	2	3	4	5
Nettovægt	Under 24 kg	5	3	7	3	12
	Mellem 24 og 26 kg	14	17	16	15	13
	Over 26 kg	11	10	7	12	5

Foretag en testning af, om det kan antages, at vægtfordelingen er den samme for de 5 maskiner.

Opgave 13.6(E81) (test i antalstabel)

Ved start af en stor amerikansk industrivirksomhed underkastedes alle 173 ansøgere til et bestemt job på fabrikken en psykoteknisk prøve. Idet ansøgerne grupperedes efter, om de var medlemmer af en fagforening eller ikke, er nedenstående anført resultaterne af den pågældende prøve.

	Resultat af prøven		
	godt	middel	dårligt
Medlem af en fagforening	37	42	23
Ikke medlem af en fagforening	17	26	28

Hvad kan der sluttes om sammenhæng mellem præstation ved prøven og medlemskab af en fagforening?

Opgave 13.7(E81)

En fabrik, der arbejdede i 3 - holdskift, fremstillede bl.a. en bestemt maskindel i massefabrikation.

For at undersøge, om kvaliteten af denne maskindel påvirkedes af omstændigheder, der afhang af, inden for hvilket tidsrum af døgnet fabrikationen fandt sted (træthed, belysningsforhold m.v.), lod man et bestemt arbejds hold arbejde på hvert af de 3 skift en uge ad gangen. Man regnede med, at produktionsbetingelserne fra uge til uge var i det væsentlige uændrede. Arbejds holdets ugentlige produktion var:

Skift	Antal ikke - defekte emner	Antal defekte emner
kl. 8 ⁰⁰ - 16 ⁰⁰	1602	88
kl. 16 ⁰⁰ - 24 ⁰⁰	1590	122
kl. 0 ⁰⁰ - 8 ⁰⁰	1507	103

Foretag en statistisk analyse af, om produktionens kvalitet må antages at afhænge af produktionsperioden.

Opgave 13.8(E81)

Et forsikrings selskab har i løbet af et kalenderår undersøgt bilkaskoskaderne og registreret antallet af skades anmeldelser og forsikringstagerens (førerens) alder.

Resultatet blev:

		Forsikringstagerens alder				
		18 - 27	28 - 37	38 - 47	48 - 57	≥ 58
Antal skader	1	74	60	51	66	50
	2	31	25	22	16	15
	≥ 3	29	10	6	5	7

- 1) Man havde en forhåndsformodning om, at aldersgruppen 18-27 år skadesmæssigt adskiller sig fra de øvrige grupper. Bekræftes denne forhåndsformodning?
- 2) Tillader det ovennævnte materiale en antagelse om, at der er uafhængighed mellem antallet af skader og forsikringstagerens alder for de sidste 4 aldersgrupper?

Appendix A. Statistik med Exell

a1: Forudsætninger.

- 1) Excel har en statistikpakke "Analysis ToolPak", som ikke automatisk bliver installeret. Dette "tilføjelsesprogram" skal man ofte særskilt "bede" om. Hvorledes dette gøres, kan ses ved at trykke på hjælpetasten F1 og søge "Analysis ToolPak"+Analysis ToolPak VBA"
- 2) Excel er oversat til dansk. Skulle man have den engelske version, vil det dog næppe give større problemer.

a2. Inddata.

Placering: Vi vil i det følgende for kortheds skyld antage, at den første stikprøves værdier står i cellerne A1, A2, A3 . . . An.

Kræves der flere variable vil den næste stå i cellerne B1, B2, B3 . . . Bn, den næste igen i cellerne C1, C2, C3 . . . Cn osv.

Navngivning: Sædvanligvis vil vi kun angive dem ved deres placering såsom A1:A10.

I nogle tilfælde kan det dog være praktisk at navngive dem f.eks med "x", hvilket sker ved at markere x - cellerne og skrive x oppe i navngivningsfeltet øverst til venstre.

a3. Beregning af (statistiske) funktioner:

- 1) Vælg den celle hvor resultatet skal stå (eksempelvis A1).
- 2) På værktøjslinien foroven:
 - 2a) Tryk på =
 - 2b) Til venstre trykkes på \Downarrow hvorved der fremkommer en rullemenu
 - 2c) På denne vælges den ønskede funktion eksempelvis "NORMALFORDELING"
 - 2d) Der fremkommer en tabel med anvisning på, hvordan den skal udfyldes.

a3.1. Normalfordeling.

Lad X være normalfordelt $n(\mu, \sigma)$

$$P(X \leq x) = \text{NORMFORDELING}(x; \mu; \sigma; \text{SAND})$$

$$P(X = x) = \text{NORMFORDELING}(x; \mu; \sigma; \text{FALSK})$$

Fraktil

$$u_\alpha = \text{NORMINV}(\alpha; \mu; \sigma) \text{ (se figur)}$$

Eksempel:

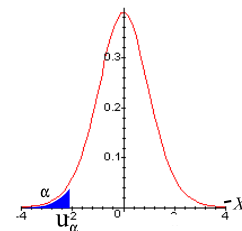
- 1) Find for $n(89.6, 0.5)$ $P(89.2 \leq X \leq 90.8)$. (jævnfør eksempel 2.3)

$$P(89.2 \leq X \leq 90.8) = P(X \leq 90.8) - P(X \leq 89.2) \\ = \text{NORMFORDELING}(90.8; 89.6; 0.5; \text{SAND}) - \text{NORMFORDELING}(89.2; 89.6; 0.5; \text{SAND})$$

Resultat: 0.69146

- 2) Find for den normerede normalfordeling $u_{0.975}$

$$u_{0.975} = \text{NORMINV}(0.975; 0; 1) = \underline{\underline{1.959961}}$$



a3.2 χ^2 - fordeling.Lad X være χ^2 - fordelt med f frihedsgrader

$$P(X \leq x) = 1 - \text{CHIFORDELING}(x;f)$$

(bemærk: CHIFORDELING(x ;f) udregner "øvre hale" af fordelingen)**Fraktil**

$$\chi_{\alpha}^2(f) = \text{CHIINV}(1 - \alpha ; f)$$

(bemærk: CHIINV(α ;f) udregner "øvre hale")**Eksempel:** (jævnfør eksempel 3.1)Find for χ^2 - fordelingen med 8 frihedsgrader

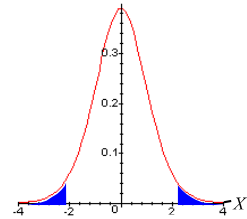
1) $P(X \leq 5)$

$$P(X \leq 5) = 1 - \text{CHIFORDELING}(5;8) = \underline{\underline{0,242424}}$$

2) $\chi_{0,025}^2(8)$ og $\chi_{0,975}^2(8)$.

$$\chi_{0,975}^2(8) = \text{CHIINV}(0,025;8) = \underline{\underline{17,53454}}$$

$$\chi_{0,025}^2(8) = \text{CHIINV}(0,975;8) = \underline{\underline{2,179725}}$$

**a3.3 t - fordeling.**Lad X være t - fordelt med f frihedsgrader, og lad $x > 0$.

$$P(X \leq x) = 1 - \text{TFORDELING}(x;f;1) \quad (\text{bemærk: TFORDELING}(x;f;1) \text{ udregner "øvre hale" af fordelingen})$$

$$P(X \leq -x) + P(X \geq x) = \text{TFORDELING}(x;f;2) \quad (\text{se figur})$$

Fraktil

$$t_{\alpha}(f) = \text{TINV}(2(1 - \alpha) ; f) , \alpha > 0.5$$

$$t_{\alpha}(f) = - \text{TINV}(2\alpha ; f) , \alpha < 0.5$$

Bemærk: TINV(α ;f) udregner "øvre hale", svarende til $1 - \frac{\alpha}{2}$ Bemærk: Man må udnytte symmetrien i t -fordelingen, for værdier mindre end 0 (svarende til $\alpha < 0.5$)**Eksempel:**(jævnfør eksempel 3.2)Lad X være t - fordelt med 12 frihedsgraderFind 1) $P(X \geq 1)$ og $P(X \leq -1)$

$$P(X \geq 1) = \text{TFORDELING}(1;12;1) = \underline{\underline{0,168525}}$$

$$P(X \leq -1) = P(X \geq 1) = \text{TFORDELING}(1;12;1) = \underline{\underline{0,168525}}$$

2) $t_{0,975}(12)$ og $t_{0,025}(12)$.

$$t_{0,975}(12) = \text{TINV}(2(1-0,975);12) = \underline{\underline{2,178813}}$$

$$t_{0,025}(12) = - \text{TINV}(0,05;12) = - \underline{\underline{2,178813}}$$

a3.4. F - fordeling.Lad X være F - fordelt $F(f_T, f_N)$

$$P(X \leq x) = 1 - \text{FFORDELING}(x ; f_T ; f_N)$$

Fraktil

$$F_{\alpha}(f_T, f_N) = \text{FINV}(1 - \alpha ; f_T ; f_N)$$

Eksempel:Lad X være F - fordelt $F(8,12)$ (jævnfør eksempel 3.3)Find 1) $P(X \geq 2)$

$$P(X \geq 2) = \text{FFORDELING}(2;8;12) = \underline{\underline{0,134677}}$$

2) $F_{0,95}(8,12)$ og $F_{0,05}(8,12)$.

$$F_{0,95}(8,12) = \text{FINV}(0,05;8;12) = \underline{\underline{2,848566}}$$

$$F_{0,05}(8,12) = \text{FINV}(0,95;8;12) = \underline{\underline{0,304512}}$$

a3.5. Hypergeometrisk fordeling

Lad X være hypergeometrisk fordelt $h(N, M, n)$

$$P(X = x) = \text{HYPGEOFORDELING}(x; n; M; N)$$

Eksempel:(jævnfør eksempel 7.1)

Find for $h(600,10,25)$ $P(X \leq 1)$

$$P(X \leq 1) = \text{HYPGEOFORDELING}(1;25;10;600) + \text{HYPGEOFORDELING}(0;25;10;600) = \underline{\underline{0,938876}}$$

a3.6. Binomialfordeling

Lad X være binomialfordelt $b(n, p)$

$$P(X = x) = \text{BINOMIALFORDELING}(x; n; p; \text{FALSK})$$

$$P(X \leq x) = \text{BINOMIALFORDELING}(x; n; p; \text{SAND})$$

Eksempel (jævnfør eksempel 7.4 og 7.5)

1) Find for binomialfordelingen $b(7,0.3333)$, $P(X = 3)$

$$P(X = 3) = \text{BINOMIALFORDELING}(3;7;0,3333;\text{FALSK}) = \underline{\underline{0,256033}}$$

2) Find for binomialfordelingen $b(24,0.3333)$ $P(X \geq 13)$

$$P(X \geq 13) = 1 - P(X \leq 12) = 1 - \text{BINOMIALFORDELING}(12;24;0,3333;\text{SAND}) = \underline{\underline{0,028418}}$$

a3.7. Poissonfordeling

Lad X være Poissonfordelt $p(\mu)$

$$P(X = x) = \text{POISSON}(x; \mu; \text{FALSK})$$

$$P(X \leq x) = \text{POISSON}(x; \mu; \text{SAND})$$

Eksempel (jævnfør eksempel 7.8)

Find for Poissonfordelingen $p(2.46)$ $P(X \leq 4)$ (eksempel 7.8)

$$P(X \leq 4) = \text{POISSON}(4;2,46;\text{SAND}) = \underline{\underline{0,896458}}$$

a4. Beregn gennemsnit, spredning, median, kvartiler af n tal $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$,

$\bar{x} = \text{MIDDEL}(A1:An)$, $s = \text{STDAFV}(A1:An)$, 1. kvartil = $\text{KVARTIL}(A1:An;1)$,

Median = 2 kvartil = $\text{KVARTIL}(A1:An;2)$, 3. kvartil = $\text{KVARTIL}(A1:An;3)$

Eksempel: Beregn gennemsnit, spredning og median af tallene 1 3 4 8

$$\bar{x} = \text{MIDDEL}(A1:A4) = 4, \quad s = \text{STDAFV}(A1:A4) = 2.9439, \quad \text{median} = \text{KVARTIL}(A1:A4;2) = 3.5$$

a5. Beregning af histogram

Indtast data (eksempelvis data fra eksempel 1.3 side 6)

Vælg "Funktioner", Dataanalyse, Histogram

I den fremkomne tabel udfyldes "inputområdet" med A1:An.

1) Trykkes på OK fås en tabel med hyppigheder, hvor intervalgrænserne er fastlagt.

2) Ønsker man selv at bestemme grænserne, skal man også udfylde intervalområdet. Dette gøres ved at skrive de nedre grænser i en søjle (f.eks i B1 til B7) og så skrive B1:B7 i inputområdet (man får så samme tal som på side 7).

Ønskes også en beregning af de kumulative frekvenser sætter man yderligere sætter et mærke ved "kumulativ frekvens".

3) Ønskes et histogram (som tegning på side 8), så

3a) Marker udskriften (inklusive overskrifter) for både grænser og hyppighed, og tryk på "ikonet" Diagram i værktøjslinien

3b) Vælg søjle og tryk på "udfør", så fås en figur nogenlunde svarende til tegningen på side 8
Tegningen kan justeres f.eks ved at markere en tilfældig kolonne, tryk højre musetast, og vælg "formater dataserie", "indstillinger", og sæt mellemrumsbredde til 0.

4) Ønskes tegnet en sumpolygon, så

4a) Marker udskriften (inklusive overskrifter) for både grænser og kumulativ frekvens (slet evt. frekvenssøjle og flyt de andre søjler sammen)

4b) Vælg kurve og tryk på "udfør"

a6. Konfidensintervaller for 1 normalfordelt variabel.

a6.1. 95%- konfidensinterval for middelværdi af stikprøve idet σ er kendt

Radius r i et 95% konfidensinterval for μ : $\bar{x} \pm r = \bar{x} \pm u_{0,975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$r = \text{KONFIDENSINTERVAL}(0,05; \sigma, n)$.

Eksempel. (jævnfør eksempel 4.2)

Indtast data. Lad stikprøvens værdier være 6 værdier og lad $\sigma = 0.25$

Gennemsnittet =MIDDEL(A1:A6) = 8,268333

Vælg den celle, hvor konfidensintervallets radius skal stå

Vælg "KONFIDENSINTERVAL" og indsæt de ønskede værdier i den fremkomne tabel

$r = \text{KONFIDENSINTERVAL}(0,05; 0,25; 6)$. Resultat 0,200038 95% konfidensinterval: 8,268 ± 0,200

a6.2. 95%- konfidensinterval for middelværdi af stikprøve idet σ er ukendt

Radius r i et 95% konfidensinterval for μ : $\bar{x} \pm r = \bar{x} \pm t_{0,975}(f) \frac{s}{\sqrt{n}}$:

Eksempel: Lad stikprøvens værdier være de 6 værdier i eksempel 4.2

Indtast data.

Vælg "Funktioner", Dataanalyse, Beskrivende statistik

I den fremkomne tabel udfyldes "inputområdet" med A1:A6, Outputområdet til B1, og konfidensniveau for middelværdi sættes til 95%

Vælg den celle, hvor konfidensintervallets radius skal stå

Resultat:

Kolonnel	
Konfidensniveau(95,0%)	0,253035

$r = 0,253035$ 95% konfidensinterval: 8,268 ± 0,253035

Vælges "Resumestatistik" fås også gennemsnittet + en række andre oplysninger.

a6.3. 95%- konfidensinterval for spredning af stikprøve idet μ er ukendt

95% konfidensinterval for σ :
$$\sqrt{\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}$$

Der er ingen funktion hertil i Excell, så man må beregne konfidensintervallet direkte ud fra formlen.

Eksempel. (hentet fra eksempel 4.3)

Indtast de 12 data i en søjle, og navngiv dem eksempelvis som "saltindhold"

Vælg den celle, hvor konfidensintervallets nedre endepunkt skal stå

Beregn =(STDAFV(saltindhold)^2*11/CHIINV(0,025;11))^0,5 = 0,224014

Vælg den celle, hvor konfidensintervallets øvre endepunkt skal stå

Beregn =(STDAFV(saltindhold)^2*11/CHIINV(0,975;11))^0,5 = 0,536917

Konfidensinterval [0,224 ; 0,537]

a7. Hypotesetest: 1 kontinuert variabel)

Lad X være normalfordelt $n(\mu, \sigma)$.

Lad stikprøveværdierne stå i en søjle med navnet "resultater"

a7.1. $H_0: \mu \leq \mu_0, \sigma$ kendt. :

P -værdi = ZTEST(resultater; μ_0 ; σ)

Eksempel (hentet fra eksempel 5.1):

Test af nulhypotese $H_0: \mu \leq 69,2$ idet $\sigma = 1,0$ er kendt

Vælg "Z-TEST" og indsæt de ønskede værdier i den fremkomne tabel.

P -værdi = ZTEST(resultater;69,2;1) = 0,026549.

a7.2. $H_0: \mu \geq \mu_0, \sigma$ kendt.:

P -værdi = 1 - ZTEST(resultater; μ_0 ; σ)

a7.3. $H_0: \mu = \mu_0, \sigma$ kendt. :

P -værdi = ZTEST(resultater; μ_0 ; σ) eller P -værdi = 1 - ZTEST(resultater; μ_0 ; σ) (den mindste af de to værdier)

Eksempel (hentet fra eksempel 5.4)

Test af nulhypotese $H_0: \mu = 8,40$ idet $\sigma = 0,25$ er kendt

Vælg "Z-TEST" og indsæt de ønskede værdier i den fremkomne tabel.

ZTEST(resultater;8,4;0,25). Resultat 0,901486. Heraf fås P -værdi = 1 - 0,901486 = 0,0985

7.4. $H_0: \mu \geq \mu_0, \sigma$ er ukendt:

Da der ikke i Excel findes en t-test for 1 variabel må man skrive formelen direkte.

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu_0) \cdot \sqrt{n}}{s}$$

Eksempel (hentet fra eksempel 5.5)

Test af nulhypotese $H_0: \mu \geq 1,7$ idet σ er ukendt

Da t-fordelingen i Excel ikke accepterer negative værdier må man tage den numeriske værdi (abs) af resultatet.

P -værdi = TFORDELING((ABS(MIDDEL(resultater)-1,7)/STDAFV(resultater)*15^0,5);14;1) = 0,105782

7.5. $H_0: H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2, \mu$ er ukendt

Da der ikke i Excel findes en χ^2 -test for 1 variabel må man skrive formelen direkte.

$$\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma_0^2}$$

Eksempel (hentet fra eksempel 5.6)

Test af nulhypotese $H_0: \sigma^2 \leq 0,2^2$ idet μ er ukendt

P -værdi = CHIFORDELING((20-1)*0,24^2/0,2^2;19) = 0,096543

8. Sandsynlighedsregning

8.1. Beregn fakultet $n!$

Eksempel :

Beregn $5!$

$5! = \text{FAKULTET}(5) = 120$

8.2. Beregn kombination $K(n,p) = \binom{n}{p}$.

Eksempel : Beregn $K(5,3) = \binom{5}{3}$. $\binom{5}{3} = \text{KOMBIN}(5;3) = 10$

a9. Hypotesetest: 2 kontinuerte variable

Lad X_1 og X_2 være uafhængige normalfordelte variable henholdsvis $n(\mu_1, \sigma_1)$ og $n(\mu_2, \sigma_2)$,

hvor $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ er ukendte

Lad stikprøveværdierne for X_1 og X_2 stå i søjlerne A1 - A6 og B1 - B6 (man kunne eventuelt navngive søjlerne med navnene henholdsvis "resultater_1" og "resultater_2")

I en række tilfælde giver Excell mulighed for at løse problemet på 2 måder:

Metode 1. Der beregnes kun en P -værdi

Metode 2. Der beregnes en række mere eller mindre interessante størrelser herunder P -værdien.

I det følgende beskrives begge metoder.

a9.1. $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$:

Metode 1: P -værdi = FTEST(A1:A6 ; B1:B6).

FTEST beregner arealet til begge sider svarende til, at man skal sammenligne med 5% (og ikke 2.5%)

Metode 2: Vælg "Funktioner", "Dataanalyse", "F-test: Dobbelt stikprøve for varians"

Den fremkomne tabel udfyldes:

"Område for variabel 1": A1:A6 "Område for variabel 2": B1:B6

"Outputområde": Skriv cellenummer for øverste venstre celle i det ønskede outputområde.

Metoderne og deres udskrift er vist i eksemplerne 10.4 punkt 1 og 10.5 punkt 1

a9.2. $\sigma_1 = \sigma_2 : H_0: \mu_1 \leq \mu_2$:

Metode 1: P -værdi = TTEST(A1:A6 ; B1:B6;1 ;2)

Metode 2: Vælg "Funktioner", "Dataanalyse", "t-test: to stikprøver med ens varians"

Den fremkomne tabel udfyldes som under punkt 1, metode 2.

a9.3. $\sigma_1 \neq \sigma_2 : H_0: \mu_1 \leq \mu_2$:

Metode 1: P -værdi = TTEST(A1:A6;B1:B6;1;3)

Metode 2: Vælg "Funktioner", "Dataanalyse", "t-test: to stikprøver med forskellig varians"

Den fremkomne tabel udfyldes som under punkt 1, metode 2.

a9.4. $\sigma_1 \neq \sigma_2 : H_0: \mu_1 = \mu_2$:

Metode 1: P -værdi = TTEST(A1:A6 ; B1:B6;1 ;3) eller

P -værdi = TTEST(A1:A6 ; B1:B6;1 ;3) (den mindste af de to værdier)

Metode 2: Samme fremgangsmåde som under de forrige punkter.

Metoderne og deres udskrift er vist i eksemplerne 10.4 punkt 1 og 10.5 punkt 1

a9.5. Parvise observationer:

$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$:

Metode 1: P -værdi = TTEST(A1:A6 ; B1:B6;1 ;1)

Metode 2: Vælg "Funktioner", "Dataanalyse", "t- test: parvis dobbelt stikprøve for middelværdi"

Den fremkomne tabel udfyldes som under de forrige punkter.

Eksempel: (hentet fra eksempel 5.6

$H_0: \mu_A = \mu_B$

Metode 1: P -værdi = TTEST(A1:A108;B1:B10;1;1) = 0,003067. Da 0.003 < 0.05 forkastes H_0

Metode 2: Vælg "Funktioner", "Dataanalyse", "t- test: parvis dobbelt stikprøve for middelværdi"

Den fremkomne tabel udfyldes:

"Område for variabel 1": B1:B10 "Område for variabel 2": A1:A10

"Outputområde": Skriv cellenummer for øverste venstre celle i det ønskede outputområde.

Udskrift:

t-test: Parvis dobbelt stikprøve for middelværdi		
	Variabel 1	Variabel 2
Middelværdi	10,61	11,07
Varians	5,663222	6,191222
Observationer	10	10
Pearson-korrelation	0,986882	
Hypotese for forskel i middelværdi	0	
fg	9	
t-stat	-3,5584	
P(T<=t) en-halet	0,003067	. <u>Da 0.003 < 0.05 forkastes H_0</u>
t-kritisk en-halet	1,833114	
P(T<=t) to-halet	0,006135	
t-kritisk to-halet	2,262159	

a10. Regressionsanalyse

Skriv x -værdierne i en søjle, markér dem og navngiv dem eksempelvis som x

Skriv y -værdierne i en søjle, markér dem og navngiv dem eksempelvis som y

Vælg "Funktioner", Dataanalyse, Regression

Den fremkomne tabel udfyldes

- 1) Input for Y -område skrives y , input for X - område skrives x
 - 2) I outputområdet skrives øverste venstre celle i det ønskede outputområde.
Der skal bruges mindst 7 kolonner til regressionsanalysetabellen.
 - 3) Det kan være hensigtsmæssigt at afkrydse yderligere nogle rubrikker, men det er ikke obligatorisk.
- Eksempel med tilhørende udskrift kan ses i eksempel 11.7 og 11.10

a10.1 Korrelationskoefficient

Beregn korrelationskoefficient for den i eksempel 9.2 nævnte stikprøve

(1,2), (0,0), (2,2), (2,2), (1,0), (2,2), (0,2), (2,2), (0,2), (2,2).

Skriv x -værdierne i en søjle (eksempelvis C-søjlen) og y -værdierne i en anden søjle (eksempelvis D-søjlen).

Marker x -værdierne og navngiv "vektoren" eksempelvis som X

Marker y -værdierne og navngiv "vektoren" eksempelvis som Y

Vælg den celle hvor korrelationskoefficienten skal stå (eksempelvis D11).

Tryk på værktøjslinien på $=$, og vælg til venstre herfor en rullemenu, på denne vælges "Korrelation",

Skriv X og Y i den fremkomne tabel. Resultat $r = 0.4014$ i celle D11.

a11. Variansanalyse

a11.1. Ensidede variansanalyse

Inddata har følgende udseende (hentet fra eksempel 12.1)

T1	T2	T3	T4
108	105	108	117
110	110	111	119
112	109	113	112

Vælg "Funktioner", "Dataanalyse", "ANAVA: enkelt faktor"

Den fremkomne tabel udfyldes

- 1) Inputområde udfyldes så hele området er med (eksempelvis a1:D4)
- 2) Markér "rækker" (da vi har arrangeret data i rækker)
- 3) Markér "Etiketter i første række" da første række jo er "variabelnavne"
- 4) I "Outputområdet" skrives øverste venstre celle i det ønskede outputområde.

Udskrift svarer til udskriften i afsnit 12.2.2

a11.2. Tosidet variansanalyse

Idet data i eksempel 12.3 anvendes ses inddata således ud:

	K1	K2
O1	830	810
	860	840
O2	940	105
		0
	990	102
		0
O3	855	930
	815	910

Vælg "Funktioner", "Dataanalyse", "ANAVA: to faktor med gentagelse"

Den fremkomne tabel udfyldes

- 1) Inputområde udfyldes så hele området er med (eksempelvis A1:C7)
 - 2) "Rækker pr. stikprøve" : Skriv antallet af rækker i hver stikprøve (i vort eksempel 2)
 - 4) I "Outputområdet" skrives øverste venstre celle i det ønskede outputområde.
- Udskriften svarer til den beskrevne i afsnit 12.3.6.1 og 12.3.6.2.

a12. Antalstabeller

a12.1. En - vejs tabel

Skriv de observerede værdier i en søjle f.eks A1- A4 og de forventede værdier i en anden søjle f.eks B1 - B4
Eksempel: (hentet fra eksempel 13.1)

Inddata:

39	35
336	325
99	90
26	50

Skriv =CHITEST(A1:A4;B1:B4) P - værdi = 0,004127

Bemærk, at frihedsgradstallet altid er $k - 1$, hvilket jo ikke altid er korrekt, jævnfør eksempel 14.3.

a12.2. To - vejs tabel

Skriv de observerede værdier i et område f.eks A1 - D4 og de forventede værdier i eksempelvis A6 - D9
Eksempel: (hentet fra eksempel 13.3)

18	46	13	0
22	60	42	5
7	123	42	16
2	28	68	8
7,546	39,578	25,410	4,466
12,642	66,306	42,570	7,482
18,424	96,632	62,040	10,904
10,388	54,484	34,980	6,148

skriv = CHITEST(D1:G4;D6:G9) Resultat: P - værdi = 2,44228E-19

APPENDIX 10.1. Oversigt over konfidensintervaller(2 variable).

X_1 og X_2 er normalfordelte henholdsvis $n(\mu_1, \sigma_1)$ og $n(\mu_2, \sigma_2)$. Givet 2 stikprøver af X_1 og X_2 . Størrelse, gennemsnit og spredning henholdsvis n_1, \bar{x}_1, s_1 og n_2, \bar{x}_2, s_2			
nr	Forudsætninger	Parameter og estimat	100 (1 - α) % konfidensinterval for parameter
1	$n_1 \geq 30$ og/eller $n_2 \geq 30$	$\mu_1 - \mu_2$ $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$
2	$n_1 < 30$ og $n_2 < 30$ $\sigma_1 \approx \sigma_2$	$\mu_1 - \mu_2$ $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(f) \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(f) \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$ hvor $s^2 = \frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2}{f}$ og $f = n_1 + n_2 - 2$
3	$n_1 < 30$ og $n_2 < 30$ $\sigma_1 \neq \sigma_2$	$\mu_1 - \mu_2$ $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	Lad $a = \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}$ $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(f) \cdot \sqrt{a} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(f) \cdot \sqrt{a}$ hvor f er det nærmeste hele tal, som er større end $g = \frac{a^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$
4	μ_1 og μ_2 kendte	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$\frac{F}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq F \cdot F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2, n_1)$ hvor $F = \frac{((n_1 - 1)s_1^2 + n_1 \cdot (\bar{x}_1 - \mu_1)^2) \cdot n_2}{((n_2 - 1)s_2^2 + n_2 \cdot (\bar{x}_2 - \mu_2)^2) \cdot n_1}$
5	μ_1 kendt μ_2 ukendt	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$\frac{F}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2 - 1)} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq F \cdot F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1)$ hvor $F = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + n_1 \cdot (\bar{x}_1 - \mu_1)^2}{s_2^2 \cdot n_1}$
6	μ_1 og μ_2 ukendte	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$\frac{F}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq F \cdot F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1)$ hvor $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$

X_1 og X_2 er **binomialfordelt** henholdsvis $b(n_1, p_1)$ og $b(n_2, p_2)$, hvor n_1 og n_2 er kendte og p_1 og p_2 ukendte. Observerede stikprøveværdier x_1 og x_2 .

nr	Forudsætninger	Parameter og estimat	100 (1 - α) % konfidensinterval for parameter
7	p_1 og p_2 ukendte. $x_1 \in [5; n_1 - 5]$ $x_2 \in [5; n_2 - 5]$	$p_1 - p_2$ $\tilde{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}$ $\tilde{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$	$\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{p}_1(1-\tilde{p}_1)}{n_1} + \frac{\tilde{p}_2(1-\tilde{p}_2)}{n_2}} \leq p_1 - p_2 \leq \tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{p}_1(1-\tilde{p}_1)}{n_1} + \frac{\tilde{p}_2(1-\tilde{p}_2)}{n_2}}$

X_1 og X_2 er **Poissonfordelte** henholdsvis $p(\mu_1)$ og $p(\mu_2)$, hvor μ_1 og μ_2 er ukendte. Givet 2 stikprøver af X_1 og X_2 . Størrelse og gennemsnit henholdsvis n_1 , \bar{x}_1 og n_2 , \bar{x}_2 .

nr	Forudsætninger	Parameter og estimat	100 (1 - α) % konfidensinterval for parameter
8	μ_1 og μ_2 ukendte. $n_1 \cdot \bar{x}_1 \geq 10$ $n_2 \cdot \bar{x}_2 \geq 10$	$\mu_1 - \mu_2$ $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{x}_1}{n_1} + \frac{\bar{x}_2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{x}_1}{n_1} + \frac{\bar{x}_2}{n_2}}$

APPENDIX 10.2. Oversigt over test af middelværdier for 2 normalfordelte variable (stor stikprøvestørrelse)

X_1 og X_2 er normalfordelte henholdsvis $n(\mu_1, \sigma_1)$ og $n(\mu_2, \sigma_2)$. Givet 2 stikprøver af X_1 og X_2 . Størrelse, gennemsnit og spredning henholdsvis n_1, \bar{x}_1, s_1 og n_2, \bar{x}_2, s_2 . $n_1 \geq 30$ og $n_2 \geq 30$. Signifikansniveau er α . Lad d være en konstant, og Y en statistisk variabel, der er fordelt $n\left(0, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$.

Forudsætn.	Nulhypotese	Metode	Beregning	H_0 forkastes	Dimensionering
$n_1 \geq 30$ og $n_2 \geq 30$ eller σ_1 og σ_2 kendte s_1 og s_2 erstattes så af σ_1 og σ_2	$H_0: \mu_1 \leq \mu_2 + d$ $H: \mu_1 > \mu_2 + d$	Enten tabelmetode eller P - værdi	$u = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - d}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$ <p style="text-align: center;">Formel (1)</p> $p = P(Y \geq u) = 1 - \Phi(u), \text{ hvor } u \text{ er værdien i (1)}$	$u > u_{1-\alpha}$ $p < \alpha$	$\Delta = \mu_1 - \mu_2 - d $ er den mindste ændring i μ der har praktisk interesse. $\beta = P(\text{type II fejl})$ $n \geq 2 \cdot \left(\frac{u_{1-\alpha} + u_{1-\beta}}{\frac{\Delta}{\sigma}} \right)^2$
	$H_0: \mu_1 \geq \mu_2 + d$ $H: \mu_1 < \mu_2 + d$	Enten tabelmetode eller P - værdi	u findes af formel 1 $p = P(Y \leq u) = \Phi(u), \text{ hvor } u \text{ er værdien i (1)}$	$u < -u_{1-\alpha}$ $p < \alpha$	
	$H_0: \mu_1 = \mu_2 + d$ $H: \mu_1 \neq \mu_2 + d$	Enten tabelmetode eller P - værdi	u findes af formel (1) $p = P(Y \geq u) = 1 - \Phi(u), \text{ for } \bar{x}_1 > \bar{x}_2 + d$ $p = P(Y \leq u) = \Phi(u), \text{ for } \bar{x}_1 < \bar{x}_2 + d$ hvor u er værdien i formel (1)	$ u > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $p < \frac{1}{2}\alpha$	Betegnelser som ovenfor: $n \geq 2 \cdot \left(\frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}} + u_{1-\beta}}{\frac{\Delta}{\sigma}} \right)^2$

APPENDIX 10.3. Oversigt over test af middelværdier μ_1 og μ_2 for 2 normalfordelte variable. (lille stikprøvestørrelse)

X_1 og X_2 er normalfordelte henholdsvis $n(\mu_1, \sigma_1)$ og $n(\mu_2, \sigma_2)$. Givet 2 stikprøver af X_1 og X_2 .

Størrelse, gennemsnit og spredning henholdsvis n_1, \bar{x}_1, s_1 og n_2, \bar{x}_2, s_2 . $n_1 < 30$ og $n_2 < 30$. Signifikansniveau er α . Lad d være en given konstant

T er en statistisk variabel der er t -fordelt med frihedsgradstallet f .

Forudsætn.	Nulhypotese	Metode	Beregning	H_0 forkastes	Dimensionering
$n_1 < 30$ og $n_2 < 30$ $\sigma_1 = \sigma_2$ (accept ved F -test)	$H_0: \mu_1 \leq \mu_2 + d$ $H: \mu_1 > \mu_2 + d$	Enten tabelmetode	$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - d}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ <p style="text-align: center;">Formel (2)</p> hvor $s^2 = \frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$t > t_{1-\alpha}(f)$ hvor $f = n_1 + n_2 - 2$	$\Delta = \mu_1 - \mu_2 - d $ er den mindste ændring i μ der har praktisk interesse. $\beta = P(\text{type II fejl})$ Antal gentagelser for hver af de to variable findes af dimensioneringstabel 8 For værdier der ikke står i tabellen benyt Mapleprogrammet i appendix 10.7
	eller P -værdi	$p = P(T \geq t)$ hvor t er værdien i formel(2)	$p < \alpha$		
	$H_0: \mu_1 \geq \mu_2 + d$ $H: \mu_1 < \mu_2 + d$	Enten tabelmetode	t findes af formel (2)	$t < -t_{1-\alpha}(f)$ hvor $f = n_1 + n_2 - 2$	
	eller P -værdi	$p = P(T \leq t)$ hvor t er værdien i formel (2)	$p < \alpha$		
	$H_0: \mu_1 = \mu_2 + d$ $H: \mu_1 \neq \mu_2 + d$	Enten tabelmetode	t findes af formel (2)	$ t > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(f)$ hvor $f = n_1 + n_2 - 2$	Benyt dimensioneringstabel tabel 8 For værdier der ikke står i tabellen benyt Mapleprogrammet i Appendix 10.7
	eller P -værdi	$p = P(T \geq t)$ for $\bar{x}_1 > \bar{x}_2 + d$ $p = P(T \leq t)$ for $\bar{x}_1 < \bar{x}_2 + d$ hvor t er værdien i formel (2)	$p < \frac{1}{2}\alpha$		

Appendix 10.3 fortsat

X_1 og X_2 er **normalfordelte** henholdsvis $n(\mu_1, \sigma_1)$ og $n(\mu_2, \sigma_2)$. Givet 2 stikprøver af X_1 og X_2 .

Størrelse, gennemsnit og spredning henholdsvis n_1, \bar{x}_1, s_1 og n_2, \bar{x}_2, s_2 . Signifikansniveau er α . Lad d være en given konstant.

T er en statistisk variabel der er t -fordelt med frihedsgradstallet f .

Forudsætn	Nulhypotese	Metode	Beregning	H_0 forkastes
<u>Approksimativ metode</u> σ_1 og σ_2 ukendte $\sigma_1 \neq \sigma_2$ (forkastelse ved F -test)	$H_0: \mu_1 \leq \mu_2 + d$ $H: \mu_1 > \mu_2 + d$	Enten tabelmetode	$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - d}{\sqrt{c}}$, hvor $c = \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}$ Formel (3) Frihedsgradstallet f er det nærmeste hele tal, som er større end $g = \frac{c^2}{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 + \left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}$ (Satterthwaites test) $\frac{1}{n_1 - 1} + \frac{1}{n_2 - 1}$	$t > t_{1-\alpha}(f)$ hvor f er bestemt i foregående celle.
		eller P -værdi	$p = P(T \geq t)$, hvor t er værdien i formel(3)	$p < \alpha$
	$H_0: \mu_1 \geq \mu_2 + d$ $H: \mu_1 < \mu_2 + d$	Enten tabelmetode	t findes af formel (3), og frihedsgradstal f bestemmes på samme måde.	$t < -t_{1-\alpha}(f)$
		eller P -værdi	$p = P(T \leq t)$, hvor t er værdien i formel (3)	$p < \alpha$
	$H_0: \mu_1 = \mu_2 + d$ $H: \mu_1 \neq \mu_2 + d$	Enten tabelmetode	t findes af formel (3), og frihedsgradstal f bestemmes på samme måde.	$ t > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(f)$
		eller P -værdi	$p = P(T \geq t)$ for $\bar{x}_1 > \bar{x}_2 + d$ $p = P(T \leq t)$ for $\bar{x}_1 < \bar{x}_2 + d$, hvor t er værdien i formel (3)	$p < \frac{1}{2} \alpha$

APPENDIX 10.4. Oversigt over test af varianser σ_1^2 og σ_2^2 for 2 normalfordelte variable.

X_1 og X_2 er normalfordelte henholdsvis $n(\mu_1, \sigma_1)$ og $n(\mu_2, \sigma_2)$.

Givet 2 stikprøver af X_1 og X_2 . Størrelse, gennemsnit og spredning henholdsvis n_1, \bar{x}_1, s_1 og n_2, \bar{x}_2, s_2 . Signifikansniveau er α

$$\mu_1 \text{ og } \mu_2 \text{ kendte: } F = \frac{((n_1 - 1)s_1^2 + n_1 \cdot (\bar{x}_1 - \mu_1)^2) \cdot n_2}{((n_2 - 1)s_2^2 + n_2 \cdot (\bar{x}_2 - \mu_2)^2) \cdot n_1} \quad \text{Formel (1), } Q \text{ er } F\text{-fordelt } F(n_1, n_2).$$

$$\mu_1 \text{ og } \mu_2 \text{ ukendte: } F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad \text{Formel (2), } Q \text{ er } F\text{-fordelt } F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

$$\mu_1 \text{ kendt og } \mu_2 \text{ ukendt: } F = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + n_1 \cdot (\bar{x}_1 - \mu_1)^2}{s_2^2 \cdot n_1} \quad \text{Formel (3), } Q \text{ er } F\text{-fordelt } F(n_1, n_2 - 1)$$

Oversigt der forudsætter benyttelse af F -tabel

Forudsætn.	Nulhypotese	Beregning	H_0 forkastes
μ_1 og μ_2 kendte	$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ $H: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	F beregnes af formel (1)	$F > F_{1-\alpha}(n_1, n_2)$
	$H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ $H: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	F beregnes af formel (1)	$F < \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2, n_1)}$
	$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	F beregnes af formel (1)	$F > F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)$ eller $F < \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2, n_1)}$
μ_1 og μ_2 ukendte	$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ $H: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	F beregnes af formel (2)	$F > F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$
	$H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ $H: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	F beregnes af formel (2)	$F < \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2 - 1, n_1 - 1)}$
	$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	F beregnes af formel (2)	$F > F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ eller $F < \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1)}$
μ_1 kendt μ_2 ukendt	$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ $H: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	F beregnes af formel (3)	$F > F_{1-\alpha}(n_1, n_2 - 1)$
	$H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ $H: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	F beregnes af formel (3)	$F < \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2 - 1, n_1)}$
	$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	F beregnes af formel (3)	$F > F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2 - 1)$ eller $F < \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1)}$

APPENDIX 10.4 (fortsat)

Oversigt til beregning af P -værdier. Forudsætter lommeregner/statistikprogram med F - fordeling.

μ_1 og μ_2 kendte:
$$F = \frac{((n_1 - 1)s_1^2 + n_1 \cdot (\bar{x}_1 - \mu_1)^2) \cdot n_2}{((n_2 - 1)s_2^2 + n_2 \cdot (\bar{x}_2 - \mu_2)^2) \cdot n_1}$$
 Formel (4), Q er F - fordelt $F(n_1, n_2)$.

μ_1 og μ_2 ukendte:
$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$
 Formel (5), Q er F - fordelt $F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

μ_1 kendt og μ_2 ukendt:
$$F = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + n_1 \cdot (\bar{x}_1 - \mu_1)^2}{s_2^2 \cdot n_1}$$
 Formel (6), Q er F - fordelt $F(n_1, n_2 - 1)$

Forudsætn.	Nulhypotese	Beregning	H_0 forkastes
μ_1 og μ_2 kendte	$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ $H: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$p = P(Q \geq F)$, hvor F er værdien i formel (4)	$p < \alpha$
	$H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ $H: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$p = P(Q \leq F)$, hvor F er værdien i formel (4)	
	$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$p = P(Q \geq F)$ for $F > 1$ $p = P(Q \leq F)$ for $F < 1$, hvor F er værdien i formel (4)	$p < \frac{1}{2} \alpha$
μ_1 og μ_2 ukendte	$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ $H: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$p = P(Q \geq F)$, hvor F er værdien i formel (5)	$p < \alpha$
	$H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ $H: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$p = P(Q \leq F)$, hvor F er værdien i formel (5)	
	$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$p = P(Q \geq F)$ for $F > 1$ $p = P(Q \leq F)$ for $F < 1$, hvor F er værdien i formel (5)	$p < \frac{1}{2} \alpha$
μ_1 kendt μ_2 ukendt	$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ $H: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$p = P(Q \geq F)$, hvor F er værdien i formel (6)	$p < \alpha$
	$H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ $H: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$p = P(Q \leq F)$, hvor F er værdien i formel (6)	
	$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$p = P(Q \geq F)$ for $F > 1$ $p = P(Q \leq F)$ for $F < 1$, hvor F er værdien i formel (6)	$p < \frac{1}{2} \alpha$

APPENDIX 10.5. Oversigt over test af parametre p_1 og p_2 for binomialfordelte variable.

X_1 og X_2 er **binomialfordelt** henholdsvis $b(n_1, p_1)$ og $b(n_2, p_2)$, hvor n_1 og n_2 er kendte og p_1 og p_2 ukendte. Observerede stikprøveværdier x_1 og x_2 .

Signifikansniveau er α .

Forudsætning:	Nulhypotese	Metode	Beregning	H_0 forkastes
Approksimativ metode p_1 og p_2 ukendte. $n_1 \cdot \tilde{p} \in [5; n_1 - 5]$ $n_2 \cdot \tilde{p} \in [5; n_2 - 5]$ hvor $\tilde{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$	$H_0: p_1 \leq p_2$	Enten tabelmetode	$u = \frac{\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2}{\sqrt{\tilde{p} \cdot (1 - \tilde{p}) \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \quad \text{Formel (1)}$	$u > u_{1-\alpha}$
		eller P -værdi	P -værdi = $1 - \Phi(u)$, Formel (2) hvor u er værdien i formel (1)	P -værdi $< \alpha$
	$H_0: p_1 \geq p_2$	Enten tabelmetode	u beregnes af formel (1)	$u < -u_{1-\alpha}$
		eller P -værdi	P -værdi = $\Phi(u)$, Formel (3) hvor u er værdien i formel (1)	P -værdi $< \alpha$
	$H_0: p_1 = p_2$	Enten tabelmetode	u beregnes af formel (1)	$ u > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$
		eller P -værdi	Hvis $\tilde{p}_1 \geq \tilde{p}_2$ så formel (2) Hvis $\tilde{p}_1 < \tilde{p}_2$ så formel (3)	P -værdi $< \frac{1}{2} \alpha$

APPENDIX 10.6. Oversigt over test af parameter μ_1 og μ_2 for Poissonfordelt variable .

X_1 og X_2 er Poissonfordelte variable fordelt $p(\mu_1)$ og $p(\mu_2)$ hvor μ_1 og μ_2 er ukendte. Der foreligger to stikprøver af størrelsen n_1 med gennemsnit \bar{x}_1 og n_2 med gennemsnit \bar{x}_2 . Signifikansniveau er α .

Forudsætning	Nulhypotese	Metode	Beregning	H_0 forkastes
Approksimativ metode μ_1 og μ_2 ukendte. $n_1 \cdot \bar{x} \geq 5$ og $n_2 \cdot \bar{x} \geq 5$	$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$ $H: \mu_1 > \mu_2$	Enten tabelmetode	$u = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\bar{x} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$ Formel (1)	$u > u_{1-\alpha}$
		eller P-værdi	$P\text{-værdi} = 1 - \Phi(u)$, Formel (2) hvor u er værdien i formel (1)	$p < \alpha$
	$H_0: \mu_1 \geq \mu_2$ $H: \mu_1 < \mu_2$	Enten tabelmetode	u beregnes af formel (1)	$u < -u_{1-\alpha}$
		eller P - værdi	$P\text{-værdi} = \Phi(u)$, Formel (3) hvor u er værdien i formel (1)	$p < \alpha$
	$H_0: \mu = \mu_0$ $H: \mu_1 \neq \mu_2$	Enten tabelmetode	u beregnes af formel (1)	$ u > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$
		eller P-værdi	Hvis $\bar{x}_1 \geq \bar{x}_2$ så formel (2) Hvis $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ så formel (3)	$P\text{-værdi} < \frac{1}{2} \alpha$

APPENDIX 11.1. Formler til beregning af enkelt regressionsanalyse uden gentagelser.

I dette appendix vises hvorledes man kan beregne en enkelt regressionsanalyse uden gentagelser, blot man har en lommeregner med regressionsprogram. I eksempel 11.5 er formlerne anvendt på et konkret eksempel.

Forudsætning:

Data :

x	x_1	x_2	x_3		x_N
y	y_1	y_2	y_3	...		y_N

De N - værdier er uafhængige observationer af statistisk uafhængig normalfordelte variable Y_i med samme varians σ^2 .

Det antages endvidere at man har fundet, at data kan beskrives ved en lineær model.

Vi har derfor at **middelværdien** af den statistiske variable Y er en lineær funktion af x af formen

$$E(Y|x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

Beregninger:

1) De N punktpar indtastes i lommeregner.

Regressionsprogram aktiveres, og blandt beregnede størrelser findes

Estimater for: regressionskoefficienter: $\tilde{\beta}_0$ og $\tilde{\beta}_1$. Korrelationskoefficient r .

Gennemsnit \bar{x} og \bar{y} . Spredning s_x og s_y .

2) Udfylder variansanalysetabel:

$$\text{Udregner } SAK_{\text{total}} = (N - 1) \cdot s_y^2, \quad SAK_{\text{regression}} = r^2 \cdot SAK_{\text{total}} \text{ og } SAK_{\text{residual}} = SAK_{\text{total}} - SAK_{\text{model}}.$$

Variation (Source)	SAK (SS)	f (df)	$s^2 = \frac{SAK}{f}$	F
Regression	$SAK_{\text{regression}}$	1	$s_{\text{regression}}^2 = \frac{SAK_{\text{regression}}}{1}$	$F_{\text{regression}} = \frac{s_{\text{regression}}^2}{s_{\text{residual}}^2}$
Residual	SAK_{residual}	$N - 2$	$s_{\text{residual}}^2 = \frac{SAK_{\text{residual}}}{N - 2}$	
Total	SAK_{total}	$N - 1$		

Test:Lad α være signifikansniveau.1) H_0 : Regressionslinien er vandret $\Leftrightarrow H_0$: y er uafhængig af $x \Leftrightarrow H_0$: Model = 0 $\Leftrightarrow H_0$: $\beta_1 = 0$ H_0 forkastes, hvis $F_{\text{model}} > F_{1-\alpha}(1, N-2)$,eller hvis P -værdi = $P(Z < F_{\text{regression}}) < \alpha$, hvor Z er F -fordelt $(f_T, f_N) = (1, N-2)$.2) H_0 : $\beta_1 = a$, hvor a er en given konstant.

$$\text{Beregn hjælpestørrelserne } SAK_x = \frac{SAK_{\text{regression}}}{(\tilde{\beta}_1)^2}, \quad \tilde{V}(\tilde{\beta}_1) = \frac{s_{\text{residual}}^2}{SAK_x}, \quad t = \frac{\tilde{\beta}_1 - a}{\sqrt{\tilde{V}(\tilde{\beta}_1)}}$$

 H_0 forkastes, hvis $|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2)$ (for $a = 0$ kan denne test erstatte F -testen)3) H_0 : $\beta_0 = b$ hvor b er en given konstant.

$$\text{Beregn hjælpestørrelserne } \tilde{V}(\tilde{\beta}_0) = s_{\text{residual}}^2 \cdot \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{SAK_x} \right), \quad t = \frac{\tilde{\beta}_0 - b}{\sqrt{\tilde{V}(\tilde{\beta}_0)}}$$

 H_0 forkastes, hvis $|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2)$

$$\text{Konfidensinterval for } \beta_1: \left[\tilde{\beta}_1 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) \cdot \sqrt{\tilde{V}(\tilde{\beta}_1)}; \tilde{\beta}_1 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) \cdot \sqrt{\tilde{V}(\tilde{\beta}_1)} \right]$$

Til en given x -værdi er $\tilde{\mu}$ et estimat for middelværdien μ for Y .

$$\tilde{\mu} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x \quad \text{og} \quad \tilde{V}(\tilde{\mu}) = s_{\text{residual}}^2 \cdot \left(\frac{1}{N} + \frac{(x - \bar{x})^2}{SAK_x} \right).$$

$$\text{Konfidensinterval for } \mu: \left[\tilde{\mu} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) \cdot \sqrt{\tilde{V}(\tilde{\mu})}; \tilde{\mu} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) \cdot \sqrt{\tilde{V}(\tilde{\mu})} \right]$$

Prædiktionsinterval: (Konfidensinterval) for 1 ny observation for en given x -værdi:

$$\left[\tilde{\mu} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) \cdot \sqrt{Q}; \tilde{\mu} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) \cdot \sqrt{Q} \right], \text{ hvor } Q = s_{\text{residual}}^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{N} + \frac{(x - \bar{x})^2}{SAK_x} \right).$$

APPENDIX 11.2. Formler til beregning af enkelt regressionsanalyse med lige mange gentagelser

Forudsætning: Data :

x	x_1	x_2	x_3		x_k
y	y_{11}	y_{21}	y_{31}	...		y_{k1}
	y_{12}	y_{22}	y_{32}			y_{k2}

	y_{1n}	y_{2n}	y_{3n}			y_{kn}

y_{ij} - værdierne er uafhængige observationer af statistisk uafhængig normalfordelte variable Y_i .

For hver af de k x - værdier er der lige mange gentagelser n af y - værdier, dvs. i alt $N=n \cdot k$ observationer.

Beregninger:

1) For hver x - værdi x_i indtastes de n y -værdier, og man beregner spredningen s_i .

Man tester om der er varianshomogenitet (se evt. under punkt d). Hvis det er tilfældet beregnes et estimat

for den fælles varians $s_0^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_k^2}{k}$. s_0^2 har $k(n-1) = N - k$ frihedsgrader.

2) De $N=n \cdot k$ punktpar (x_i, y_{ij}) indtastes i lommeregner.

Regressionsprogram aktiveres, og blandt beregnede størrelser anvendes følgende estimater:

Regressionskoefficienter: $\tilde{\beta}_0$ og $\tilde{\beta}_1$, korrelationskoefficient r , gennemsnit \bar{x} og spredning s_y .

3) Man udregner $SAK_{\text{total}} = (N-1) \cdot s_y^2$, $SAK_{\text{regression}} = r^2 \cdot SAK_{\text{total}}$ og $SAK_0 = (N-k) \cdot s_0^2$
 $SAK_{\text{lack of fit}} = SAK_{\text{total}} - SAK_{\text{regression}} - SAK_0$

4) Udfylder variansanalysetabel:

Variation (Source)	SAK (SS)	f (df)	$s^2 = \frac{SAK}{f}$	F
Model	$SAK_{\text{regression}}$	1	$s_{\text{regression}}^2 = \frac{SAK_{\text{regression}}}{1}$	$\left(F_{\text{regression}} = \frac{s_{\text{regression}}^2}{s_{\text{pool}}^2} \right)$
Lack of fit	$SAK_{\text{lack of fit}}$	$k - 2$	$s_{\text{lack of fit}}^2 = \frac{SAK_{\text{lack of fit}}}{k - 2}$	$F_{\text{lack of fit}} = \frac{s_{\text{lack of fit}}^2}{s_0^2}$
Gentagelser	SAK_0	$N - k$	$s_0^2 = \frac{SAK_0}{N - k}$	
Total	SAK_{total}	$N - 1$		

Test:

Lad α være signifikansniveau.

a) H_0 : Lineær model gælder $\Leftrightarrow H_0: (x_i, \mu_i)$ ligger på en ret linie

$\Leftrightarrow H_0$: Residual for gennemsnitspunkter = 0.

H_0 forkastes, hvis $F_{\text{lack of fit}} > F_{1-\alpha}(k-2, N-k)$, eller

hvis P -værdi = $P(Z > F_{\text{lack of fit}}) < \alpha$, hvor Z er F -fordelt $(f_T, f_N) = (k-2, N-k)$.

Såfremt H_0 accepteres (og et residualplot også virker rimelig) fortsætter testningen:

b) Derefter testes

H_0 : Regressionslinien er vandret $\Leftrightarrow H_0: y$ er uafhængig af $x \Leftrightarrow H_0$: Regression = 0 $\Leftrightarrow H_0: \beta_1 = 0$

Da såvel s_0^2 som s_{residual}^2 nu er et udtryk for forsøgsfejls varians σ^2 , foretages en pooling:

$$s_{\text{pool}}^2 = \frac{(N-k) \cdot s_0^2 + (k-2) \cdot s_{\text{lack of fit}}^2}{N-2} = \frac{SAK_0 + SAK_{\text{lack of fit}}}{N-2},$$

og F_{model} beregnes (se variansanalysetabel).

H_0 forkastes, hvis $F_{\text{model}} > F_{1-\alpha}(1, N-2)$,

eller hvis P -værdi = $P(Z > F_{\text{regression}}) < \alpha$, hvor Z er F -fordelt $(f_T, f_N) = (1, N-2)$.

c) $H_0: \beta_1 = a$. hvor a være en given konstant.

Beregner hjælpe størrelserne $SAK_x = \frac{SAK_{\text{regression}}}{(\tilde{\beta}_1)^2}$, $\tilde{V}(\tilde{\beta}_1) = \frac{s_{\text{pool}}^2}{SAK_x}$, $t = \frac{\beta_1 - a}{\sqrt{\tilde{V}(\tilde{\beta}_1)}}$

H_0 forkastes, hvis $|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2)$ (for $a = 0$ kan denne test erstatte F -testen)

Konfidensinterval for β_1 : $\left[\tilde{\beta}_1 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) \cdot \sqrt{\tilde{V}(\tilde{\beta}_1)}; \tilde{\beta}_1 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) \cdot \sqrt{\tilde{V}(\tilde{\beta}_1)} \right]$

Til en given x -værdi er $\tilde{\mu}$ et estimat for middelværdien for Y .

Beregner hjælpe størrelserne $\tilde{\mu} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x$, $\tilde{V}(\tilde{\mu}) = s_{\text{pool}}^2 \cdot \left(\frac{1}{N} + \frac{(x - \bar{x})^2}{SAK_x} \right)$,

Konfidensinterval for μ : $\left[\tilde{\mu} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) \cdot \sqrt{\tilde{V}(\tilde{\mu})}; \tilde{\mu} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) \cdot \sqrt{\tilde{V}(\tilde{\mu})} \right]$

Prædiktionsinterval (Konfidensinterval) for 1 ny observation for en given x -værdi:

$$\left[\tilde{\mu} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) \cdot \sqrt{Q}; \tilde{\mu} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) \cdot \sqrt{Q} \right], \text{ hvor } Q = s_{\text{pool}}^2 \left(1 + \frac{1}{N} + \frac{(x - \bar{x})^2}{SAK_x} \right)$$

d) $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$ Test for at de variable Y_i har samme varians σ^2

Simplificeret F-test, Bartletts test og Levines test (se appendix 12.1)

APPENDIX 11.3. Transformation til lineær model.

Nr	Model	Kommentar
1	Linear model: $Y = a + b \cdot X$	
2	Exponential model: $Y = \exp(a + b \cdot X)$	$Y = e^{a+bX} = e^a \cdot e^{bX} \Leftrightarrow \ln(Y) = a + bX$ Sættes $Z = \ln(Y)$ fås $Z = a + b \cdot X$
3	Reciprocal-Y model: $Y = 1/(a + b \cdot X)$	$Y = \frac{1}{a + b \cdot X} \Leftrightarrow \frac{1}{Y} = a + b \cdot X$ Sættes $Z = \frac{1}{Y}$ fås $Z = a + b \cdot X$
4	Reciprocal-X model: $Y = a + b/X$	$Y = a + \frac{b}{X}$. Sættes $W = \frac{1}{X}$ fås $Y = a + b \cdot W$
5	Double reciprocal model: $Y = 1/(a + b/X)$	$Y = \frac{1}{a + \frac{b}{X}} \Leftrightarrow \frac{1}{Y} = a + b \frac{1}{X}$ Sættes $Z = \frac{1}{Y}$ og $W = \frac{1}{X}$ fås $Z = a + b \cdot W$
6	Logarithmic-X model: $Y = a + b \cdot \ln(X)$	Sættes $W = \ln(X)$ fås $Y = a + b \cdot W$
7	Multiplicative model: $Y = a \cdot X^b$	$Y = a \cdot X^b \Leftrightarrow \ln(Y) = \ln(a) + b \cdot \ln(X)$ Sættes $Z = \ln(Y)$ og $W = \ln(X)$ fås $Z = a + b \cdot W$
8	Square root-X model: $Y = a + b \cdot \sqrt{X}$	$Y = a + b \cdot \sqrt{X}$. Sættes $W = \sqrt{X}$ fås $Y = a + b \cdot W$
9	Square root-Y model: $Y = (a + b \cdot X)^2$	$Y = (a + b \cdot X)^2 \Leftrightarrow \sqrt{Y} = a + b \cdot X$ Sættes $Z = \sqrt{Y}$ fås $Z = a + b \cdot X$
10	S-curve model: $Y = \exp(a + b/X)$	$Y = e^{a+\frac{b}{X}} \Leftrightarrow \ln(Y) = a + \frac{b}{X}$ Sættes $Z = \ln(Y)$ og $W = \frac{1}{X}$ fås $Z = a + b \cdot W$
11	Logistic model: $Y = \exp(a + b \cdot X)/(1 + \exp(a + b \cdot X))$	$Y = \frac{e^{a+bX}}{1 + e^{a+bX}} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{Y} + 1\right) = a + bX$ Sættes $Z = \ln\left(\frac{1}{Y} + 1\right)$ fås $Z = a + b \cdot X$
12	Log probit model: $Y = \text{normal}(a + b \cdot \ln(X))$	$Y = \Phi(a + b \cdot \ln(X)) \Leftrightarrow \Phi^{-1}(Y) = a + b \cdot \ln(X)$ Sættes $Z = \Phi^{-1}(Y)$ og $W = \ln(X)$ fås $Z = a + b \cdot W$

APPENDIX 12.1. Formler til beregning af ensidet variansanalyse

I dette appendix vises hvorledes man kan beregne en ensidet variansanalyse, blot man har en lommeregner der kan beregne gennemsnit og spredning.

For hvert observationsæt udregnes gennemsnit og spredning.

Faktor	Observationer	Gennemsnit	Spredning
R ₁	x ₁₁ , x ₁₂ , x ₁₃ , . . . , x _{1n}	\bar{x}_1	s ₁
R ₂	x ₂₁ , x ₂₂ , x ₂₃ , . . . , x _{2n}	\bar{x}_2	s ₂
R ₃	x ₃₁ , x ₃₂ , x ₃₃ , . . . , x _{3n}	\bar{x}_3	s ₃
R _r	x _{r1} , x _{r2} , x _{r3} , . . . , x _{rn}	\bar{x}_r	s _r

Forudsætning: x_{ij} - værdierne er uafhængige observationer af statistisk uafhængig normalfordelte variable X_i med middelværdi μ_i og samme varians σ².

For hver af de r - faktorniveauer er der lige mange gentagelser n af x - værdier, dvs. i alt N = n · r observationer.

Beregninger:

Man beregner $s_0^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_r^2}{r}$. $SAK_0 = (N - r) \cdot s_0^2$.

s₀² har r(n - 1) = N - r frihedsgrader.

Man indtaster de r gennemsnit \bar{x}_1 , \bar{x}_2 , . . . , \bar{x}_r i lommeregneren og finder spredningen s_{x̄}².

$$s_R^2 = n \cdot s_{\bar{x}}^2 \quad SAK_R = (n - 1) \cdot s_R^2 \quad (\text{alternativt: } SAK_{\bar{x}} = (n - 1) \cdot s_{\bar{x}}^2, \quad SAK_R = n \cdot SAK_{\bar{x}})$$

$$SAK_{\text{total}} = SAK_0 + SAK_R$$

Udfylder variansanalysetabel:

Variation (Source)	SAK (SS)	f (df)	$s^2 = \frac{SAK}{f}$	F	P - værdi
Behandlinger (Between groups)	SAK _R	r - 1	$s_R^2 = \frac{SAK_R}{r - 1}$	$F_R = \frac{s_R^2}{s_0^2}$	
Gentagelser (Within groups)	SAK ₀	N - r	$s_0^2 = \frac{SAK_0}{N - r}$		
Total	SAK _{total}	N - 1			

Model.

Lad α være signifikansniveau.

$$\text{Lad } \bar{\mu}_r = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r}{r}.$$

Vi kan da skrive $\mu_i = \bar{\mu}_r + (\mu_i - \bar{\mu}_r) = \bar{\mu}_r + R_i = \bar{\mu}_r + \text{Rækkevirkning}$

Testprocedure.

Nulhypotese: $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r \Leftrightarrow H_0: R = 0$

H_0 forkastes, hvis $F_R > F_{1-\alpha}(r-1, N-r)$, eller hvis P -værdi $= P(Z > F_R) < \alpha$,
hvor Z er F -fordelt $(f_T, f_N) = (r-1, N-r)$.

$$\text{Konfidensinterval for } \mu_i: \left[\bar{x}_{i\cdot} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-r) \cdot \sqrt{\frac{s_0^2}{n}}; \bar{x}_{i\cdot} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-r) \cdot \sqrt{\frac{s_0^2}{n}} \right]$$

$$\text{LSD Konfidensinterval for } \mu_i: \left[\bar{x}_{i\cdot} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-r) \cdot \sqrt{\frac{s_0^2}{2n}}; \bar{x}_{i\cdot} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-r) \cdot \sqrt{\frac{s_0^2}{2n}} \right]$$

Varianshomogenitet. $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$ Test for, at de variable Y_i har samme varians σ^2

a) Simplificeret F - test. Lad den største værdi af de k varianser være σ_{\max}^2 og den mindste være σ_{\min}^2 .

$$\text{Beregn teststørrelsen } F = \frac{\sigma_{\max}^2}{\sigma_{\min}^2}.$$

$$H_0 \text{ accepteres, hvis } F < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(f_{\max}, f_{\min}).$$

Hvis nulhypotesen accepteres, så antages kravet om varianshomogenitet at være opfyldt.

Hvis nulhypotesen forkastes, må anvendes en test med større styrke.

Levines test (se appendix 12.1) er god og beregningsmæssig ret enkel, men kræver mere end 2 gentagelser.

b) Bartlett's test (se nedenfor) er beregningsmæssigt vanskelig, og har den svaghed, at den er særdeles følsom overfor afvigelser fra normalitet.

Bartlett's test. $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$ accepteres, hvis $\chi^2 \leq \chi_{0.95}^2(k-1)$.

$$\chi^2 = \frac{(N-k) \cdot \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) \cdot s_i^2}{N-k} \right) - \sum (n_i - 1) \cdot \ln(s_i^2)}{1 - \frac{1}{N-k} - \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i - 1}} \cdot \frac{1}{3(k-1)}$$

c) **Levines test.** God test, som imidlertid kræver mere end 2 gentagelser. (andre test se appendix 12.2)

Lad $d_{ij} = |y_{ij} - \hat{y}_i|$ hvor $\begin{cases} i = 1, 2, \dots, k \\ j = 1, 2, \dots, n_i \end{cases}$, hvor \hat{y}_i er medianen af de n_i gentagelser af i 'te behandling.

Man udfører en sædvanlig ensidet variansanalyse på tallene d_{ij}

Median: Tallene ordnes i voksende rækkefølge:

Ulige antal tal: median = midtertal blandt de ordnede tal,

Lige antal tal: median = gennemsnit af de to midterste blandt de ordnede tal

Eksempel: Tal fra eksempel 12.1.

		\hat{y}_i	d_{ij}	
T_1	108, 110, 112	110	2, 0, 2	En ensidet variansanalyse på d_{ij} giver $F = 0.15$, og dermed P -værdi = 0.9285, dvs. en accept af nulhypotesen.
T_2	105, 110, 109	109	4, 1, 0	
T_3	108, 111, 113	111	3, 0, 2	
T_4	117, 119, 112	117	0, 2, 5	

APPENDIX 12.2. Formler til beregning af tosidet variansanalyse

I dette appendix vises hvorledes man kan beregne en tosidet variansanalyse, blot man har en lommeregner med gennemsnit og spredning.

Som taleksempel benyttes eksempel 12.2.

Forsøgsresultaterne er følgende:

		Karburator	
		K ₁	K ₂
Olieblanding	O ₁	830 860	810 840
	O ₂	940 990	1050 1020
	O ₃	855 815	930 910

Beregning af gennemsnit.		Karburator		Rækkegennemsnit
		K ₁	K ₂	
Olieblanding	O ₁	845	825	835
	O ₂	965	1035	1000
	O ₃	835	920	877.5
Søjlesum		881.667	926.667	

Antal rækker $r = 3$, Antal søjler $q = 2$, Antal delforsøg i celler $n = 2$

Antal delforsøg i række $= n \cdot q = 2 \cdot 2 = 4$. Antal delforsøg i søjle $n \cdot r = 2 \cdot 3 = 6$

Antal celler $r \cdot q = 3 \cdot 2 = 6$, Totalt antal forsøg $N = r \cdot q \cdot n = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

Spredning på de r rækkegennemsnit: $s_{xr} = 85.6714$

Spredning på de q søjlegennemsnit: $s_{xq} = 31.8198$

Spredning på de $r \cdot q$ cellegennemsnit: $s_{celler} = 84.4048$

Beregninger:

$$SAK_{\text{rækker}} = (N - n \cdot q) s_{xr}^2 = (12 - 4) \cdot 85.6714^2 = 58716.67, \quad f_R = r - 1 = 2$$

$$SAK_{\text{søjler}} = (N - n \cdot r) \cdot s_{xq}^2 = (12 - 6) \cdot 31.8198^2 = 6075.00, \quad f_C = q - 1 = 1$$

$$SAK_{\text{celler}} = (N - n) \cdot s_{celler}^2 = (12 - 2) \cdot 84.4048^2 = 71241.66, \quad f_{\text{celler}} = r \cdot q - 1 = 5$$

$$SAK_{\text{vekselvirkning}} = SAK_{\text{celler}} - SAK_{\text{rækker}} - SAK_{\text{søjler}} = 6450.00, \quad f_{RC} = f_{\text{celler}} - f_R - f_C = 2$$

$$SAK_{\text{total}} = (N - 1) s_{\text{total}}^2 = (12 - 1) \cdot 82.485^2 = 74841.66, \quad f_{\text{total}} = N - 1 = 11$$

$$SAK_{0(=residual)} = SAK_{\text{total}} - SAK_{\text{celler}} = 600.00 \quad f_0 = f_{\text{total}} - f_{\text{celler}} = 6$$

(alternativt: $SAK_{\text{rækker}} = n \cdot q \cdot SAK_{\bar{x} \text{ rækker}}$, hvor $SAK_{\bar{x} \text{ rækker}} = (r - 1) \cdot s_{xr}^2$

$$SAK_{\text{søjler}} = n \cdot r \cdot SAK_{\bar{x} \text{ søjler}}, \text{ hvor } SAK_{\bar{x} \text{ søjler}} = (q - 1) \cdot s_{xq}^2$$

$$SAK_{\text{celler}} = n \cdot SAK_{\bar{x} \text{ celler}}, \text{ hvor } SAK_{\bar{x} \text{ celler}} = (r \cdot q - 1) \cdot s_{\text{celler}}^2$$

Opstilling af variansanalysetabel:

Variation	SAK=SS	f	$s^2 = \frac{SAK}{f}$	F
Rækkefaktor R : Olieblanding	58716.67	$f_R = r - 1 = 2$	29358.33	
Søjlefaktor C : Karburator	6075.00	$f_C = q - 1 = 1$	6075.00	
Vekselvirkning R*C	6450.00	$f_{RC} = (r - 1)(q - 1) = 2$	3225.00	$F_{RC} = \frac{s_{RC}^2}{s_{residual}^2} = 5.3$
Residual	3600.00	$f_{residual} = r \cdot q \cdot (n - 1) = 6$	600.00	
Total	74841.67	$f_{total} = N - 1 = 11$		

Test:

Lad α være signifikansniveau.

1) $H_0: R * C = 0$ (Ingen signifikant vekselvirkning)

H_0 forkastes, hvis $F_{RC} > F_{1-\alpha}(f_{RC}, f_0)$,

eller hvis P -værdi = $P(Z > F_{RC}) < \alpha$, hvor Z er F -fordelt $(f_T, f_N) = (f_{RC}, f_0)$.

2a) Hvis H_0 forkastes, så opstilles konfidensintervaller til nærmere vurdering af faktorerens virkning.

2b) Hvis H_0 accepteres, antages, at der ikke er nogen signifikant vekselvirkning, og man pooler de to varianser sammen, til et nyt estimat for forsøgsfejls variation (støjen).

$$s_m^2 = \frac{SAK_{RC} + SAK_{residual}}{f_{RC} + f_{residual}} \quad \text{med } f_m = f_{RC} + f_{residual}$$

Dette estimat benyttes så til en samtidig vurdering af hovedvirkningerne.

2b.1) $H_0: R = 0$ (Ingen signifikant virkning af rækkefaktor)

$$\underline{H_0 \text{ forkastes}}, \text{ hvis } F_R = \frac{s_R^2}{s_m^2} > F_{1-\alpha}(f_R, f_m)$$

eller hvis P -værdi = $P(Z > F_R) < \alpha$, hvor Z er F -fordelt $(f_T, f_N) = (f_R, f_m)$.

Hvis H_0 forkastes, så opstilles konfidensintervaller til vurdering af faktorerens virkning.

2b.2) $H_0: C = 0$ (Ingen signifikant virkning af søjlefaktor)

$$\underline{H_0 \text{ forkastes}}, \text{ hvis } F_C = \frac{s_C^2}{s_m^2} > F_{1-\alpha}(f_C, f_m)$$

eller hvis P -værdi = $P(Z > F_C) < \alpha$, hvor Z er F -fordelt $(f_T, f_N) = (f_C, f_m)$.

Hvis H_0 forkastes, så opstilles konfidensintervaller til vurdering af faktorerens virkning.

Opstilling af konfidensintervaller og drage konklusion.

Lad \bar{x}_{ij} være gennemsnittet af værdierne i cellen i i 'te række og j 'te søjle.

Lad \bar{x}_i være gennemsnittet af værdierne i den i 'te række.

Lad \bar{x}_j være gennemsnittet af værdierne i den j 'te søjle.

1) $R * C \neq 0$ ¹.

Konfidensintervaller for hver celle: $\left[\bar{x}_{ij} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(r \cdot q \cdot (n-1)) \frac{S_0}{\sqrt{n}}; \bar{x}_{ij} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(r \cdot q \cdot (n-1)) \frac{S_0}{\sqrt{n}} \right]$,

2) $R * C = 0$ ² $R \neq 0 \wedge C \neq 0$:

For celle i i 'te række og j 'te søjle er den estimerede middelværdi

$\tilde{\mu}_{ij} = \bar{x}_i + \bar{x}_j - \bar{x}_{..}$ (jævnfør betragtningerne i afsnit 12.3.2.2 side 59.)

Konfidensintervaller for hver celle:

$\left[\tilde{\mu}_{ij} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-r-q+1) \sqrt{\frac{(r+q-1)}{N}} s_m; \tilde{\mu}_{ij} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-r-q+1) \sqrt{\frac{(r+q-1)}{N}} s_m \right]$

Det giver et bedre overblik, hvis man udregner de marginale konfidensintervaller:

Konfidensintervaller for hver række: $\left[\bar{x}_i - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-r-q+1) \frac{s_m}{\sqrt{n \cdot q}}; \bar{x}_i + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-r-q+1) \frac{s_m}{\sqrt{n \cdot q}} \right]$

Konfidensintervaller for hver søjle: $\left[\bar{x}_j - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-r-q+1) \frac{s_m}{\sqrt{n \cdot r}}; \bar{x}_j + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-r-q+1) \frac{s_m}{\sqrt{n \cdot r}} \right]$

3) $R * C = 0$

$R \neq 0 \wedge C = 0$:

For hver række i beregnes et rækkegennemsnit \bar{x}_i .

$s_{m1}^2 = \frac{SAK_{\text{residual}} + SAK_{RC} + SAK_C}{f_{\text{residual}} + f_{RC} + f_C}$, $f_{m1} = f_{\text{residual}} + f_{RC} + f_C = N - r$

Konfidensintervaller for hver række: $\left[\bar{x}_i - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-r) \frac{s_{m1}}{\sqrt{n \cdot q}}; \bar{x}_i + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-r) \frac{s_{m1}}{\sqrt{n \cdot q}} \right]$

¹Kort skrivemåde for, at $H_0: R * C = 0$ forkastes.

²Kort skrivemåde for, at $H_0: R * C = 0$ accepteres

4) $R * C = 0$

$R = 0 \wedge C \neq 0$:

For hver søjle j beregnes et søjlegennemsnit $\bar{x}_{\cdot j}$

$$s_{m2}^2 = \frac{SAK_{\text{residual}} + SAK_{RC} + SAK_R}{f_{\text{residual}} + f_{RC} + f_R}, \quad f_{m2} = f_{\text{residual}} + f_{RC} + f_R = N - q$$

Konfidensintervaller for hver søjle: $\left[\bar{x}_{\cdot j} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N - q) \frac{s_{m2}}{\sqrt{n \cdot r}}; \bar{x}_{\cdot j} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N - q) \frac{s_{m2}}{\sqrt{n \cdot r}} \right]$

APPENDIX 13.1. χ^2 - test af hypotese om multinominale sandsynligheder (1 variabel).

$$H_0: p_1 = c_1, p_2 = c_2, \dots, p_k = c_k$$

mod den alternative

H : Mindst én af sandsynlighederne afviger fra den angivne værdi i nulhypotesen.

Lad $O_i = n_i$ være den **observerede værdi** i den i 'te klasse,

$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ den totale stikprøvestørrelse og

Forudsat H_0 er sand beregnes **de forventede værdier** $E_i = n \cdot c_i$ ($E = \text{expected values}$) i den i 'te klasse

Resultatet opstilles i det følgende skema:

Klasse nr	1	2	k
Observerede værdier O_i	n_1	n_2		n_k
Forventede værdier E_i	$E_1 = n_1 \cdot c_1$	$E_2 = n_2 \cdot c_2$		$E_k = n_k \cdot c_k$

$$\text{Teststørrelse: } \chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Forudsætning: χ^2 er approksimativt χ^2 - fordelt med et frihedsgradstal på $k - 1$,

hvis ingen af klasserne har en forventet værdi under 1,

og mindst 80% af klasserne har en forventet værdi over 5.

H_0 forkastes hvis $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(f)$, hvor $f = k - 1$

Hvis man for at kunne beregne de forventede værdier først må benytte de observerede værdier til at beregne m parametre, så bliver $f = k - 1 - m$.
jævnfør eksempel 13.2.

APPENDIX 13.2. χ^2 - test af hypotese i 2-vejs tabel.

Som illustration af metoden benyttes en generalisation af det i eksempel 13.3 omtalte forsøg med at undersøge om der er uafhængighed mellem opnåede matematik- og fysik-karakterer.

X_1 = antal studerende med opnået matematikkarakter

X_2 = antal studerende med opnået fysikkarakterer

Vi ønsker at teste nulhypotesen: H_0 : X_1 og X_2 er statistisk uafhængige.

Den følgende tabel viser symbolikken, hvor n_{ij} angiver antal studerende, der har opnået den til klassen k_{ij} svarende karakter.

Observerede værdier	Søjlefaktor C (Fysikkarakterer)					Marginalt antal
	Opdeling	1	2	...	q	
Rækkefaktor R (Matematikkarakterer)	1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1q}	d_1
	2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2q}	d_2

	r	n_{r1}	n_{r2}	...	n_{rq}	d_r
Marginalt antal		c_1	c_2	...	c_q	n

Tilsvarende angiver p_{ij} den tilsvarende sandsynlighed for at få den til cellen k_{ij} svarende karakter.

Observerede værdier	Søjlefaktor C (Fysikkarakterer)					Marginal sandsynlighed
	Opdeling	1	2	...	q	
Rækkefaktor R (Matematikkarakterer)	1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1q}	p_{1d}
	2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2q}	p_{2d}

	r	p_{r1}	p_{r2}	...	p_{rq}	p_{rd}
Marginal sandsynlighed		p_{c1}	p_{c2}	...	p_{cq}	1

Vi ser således, at de marginale sandsynligheder er

$$p_{id} = p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{iq} \text{ og } p_{cj} = p_{1j} + p_{2j} + \dots + p_{rj}.$$

Det antages, at udfaldene er uafhængige. At dette så er et multinomialt eksperiment ses af, at der er n udfald, $r \cdot q$ klasser og sandsynligheden for hver klasse er vist i ovenstående tabel.

Forudsat nulhypotesen er sand, vil der ifølge sandsynlighedsregningens produktsætning gælde, at $p_{id} \cdot p_{cj} = p_{ij}$

Det forventede antal i klasse k_{ij} er derfor $E_{ij} = n \cdot p_{id} \cdot p_{cj}$

Nu kendes de sande marginale sandsynligheder ikke, men vi kan estimere dem med

$$\hat{p}_{id} = \frac{d_i}{n} \text{ og } \hat{p}_{cj} = \frac{c_j}{n} . \text{ Vi har derfor}$$

$$E_{ij} = n \cdot \frac{d_i}{n} \cdot \frac{c_j}{n} = \frac{d_i \cdot c_j}{n} = \frac{(\text{række } i \text{ total}) \cdot (\text{søjle } j \text{ total})}{\text{total antal i stikprøven}} .$$

$$\text{Teststørrelse: } \chi^2 = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^r \frac{(O_{ji} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

Da antallet af klasser er $r \cdot q$ og vi primært har estimeret $q - 1$ marginale rækkesandsynligheder og $r - 1$ marginale søjlesandsynligheder (da summen af rækkesandsynlighederne = summen af søjlesandsynlighederne = 1) er frihedsgradstallet

$$f = r \cdot q - 1 - (r - 1) - (q - 1) = r \cdot q - r - q + 1 = (r - 1)(q - 1)$$

Forudsætning: χ^2 er approksimativt χ^2 - fordelt med et frihedsgradstal på $f = (r - 1) \cdot (q - 1)$, hvis ingen af klasserne har en forventet værdi under 1, og mindst 80% af klasserne har en forventet værdi over 5.

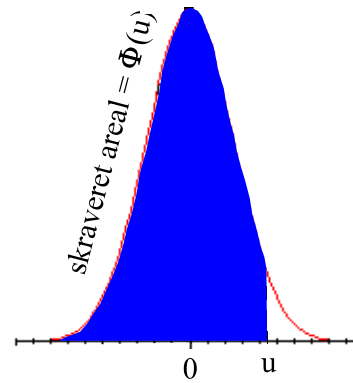
Nulhypotesen forkastes, hvis $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(f)$ hvor $f = (r - 1) \cdot (q - 1)$

STATISTISKE TABELLER

Tabel 1 Fordelingsfunktionen Φ for U -fordelingen $n(0,1)$.

$$\Phi(u) = P(U \leq u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Eksempler: $\Phi(-1.97)=0.0244$ og $\Phi(1.97)=0.9756$



$\Phi(u)$	
u	0.00 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.08 0.09
-3.4	0.0003 0.0003 0.0003 0.0003 0.0003 0.0003 0.0003 0.0003 0.0003 0.0003 0.0002
-3.3	0.0005 0.0005 0.0005 0.0004 0.0004 0.0004 0.0004 0.0004 0.0004 0.0004 0.0003
-3.2	0.0007 0.0007 0.0006 0.0006 0.0006 0.0006 0.0006 0.0006 0.0005 0.0005 0.0005
-3.1	0.0010 0.0009 0.0009 0.0009 0.0008 0.0008 0.0008 0.0008 0.0008 0.0007 0.0007
-3.0	0.0014 0.0013 0.0013 0.0012 0.0012 0.0011 0.0011 0.0011 0.0011 0.0010 0.0010
-2.9	0.0019 0.0018 0.0018 0.0017 0.0016 0.0016 0.0015 0.0015 0.0015 0.0014 0.0014
-2.8	0.0026 0.0025 0.0024 0.0023 0.0023 0.0022 0.0021 0.0021 0.0021 0.0020 0.0019
-2.7	0.0035 0.0034 0.0033 0.0032 0.0031 0.0030 0.0029 0.0028 0.0028 0.0027 0.0026
-2.6	0.0047 0.0045 0.0044 0.0043 0.0041 0.0040 0.0039 0.0038 0.0038 0.0037 0.0036
-2.5	0.0062 0.0060 0.0059 0.0057 0.0055 0.0054 0.0052 0.0051 0.0051 0.0049 0.0048
-2.4	0.0082 0.0080 0.0078 0.0075 0.0073 0.0071 0.0069 0.0068 0.0068 0.0066 0.0064
-2.3	0.0108 0.0104 0.0102 0.0099 0.0096 0.0094 0.0091 0.0089 0.0089 0.0087 0.0084
-2.2	0.0139 0.0136 0.0132 0.0129 0.0126 0.0122 0.0119 0.0116 0.0116 0.0113 0.0110
-2.1	0.0179 0.0174 0.0170 0.0166 0.0162 0.0158 0.0154 0.0150 0.0150 0.0146 0.0143
-2.0	0.0228 0.0222 0.0217 0.0212 0.0207 0.0202 0.0197 0.0192 0.0192 0.0188 0.0183
-1.9	0.0287 0.0281 0.0274 0.0268 0.0262 0.0256 0.0250 0.0244 0.0244 0.0239 0.0233
-1.8	0.0359 0.0352 0.0344 0.0336 0.0329 0.0322 0.0314 0.0307 0.0307 0.0301 0.0294
-1.7	0.0446 0.0436 0.0427 0.0418 0.0409 0.0401 0.0392 0.0384 0.0384 0.0375 0.0367
-1.6	0.0548 0.0537 0.0526 0.0516 0.0505 0.0495 0.0485 0.0475 0.0475 0.0465 0.0455
-1.5	0.0668 0.0655 0.0643 0.0630 0.0618 0.0606 0.0594 0.0582 0.0582 0.0571 0.0559
-1.4	0.0808 0.0793 0.0778 0.0764 0.0749 0.0735 0.0722 0.0708 0.0708 0.0694 0.0681
-1.3	0.0968 0.0951 0.0934 0.0918 0.0901 0.0885 0.0869 0.0853 0.0853 0.0838 0.0823
-1.2	0.1151 0.1131 0.1112 0.1093 0.1075 0.1056 0.1038 0.1020 0.1020 0.1003 0.0985
-1.1	0.1357 0.1335 0.1314 0.1292 0.1271 0.1251 0.1230 0.1210 0.1210 0.1190 0.1170
-1.0	0.1587 0.1562 0.1539 0.1515 0.1492 0.1469 0.1446 0.1423 0.1423 0.1401 0.1379
-0.9	0.1841 0.1814 0.1788 0.1762 0.1736 0.1711 0.1685 0.1660 0.1660 0.1635 0.1611
-0.8	0.2119 0.2090 0.2061 0.2033 0.2005 0.1977 0.1949 0.1922 0.1922 0.1894 0.1867
-0.7	0.2420 0.2389 0.2358 0.2327 0.2297 0.2266 0.2236 0.2206 0.2206 0.2177 0.2148
-0.6	0.2743 0.2709 0.2676 0.2643 0.2611 0.2578 0.2546 0.2514 0.2514 0.2483 0.2451
-0.5	0.3085 0.3050 0.3015 0.2981 0.2946 0.2912 0.2877 0.2843 0.2843 0.2810 0.2776
-0.4	0.3446 0.3409 0.3372 0.3336 0.3300 0.3264 0.3228 0.3192 0.3192 0.3156 0.3121
-0.3	0.3821 0.3783 0.3745 0.3707 0.3669 0.3632 0.3594 0.3557 0.3557 0.3520 0.3483
-0.2	0.4207 0.4168 0.4129 0.4090 0.4052 0.4013 0.3974 0.3936 0.3936 0.3897 0.3859
-0.1	0.4602 0.4562 0.4522 0.4483 0.4443 0.4404 0.4364 0.4325 0.4325 0.4286 0.4247
-0.0	0.5000 0.4960 0.4920 0.4880 0.4840 0.4801 0.4761 0.4721 0.4721 0.4681 0.4641

Tabel 1 (fortsat) **Fordelingsfunktionen Φ for U -fordelingen $n(0,1)$.**

$$\Phi(u) = P(U \leq u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

		$\Phi(u)$									
u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359	
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753	
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141	
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517	
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879	
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224	
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549	
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852	
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133	
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389	
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621	
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830	
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015	
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177	
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319	
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441	
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545	
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633	
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706	
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767	
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817	
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857	
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890	
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916	
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936	
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952	
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964	
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974	
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981	
2.9	0.9981	0.9982	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986	
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990	
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993	
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995	
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997	
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	

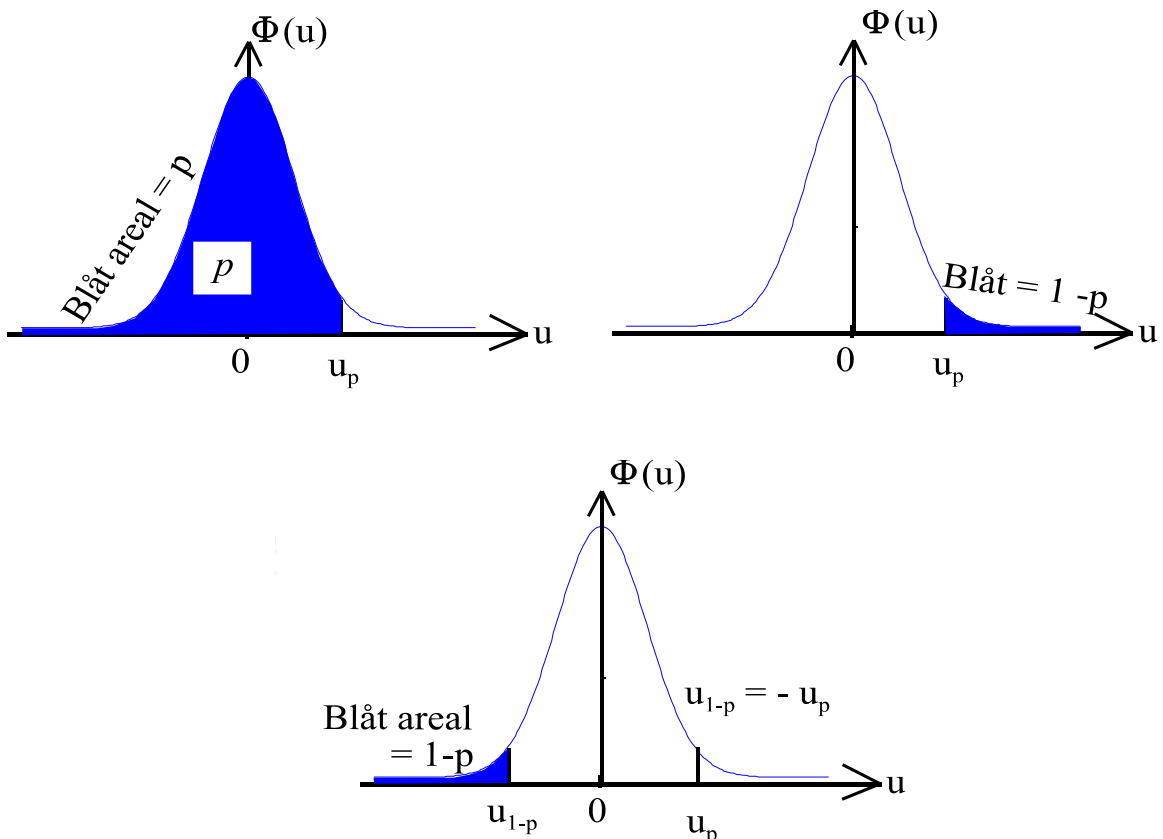
Tabel 2 Fraktiler u_p i U-fordelingen $n(0,1)$. $P(U \leq u_p) = p$.

Bemærk: $u_p = -u_{1-p}$

p	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10
u_p	-3.291	-3.090	-2.576	-2.326	-1.960	-1.645	-1.282

p	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
u_p	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

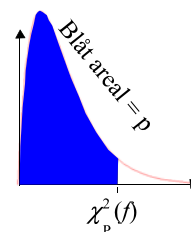
Eksempler: $u_{0.975} = 1.960$



Tabel 3 Fraktiler i χ^2_p -fordelingen $\chi^2(f)$. $P(\chi^2 \leq \chi^2_p) = p$

$\chi^2 = U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_f^2$, hvor U_1, U_2, \dots, U_f .

Approximativ formel: $\chi^2_p(f) = \frac{1}{2}(\sqrt{2f-1} + u_p)^2$ for $f > 30$



f	P	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.20	0.50
1		0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.064	0.455
2		0.001	0.002	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.446	1.39
3		0.015	0.024	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.01	2.37
4		0.064	0.091	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.65	3.36
5		0.158	0.210	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.34	4.35
6		0.299	0.381	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.07	5.35
7		0.485	0.598	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	3.82	6.35
8		0.710	0.857	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	4.59	7.34
9		0.972	1.15	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.38	8.34
10		1.26	1.48	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.18	9.34
11		1.59	1.83	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	6.99	10.3
12		1.93	2.21	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	7.81	11.3
13		2.31	2.62	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	8.63	12.3
14		2.70	3.04	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	9.47	13.3
15		3.11	3.48	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	10.3	14.3
16		3.54	3.94	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.2	15.3
17		3.98	4.42	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.0	16.3
18		4.44	4.90	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	12.9	17.3
19		4.91	5.41	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	13.7	18.3
20		5.40	5.92	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	14.6	19.3
22		6.40	6.98	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	16.3	21.3
24		7.45	8.08	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	18.1	23.3
26		8.54	9.22	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	19.8	25.3
28		9.66	10.4	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	21.6	27.3
30		10.8	11.6	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	23.4	29.3
32		12.0	12.8	15.1	16.4	18.3	20.1	22.3	25.1	31.3
34		13.2	14.1	16.5	17.8	19.8	21.7	24.0	26.9	33.3
36		14.4	15.3	17.9	19.2	21.3	23.3	25.6	28.7	35.3
38		15.6	16.6	19.3	20.7	22.9	24.9	27.3	30.5	37.3
40		16.9	17.9	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	32.3	39.3
45		20.1	21.3	24.3	25.9	28.4	30.6	33.4	36.9	44.3
50		23.5	24.7	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	41.4	49.3
60		30.3	31.7	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	50.6	59.3
70		37.5	39.0	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	59.9	69.3
80		44.8	46.5	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	69.2	79.3
90		52.3	54.2	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	78.6	89.3
100		59.9	61.9	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	87.9	99.3
110		67.6	69.8	75.5	78.5	82.9	86.8	91.4	97.4	109
120		75.5	77.8	83.9	86.9	91.6	95.7	101	107	119
130		83.4	85.8	92.2	95.4	100	105	110	116	129
140		91.4	93.9	101	104	109	114	119	126	139
150		99.5	102	109	113	118	123	128	135	149
160		108	110	118	121	127	132	137	145	159
180		124	127	135	139	145	150	156	164	179
200		141	144	152	156	163	168	175	183	199
300		226	230	241	246	254	261	269	279	299
400		313	318	331	337	346	355	364	376	399
500		403	408	422	429	440	449	460	473	499
1000		859	868	889	899	914	928	943	962	999

Tabel 3 (fortsat). Fraktiler i χ^2 -fordelingen $\chi^2(f)$. $P(\chi^2 \leq \chi_p^2) = p$

Eksempler: For $\chi^2(10)$ er $P(X \leq 20,5) = 0.975$ og $\chi_{0.05}^2(30) = 18.5$

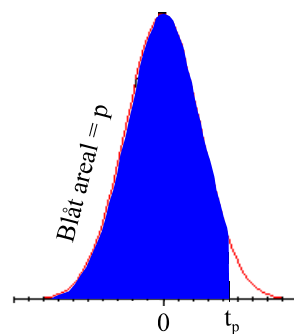
f	p	0.80	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1		1.64	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8	12.1
2		3.22	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8	15.2
3		4.64	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3	17.7
4		5.99	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5	20.0
5		7.29	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5	22.1
6		8.56	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5	24.1
7		9.80	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3	26.0
8		11.0	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1	27.9
9		12.2	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9	29.7
10		13.4	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6	31.4
11		14.6	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3	33.1
12		15.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9	34.8
13		17.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5	36.5
14		18.2	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1	38.1
15		19.3	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7	39.7
16		20.5	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3	41.3
17		21.6	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8	42.9
18		22.8	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3	44.4
19		23.9	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8	46.0
20		25.0	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3	47.5
22		27.3	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3	50.5
24		29.6	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2	53.5
26		31.8	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1	56.4
28		34.0	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9	59.3
30		36.3	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7	62.2
32		38.5	42.6	46.2	49.5	53.5	56.3	62.5	65.0
34		40.7	44.9	48.6	52.0	56.1	59.0	65.2	67.8
36		42.9	47.2	51.0	54.4	58.6	61.6	68.0	70.6
38		45.1	49.5	53.4	56.9	61.2	64.2	70.7	73.4
40		47.3	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	73.4	76.1
45		52.7	57.5	61.7	65.4	70.0	73.2	80.1	82.9
50		58.2	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7	89.6
60		69.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	99.6	103
70		79.7	85.5	90.5	95.0	100	104	112	116
80		90.4	96.6	102	107	112	116	125	128
90		101	108	113	118	124	128	137	141
100		112	119	124	130	136	140	149	153
110		122	129	135	141	147	152	162	165
120		133	140	147	152	159	164	174	178
130		143	151	158	163	170	175	186	190
140		154	162	169	175	182	187	197	202
150		164	172	180	186	193	198	209	214
160		175	183	191	197	205	210	221	225
180		196	205	212	219	227	233	244	249
200		217	226	234	241	249	255	268	272
300		320	332	341	350	360	367	381	387
400		424	437	448	457	469	477	493	500
500		527	541	553	564	577	585	604	611
1000		1038	1058	1075	1090	1107	1119	1144	1154

Tabel 4 Fraktiler t_p i t -fordelingen $t(f)$.

$$P(T \leq t_p) = p, \text{ hvor } T = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{s}$$

Eksempler: For $t(27)$ er $P(X \leq 3.42) = 0.999$.

$$t_{0.95}(1) = 6.31. \quad t_{0.05}(10) = -t_{0.95}(10) = -1.81.$$



f	p	0.60	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1		0.33	1.00	3.08	6.31	12.7	31.8	63.7	318	637
2		0.29	0.82	1.89	2.92	4.30	6.97	9.93	22.3	31.6
3		0.28	0.74	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	10.2	12.9
4		0.27	0.74	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5		0.27	0.72	1.48	2.02	2.57	3.37	4.03	5.89	6.86
6		0.27	0.72	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7		0.26	0.71	1.42	1.90	2.37	3.00	3.50	4.79	5.41
8		0.26	0.71	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9		0.26	0.70	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10		0.26	0.70	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11		0.26	0.70	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	4.03	4.44
12		0.26	0.70	1.36	1.78	2.18	2.68	3.06	3.93	4.32
13		0.26	0.69	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14		0.26	0.69	1.35	1.76	2.15	2.62	2.98	3.79	4.14
15		0.26	0.69	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16		0.26	0.69	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.02
17		0.26	0.69	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.97
18		0.26	0.69	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19		0.26	0.69	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20		0.26	0.69	1.33	1.73	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21		0.26	0.69	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22		0.26	0.69	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.51	3.79
23		0.26	0.69	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.49	3.77
24		0.26	0.69	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.75
25		0.26	0.68	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.73
26		0.26	0.68	1.32	1.71	2.06	2.48	2.78	3.44	3.71
27		0.26	0.68	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	3.42	3.69
28		0.26	0.68	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	3.41	3.67
29		0.26	0.68	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
30		0.26	0.68	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40		0.26	0.68	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
50		0.26	0.68	1.30	1.68	2.01	2.40	2.68	3.26	3.50
60		0.25	0.68	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
80		0.25	0.68	1.29	1.66	1.99	2.37	2.64	3.20	3.42
100		0.25	0.68	1.29	1.66	1.98	2.37	2.63	3.17	3.39
120		0.25	0.68	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62	3.16	3.37
200		0.25	0.68	1.29	1.65	1.97	2.35	2.60	3.13	3.34
500		0.25	0.68	1.28	1.65	1.97	2.33	2.59	3.11	3.31
∞		0.25	0.67	1.28	1.65	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29

Tabel 5 95%-fraktil $F_{0.95}$ i F-fordelingen $F(f_T, f_N)$. $P(F \leq F_{0.95}) = 0.95$

$f_T \backslash f_N$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	25	30	40	60	120	∞
1	161.5	199.5	215.7	224.6	230.5	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.4	246.5	247.3	248.0	249.3	250.1	251.1	252.2	253.3	253.7
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.42	19.43	19.44	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.71	8.69	8.67	8.66	8.63	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.87	5.84	5.82	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.64	4.60	4.58	4.56	4.52	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.96	3.92	3.90	3.87	3.83	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.53	3.49	3.47	3.44	3.40	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.24	3.20	3.17	3.15	3.11	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.03	2.99	2.96	2.94	2.89	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.86	2.83	2.80	2.77	2.73	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.74	2.70	2.67	2.65	2.60	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.64	2.60	2.57	2.54	2.50	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.55	2.52	2.48	2.46	2.41	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.48	2.44	2.41	2.39	2.34	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.42	2.38	2.35	2.33	2.28	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.37	2.33	2.30	2.28	2.23	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.33	2.29	2.26	2.23	2.18	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.29	2.25	2.22	2.19	2.14	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.26	2.21	2.18	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.23	2.18	2.15	2.12	2.07	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.20	2.16	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.17	2.13	2.10	2.07	2.02	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.15	2.11	2.08	2.05	2.00	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.13	2.09	2.05	2.03	1.97	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.11	2.07	2.04	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.04	1.99	1.96	1.93	1.88	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.95	1.90	1.87	1.84	1.78	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.95	1.89	1.85	1.81	1.78	1.73	1.69	1.63	1.58	1.51	1.44
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.86	1.82	1.78	1.75	1.69	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.78	1.73	1.69	1.66	1.60	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.69	1.64	1.60	1.57	1.51	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Tabel 6 97.5%-fraktil $F_{0.975}$ i F -fordelingen $F(f_T, f_N)$. $P(F \leq F_{0.975}) = 0.975$

f_N	f_T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	25	30	40	60	120	∞
1		647.8	799.5	864,2	899.6	921.8	937.1	948.2	956,7	963.3	968.6	976.7	982.4	986.8	990.3	999.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018
2		38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.44	39.44	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3		17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.28	14.23	14.20	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4		12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.69	8.64	8.60	8.56	8.50	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5		10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.46	6.41	6.37	6.33	6.27	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6		8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.30	5.25	5.21	5.17	5.11	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7		8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.60	4.54	4.50	4.47	4.40	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8		7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.13	4.08	4.03	4.00	3.94	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9		7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.80	3.74	3.70	3.67	3.60	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10		6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.55	3.50	3.45	3.42	3.35	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11		6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.36	3.30	3.26	3.23	3.16	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12		6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.21	3.15	3.11	3.07	3.01	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13		6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.08	3.03	2.98	2.95	2.88	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14		6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.98	2.92	2.88	2.84	2.78	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15		6.20	4.76	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.89	2.84	2.79	2.76	2.69	2.64	2.58	2.52	2.46	2.40
16		6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.82	2.76	2.72	2.68	2.61	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17		6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.75	2.70	2.65	2.62	2.55	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18		5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.70	2.64	2.60	2.56	2.49	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19		5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.65	2.59	2.55	2.51	2.44	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20		5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.60	2.55	2.50	2.46	2.40	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21		5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.56	2.51	2.46	2.42	2.36	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22		5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.53	2.47	2.43	2.39	2.32	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23		5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.50	2.44	2.39	2.36	2.29	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24		5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.47	2.41	2.36	2.33	2.26	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25		5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.44	2.38	2.34	2.30	2.23	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
30		5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.34	2.28	2.23	2.20	2.12	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40		5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.21	2.15	2.11	2.07	1.99	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
50		5.34	3.98	3.39	3.06	2.83	2.67	2.55	2.46	2.38	2.32	2.22	2.14	2.08	2.03	1.99	1.92	1.87	1.80	1.72	1.64	1.55
60		5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.09	2.03	1.98	1.94	1.87	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120		5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	2.05	1.91	1.86	1.82	1.74	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞		5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.94	1.80	1.75	1.71	1.63	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

TABEL 7. Dimensioneringstabel.

Dimensionering med henblik på udførelse af *t*-test vedrørende 2 statistiske variable X_1 og X_2 som er normalfordelte $n(\mu_1, \sigma_1)$ og $n(\mu_2, \sigma_2)$, hvor μ_1 , μ_2 , σ_1 og σ_2 er ukendte.

Størrelse n af stikprøve på X_1 og X_2 :	Værdier af $\frac{\Delta}{\sigma}$ for $\alpha = 5\%$.			
	Ensidet test $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$ eller $H_0: \mu_1 \geq \mu_2$		Tosidet test $H_0: \mu_1 = \mu_2$	
n	$\beta = 5\%$	$\beta = 10\%$	$\beta = 5\%$	$\beta = 10\%$
3	3.32	2.94	4.02	3.59
4	2.65	2.36	3.09	2.77
5	2.29	2.03	2.62	2.35
6	2.05	1.82	2.32	2.08
7	1.87	1.66	2.10	1.89
8	1.73	1.54	1.94	1.75
9	1.62	1.44	1.82	1.64
10	1.53	1.36	1.71	1.53
11	1.45	1.29	1.62	1.46
12	1.39	1.23	1.54	1.39
13	1.33	1.18	1.48	1.33
14	1.28	1.14	1.42	1.27
15	1.23	1.10	1.37	1.23
16	1.19	1.06	1.32	1.19
17	1.15	1.03	1.28	1.15
18	1.12	1.00	1.24	1.11
19	1.09	0.97	1.20	1.08
20	1.06	0.94	1.17	1.05
22	1.01	0.90	1.11	1.00
24	0.96	0.86	1.06	0.96
26	0.93	0.82	1.02	0.92
28	0.89	0.79	0.98	0.88
30	0.86	0.76	0.95	0.85
40	0.74	0.66	0.82	0.73
60	0.60	0.54	0.66	0.60

FACITLISTE

KAPITEL 10

- 10.1** (1) 22 (2) 24 (3) - (4) -
10.2 30
10.3 (1) $u = 3.09$, P - værdi = 0.001 (2) [0.70 ; 3.12]
10.4 (1) $F = 7.42$ (2) $t = 0.837$, P - værdi = 0.2007
 (3a) [- 2.09 ; 4.84] (3b) [0.91 ; 6.40]
10.5 $F = 1.11$, P - værdi = 0.4557, $t = 1.393$, P - værdi = 0.0969
10.6 $F = 1.18$, P - værdi = 0.4117 $t = - 2.64$, P - værdi = 0.0102
10.7 $F = 3.68$, P - værdi = 0.1175, $t = 2.34$, P - værdi = 0.0237, [0.031 ; 1.87]
10.8 (1) 18 (2) $F = 2.171$ P - værdi = 0.113, $t = 4.74$ P - værdi = 0.00006, [11.9 ; 15.0]
10.9 $F = 6.02$, P - værdi = 0.0089, $t = 0.55$, P - værdi = 0.299
10.10 $F = 1.563$, P - værdi = 0,2125 $t = -1.497$, P - værdi = 0.0728
10.11. (1) $u = 1.98$, P - værdi = 0,0238
 (2) $F = 1.56$, P - værdi = 0,0627, $t = 2.75$, P - værdi = 0.00355
10.12 $u = - 0.729$, P - værdi = 0.233
10.13 (1) $u = 2.21$, P - værdi = 0.0135
 (2) $F = 7.29$, P - værdi = 0,0022, $t = 4.25$, P - værdi = 0.00012
10.14 (1) $u = 0.654$, P - værdi = 0.2566 (2) $u = 2.10$, P - værdi = 0.0179
10.15 $u = 3.45$, P - værdi = 0.00028

KAPITEL 11

- 11.1** (1) nej (2) [-28.51 ; -14.30] (3) [249.2 ; 258.8]
11.2 (1) $y = 40.78 + 0.766x$ (2) ja (3) $F = 19.14$, P - værdi = 0.024
 (4) [0.362 ; 1.170] (5) [57.91 ; 100.21] (6) [72.50 ; 85.62]
11.3 (1) $r^2 = 0.9984$ (2) $t = - 6.73$, P - værdi = 0.00123 (3) [38.92 ; 42.48]
 (4) [52.73 ; 55.25]
11.4 (1) Model 2, (2) 0.9293, 0.9883 (3) [8.703 ; 10.584]
11.5 (1) - (2) $r^2 = 0.980$ (3) $\tilde{\alpha}_0 = 171.8$ $\tilde{\beta}_1 = -0.1585$ (4) [91.7 ; 93.7]
11.6 (1) $t = 35.435 - 8.380 \cdot \log(\text{dosis})$ (2) [-17.39 ; 0.6277] (3) [0.257 ; 6.929]
11.7 (1) - (2) P - værdi = 0.2639 (3) $P(\text{lack of fit}) = 0.6099$, $y = 5.583 + 33.667x$
 (4) $F = 84.41$, P - værdi = 0.000 (5) [25.75 ; 41.58] (6) [56.41 ; 62.49]
11.8 (1) $Y = -0.1438 + 108.959x$ (2) $F = 2.57$, P - værdi = 0.144
 (3) $t = - 0.019$, P - værdi = 0.9845
11.9 (1) $P(\text{lack of fit}) = 0.0026$, model 2. (2) $F = 1.20$, $P(\text{lack of fit}) = 0.3535$
 (3) 23.55, [21.35 ; 25.76]
11.10 (1) - (2) - (3) $Y = 2.9764 - \frac{6.9158}{x}$, $Y = 1.988$, [1.944 ; 2.033]
 (3) 23.55, [21.35 ; 25.76]
 (4) - (5) $Y = -1.144 + 0.7197x - 0.0379x^2$, $Y = 2.036$, [1.959 ; 2.114].

KAPITEL 12

- 12.1 ja, $F = 13.4$, P - værdi = 0.0004, B2 nok bedst, men et lille overlap med B3
 12.2 $F = 3.51$, P - værdi = 0.0218
 12.3 (1) $F = 4.94$, P - værdi = 0.0096 (2) S2, S4
 12.4 (1) P - værdi = 0.838 (2) nej, P - værdi = 0.0108, (3a) A1 så K1, A2: frit valg, A3: frit valg.
 (3b) K1: frit valg, K2 så ikke A1, (3c) ikke A1 K2
 12.5 (1) ja, P - værdi = 0.4575 (2) ja, P - værdi = 0.3178 (3) ja, ingen outliers,
 (4) glas 2 og enten fosfor 1 eller 3.
 12.6 (1) - (2) limtyper (3) II: [23.76 ; 28.10], III: [22.69 ; 27.04]
 12.7 (1) Kun syrer har virkning, Svovlsyre størst. (2) 26.45, [25.17 ; 27.73]
 12.8 (1) Nej, P - værdi = 0.0463 (2) ja, P - værdi = 0.0777 (3) -
 12.9 (1) - (2) -
 12.10 ja, R forskellig fra de øvrige, ja
 12.11 (1) T evt. Q må foretrækkes. (2) -

KAPITEL 13

- 13.1 (1) Poisson (2) 1.64 (3) $\chi^2 = 2.8$, P - værdi = 0.7308 (4) 1640000
 13.2 $\chi^2 = 3.24$, P - værdi = 0.6638.
 13.3 $\chi^2 = 5$, P - værdi = 0.4158
 13.4 $\chi^2 = 12.64$, P - værdi = 0.027
 13.5 $\chi^2 = 13.78$, P - værdi = 0.0877
 13.6 $\chi^2 = 6.31$, P - værdi = 0.0426
 13.7 $\chi^2 = 5.44$, P - værdi = 0.0658
 13.8 (1) $\chi^2 = 16.21$, P - værdi = 0.00030 (2) $\chi^2 = 4.87$, P - værdi = 0.560

STIKORDSREGISTER

A

additiv model 58, 63
appendix 82
antalstabel 73, 111, 112

B

bagatelgrænse 3
Bartlett's test 53, 106
behandlinger 1
binomialfordelingstest
to variable 11, 97
blokforsøg, randomiseret 65

C

chi i anden fordeling
tabel 118
test 74, 77, 111, 112

D

delforsøg 3
determinationskoefficient 22
dimensionering 3
tabel 123

E

Excel
løsning
antalstabel 74, 76, 77
blokforsøg 67
lineær regression 31, 39, 43
to normalfordelte variable 8, 10
variationsanalyse, ensidet 55
variationsanalyse, tosidet 61, 63, 67
ordrer 82
ekstrapolation 25
én faktor ad gangen 56
enkelt regressionsanalyse 18
med gentagelser
på lommeregner 37, 101
med Excel 39, 88
uden gentagelser
på lommeregner 29, 99
med Excel 31

ensidet variationsanalyse 50
på lommeregner 52, 104
med Excel 55, 88
en-vejs tabel 74, 111

F

facitliste 124
fejl af type I 3
fejl af type II 3
F - fordeling
tabel 121
test 7, 28, 36, 51, 53, 105
fordeling, tabel over
normalfordeling 115
u - fordeling 115
forklaringsgrad 22, 25
forsøgsenhed 1
forudsætninger
regressionsanalyse 26
variationsanalyse 59
fraktiler, beregning ved Excel 84
fraktiltabel for
normalfordeling 117
chi i anden-fordeling 118
t - fordeling 120
F - fordeling 121
frihedsgrad, poollet 5, 53
fuldstændig faktorstruktur 57
fuldstændig randomiseret blokforsøg 65

G

gentagelser 3

H

hypotesetest 1

I,J

K

klasser 73
konfidensinterval
differens, 2 normalfordelte variable 4, 90
differens, 2 binomialfordelte variable 11, 91
differens, 2 Poissonfordelte variable 13, 91
regressionskoefficient 30, 34, 41, 100, 102

for middelværdi af Y
 med lommeregner 30, 38, 100, 102
 med Excel 39, 41
 i ensidet variansanalyse 54, 56, 105
 i tosidet variansanalyse 62, 109
 LSD 51, 105
 korrelationskoefficient 25
 kvalitativ faktor 50
 kvantitativ faktor 50

L
 Levines test 56, 106
 lineær model 19
 LSD (Least Signifikant Difference) 51, 105

M
 median 106
 mindste kvadraters metode 20, 21
 multinominalt eksperiment 73, 111

N
 niveau for faktor 56
 normalfordeling
 plot 33
 tabel 115
 test, 2 variable 4, 92
 normalligningssystem 21

O
 opgaver
 kapitel 10 14
 kapitel 11 44
 kapitel 12 68
 kapitel 13 79
 oversigter (se indholdsfortegnelsen) 90
 outliers 33

P
 planlægning af forsøg 1, 56
 Poissonfordeling
 test
 2 variable 13, 91
 poollet estimat for varians 53
 prædestinationsinterval 28, 35

R
 randomisering 2
 randomiseret forsøg 2, 65
 randomiseret blokforsøg 65
 residual 20
 plot 32
 standardiseret 33
 regressionsanalyse
 enkelt 18
 med gentagelser
 på lommeregner 37, 101
 med Excel 39, 88
 uden gentagelser
 på lommeregner 29, 99
 med Excel 31
 forudsætninger 26
 regressionskoefficienter 19
 regressionslinie 19

S
 SAK 22
 Satterwaites test 5, 10, 106
 standardiserede residualer 33
 styrke af test 5
 støj 1

T
 tabeller (se indholdsfortegnelse) 114
 tosidet variansanalyse 56, 61, 63, 89, 107
 to - vejs tabel 76
 transformation 25, 41, 103

U
 uafhængige statistiske variable 26, 28
 uafhængighed, to - vejs tabel 76

V
 variansanalyse
 ensidet 50
 på lommeregner 52, 104
 ved Excel 55, 88
 tosidet 56
 på lommeregner 61, 107
 ved Excel 61, 63, 89
 vekselvirkning 58
 varianshomogenitet 36, 56, 106